

Anna SCHILL, Karlsruhe

Vernetzung von Darstellungen im Übergang zwischen konkretem und allgemeinem Fall

Die Darstellungsvernetzung zwischen Sach- und Termebene beim Umgang mit verallgemeinernden Fragestellungen stellt für Lernende eine große Herausforderung im Bereich der Algebra dar (Hefendehl-Hebeker, 2015). Bereits in der Grundschule sind entsprechende Phänomene in Bezug auf konkrete Sachsituationen und Terme zu beobachten (Franke & Ruwisch, 2010). Dieser Beitrag fokussiert auf Darstellungsvernetzungen im *Konkreten (verankert in arithmetischem Denken)* in ihrer Bedeutung für darauf aufbauende *Verallgemeinerungen (Hinführung zu algebraischem Denken)*. Unter Darstellungsvernetzung werden hier alle Handlungen verstanden, durch die Sach- und Termebene miteinander in Bezug gesetzt werden. Dies beinhaltet Zuordnungen zu, Interpretationen in, oder Erzeugung der jeweils anderen Darstellungsebene.

Sachsituationen strukturieren und (algebraisch) beschreiben

Um eine Sachsituation mithilfe eines Terms zu beschreiben, muss diese zunächst inhaltlich verstanden und in ihrer mathematischen Struktur erfasst werden. Für eine Vernetzung mit der Symbolebene werden Grundvorstellungen zu den benötigten Zahlen bzw. Größen sowie den Rechenoperationen aktiviert. Untersuchungen zeigen, dass Lernende häufig auf der Oberflächenebene agieren. Sie fokussieren insbesondere auf die gegebenen Zahlen und verbinden diese auf nicht sachadäquate Weise zu Termen (Franke & Ruwisch, 2010, S. 81ff). Um eine Klasse von strukturgleichen Sachsituationen verallgemeinernd in einem Term zusammenzufassen, wird zusätzlich eine Unterscheidung zwischen variablen und konstanten Elementen notwendig. Auch muss eine konzeptuelle Vorstellung der Variablen als allgemeine Zahl aktiviert werden. Auf Termebene ist nach Malle (1993, S.108ff) sowohl die *Objekt-Zahl-Konvention* zu beachten, nach der sich Buchstabenvariablen niemals auf ein Sachobjekt selbst, sondern auf ihm zugeordnete quantifizierbare Eigenschaften beziehen, als auch die *Konvention der Bedeutungskonstanz*, nach der innerhalb eines Kontextes derselbe Buchstabe nur unter gleichbleibender Bedeutung wiederverwendet werden darf, ggf. also mehrere unterscheidbare Variablen benötigt werden.

Zusammenfassend lassen sich als zentrale Denkhandlungen zur verständigen Erzeugung eines Variablenterms die Darstellungsvernetzung (zwischen Sachebene und Termebene) und das Verallgemeinern (vom Konkreten zum Allgemeinen) identifizieren. Beide Prozesse bedürfen der Fähigkeit, zugrundeliegende Strukturen zu erkennen und zu nutzen.

Im Folgenden soll der Frage nachgegangen werden, welchen Einfluss die individuelle Darstellungsvernetzung im konkreten Fall auf den voranschreitenden Verallgemeinerungsprozess haben kann. Dabei liegt ein besonderer Fokus auf der individuellen Art, Term und Situation zu strukturieren.

Untersuchungsdesign

In Designexperimenten mit sieben einzelnen und vier Paaren von Lernenden der sechsten und siebten Jahrgangsstufe wurden individuelle Lernprozesse begleitet, dokumentiert und sprachanalytisch ausgewertet (Hußmann & Schacht, 2015). Um insbesondere ein Verständnis für Lernverläufe im unteren Leistungsbereich gewinnen zu können, wurde das Unterrichtsdesign auf G-Niveau (vgl. baden-württembergische Einteilung der Sekundarstufe I in G = grundlegendes, M = mittleres, E = erweitertes Niveau) entwickelt. Von den Lernenden wurden acht aus dem Mathematikunterricht auf G-Niveau, fünf auf M-Niveau und zwei, zum Kontrastieren, auf E-Niveau gewählt.

Die Lernumgebung bezieht sich konsequent auf einen Jahrmarkt mit drei verschiedenen Attraktionen. Die Einzelpreise für eine Karussellfahrt (3€), eine Wilde-Maus-Fahrt (4€) und ein Los (1€) sind konstant, während die Anzahl der Nutzungen je nach Aufgabenstellung variiert. Jahrmarktattraktionen mit Preisschildern stehen zur Preisinformation und als Kommunikationshilfe durchgängig zur Verfügung. Es sollen Terme zur Kostenberechnung für eine Person aufgestellt bzw. in der Sachsituation interpretiert werden (Beispiele in Abb. 1). Ein passender Term lässt sich, wie in Abb. 2 auf der linken Seite dargestellt, auf unterschiedlichen Ebenen strukturieren. Jede dieser Strukturierungen trägt zum Gesamtverständnis von Situation und Term bei: Während eine Strukturierung in drei Sinneinheiten dem sukzessiven Aufstellen bzw. Berechnen des Terms entspricht, lenkt die Unterscheidung in Anzahlen und Preise den Blick auf variable und konstante Elemente. Die Benennung der Einzelemente wiederum ist die detaillierteste Möglichkeit und bietet gleichzeitig Ansatzpunkte, um im Verallgemeinerungsfall Variablen konkret und unterschiedlich (*Bedeutungskonstanz*, s.o.) zu benennen. Um eine symbolische Darstellung sowohl im konkreten als auch im allgemeinen Fall zu erzeugen, werden die Lernenden zunächst selbst aufgefordert, diese zu erstellen. Im weiteren Verlauf werden sie mit unterschiedlichen alternativen Darstellungen konfrontiert, die zu interpretieren, zu vergleichen und auch selbst auf weitere Aufgaben zu übertragen sind.

Ausgewählte Ergebnisse

Im Folgenden soll anhand eines Fallbeispiels (Celina, 7. Klasse, Gemeinschaftsschule, G-Niveau) dargestellt werden, wie hier Sachsituation und Term in konkret numerisch gegebenen Fällen strukturiert und miteinander

verbunden werden. Anschließend wird dessen Bedeutung für den weiteren Verallgemeinerungsprozess diskutiert.

Abb. 1: Unterrichtsdokumente (Celina)

Die Dokumente in Abbildung 1 zeigen, wie Celina zunächst individuelle Anzahlen von Attraktionsnutzungen festlegt und hierfür die Kosten in fünf getrennten Termen berechnet (Abb. 1, links). Anschließend wird sie aufgefordert, den vorgelegten Term „Mara“ (Abb. 1, rechts oben) für die Jahrmarktsituation zu erläutern.

- 1.075 C Ich glaub, dass sie, dass DAS (zeigt „1·3€“) das Karussell ist. Ich glaub, DAS ist das Karussell.
- 1.076 I Mhm. Wie kommst du da drauf?
- 1.077 C Wegen der drei Euro (zeigt „3€“ im Term).

Auf die Frage, was genau sie mit „Karussell“ meint und die Bitte, dies im Term zu kennzeichnen, umkreist sie den gesamten Teilterm (1·3€). Entsprechend beschriftet sie den restlichen Teil des Terms. Bereits in diesen beiden Szenen (nur teilweise hier dargestellt) deuten sich folgende Erkenntnisse an, die sich auch im weiteren Interviewverlauf manifestieren: Celina muss bereits einfache Einmaleinsaufgaben (3·4 und 4·4) zeitaufwendig berechnen. Das Notieren in Teiltermen begründet sie mit der Möglichkeit, Zwischenergebnisse notieren zu können. Sie arbeitet den Term sukzessiv anhand der einzelnen Attraktionen ab. Eine Passung zwischen gegebenem Term und der Sachsituation führt sie ebenfalls anhand der Attraktionen herbei. Als optischer Marker dient ihr der in Abbildung und Term gleichermaßen vorkommende Eurobetrag [1.077]. Sie setzt sowohl in der Beschriftung von Term „Mara“ als auch im Gespräch jeden multiplikativen Teilterm mit einer Attraktion gleich, obwohl präzise hier die „Kosten für alle Karussellfahrten“ richtig wären. In ihrer Darstellung „4 Karussell“ (Abb.1, links) wiederum bleibt unklar, ob sie „4 Karussellfahrten“ oder „4-mal die Kosten pro Karussellfahrt“ meint. Die Strukturierung anhand der Attraktionen bleibt auch auf die Frage hin stabil, worin sich Term „Mara“ und Term „Cosima“ (Abb. 1, rechts oben und unten) unterscheiden. Als Unterschied markiert sie wiederum den gesamten Teilterm.

Abbildung 2 (rechts) zeigt, wie Celina auf unterschiedlichen Strukturierungsebenen Beträge oder Teilterme mit Sachobjekten gleichsetzt, statt konkret auf die Ebene der zugeordneten quantifizierbaren Eigenschaften abzu zielen. Im weiteren Verlauf des Lernprozesses kommt hinzu, dass sie, nach veränderlichen Elementen befragt, immer wieder übergreifend „die Anzahl“ nennt, die spezifischen Anzahlen aber nicht voneinander unterscheidet.

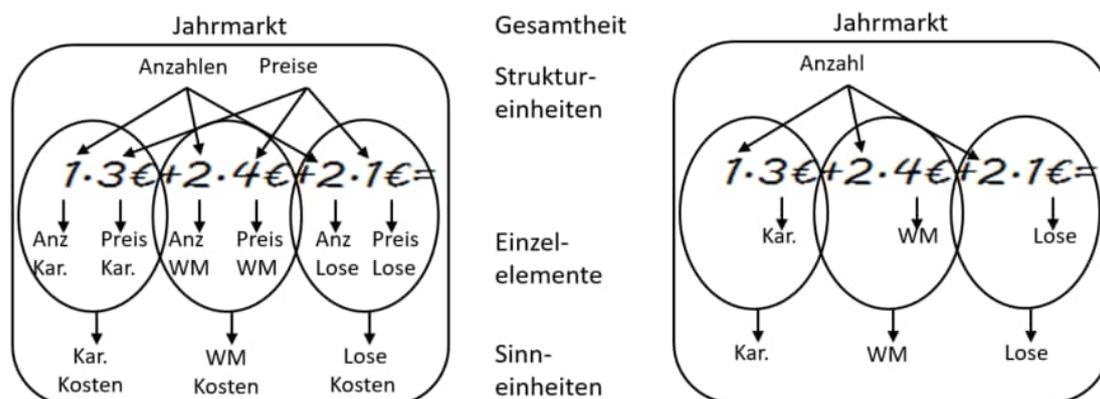


Abb. 2: fachliche Struktur (links) und Celinas individuelle Struktur (rechts)

Fazit

Celinas Bezeichnungen und Äußerungen in der Vernetzung von Sachsituation und Term im *konkreten* Fall lassen Zusammenhänge errahnen zwischen Hürden, die aus dem Sachrechnen bekannt sind (Interpretation von Größenangaben als Objekt) und solchen, die für Variablenterme festgestellt wurden (Missachtung der *Objekt-Zahl-Konvention*, s.o.). Eine stabile Strukturierung des Terms anhand der den Teiltermen zugeordneten Objekte, sowie eine unpräzise Unterscheidung von Objekt und den zugeordneten quantifizierten Eigenschaften führen zudem im *konkreten* Fall häufig zu erwartungskonformen Ergebnissen. Im *allgemeinen* Fall wird hierdurch jedoch verhindert, einzelne variable Elemente zu extrahieren, präzise zu benennen und voneinander zu unterscheiden und somit ein Verständnis für die *Konvention der Bedeutungskonstanz* (s.o.) zu entwickeln.

Literatur

- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2015). Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 117–148). Springer.
- Hußmann, S. & Schacht, F. (2015). Fachdidaktische Entwicklungsforschung in inferentieller Perspektive am Beispiel von Variable und Term. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36(1), 105–134.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.