

Moritz ZEHNDER, Bayreuth

## **Diagnostizieren mathematisch begabter Neunt- und Zehntklässler**

Alle Schülerinnen und Schüler sollen entsprechend ihrer Potenziale gefördert werden – auch mathematisch besonders begabte. Im Hinblick auf deren individuelle Förderung ist eine vorherige Diagnostik sinnvoll.

### **Theoretischer Hintergrund**

Im Folgenden wird in Anlehnung an iPEGE (2009, S. 17-20) unter *mathematischer Begabung* das individuelle Potenzial zur Entwicklung mathematischer Fähigkeiten verstanden. Untersuchungen legen nahe, dass sich mathematisch besonders begabte Schülerinnen und Schüler im frühen Sekundarstufenalter oft durch außergewöhnliche Fähigkeiten zum *Erkennen von Mustern und Strukturen* sowie eine besondere *mathematische Kreativität* von mathematisch höchstens durchschnittlich begabten Gleichaltrigen unterscheiden (Kattou et al., 2013; Sjuts, 2017). Diese Fähigkeiten sind im entsprechenden Altersbereich also Merkmale einer mathematischen Begabung, sie sind folglich für die Diagnostik mathematischer Begabung von Bedeutung. In der Regel sind solche Merkmale aber nicht bei allen mathematisch besonders begabten Schülerinnen und Schülern gleich gut ausgeprägt. Vielmehr ist davon auszugehen, dass es verschiedene Begabungstypen mit jeweils charakteristischen Merkmalsausprägungen gibt (z. B. Käpnick, 1998).

Eine Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler sollte möglichst frühzeitig beginnen. Dementsprechend liegen bereits mehrere fachspezifische und empirisch überprüfte Diagnoseinstrumente für die Primar- sowie die frühe Sekundarstufe vor. Entsprechende Instrumente für den späteren Sekundarstufenbereich fehlen jedoch weitestgehend. Da davon auszugehen ist, dass mathematische Begabung einer dynamischen Entwicklung unterliegt, sich also verändert, und da man Fehldiagnosen nie ganz ausschließen kann, ist eine Diagnostik aber auch in der späteren Sekundarstufe sinnvoll.

Es wurde deshalb ein diagnostisches Instrument zur Identifikation mathematisch begabter Neunt- und Zehntklässler entworfen, welches u. a. das Erkennen von Mustern und Strukturen sowie mathematische Kreativität erfasst. Die auf dieses Instrument bezogenen Forschungsfragen lauten:


- Inwiefern unterscheiden sich die Leistungen mathematisch besonders und mathematisch höchstens durchschnittlich begabter Schülerinnen und Schüler der Jgst. 9 und 10 bezüglich der oben genannten Fähigkeiten?

- Inwiefern unterscheiden sich die Leistungen mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler der Jgst. 9 und 10 bezüglich der oben genannten Fähigkeiten?

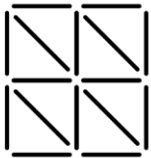
## Methoden

Zur Erfassung der Fähigkeit zum Erkennen von Mustern und Strukturen sowie mathematischer Kreativität wurden je zwei Aufgaben entworfen, von denen in diesem Beitrag je eine vorgestellt wird. In *Aufgabe 1* zum Erkennen von Mustern und Strukturen (Abb. 1) sollen Schülerinnen und Schüler eine figurierte Zahlenfolge fortsetzen und schließlich eine allgemeine, die Struktur der Zahlenfolge beschreibende Formel angeben.

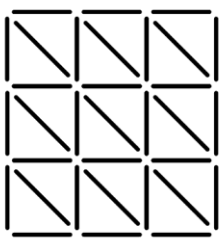
Das folgende Muster von Figuren wird aus Streichhölzern gelegt.



1. Figur



2. Figur



3. Figur

a) Wie viele Streichhölzer braucht man für die vierte Figur? (2 Punkte)  
 b) Wie viele Streichhölzer braucht man für die zehnte Figur? (3 Punkte)  
 c) Gib eine allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl der Streichhölzer für eine beliebige Figur dieser Figurenfolge an. (5 Punkte)

Begründe deine Antworten!

Abb. 1: Aufgabe 1 zum Erkennen von Mustern und Strukturen

*Aufgabe 2* fordert dazu auf, möglichst viele Zerlegungen eines Quadrats mit einer Seitenlänge von 5 LE in fünf Teile mit jeweils gleichem Flächeninhalt zu finden. Es handelt sich hierbei um einen sog. *multiple solution task*, der in Verbindung mit einem spezifischen Auswertungsmodus zur Erfassung mathematischer Kreativität genutzt wird (Leikin & Lev, 2013).

Der Einsatz der Aufgaben, für deren Bearbeitung je 10 Minuten Zeit zur Verfügung standen, erfolgte in zwei Gruppen:

- *VS*: Schülerinnen und Schüler der Jgst. 9 und 10 aus vier bayerischen Gymnasialklassen je Jahrgangsstufe (N = 159; durchschnittliches Alter: 15,8 Jahre).
- *WT*: Schülerinnen und Schüler der Jgst. 9 und 10 aus vier Bundesländern, die erfolgreich an Mathematikwettbewerben (Mathematikolympiade bzw. Landeswettbewerb Mathematik) auf Landesebene teilgenommen haben (N = 60; durchschnittliches Alter: 15,4 Jahre).

Mithilfe eines Auswertungsmanuals beurteilte der Autor die Aufgabenbearbeitungen aller Schülerinnen und Schüler. Etwa 20 % der Bearbeitungen aus jeder Gruppe wurden zufällig ausgewählt und zusätzlich von einer zweiten Raterin bewertet und die Beurteilerübereinstimmung über das linear gewichtete Cohens Kappa  $\kappa_w$  eingeschätzt (Vanbelle, 2016). Hierfür sowie für die weitere Auswertung wurden die Punktrohwerte zu Aufgabe 2 in drei Kategorien (*wenig*, *durchschnittlich* bzw. *besonders kreativ*) eingeteilt. Anschließend wurde eine deskriptiv-statistische Analyse der Daten im Hinblick auf eine Beantwortung der zuvor genannten Forschungsfragen durchgeführt.

## Ergebnisse

Für die erste Aufgabe zeigt sich anhand der linear gewichteten Kappa-Werte eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Rater bei der Beurteilung der Teilaufgaben ( $\kappa_w^{(1a)} = 1$ ,  $\kappa_w^{(1b)} = 0,91$ ,  $\kappa_w^{(1c)} = 0,92$ ) sowie bei der Gesamtbewertung ( $\kappa_w^{(1)} = 0,92$ ). Auch der Wert von Cohens gewichtetem Kappa für die zweite Aufgabe ( $\kappa_w^{(2)} = 0,85$ ) weist auf eine gute bis sehr gute Übereinstimmung der beiden Beurteilungen hin.

*Erkennen von Mustern und Strukturen.* In Aufgabe 1 zeigen sich deutliche Unterschiede bezüglich der Verteilungen der Punktwerte innerhalb der beiden Gruppen. Dies wird unter anderem durch die Werte der Mediane deutlich ( $Median_{VS} = 1$ ,  $Median_{WT} = 10$ ; Maximalpunktzahl ist 10). In Übereinstimmung hiermit sind die Ergebnisse aus Teilaufgabe 1c, in der nur 20,7 % der VS-Gruppe die Struktur beschreiben oder einen Ansatz hierzu entwickeln konnten (mind. 1 Punkt in dieser Teilaufgabe), wohingegen 80,0 % der WT-Gruppe eine korrekte Struktur sowie eine dazu passende Begründung angegeben haben (mind. 4 Punkte in dieser Teilaufgabe).

*Mathematische Kreativität.* Schülerinnen und Schüler der WT-Gruppe sind insgesamt kreativer als die der VS-Gruppe (vgl. Tab. 1). Deutliche Unterschiede bezüglich der Anteile zeigen sich in den beiden Extremkategorien (*wenig* bzw. *besonders kreativ*). Des Weiteren finden Schülerinnen und Schüler der WT-Gruppe insgesamt mehr sowie mehr sich voneinander wesentlich unterscheidende Lösungen (z. B. eine Zerlegung in fünf Rechtecke oder eine Zerlegung u. a. in Trapeze) als Schülerinnen und Schüler der VS-Gruppe.

	wenig kreativ	durchschnittlich kreativ	besonders kreativ
VS	58,5 %	37,1 %	4,4 %
WT	43,3 %	35,0 %	21,7 %

Tab. 1: Anteile der Bearbeitungen zu Aufgabe 2 in den drei Kreativitätskategorien

## Diskussion und Ausblick

Die Boden- bzw. Deckeneffekte für die VS- bzw. WT-Gruppe und die damit einhergehenden deutlichen Gruppenunterschiede in Aufgabe 1 machen deutlich, dass es sich beim *Erkennen von Mustern und Strukturen* sehr wahrscheinlich um ein kennzeichnendes Merkmal mathematischer Begabung in den Jgst. 9 und 10 handelt. Insbesondere deuten die Ergebnisse auf eine sehr gute Eignung der eingesetzten Aufgabe zur Diagnostik mathematischer Begabung in diesen Jahrgangsstufen hin. Die Leistungen der WT-Gruppe in Aufgabe 1 sind sehr homogen, sodass man davon ausgehen kann, dass sich die Aufgabe nicht zur Unterscheidung von Begabungstypen eignet.

Bezüglich *mathematischer Kreativität* sind die Gruppenunterschiede wesentlich geringer als in Aufgabe 1. Insbesondere verdeutlicht Tab. 1, dass sich die zweite Aufgabe aufgrund der beträchtlichen Überlappung der Gruppen in den beiden unteren Kategorien nur bedingt zur Identifikation mathematisch begabter Neunt- und Zehntklässler eignet. Gleichzeitig legt die Tabelle aber die Vermutung nahe, dass das Niveau mathematischer Kreativität verschiedene Begabungstypen kennzeichnet. Im Hinblick auf das Erkennen dieser Typen sollte Aufgabe 2 daher im Instrument enthalten bleiben.

Die präsentierten Erkenntnisse zeigen das Potenzial der beiden Aufgaben für die Diagnostik mathematischer Begabung. Limitationen ergeben sich jedoch unter anderem aus der fehlenden Repräsentativität der untersuchten Gruppen sowie dem geringen Umfang des Aufgabenmaterials (je eine Aufgabe pro Fähigkeit). Interessant ist daher, inwiefern die Ergebnisse der Auswertung der verbleibenden Aufgaben mit den hier dargestellten übereinstimmen.

## Literatur

- (iPEGE) International Panel of Experts for Gifted Education. (2009). *Professionelle Begabtenförderung: Empfehlungen zur Qualifizierung von Fachkräften in der Begabtenförderung*. Salzburg: özbf. [http://www.ipege.net/wp-content/uploads/2018/06/iPEGE\\_Broschuere.pdf](http://www.ipege.net/wp-content/uploads/2018/06/iPEGE_Broschuere.pdf) (05.01.2020)
- Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder: Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt a. M., u. a.: Lang.
- Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM*, 45(2), 167-181. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1>
- Leikin, R. & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference? *ZDM*, 45(2), 183-197. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0460-8>
- Sjuts, B. (2017). *Mathematisch begabte Fünft- und Sechstklässler: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen*. Münster: WTM.
- Vanbelle, S. (2016). A new interpretation of the weighted kappa coefficients. *Psychometrika*, 81(2), 399-410. <https://doi.org/10.1007/s11336-014-9439-4>