Susanne SPIES, Siegen

# Was kommt im Wahrscheinlichkeitsbaum zur Darstellung?

Wahrscheinlichkeitsbäume sind als graphisches Arbeits- und Veranschaulichungsmittel im Stochastikunterricht etabliert; ihr Anschauungspotential kommt jedoch sehr selten in den Blick. Bea und Scholz (1995) formulieren folgende Gütekriterien für das Potential graphischer Modelle: Sie sollten 1. strukturell mit dem „Original" übereinstimmen, 2. „dem natürlichen Wesen der menschlichen Informationsverarbeitung entsprechen" und 3. eine „Autonomie gegenüber dem Original" besitzen (S. 301), wobei offen ist, welche Art Gegenstand das „Original" ist – denkbar wäre ein mathematischer Begriff, dessen symbolische oder sprachliche Darstellung oder wie in der hier vorgeschlagenen Perspektive die hinterliegende mathematische Anschauung. Dabei wird als Arbeitsdefinition in Anlehnung an Fischbeins (1993) Konzeption der „figural concepts" und Wilzeks (2021) Werkzeug-Ansatz diese mathematische Anschauung als *kognitives Werkzeug, das vollständig durch eine begriffliche mathematische Definition bestimmt ist und darüber hinaus korrespondierende räumliche und zeitliche Eigenschaften aufweist* aufgefasst. Im Folgenden werden zunächst im Sinne einer stoffdidaktischen Analyse die Kriterien (1) und (3) exemplarisch bestätigt, um auf dieser Grundlage der Frage nachzugehen, welche räumlich-zeitlichen Eigenschaften der korrespondierenden Begriffe, kurz welche mathematische Anschauung enthalten ist, also mithin zu klären, was ein Wahrscheinlichkeitsbaum eigentlich darstellt.

## Baumdiagramme als stochastisches Modell

Betrachtet man zunächst ein Baumdiagramm zu einem einstufigen Zufallsexperiment bestehend aus einem Stamm (oder Wurzel) und genau so vielen Ästen, wie es mögliche bzw. interessante Ausgänge gibt, so erhält man eine Möglichkeit, den Grundraum $\Omega$ systematisch darzustellen. (Für Beispiele und eine allgemeine Darstellung der folgenden Ausführungen siehe OER.Stochastik). Entlang jedes Astes werden die (statistischen) Wahrscheinlichkeiten notiert, mit der das jeweilige Ereignis auftritt. Neben der Konvention, dass diese Werte im geschlossenen Intervall [0,1] liegen müssen, ist ein Wahrscheinlichkeitsbaum als solcher durch die folgenden Regeln festgelegt: Die Wahrscheinlichkeiten an den Ästen der selben Stufe addieren sich zu 1 (Normierung) und die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfaddurchläufe, die dieses Ereignis repräsentieren (Additionspfadregel). Es sind diese Konventionen über Art und Umgang mit der Beschriftung der Äste, die den Wahrscheinlichkeitsbaum von Baumdiagrammen in anderen Kontexten (vgl.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
*Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.*
*56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

etwa die Beschreibung verschiedener Bsp. in Dreher (2014)) unterscheidet und die stochastische Anwendbarkeit sicherstellt: In der Praxis ermöglicht die Normierung etwa fehlende Werte (über das Gegenereignis) zu berechnen. Die Konventionen stellen außerdem sicher, dass durch die Werte entlang der Äste eine normierte, nichtnegative und additive Verteilung definiert wird. Damit ist ein Wahrscheinlichkeitsbaum nicht nur eine hilfreiche Strukturierung von diskreten Zufallsexperimenten (Modellierungswerkzeug), sondern repräsentiert auch eine Verteilung, die den kolmogorovschen Axiomen entspricht. Der Wahrscheinlichkeitsbaum liefert also mathematisch betrachtet ein vollständiges stochastisches Modell (Kriterium 1). Daraus folgt, dass aus dem Arbeitsmittel entnommene Informationen über ein Zufallsexperiment auch mathematische Gültigkeit besitzen und aus einem (quasi allgemeinen) Baumdiagramm allgemeine stochastische Sätze abgeleitet werden können.

**Folgerungen im mehrstufigen Baumdiagramm**

Mehrstufige Zufallsexperimente können als zeitliches Nacheinander verschiedener Zufallsexperimente aufgefasst werden (Dreher (2014) spricht von „dynamisch – im Sinne des Organisierens von Prozessen“ (S. 59)), was nach einhelliger Meinung dazu führt, dass es Lernenden besonders leicht fällt, Prozesse wie Zufallsexperimente mittels Wahrscheinlichkeitsbaum zu modellieren (z.B. Bea & Scholz, 1995; Gallin, 2003; Dreher, 2014). Abgebildet wird dies, indem an jedem Astende für das nächste Experiment ein weiterer, den obigen Konstruktionsprinzipien gehorchender einstufiger Baum anschließt. Die Werte an den Ästen der zweiten Stufe können nun gedeutet werden als Wahrscheinlichkeit für den entsprechenden Ausgang unter der Bedingung, dass das Ereignis, von dem aus dieser Ast abzweigt, eingetreten ist – kurz als bedingte Wahrscheinlichkeit. Da die anschließenden Bäume ebenfalls vollständige einstufige Bäume sind, ergibt sich so nebenbei, dass es sich bei der bedingten Wahrscheinlichkeit ebenfalls um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (s.o.) handelt. Ohne die zeitlich-sukzessive Interpretation, stellt ein Pfad (Kombination je aufeinanderfolgender Äste aller Stufen) das gemeinsame Eintreten der enthaltenen Ereignisse dar („statisch – im Sinne einer Strukturierung hierarchischer Beziehungen“ (Dreher, 2014, S. 59)) und führt zum Gesamtereignis als Schnitt-Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit als Pfadendwahrscheinlichkeit via Multiplikation entlang des Pfades ermittelt wird (Produktpfadregel). Hieraus ergibt sich nun direkt die bekannte algebraische Definition für bedingte Wahrscheinlichkeiten als Quotient aus der Pfadendwahrscheinlichkeit und den vorausgehenden Astwahrscheinlichkeiten. In der statischen Sicht kann der mehrstufige Baum auch als

Grundraum aus n-Tupeln bzw. als Kreuzprodukt verschiedener Grundräume zum selben Zufallsexperiment (Gallin, 2003) gelesen werden.

Aus den bisher eingeführten Interpretationen zeigt der Wahrscheinlichkeitsbaum weitere zentrale Beziehungen: Durch Identifikation jener Pfade, die zum selben Ereignis in der letzten Stufe führen, ergibt sich dessen Wahrscheinlichkeit durch die Addition der Pfadendwahrscheinlichkeiten der günstigen Pfade und damit der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. Wenn ein zweistufiges Zufallsexperiment dynamisch betrachtet wird, kann die stochastische Unabhängigkeit zwischen den Ereignissen der ersten und der zweiten Stufe als Bedeutungslosigkeit der Reihenfolge der beiden Experimente gedeutet werden, d.h. dass ohne Aufhebens die Äste der ersten und zweiten Stufe vertauscht werden können. Liegt stochastisch Abhängigkeit vor, so führt das Umkehrproblem der Äste im Baumdiagramm direkt zur algebraischen Formulierung des „Satz von Bayes“ bzw. können die Pfadregeln dessen Anwendung ersetzen. Ein mehrstufiger Wahrscheinlichkeitsbaum kann also nicht nur zur Lösung konkreter Probleme zu bedingten Wahrscheinlichkeiten eingesetzt werden, sondern auch zur gültigen Herleitung allgemeiner Sätze und ist insofern autonom (Kriterium (3)).

## Ein Baum – verschiedene mathematische Anschauungen

Es konnte skizziert werden, dass ein Wahrscheinlichkeitsbaum eine zur üblichen Mengendarstellung logisch-äquivalente Darstellung für stochastische Modelle liefert, dass aufgrund der ebenfalls enthaltenen räumlichen und zeitlichen Struktur, die graphische Darstellung jedoch mehr verspricht: die intuitive Zugänglichkeit (Kriterium 2) einerseits und die Repräsentation mathematischer Anschauungen zu verschiedenen korrespondierenden Begriffen, andererseits. (Wobei letztere nicht zu verwechseln ist mit Vorstellungsbildern bzw. mentalen Repräsentationen, die auch im Falle des Wahrscheinlichkeitsbaums durchaus sehr individuell sein können (Cohors-Fresenburg & Kaune, 2005). Im einstufigen Baum etwa ist einerseits ein Zufallsexperiment als Geschehnis mit a-priori bestimmten Ausgängen (Ereignissen) visualisiert und entsprechend Wahrscheinlichkeit als einem bestimmten Ereignis zugeordneter Zahlenwert bzw. als Gewichtung dieses Ereignisses, wobei es im Übrigen einerlei ist, ob dieser Zahlenwert der Grundvorstellung einer a-priori-Wahrscheinlichkeit oder einer relativen Häufigkeit entstammt. Die wahrnehmbaren räumlichen Eigenschaften repräsentieren dabei weder die Größenordnung der Ereignisse noch die Quantität der Wahrscheinlichkeit als (Flächen-)Maß (Bea & Scholz, 1995). Sichtbar wird zunächst „nur“ eine aus dem Bereich des systematischen Zählens bekannte Anordnung aller möglichen Ausgänge. Beim mehrstufigen Baum unterscheiden sich die repräsentierten mathematischen Anschauungen abhängig davon, ob eine statische oder eine dynamische Interpretationsperspektive eingenommen wird: Entweder repräsentiert der Baum die zeitlichen Eigenschaften, die in der Anschauung eines Zufallsexperimentes als Handlung enthalten sind. Die Frage, ob die Reihenfolge der Handlungen von Belang ist oder nicht (zeitliche Eigenschaft), führt dabei beispielsweise zu einer prozesshaften Anschauung stochastischer Unabhängigkeit und spiegelt sich in Veränderung oder Konstanz der notierten Zahlenwerte beim Invertieren der Stufen. Die in der Anschauung bedingter Wahrscheinlichkeiten enthaltene zeitliche Eigenschaft, dass das Ereignis nach dem bedingt wird, potentiell bereits eingetreten ist, wird ebenfalls sichtbar. Statisch betrachtet erlauben die räumlichen Eigenschaften einerseits den Blick auf das Ganze der Struktur und heben etwa den additiven Charakter günstiger (Teil-)Ereignisse hervor. Andererseits ist ein „Zoomen" in einzelne Teilbäume möglich, was wiederum die bedingte Wahrscheinlichkeit als Beziehung zwischen Hypothese und Beobachtungen darstellt.

Bereits diese stichpunktartige Zusammenstellung zeigt, dass ein und dasselbe graphische Modell Darstellung ganz verschiedener mathematischer Anschauungen sein kann, jeweils abhängig vom in der Handlung geschaffenen Kontext und dessen zeitlicher und räumlicher Eigenschaften. Wie ein jeweils adäquater Kontext in Lehr-Lernsituationen initiiert werden kann, damit der Wahrscheinlichkeitsbaum die je intendierte mathematische Anschauung auch bei Lernenden anregt, ist im nächsten Schritt zu klären.

## Literatur


Bea, W. & Scholz, R. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *JMD, 16*(3/4), 299–327.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2005). Baumdiagramme in der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Auslöser unterschiedlicher mentaler Repräsentationen, aufgedeckt durch metakognitive Aktivitäten. *JMD*, *26*(3), 200–223.

Dreher, A. (2014). Baumdiagramme und der Rest der Welt. In U. Sproesser, S. Wessolowksi & C. Wörn (Hrsg.), *Daten, Zufall und der Rest der Welt*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-04669-9_5

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Gallin, P. (2003). Prädikatives und funktionales Denken in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *ZDM, 35*, 110–119. https://doi.org/10.1007/s11858-003-0007-0

OER.Stochastik. (2022). *Baumdiagramme – Diskrete Zufallsverteilungen darstellen* [Video]. ORCA.nrw.

Wilzek, W. (2021). *Zum Potenzial von Anschauung in der mathematischen Hochschullehre. Eine Untersuchung am Beispiel interaktiver dynamischer Visualisierungen in der Analysis*. Springer.