

Lea Marie MÜLLER, Saarbrücken

Drag it! Dynamisches Messen von Flächeninhalten mit Augmented Reality

Das Bestimmen von Flächeninhalten ist in der mathematischen Schulausbildung fest verankert. Im Bereich der Primarstufe soll durch die Flächenbestimmung mit Einheitsquadraten zum Verständnis der Flächenberechnungsformel in der Sekundarstufe hingeleitet werden. Nationale und internationale Studien (z. B. Herendiné-Kónya, 2015; Ulfig, 2013) zeigen, dass dies nicht immer gelingt, so dass bei Schüler*innen konzeptuelles Verständnis nicht ausreichend vorhanden ist und folglich auswendig gelernte Formel fehlerhaft angewendet werden (Herendiné-Kónya, 2015). Das heißt, die Schüler*innen haben vorrangig prozedurales Wissen erworben, aber das zugrundeliegende Konzept zur Begründung des Vorgehens, das insbesondere zur Lösung von Transferaufgaben notwendig ist, wird nicht verstanden. Dieser Beitrag stellt unterschiedliche Ansätze zur Flächenbestimmung vor, die den Aufbau von konzeptuellem Wissen unterstützen sollen.

Prinzipien und Konzepte des Messens von Flächeninhalten

Nach Stephan und Clements (2003) können einige Prinzipien des Längenverständnis, die bereits in der zweiten Klasse durch den Umgang mit Messinstrumenten Berücksichtigung finden, auf die Prinzipien des Flächenverständnis übertragen werden. Diese Prinzipien sind grundlegend zum Aufbau von konzeptuellem Wissen über die Flächenbestimmung und sollen in der folgenden Auflistung vorgestellt werden.

- Unterteilung (Partitioning): Die mentale Handlung einen zwei-dimensionalen Raum mit einer zwei-dimensionalen Einheit zu unterteilen.
- Wiederholende Einheit (Unit iteration): Eine gewählte Einheit lückenlos und überlappungsfrei wiederholend in dem zwei-dimensionalen Raum auszulegen.
- Erhaltung (Conservation): Die Erhaltung einer Fläche, auch wenn sie zerlegt, zusammengesetzt oder neu angeordnet wird (vgl. zerlegungsgleich bei Franke & Reinhold, 2016).
- Angeordnete Struktur von Streifen (Array structure): Eine Zeile anhand der Anzahl der Einheitsquadrate in einer Spalte zu iterieren, um eine angeordnete Struktur von Reihen und Spalten zu erzeugen.

Die ersten drei Prinzipien sind auch für den Aufbau des Längenverständnis erforderlich, so dass beim Erwerb von Wissen über die Flächenbestimmung

auf das Vorwissen der Schüler*innen aufgebaut werden kann. In mathematischen Schulbüchern für die Primarstufe wird im Sinne der zu erlernenden Kompetenz „Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen“ (KMK, 2004, S. 10) der Fokus auf das Bestimmen von verschiedenen Flächeninhalten mit Einheitsquadraten gerichtet. Der Zugang zur Flächenbestimmung erfolgt dabei über das Abzählen von Einheitsquadraten (z. B. Kästchen) innerhalb der jeweiligen Fläche. Dieses Vorgehen entspricht dem *traditionellen* Ansatz verschiedener Studien (Ribeiro & Palhares, 2020; Huang & Witz, 2013), die versuchen insbesondere bei rechteckigen Flächen einerseits den Schüler*innen die einheitliche Array Struktur zu verdeutlichen und andererseits Schüler*innentypen je nach Aufgabenbearbeitung zu kategorisieren. Dazu sollen die Schüler*innen den Flächeninhalt bestimmen, indem sie die Struktur mit Einheitsquadraten vervollständigen oder selbstständig einzeichnen. In den letzten Jahren wurde zunehmend eine weitere Herangehensweise zum Aufbau konzeptuellen Wissens über die Flächenbestimmung fokussiert – das „dynamische Messen“ (dynamic measurement (DYME); Panorkou, 2020, S. 260). Der grundlegende Ansatz ist es, eine Strecke mit einer bestimmten Länge entlang einer anderen Strecke zu bewegen, um so eine zwei-dimensionale Fläche zu erzeugen.

Ein Unterschied zu der *traditionellen* statischen Herangehensweise besteht darin, dass die Fläche beim dynamischen Vorgehen durch eine Art Wisch- oder Streichbewegung ausgehend von einer der beiden Seitenlängen erzeugt wird. Diese Wischbewegung wird in der englischen Sprache als *Sweeping* (Wischen) bezeichnet. Die folgende Abbildung zeigt den Unterschied zwischen dem *statischen* Vorgehen des Auslegens im Vergleich zu dem dynamischen Vorgehen, des *Sweepings*.

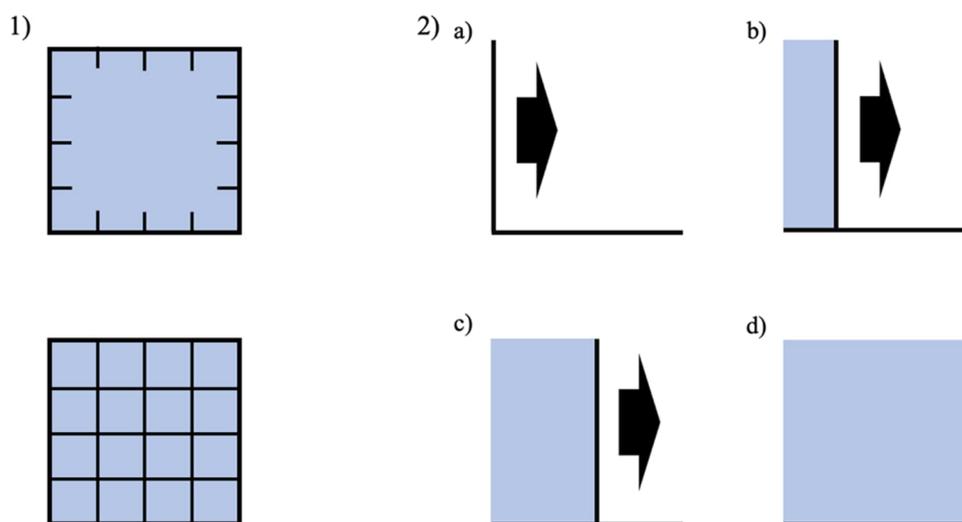


Abb.1: Statischer Zugang (links) vs. dynamisches Messen (rechts) von Flächen (angelehnt an Panorkou, 2020, S. 259; Kobiela & Lehrer, 2019, S.180)

Ein weiterer Unterschied wird bei der Darstellung der Einheitsquadrate deutlich. Nach Kobiela und Lehrer (2019) wird auf die Visualisierung von Einheitsquadraten beim Sweeping verzichtet, um den Fokus rein auf den dynamischen Vorgang der Flächenentstehung als zweidimensionale Ebene zu legen und sich vom statischen Auszählen zu distanzieren. Erst daran anschließend werden die beim Sweeping entstandenen Reihen und Spalten durch Anlegen von beispielsweise Papierstreifen oder Schnüren visualisiert.

Durch das nachfolgende Einzeichnen oder Unterteilen in Einheitsquadrate könnte ein Bruch zwischen dem Verständnis von Fläche und der Flächenbestimmung entstehen. Dies könnte umgangen werden, indem zuerst wie von Kobiela und Lehrer (2019) beschrieben, das dynamische Messen ohne Einheitsquadrate und anschließend das Wischen mit Einheitsquadraten visualisiert wird. Dadurch können auch die zugrundeliegenden Prinzipien nach Stephan und Clements (2003) zum konzeptuellen Flächenverständnis berücksichtigt werden, indem die wiederholende Unterteilung und die somit entstehende Array Struktur veranschaulicht wird. Die Beachtung und das Verständnis der Prinzipien ist nicht nur für die indirekte Flächenbestimmung notwendig, sondern auch zum Verständnis der Größenumwandlung, welches spätestens in der Sekundarstufe, aber auch im Alltag sowie bei der Ausübung verschiedener Berufe zum Tragen kommt.

Flächenbestimmung mit Augmented Reality

Mit Technologien wie Augmented Reality (AR) ist es möglich mit Hilfe von Tablets, Smartphones oder AR-Brillen die reale Welt, um zwei- und dreidimensionale Elemente zu erweitern. Derzeit wurde ein AR-Tool als erster Prototyp zur *statischen* Visualisierung von standardisierten Einheitsquadraten an einem ausgewählten Objekt (Buchcover) entwickelt (Müller & Platz, im Druck), welches nach dem Design-Based-Research-Ansatz in mehreren Zyklen erprobt und weiterentwickelt werden soll (Prediger, 2019). In einer weiterentwickelten Version des AR-Tools sollen neben der *statischen* Visualisierung der Einheitsquadrate weitere Aspekte des dynamischen Messens berücksichtigt werden. In der Studie von Kobiela und Lehrer wurde von Interviewenden als auch Lernenden die Bezeichnung *dragging* (ziehen) statt *sweeping* (wischen) verwendet. Die Ziehbewegung über das *Dragging* könnte dabei als ein weiterer natürlicher Zugang zum Aufspannen von Flächen verstanden werden. So kann eine rechteckige Fläche virtuell durch Ziehbewegung in vertikale und horizontale Richtung mit Reihen und Spalten von Einheitsquadraten erzeugt werden. Diese Handlung kann mit AR auch an Objekten in der realen Welt ermöglicht werden. Dazu wird eine eindimensionale Strecke des zu messenden Objekts durch die Fixierung eines Start- und Endpunktes festgelegt. Mit einer weiteren Strecke, die an dem Start- oder

Endpunkt beginnt, entsteht ähnlich wie beim Sweeping eine zweidimensionale Fläche. Im Vergleich zum Sweeping wird die Fläche allerdings nicht durch eine Wischbewegung erzeugt, sondern durch das Aufspannen mit einer Ziehbewegung. Mit Hilfe des AR-Tools kann so ein Bezug zur realen Welt hergestellt werden, indem Messprozesse an Objekten in der realen Welt sichtbar werden. Gleichzeitig ermöglicht das Ein- und Ausblenden von standardisierten Maßeinheiten Umwandlungsprozesse sowohl bei der Längen- als auch Flächenmessung mit AR zu visualisieren. Durch das Festlegen der Strecke und nachfolgend der Fläche ermöglicht die Ziehbewegung des AR-Tools die wiederholenden Einheiten dynamisch fortlaufend einzublenden.

Das zukünftige Ziel ist es, das AR-Tool mit den erweiterten Funktionen in eine substantielle Lernumgebung einzubetten und zu erproben. Es soll untersucht werden, welches Verständnis zur Größenumwandlung von Längen- und Flächenmaßen aufgebaut wird und inwiefern die Visualisierung des Messprozesses sowie der Maßeinheiten an Objekten in der realen Welt den Aufbau der Größenvorstellung unterstützt.

Literatur

- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie* (3. Aufl.). Springer.
- Herendiné-Kónya, E. (2015). The level of understanding geometric measurement. *CERME*, 9, 536–542.
- Kobiela, M. & Lehrer, R. (2019). Supporting dynamic conceptions of area and its measure. *Mathematical Thinking and Learning*, 21(3), 178–206.
- Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. Luchterhand.
- Müller, L. M. & Platz, M. (im Druck). Visualization of Area Units with Augmented Reality. Work-In-Progress-Paper. 8th Conference of iLRN.
- Ulfig, F. (2013). *Geometrische Denkweisen beim Lösen von PISA-Aufgaben*. Springer.
- Huang, H.-M. E. & Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10–26.
- Panorkou, N. (2020). Reasoning dynamically about the area of a rectangle: The case of Lora and Isaac. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6(1), 257–292.
- Prediger, S. (2019). Design-Research in der gegenstandsspezifischen Professionalisierungsforschung – Ansatz und Einblicke in Vorgehensweisen und Resultate. In T. Leuders, E. Christophel, M. Hemmer, F. Korneck & P. Labudde (Hrsg.), *Fachdidaktische Forschung zur Lehrerbildung* (S. 11–34). Waxmann.
- Ribeiro, S. & Palhares, P. (2020). 4th and 5th students' structuring of 2D rectangular arrays. *Journal of Research in Mathematic Education*, 9(1), 30–61.
- Stephan, M. & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clements & G. Bright (Hrsg.), *Learning and teaching measurement, 2003 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 3–16). NCTM.