

Ute SPROESSER, Ludwigsburg, Kerstin FREY, Ludwigsburg

Was ist funktionales Denken und wie kann es im Unterricht adressiert werden? Ergebnisse einer Interviewstudie

Einleitung

Funktionales Denken kann als Paradebeispiel einer fundamentalen Idee betrachtet werden, da es bei der Bearbeitung vielfältiger inner- und außermathematischer Problemstellungen über verschiedene Inhaltsbereiche hinweg Anwendung findet (Krüger, 2019; Vohns, 2016). In der Literatur gibt es unterschiedliche Beschreibungen und Schwerpunktsetzungen in Bezug auf dieses Konstrukt, was u.a. zu verschiedenen Unterrichtsgestaltungen und Förderansätzen führen mag. Im EU-Projekt FunThink werden Lehr-Lern-Materialien zur Förderung des funktionalen Denkens entwickelt. Um Beschreibungen und Ansätze aus der Literatur um (nationale) Besonderheiten und Konkretisierungen für die Praxis zu ergänzen, wurden Interviews mit 34 Expert*innen aus dem mathematikbezogenen Bildungsbereich in fünf europäischen Ländern geführt (Deutschland, Niederlande, Polen, Slowakei, Zypern). Auf diesem Weg konnte zudem exemplarisch für die intendierte Materialentwicklung analysiert werden, inwieweit in der Praxis Nachholbedarf in Bezug auf die Konzeptualisierung und Förderung funktionalen Denkens besteht. In diesem Beitrag werden erste Ergebnisse dieser Studie vorgestellt.

Theoretischer Hintergrund

Der Begriff funktionales Denken wurde maßgeblich durch die Meraner Reform geprägt, die ihn als verbindende Idee über verschiedene Bereiche der Schulmathematik hinweg charakterisiert hat (Krüger, 2019). Seit dieser Zeit sind im internationalen Kontext diesbezüglich vielfältige Beschreibungen und Definitionen entstanden, was auch mit unterschiedlichen Perspektiven auf Funktionen im Mathematikunterricht einhergeht (Doorman et al., 2012). So verorten Warren et al. (2006) funktionales Denken zunächst allgemein als wesentliche Komponente algebraischen Denkens, während Smith (2008) konkret das Darstellen und Verallgemeinern als wesentliche Charakteristika hervorstellt. Ähnlich wie Vollrath (1989), der funktionales Denken als eine für den Umgang mit Funktionen typische Denkweise beschreibt, fassen Cañadas et al. (2016) Themen, Methoden und Zusammenhänge in Bezug auf Funktionen unter diesen Begriff. Pittalis et al. (2020) verbinden einige dieser Ansätze und verstehen unter funktionalem Denken das Erkennen, Verallgemeinern und Abstrahieren von Zusammenhängen zwischen ko-variiierenden Mengen, sowie das Darstellen und Nutzen dieser Zusammenhänge. Wie Vollrath schon 1989 feststellt und sich auch in obigen Ausführungen zeigt,

gibt es keine einheitliche Definition des funktionalen Denkens, sondern es handelt sich um einen offenen, permanent weiterzuentwickelnden didaktischen Begriff. Unbestritten ist dabei, dass funktionales Denken nicht isoliert vom mathematischen Objekt der Funktion betrachtet werden kann. In diesem Sinne spricht man sowohl in Bezug zum funktionalen Denken als auch zum Funktionsbegriff von den Grundvorstellungen bzw. Aspekten, nämlich der Zuordnungs-, Kovariations- und Objektvorstellung (z.B. Barzel et al., 2021; Vollrath, 1989). Zur Erläuterung betrachten wir exemplarisch Zahlenfolgen, die schon ab der Grundschule thematisiert werden können (Blanton et al., 2015). Hierbei sind Zuordnungs- (z.B. am 7. Platz findet sich eine bestimmte Zahl), Kovariations- (z.B. die Zahlen nehmen mit jedem Platz um 3 zu) und Objektvorstellung (z.B. globaler Vergleich zweier Zahlenfolgen) erfahrbar. Im internationalen Kontext ist zusätzlich die Input-Output-Vorstellung als weiterer Aspekt etabliert, die z.B. im Sinne einer Funktionsmaschine auffassbar ist (Pittalis et al., 2020).

Neben dem Aufbau der genannten Grundvorstellungen sind für die Entwicklung funktionalen Denkens noch andere Komponenten bzw. Aktivitäten von Bedeutung, z.B. die Rolle von inner- vs. außermathematischen Bezügen oder der Umgang mit bzw. der Wechsel zwischen Funktionsdarstellungen (Vollrath, 1989). Insbesondere da zu erwarten ist, dass die Auffassungen von Lehrkräften Einfluss auf deren Unterrichtspraxis haben (Lloyd & Wilson, 1998), sollte geklärt und kommuniziert werden, was funktionales Denken aus Expert*innen-Sicht ausmacht und wie dies in der Schulpraxis adressiert werden kann. Vor dem Hintergrund der skizzierten vielfältigen Beschreibungen funktionalen Denkens in der Literatur stellen sich die Forschungsfragen: Was verstehen Expert*innen aus dem mathematikbezogenen Bildungsbereich unter funktionalem Denken? Wie kann dieses Konstrukt aus Sicht der Expert*innen im Unterricht adressiert werden?

Methode

Für diese Studie wurden Leitfaden-Interviews mit 34 Expert*innen aus dem mathematikbezogenen Bildungsbereich geführt. Diese reichten von erfahrenen Mathematik-Lehrkräften aus Grund- und Sekundarschulen bis hin zu Mathematikdidaktik-Professor*innen und Lehrplanentwickler*innen. Dabei wurden in den beteiligten Ländern Deutschland, Niederlande, Polen, Slowakei und Zypern je nach Verfügbarkeit von Expert*innen zwischen fünf und neun Interviews geführt. Die Expert*innen wurden u.a. gefragt, was sie unter funktionalem Denken verstehen und wie dies ihrer Meinung nach im Unterricht adressiert werden kann. Die transkribierten Antworten wurden durch qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2010) ausgewertet.

Ergebnisse und Diskussion

Tabelle 1 stellt überblicksartig dar, welche Aspekte funktionalen Denkens die Expert*innen nannten sowie ob sie Bezug auf eine inner- vs. außermathematische Adressierung im Unterricht nahmen. Insgesamt ist zu beachten, dass der Begriff des funktionalen Denkens nicht allen Interviewten bekannt war, weswegen bei Bedarf zu Beginn des Interviews eine kurze Erläuterung erfolgte. In den Interviews fiel auf, dass die Expert*innen aus Deutschland, Zypern und Polen maßgeblich auf die oben dargestellten Funktionsaspekte eingingen. Dabei zeigte sich insbesondere, dass in Deutschland im Vergleich zu den anderen beteiligten Ländern der Input-Output-Aspekt gänzlich fehlt. Dies lässt sich durch die mangelnde Bedeutung dieses Aspekts in der deutschsprachigen Literatur erklären. Hingegen wurde der Zuordnungsaspekt in der deutschen Stichprobe von allen Expert*innen genannt. Eine mögliche Erklärung hierfür kann die starke Betonung dieses Aspekts in vielen Definitionen von Funktionen, besonders in Schulbüchern, sein.

In Hinblick auf die inner- vs. außermathematische Adressierung des funktionalen Denkens im Unterricht bezogen sich die Expert*innen vermehrt auf situative Beispiele mit Alltagsbezug. Die Kategorie dieser außermathematischen Adressierung beinhaltet Beispiele zum Modellieren, Argumentieren und Rechnen mit Sachsituationen. Eine innermathematische Behandlung wurde hingegen seltener thematisiert. Dies war besonders bei den deutschen Expert*innen zu beobachten, findet sich jedoch weniger deutlich auch in den meisten anderen Substichproben. In der polnischen Stichprobe nannte die gleiche Anzahl an Expert*innen außer- wie innermathematische Bezüge.

	Aspekte				Adressierung	
	Z	K	O	IO	A	I
Deutschland (n = 9)	9	7	6	0	9	3
Niederlande (n = 8)	2	3	4	4	7	5
Polen (n = 5)	5	2	4	3	4	4
Slowakei (n = 6)	3	4	2	1	6	2
Zypern (n = 6)	4	4	3	2	6	5

Tabelle 1: Übersicht der genannten Aspekte und Adressierung funktionalen Denkens
Erläuterungen zu den Abkürzungen: Aspekte: Z - Zuordnung, K - Kovariation, O - Objekt, IO - Input-Output; Adressierung: A - außermathematisch, I - innermathematisch

Diese erste grobe Darstellung der Ergebnisse zeigt deutliche Unterschiede in den Auffassungen zum funktionalen Denken zwischen den befragten Expert*innen der einbezogenen Länder. Eine detailliertere Betrachtung erfolgt während des Vortrags.

Acknowledgement

Das Erasmus+ Projekt FunThink wird durch die EU kofinanziert. Die Unterstützung der Europäischen Kommission für die Erstellung dieser Veröffentlichung stellt keine Billigung des Inhalts dar, welcher nur die Ansichten der Verfasser wiedergibt, und die Kommission kann nicht für eine etwaige Verwendung der darin enthaltenen Informationen haftbar gemacht werden.

Literatur

- Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen*. Springer.
- Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511–558. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.5.0511>
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87–103. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004>
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P. & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: From repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(6), 1243–1267.
- Krüger, K. (2019). Functional thinking: The history of a didactical principle. In H.-G. Weigand, W. McCallum, M. Menghini, M. Neubrand, & G. Schubring (Hrsg.), *The legacy of Felix Klein* (S. 35–54). Springer International Publishing.
- Lloyd, G. M. & Wilson, M. (1998). Supporting innovation: The impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(3), 248–274.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Hrsg.), *Algebra in the early grades* (S. 133–160). Erlbaum. <https://doi.org/10.4324/9781315097435-6>
- Vohns, A. (2016). Fundamental ideas as a guiding category in mathematics education – Early understandings, developments in German speaking countries and relations to subject matter didactics. *Journal für Mathematik Didaktik* 37(1), 225–254.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Warren, E. A., Cooper, T. J. & Lamb, J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 208–223.