Katrin VORHÖLTER, Hamburg/Paderborn, Marianne NOLTE, Hamburg & Kirsten PAMPERIEN, Hamburg

# Das Konzept der Hamburger Uni-Zirkel PriMa und PriSMa zur Förderung mathematisch (hoch-)begabter Schüler*innen

Die Förderung mathematisch (hoch-)begabter Schüler*innen ist eine Herausforderung, der auf unterschiedliche Weise begegnet werden kann. In Deutschland existieren hierzu einige etablierte Projekte sowie Vorschläge zur Aufgabengestaltung und zur Gestaltung des Lernsettings für solche Enrichment-Programme wie auch für den Mathematikunterricht (z.B. Bardy & Bardy, 2020; Ulm & Zehnder, 2020).

Bereits in der zweiten Hälfte der 1990er Jahre initiierte die Hamburger Schulbehörde zusätzlich zu bestehenden Projekten vielfältige Maßnahmen zur Begabtenförderung, darunter die Maßnahme PriMa (Kinder der **Pri**marstufe auf verschiedenen Wegen zur **Ma**thematik), in der die Förderung mathematisch (hoch-)begabter Kinder ab der dritten Klasse als Uni-Zirkel PriMa integriert ist (Nolte, 2015). Aufgrund der vielfältigen positiven Erfahrungen werden von der Behörde für Schule und Berufsbildung (BSB) Hamburg und der Universität Hamburg Mittel zur Verfügung gestellt, so dass die Förderung ab Klasse 5 als Uni-Zirkel PriSMa bis Klasse 10 fortgeführt werden kann. Diese dauerhaft zugesicherte finanzielle Zuwendung ermöglicht und erfordert eine Weiterentwicklung unseres Konzepts zur Enkulturation in das Fach Mathematik bis Klasse 10.

## Ziele der Uni-Zirkel PriMa und PriSMa

Ziel der Uni-Zirkel PriMa und PriSMa ist es, das Handlungsrepertoire und den subjektiven Handlungsraum der teilnehmenden Schüler*innen zu erweitern. So können sie ihre eigene Kreativität entfalten, werden gleichzeitig in das Fach hinein enkulturiert und entwickeln im Sinne von Krutetskii (1976) ein *mathematical cast of mind*. Der Förderung liegt dabei die Auffassung zugrunde, dass das Betreiben von Mathematik ein kreativer Theoriebildungsprozess ist. Entsprechend besteht die Förderung aus einer altersgemäßen Heranführung an mathematische Theoriebildungsprozesse, die den Schüler*innen kreative Herangehensweisen ermöglicht. Diese spiegelt sich zum einen in der Vorgabe mathematisch anspruchsvoller Aufgabenfelder wider, die in Form von sehr zugänglichen Anfangsproblemen durch weiterführende Fragestellungen das Eindringen in ganze Problemfelder in individueller Weise ermöglichen (Nolte, 2015). Zum anderen drückt sie sich in einer adaptiven Kommunikationsstruktur in den einzelnen Unterrichtsphasen aus, in denen die Schüler*innen aufgefordert werden, ihre Vorgehensweisen und Überlegungen zu verbalisieren und Hypothesen zu bilden, die sie

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
*Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.*
*56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.* WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

nicht nur lernen, sich gegenseitig zu erklären, sondern auch zu überprüfen. Um diese Ziele zu erreichen, fokussieren wir uns im Projekt auf typische mathematische Arbeits- und Denkweisen. In diesem Beitrag gehen wir insbesondere auf zwei Aspekte ein, die wesentlich für den Kießwetter'schen Ansatz sind: das *Finden von Anschlussproblemen* und das *Argumentieren* bzw. *Beweisen* als wichtige Bausteine in Theoriebildungsprozessen.

## Finden von Anschlussproblemen

Das *Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen* stellt eines der sechs von Kießwetter (2006) identifizierten Handlungsmuster dar, die sich in Problemlöseprozessen als günstig erwiesen hatten, und die, werden sie in komplexen Problemkontexten gezeigt, als Indikatoren für eine mathematische Begabung dienen können. Kießwetter versteht hierunter das – basierend auf gestellten Anfangsproblemen – selbstständige Formulieren mathematisch sinnvoller Fragen, das nach Silver (1994, S. 22) „central to the discipline of mathematics and the nature of mathematical thinking" ist. Durch diese unter dem Begriff *Problem Posing* (Baumanns & Rott, 2021) in der aktuellen didaktischen Diskussion bekannte Tätigkeit erweitern die Schüler*innen insbesondere dann ihr Handlungsrepertoire, wenn sie ihre eigenen Probleme stellen dürfen.

Mathematisch sinnvolle Fragen zu vorgegebenen Problembereichen zu stellen, muss gelernt werden. Die Hinführung zum eigenständigen Finden und Bearbeiten von Anschlussproblemen erfolgt schrittweise ab der dritten Klasse. Hier werden den Kindern nach der einführenden Fragestellung weiterführende Fragen präsentiert, die ihnen ein Problemfeld eröffnen. Diese sind zum Teil so angelegt, dass die Kinder Spezialfälle untersuchen oder auch Anschlussprobleme im Sinne der What-if-not-Strategien (Brown & Walter, 2005) kennenlernen. Grundsätzlich werden die Schüler*innen dazu angehalten, nach Verallgemeinerungen zu suchen. Die Fähigkeit selbstständig tiefer in den mathematischen Kontext einzudringen steigt, so dass die Schüler*innen die Komplexität und Offenheit der dargebotenen Problemfelder immer besser erfassen können, so dass die Formulierung vielfältigerer Anschlussprobleme möglich ist. Der Prozess wird einerseits durch den Austausch der Schüler*innen untereinander, aber auch durch die Tutor*innen unterstützt, die zur Suche nach weiterführenden Problemen anregen.

In einer ersten Evaluation der PriSMa Uni-Zirkel wurde den Jugendlichen der 6. bis 10. Klassenstufe dasselbe Ausgangsproblem gestellt, das mithilfe eines spezifischen realitätsbezogenen Kontexts illustriert wurde. Die Analysen bestätigen, dass die Jugendlichen mit zunehmendem Alter immer besser in der Lage sind, mathematisch sinnvolle weiterführende Fragen zu stellen.

Diese konnten differenziert werden nach dem spezifischen mathematischen Inhalt, der durch die Anschlussprobleme vertieft wurde, sowie dem Maß, in dem der spezifische Ausgangskontext mit beachtet oder auch davon abstrahiert wurde (Vorhölter & Pamperien, angenommen).

### Argumentieren und Beweisen

Ebenso zentral für das mathematische Denken wie das Stellen von Problemen sind das *Verallgemeinern* sowie das *Begründen* der Gültigkeit aufgestellter Hypothesen. Dieses kann unterschiedlich formal und mit unterschiedlicher Zielsetzung erfolgen (z.B. Brunner, 2014; Kießwetter, 2006) und basiert auf den fünf Kießwetter'schen Handlungsmustern *Organisieren von Material, Sehen von Mustern und Gesetzen, Wechseln der Repräsentationsebene, Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten* sowie *Prozesse umkehren*, jeweils mit unterschiedlicher Bedeutung zu unterschiedlichen Zeiten im Argumentations- bzw. Beweisprozess.

In den Fördersitzungen der Uni-Zirkel PriMa und PriSMa werden die Schüler*innen schon in den ersten Sitzungen mit der Anforderung konfrontiert, zu *begründen*, warum ihre Vermutungen stimmen. Präformale Beweise, die von beispielgebundenen Argumentationen, paradigmatischen Beispielen bis hin zu allgemeinen Aussagen reichen, werden so bereits in der 3. Jahrgangsstufe thematisiert. Im Laufe der Schuljahre werden die Schüler*innen dann immer wieder mit Problemfeldern konfrontiert, in deren Auseinandersetzung sie Beweisstrategien wie das Invarianzprinzip oder die Betrachtung von Teilprobleme oder von Spezialfällen kennenlernen sowie Beweismethoden wie die Fallunterscheidung, die Induktion und den Widerspruchsbeweis. Auch liegt uns weniger an der formal korrekten Ausgestaltung der Argumentationskette als am inhaltlichen Verständnis und der Entwicklung eines Beweisbedürfnisses. Um die Freude an den Denkprozessen nicht zu unterdrücken, werden die Schüler*innen zur Überprüfung der Vollständigkeit, aber nicht zum Einhalten von formalen Vorgaben angehalten.

Auch zu diesem Eckpunkt des Konzepts fand bereits eine erste Evaluation statt, bei der die Schüler*innen der Klassenstufen 6 bis 10 dieselbe Aufgabe bekamen. Die Analysen machten deutlich, dass die Schüler*innen aller Jahrgangsstufen keine Probleme damit hatten, Allgemeingütiges von Spezialfällen zu unterscheiden und Argumentationen zur Allgemeingültigkeit durchzuführen. Darüber hinaus wurde deutlich, dass die teilnehmenden Schüler*innen mit zunehmenden Alter immer komplexere und lückenlosere Argumentationsketten verwendeten.

## Zusammenfassung

Im Rahmen des dargestellten Förderprojekts setzen wir das Ziel um, Schüler*innen an mathematische Theoriebildungsprozesse heranzuführen. Dieser Prozess wird durch Kommunikationsprozesse unterstützt, die u.a. das eigene Stellen (altersangemessen) bearbeitbarer Fragestellungen anregen. Die Schüler*innen verfügen durch ihre Begabung über grundlegende Fähigkeiten und Einstellungen, die durch das Bereitstellen adäquater Lernumgebungen gefördert und intensiver miteinander vernetzt werden können. Entsprechend existiert kein festes Curriculum, das vorgibt, was sie in einer bestimmten Jahrgangsstufe lernen sollen bzw. welche Kompetenzen sie entwickeln sollen, sondern durch die zur Verfügung gestellten Aufgaben, deren Komplexität und Offenheit im Laufe der Förderung zunimmt, werden den Schüler*innen Angebote unterbreitet, durch die sie ihre eigenen Kompetenzen individuell ausbauen können.

## Literatur


Baumanns, L. & Rott, B. (2021). Developing a framework for characterising problem-posing activities: a review. *Research in Mathematics Education, 24*(1), 28–50. https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036

Bardy, T. & Bardy, P. (2020). *Mathematisch begabte Kinder und Jugendliche: Theorie und (Förder-)Praxis*. Springer Berlin Heidelberg.

Brown, S. I. & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Erlbaum.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum.

Kießwetter, K. (2006). Können Grundschüler schon im eigentlichen Sinne mathematisch agieren? In H. Bauersfeld & K. Kießwetter (Hrsg.), *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? Ein Buch aus der Praxis für die Praxis* (S. 128–153). Mildenberger.

Krutetskii, V. A. (Hrsg.). (1976). *Survey of recent East European mathematical literature. The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press. http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0608/74033520-d.html

Nolte, M. (2015). 15 Jahre PriMa – Kinder der Primarstufe auf verschiedenen Wegen zur Mathematik. *GDM-Mitteilungen, 98*, 7–13.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28. http://www.jstor.org/stable/40248099

Ulm, V. & Zehnder, M. (2020). *Mathematische Begabung in der Sekundarstufe: Modellierung, Diagnostik, Förderung*. Springer Berlin Heidelberg.

Vorhölter, K. & Pamperien, M. (angenommen). Problem Posing as an Integral Part for the Support of Mathematically Highly Gifted Teenagers within the PriSMa math circles. In D. Sarikaya, K. Heuer, L. Baumanns & B. Rott (Hrsg.), *Problem Posing and Solving for Mathematically Gifted and Interested Students – Best Practices, Research and Enrichment*. Springer Spektrum.