Isabelle GRETZSCHEL, Halle a. d. S.

Flexibilität beim Bearbeiten strukturell variierter mathematischer Probleme

Einführung

Probleme zeichnen sich durch eine oder mehrere personenspezifische Barrieren aus, die sich auf das unmittelbare Erreichen des erwünschten Zielzustandes auswirken. Mangelt es an geeigneten Vorgehensweisen, ist die Bewältigung häufig mit mehreren Bearbeitungsanläufen verbunden. Erkennt man bei einem neuen Problem eine strukturelle Ähnlichkeit zu einem bereits bekannten, kann es daher naheliegend erscheinen, die Lösungsbemühungen unter Nutzung bekannter und bereits bewährter Vorgehensweisen abzukürzen. Jedoch muss das, was für die Bewältigung eines Problems funktioniert hat, nicht zwangsläufig auch für andere Probleme zielführend sein.

Es deutet sich hier bereits an, dass beim Problemlösen verschiedene Situationen denkbar sind, die Veränderungen im Bearbeitungsprozess erforderlich machen. Den Umgang mit heuristischen Elementen betreffend, können diese Veränderungen sowohl durch das Wechseln von einer Vorgehensweise hin zu einer davon verschiedenen als auch durch das Anpassen bereits genutzter Vorgehensweisen zustande kommen. Beide Aspekte können als Ausprägungen *strategischer Flexibilität* angesehen werden. Zu unterscheiden ist dabei die *intra-task* Flexibilität, bei der Veränderungen innerhalb der Problembearbeitung vor allem aufgrund unergiebiger Lösungsbemühungen (Heinrich, 2000) vorgenommen werden, von der *inter-task* Flexibilität, die für die Bearbeitung mehrerer Problemstellungen mit variierten Bedingungen relevant ist.

Untersuchungen zu Flexibilität beim Problemlösen erfolgten bisher vorrangig unter Einsatz von mathematischen Problemen, die sich sowohl im Hinblick auf Oberflächenmerkmale als auch bezogen auf die Tiefenstruktur voneinander unterscheiden (Arslan & Yazgan, 2015; Elia et al., 2009), wobei die deutliche Verschiedenheit der Probleme Wechsel in den Vorgehensweisen zwischen den Bearbeitungen nahelegen kann. Die Aussagekraft dieser Studienergebnisse ist darüber hinaus auch durch die produktorientierte Auswertung begrenzt. Aufgrund der großen Bedeutung für das Problemlösen erscheint es jedoch notwendig, Flexibilität noch genauer zu charakterisieren.

Im Folgenden wird ein Einblick in eine Untersuchung zur Flexibilität von Studierenden beim Bearbeiten strukturell ähnlicher Probleme gegeben. Mit diesem noch laufenden Dissertationsprojekt soll ein weiterer Beitrag zum Forschungsfeld geleistet werden.

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Untersuchungsdesign

Diese Studie zielt darauf, den Umgang mit mathematischen Problemsituationen genauer zu beschreiben, für deren erfolgreiche Bearbeitung inter-task Flexibilität notwendig ist. Durch den Einsatz geeigneter Problemstellungen lässt sich diese systematisch herausfordern. Für die Untersuchung wurden bisher drei unterschiedliche Problemserien eingesetzt, die auf textbasierten Aufgaben beruhen, von denen a priori angenommen werden kann, dass diese für die Bearbeitenden Problemcharakter besitzen. Jede der Serien setzt sich aus drei Problemen zusammen, die trotz Ähnlichkeiten in den Oberflächenmerkmalen (u.a. Kontext), strukturell so verschieden sind, dass zur Bearbeitung der ersten Problemstellung analoge Vorgehensweisen abseits probierender oder rein algebraischer Verfahren für das zweite und dritte Problem nicht zur Lösung führen. So basieren beispielsweise alle Aufgaben der Problemserie „Partialsummen“ (s. Abb. 1) auf wachsenden, endlichen Zahlenfolgen. Während die gegebenen Partialsummen in den ersten beiden Problemen auf arithmetischen Zahlenfolgen beruhen und sich nur in der Anzahl an Folgengliedern unterscheiden, geht diese in der dritten Problemstellung jedoch aus einer geometrischen Zahlenfolge hervor.

Problem 1: In einem Bücherregal stehen 33 Bücher. Das Bücherregal hat 3 Fächer. Im oberen Fach befinden sich einige Bücher. Im mittleren Fach befinden sich 4 Bücher mehr als im oberen Fach. Im unteren Fach stehen 4 Bücher mehr als im mittleren Fach. Wie viele Bücher befinden sich im oberen Fach?	**Problem 2:** In einem Sammelalbum kleben insgesamt 44 Briefmarken. Auf der ersten Seite kleben einige Briefmarken. Auf der zweiten Seite kleben 4 Briefmarken mehr als auf der ersten Seite. Auf der dritten Seite kleben 4 Briefmarken mehr als auf zweiten Seite. Auf der vierten Seite kleben wieder 4 Briefmarken mehr als auf der Seite zuvor. Wie viele Briefmarken kleben auf der ersten Seite?
Problem 3: In einer Vitrine stehen insgesamt 63 Pokale. Die Vitrine hat 3 Fächer. Im oberen Fach befinden sich einige Pokale. Im mittleren Fach befinden sich doppelt so viele Pokale wie im oberen Fach. Im unteren Fach stehen doppelt so viele Pokale wie im mittleren Fach. Wie viele Pokale befinden sich im oberen Fach?	

Abb. 1: Überblick Problemserie „Partialsummen“

Für die Lösung des ersten Problems erscheint ein Vorgehen unter Berechnung des arithmetischen Mittels naheliegend. Für das erste Problem repräsentiert dieser Wert die Anzahl der Bücher im mittleren Fach. Die Anzahl der Bücher im oberen Fach kann davon ausgehend abgeleitet werden. Dieses Vorgehen kann aufgrund der oberflächlichen Ähnlichkeiten auch für die anderen beiden Probleme geeignet erscheinen. Jedoch machen die strukturellen Variationen Veränderungen in der Verwendung dieser Vorgehensweise zwischen den Problembearbeitungen notwendig und sind dadurch flexibilitätserfordernd.

Zu dieser Problemserie wurden im Wintersemester 2021/2022 halbstandardisierte Leitfadeninterviews mit 31 Studierenden des Lehramts an Grundschulen, die im Vorfeld keine explizit heuristische Schulung erhalten hatten, durchgeführt. Die in Einzelarbeit und unter Einsatz der Methode des lauten

Denkens vorgenommenen Bearbeitungen wurden durch Videoaufnahmen dokumentiert und anschließend transkribiert. Für die fortlaufende Analyse und Auswertung der Daten wird ein qualitatives und prozessorientiertes Vorgehen genutzt.

Einblick in die Bearbeitungen

Eine erste Sichtung der Daten hat bereits gezeigt, dass die Bearbeitung dieser Problemserie für viele Studierende mit Herausforderungen verbunden war. Für die Analyse und Auswertung sind insbesondere die Interviews von Interesse, bei denen die erste Problemstellung mit einer Vorgehensweise bearbeitet wurde, die sich nicht analog auf die anderen beiden Probleme anwenden lässt. Im Fokus stehen daher vorrangig die Interviews, bei denen die Lösung des ersten Problems unter Berechnung des arithmetischen Mittels erfolgte. Davon ausgehend konnten unterschiedliche Umgangsweisen für die variierten Strukturen in der zweiten und dritten Problemstellung beobachtet werden.

Im Folgenden möchte ich einen Einblick in Bearbeitungen der zweiten Problemstellung geben. Viele der Studierenden ermittelten auch für dieses Problem zunächst eine durchschnittliche Anzahl an Briefmarken, verwendeten diesen Wert jedoch unterschiedlich weiter. So ging zu beispielsweise Lina zunächst von einer gleichmäßigen Verteilung der Briefmarken aus und versuchte dann, ähnlich dem gegensinnigen Verändern in der ersten Problembearbeitung, auch hier die beschriebenen Relationen herzustellen (s. Abb. 2). Die daraus resultierenden unterschiedlichen Differenzen zwischen den Folgegliedern bemerkte sie nicht.

Max hingegen vermutete aufgrund der Übereinstimmung mit dem Mittelwert in der ersten Problemstellung, dass nicht nur die Vorgehensweise, sondern auch die Lösung auf das zweite Problem übertragen werden kann:

> „Also im Grunde ist das ja dasselbe Prinzip wie bei der ersten Aufgabe. Also nur halt mit mehr Seiten. Deswegen würde ich da tendenziell genauso rangehen, aber da ich ja die Aufgabe davor schon hatte und hier auch erkenne, dass wenn hier alles gleich wäre, elf pro Seite wären. Hab ich jetzt einfach mal probiert, ob das System von der ersten Aufgabe passen würde."

Er übernahm die ermittelten Werte aus dem ersten Problem, setzte diese für die ersten drei Folgenglieder des zweiten Problems ein und ergänzte das noch fehlende vierte Glied. Ausgelöst durch die Probe folgte darauf mit dem Wechsel zum zielgerichteten Probieren eine neue Bearbeitung, aus der auch der gesuchte Wert für das erste Folgenglied hervorging (s. Abb. 2).

Auch Sara nahm an, dass der Mittelwert in der Zahlenfolge repräsentiert sein muss:

„Ich würde jetzt davon ausgehen, wenn ich noch einmal an die Aufgabe davor denke, dass auf einer Seite elf sind.“

Sie setzte diesen Wert daher für jeweils eines der Folgenglieder ein und leitete davon ausgehend die weiteren ab (s. Abb. 2). Nachdem sie erkannt hatte, dass sich aus keiner der so entstandenen Zahlenfolgen die Partialsumme ergibt, gelangte sie über den Wechsel zum unsystematischen Probieren zur Lösung.

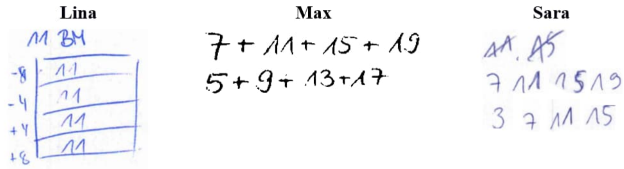

Abb. 2: Bearbeitungen zum Problem 2 von Lina, Max und Sara

Die jeweils ersten Bearbeitungsanläufe dieser Studierenden mögen zunächst recht ähnlich zueinander erscheinen, können aber auf unterschiedliche Annahmen zurückgeführt werden. Für die Analyse und zur Abgrenzung sind daher sehr differenzierte Betrachtungen notwendig, in denen Fälle kontrastiv gegenübergestellt und verglichen werden. Darüber hinaus müssen natürlich auch die Bearbeitungen der dritten Problemstellung berücksichtigt werden.

Ausblick

Die Analyse und Auswertung der Daten zur Problemserie ‚Partialsummen‘ wird fortgesetzt und weiter vertieft, um Vorgehensweisen über alle drei Problembearbeitungen hinweg nachzeichnen zu können. Auch die Daten aus den anderen beiden Problemserien finden Berücksichtigung, um auf möglichst aufgabenunabhängige Ausprägungen von Flexibilität schließen zu können. Eine Typisierung des flexiblen Handelns beim mathematischen Problemlösen wird angestrebt. Ferner werden didaktische Empfehlungen abgeleitet.

Literatur

Arslan, C. & Yazgan, Y. (2015). Common and Flexible Use of Mathematical Non Routine Problem Solving Strategies. *American Journal of Educational Research, 3*(12), 1519–1523. https://doi.org/10.12691/education-3-12-6

Elia, I., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM - Mathematics Education, 41*(5), 605–618. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0184-6

Heinrich, F. (2000). Holzweg, Sackgasse, Steckengeblieben … - wie nun weiter beim Suchen nach einer Lösung? In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000* (S. 265–268). Franzbecker.