

Melina WALLNER, Paderborn

## **„Ich habe nur die eine Hälfte genommen“ – Verstehensprozesse zur Achsensymmetrie**

Symmetrie ist ein Konzept, das die gesamte Mathematik und alle Schulstufen durchdringt und entsprechend als fundamentale Idee gesehen wird (Winter, 1976). Der Blick in die Lehrpläne und Bildungsstandards zeigt, dass Achsensymmetrie die zentrale Symmetrie in der Grundschule ist. Schüler\*innen sollen achsensymmetrische Figuren herstellen und ebene Figuren auf Eigenschaften der Achsensymmetrie überprüfen. Im Rahmen einer fachdidaktischen Entwicklungsstudie wird das inhaltliche Verständnis zur Achsensymmetrie und die Vorgehensweisen beim Herstellen und Erkennen achsensymmetrischer Figuren in selbst entwickelten, substantiellen Lernumgebungen erforscht.

Charakterisierende Eigenschaft von achsensymmetrischen Figuren ist mit Rückgriff auf den Kongruenzbegriff, dass sie sich durch eine Gerade in zwei zueinander kongruente Teilfiguren unterschiedlicher Orientierung zerlegen lassen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2018). Mit dem Begriff der Abbildung als Grundlage gilt eine Figur als achsensymmetrisch, wenn es eine Achsen Spiegelung gibt, die die Figur als Ganzes auf sich abbildet. Achsensymmetrische Figuren sind demnach invariant gegenüber Achsen Spiegelungen (Schmidt-Thieme & Weigand, 2018). Hinsichtlich der Entstehung ist festzuhalten, dass sich achsensymmetrische Figuren durch Achsen Spiegelung erzeugen lassen. Aus jeder Ausgangsfigur (Urbild) kann, wenn Urbild und Spiegelbild vereinigt werden, eine achsensymmetrische Figur erzeugt werden. Die Achsensymmetrie als Eigenschaft einer Figur steht daher in enger Verbindung mit der Achsen Spiegelung als Kongruenzabbildung.

### **Forschungsstand und -desiderat**

Grundschüler\*innen identifizieren achsensymmetrische Figuren häufig dann als achsensymmetrisch, wenn sie eine vertikal ausgerichtete Symmetrieachse haben und seltener bei einer diagonalen Ausrichtung der Achse (Götz et al., 2020). Zudem werden beim Einzeichnen diagonale Achsen häufiger vergessen als vertikale oder horizontale Achsen. Einfluss auf das Erkennen von Achsensymmetrie hat auch die Art der Symmetrieabbildung einer Figur. Achsensymmetrie wird seltener erkannt, wenn die Figur mehrere Symmetrieabbildungen hat. Rein punktsymmetrische Figuren oder Schubfiguren werden von Schüler\*innen zudem fälschlicherweise oft als achsensymmetrisch identifiziert. Als Grund für die Verwechslung mit Achsensymmetrie wird die Existenz von zwei kongruenten Teilfiguren gesehen (Götz et al.,

2020). Wesentlichen Einfluss auf das korrekte Durchführen von Achsenspiegelungen nimmt die Lage der Achse, die Lage der Figur zur Achse, die Komplexität der Figur und die Art des Untergrunds (Küchemann, 1981). Spiegelungen an vertikalen Achsen sind leichter als an diagonalen Achsen, was in der Umsetzung dazu führt, dass Schüler\*innen diagonale Achsen häufig ignorieren und stattdessen an einer gedanklich vorgestellten vertikalen Achse spiegeln (Ho & Logan, 2013). Die Forscher\*innen sehen als Ursache für diesen häufigen Fehler, dass oftmals nur gleiche prototypische Beispiele und vor allem Ausrichtungen von Achsen, besonders die vertikale Ausrichtung, im Unterricht und den Schulbüchern verwendet werden. Sie argumentieren, dass die Lernenden unter dieser Verwendung kein umfangliches Verständnis von Achsensymmetrie aufbauen können.

Es lässt sich zusammenfassen, dass die Ausrichtung der Achse sowohl beim Erkennen von Achsensymmetrie als Eigenschaft einer Figur als auch beim Durchführen von Achsenspiegelungen Einfluss nimmt. Während Erkenntnisse zu Figuren- bzw. Aufgabenmerkmalen, Lösungshäufigkeiten und typischen Fehlern aus verschiedenen Testsituationen vorliegen, ist noch wenig über Lern- und Erkenntnisprozesse von Schüler\*innen beim Erwerb eines Verständnisses von Achsensymmetrie bekannt.

### **Forschungsdesign**

Im Rahmen des Forschungsprojekts entsprechend der fachdidaktischen Entwicklungsforschung wird auf konstruktiver Ebene der Frage nachgegangen, wie Lernumgebungen gestaltet sein können, die ein inhaltliches Verständnis von Achsensymmetrie bei Grundschüler\*innen anregen und auf rekonstruktiver Ebene, wodurch sich ein Verständnis von Achsensymmetrie bei der Arbeit der Schüler\*innen an den Lernumgebungen charakterisieren lässt. Dazu werden die konzipierten Lernumgebungen als Design-Experimente mit Schulklassen des zweiten und dritten Schuljahres im Lehr-Lern-Labor ‚ZahlenRaum‘ der Universität Paderborn durchgeführt. Analysiert werden die Verstehensprozesse der Schüler\*innen mit Mitteln der interpretativen Unterrichtsforschung und einer epistemologisch orientierten Analyse.

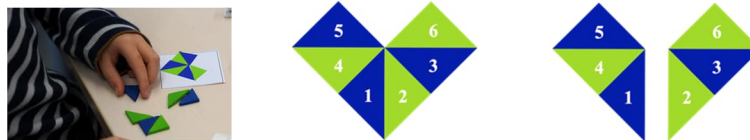
### **Einblick – in die Konstruktion der Lernumgebung**

Die Lernumgebungen wurden unter Nutzen der natürlichen Differenzierung für inklusive Klassen konzipiert. Durch eine hohe Handlungsorientierung bietet die Lernumgebung eine niedrige Zugangsschwelle und durch die Gestaltung von individuellen und gemeinsamen Phasen erhalten die Schüler\*innen die Möglichkeit selbstständig auf verschiedenen Niveaus Entdeckungen zu machen, aber auch gemeinsam Zusammenhänge zu erkunden und unterschiedliche Vorstellungen zur Achsensymmetrie auszuhandeln.

Die Lernumgebung „Dreiecke spiegeln“ teilt sich in zwei Etappen – dem Herstellen und dem Untersuchen achsensymmetrischer Figuren (Spiegel et al., 2005). Zunächst stellen die Schüler\*innen aus rechtwinkligen Dreiecken Figuren her, erzeugen durch Spiegelung dieser Urbilder achsensymmetrische Figuren und dokumentieren diese. Die Figuren werden gemeinsam auf einem Plakat geordnet, wodurch eine gegenseitige Korrektur angeregt wird und gleichzeitig die Eigenschaften der Figuren deutlich werden sollen. Der Schwerpunkt liegt somit zunächst auf der Achsenspiegelung und der Vereinigung von Urbild und Spiegelbild zu einer Figur und wechselt dann zum Untersuchen achsensymmetrischer Figuren. Anschließend werden Figuren, bestehend aus rechtwinkligen Dreiecken und variierend in der Ausrichtung der Symmetrieachse dahingehend untersucht, ob sie aus einem gleichen Urbild entstanden sein könnten.

### Einblick – in die Rekonstruktion am Fallbeispiel Philipp

Philipp hat im Rahmen der ersten Aktivität der Lernumgebung folgende Figur (Abb. 1) hergestellt.



**Abb. 1:** Gelegte und aufgeklebte Figur von Philipp (original und rekonstruiert)

- 11 L Also hast du so gespiegelt, richtig? (*dreht den Zettel 90° im Uhrzeigersinn und stellt den Spiegel horizontal zur Tischkante auf die Figur*)
- 12 P **Nein, das hier hinten das war weg** (*zeigt auf den Teil der Figur hinter dem Spiegel*) **Ich hab nur die eine Hälfte genommen und dann da hingemacht.**
- 13 L Also (..) willst du das nochmal hinlegen, wie du das meinst?
- 14 P **Ähm** (*nimmt nacheinander abwechselnd ein blaues und ein grünes Holzdreieck und legt seine Figur auf dem Zettel mit den Holzdreiecken nach; siehe Nummerierung*) **Und dann habe ich diese Hälfte genommen** (*halbiert die Figur aus Holzdreiecken senkrecht zur Tischkante*) **und hab die hier hingemacht** (*schiebt den Teil (2,3,6) so vor den Spiegel, dass die Seite, an der die Figur geteilt wurde, den Spiegel berührt*)

Philipp erläutert, seine Figur nicht aus einem Urbild durch Spiegelung erstellt, sondern die Figur gelegt und dann in zwei Hälften geteilt zu haben. Das Teilen in Hälften weist auf ein Verständnis von Achsensymmetrie im Sinne des Kongruenzbegriffs hin: die Figur wird in zwei deckungsgleiche Figuren zerlegt. Seine aus den Dreiecken gelegte Figur ist, berücksichtigt man nur die Form, achsensymmetrisch, die Farben der Dreiecke sind allerdings entgegengesetzt angeordnet, sodass die Figur gemäß des Arbeitsauftrags nicht als achsensymmetrisch angesehen werden kann. Beim Nachlegen zeigt

sich, dass Philipp jeweils zwischen grünen und blauen Dreiecken und der rechten und linken Hälfte der Figur abwechselt (s. Nummerierung), wodurch die Figur den Charakter eines regelmäßigen Musters erhält. Die Regelmäßigkeit der Farben scheint für ihn ggf. im Sinne des ästhetischen Aspekts (Winter, 1976) bedeutsam zu sein, im Gegensatz zur gleichen Farbigkeit der Dreiecke auf gegenüberliegenden Seiten der Symmetrieachse, die er im weiteren Gespräch explizit als irrelevant benennt. Für Philipp scheinen somit die Zerlegbarkeit in zwei gleiche Figuren und die Entstehung eines regelmäßigen Musters die entscheidenden Referenzen zu sein.

### **Fazit und Ausblick**

Das Fallbeispiel zeigt, dass Kinder beim Herstellen von (achsensymmetrischen) Figuren unterschiedliche Referenzen fokussieren und z. T. andere Vorgehensweisen zu beobachten sind als ursprünglich mit dem Arbeitsauftrag der Lernumgebung intendiert wurde. Die Lernumgebung erweist sich als reichhaltig, um verschiedene Referenzen und Vorgehensweisen zu zeigen und diese im Zuge des gemeinsamen Sortierens, Beschreibens oder der Präsentation in der Klasse mit anderen zu teilen und in ihrer Bedeutung zu einem gemeinsamen Verständnis auszuhandeln. Im nächsten Forschungszyklus sollen weitere Vorgehensweisen beschrieben und herausgearbeitet werden, welche Referenzen, neben der Orientierung an einem regelmäßigen Muster oder das Teilen in zwei Hälften, zur Charakterisierung von achsensymmetrischen und nicht achsensymmetrischen Figuren von Schüler\*innen herangezogen werden.

### **Literatur**

- Götz, D., Gasteiger, H. & Kühnhenrich, M. (2020). Einfluss von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie – Eine Analyse von Aufgabenlösungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 41(2), 523–544.
- Ho, S. Y. & Logan, T. (2013). Students' Performance on a Symmetry Tasks. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini (Hrsg.), *Proceedings of the 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (S. 747–750). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Küchemann, D. (1981). Reflections and Rotations. In K. M. Hart (Hrsg.), *Children's understanding of mathematics* (1. publ., repr, S. 137–157). Murray.
- Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2018). Symmetrie und Kongruenz. In H.-G. Weigand, A. Filler, R. Hölzl, S. Kuntze, M. Ludwig, J. Roth, B. Schmidt-Thieme & G. Wittmann (Hrsg.), *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 179–202). Springer Berlin Heidelberg.
- Spiegel, H., Knapstein, K. & Thöne, B. (2005). *Spiegel-Tangram*. Kallmeyer.
- Winter, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 8(1/2), 14–18.