

Luisa-Marie HARTMANN, Münster, Janina KRAWITZ, Münster & Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Modellieren beim Problem Posing – Modellierungsaktivitäten beim Problem Posing zu realweltlichen Situationen

Das Lösen von mathematischen Problemen ist eine zentrale Grundlage für das Betreiben von Mathematik. Außerhalb des Schulunterrichts liegen diese Probleme jedoch nur selten vorgefertigt vor und müssen zunächst entwickelt werden. Die Entwicklung eigener Probleme (*Problem Posing*) hat in den letzten Jahren in der mathematikdidaktischen Forschung stark an Bedeutung gewonnen. Insbesondere gilt das Problem Posing als ein gewinnbringender Ansatz zur Förderung des Problemlösens, da die Entwicklung eigener Probleme wichtige Problemlöseprozesse anspricht (Cai & Leikin, 2020). Das Modellieren kann als Problemlösen realweltlicher Probleme charakterisiert werden. Demnach ist es möglich, dass Problem Posing zu gegebenen realweltlichen Situationen (*modellierungsbezogenes Problem Posing*) auch zur Förderung des mathematischen Modellierens gewinnbringend eingesetzt werden kann. Bisher existiert nur wenig Forschung zum Problem Posing aus Modellierungsperspektive. Um das Potential des Problem Posings für das Modellieren zu untersuchen, soll die Verbindung zwischen den Problem Posing und Modellierungsprozessen aus einer kognitiven Perspektive analysiert werden.

Modellieren und Problem Posing

Im Mathematikunterricht beginnt das mathematische Modellieren typischerweise mit einem realweltlichen Problem, das zunächst verstanden, vereinfacht und strukturiert werden muss, um ein angemessenes Situations- und Realmodell zu bilden und darauf aufbauend ein mathematisches Modell zur Lösung zu entwickeln (Blum & Leiß, 2005). Die Entwicklung eigener Probleme basierend auf realweltlichen Situationen, wie beispielsweise der Situation ‚Seilbahn‘ in Abb. 1, kann als modellierungsbezogenes Problem Posing bezeichnet werden.

Über 90 Jahre fuhr die Nebelhornbahn zahlreiche Gäste in die Höhe. Nun darf sie in den wohlverdienten Ruhestand. Ab Sommer 2021 soll eine neue Seilbahn begeisterte Outdoor-Fans in die Berge am Nebelhorn befördern. Ziel des Projekts ist es, lange Wartezeiten zu vermeiden, sitzende Beförderung mit optimaler Aussicht auf jedem Platz zu ermöglichen und die Förderleistung zu erhöhen.

Technische Daten der alten Nebelhornbahn:
Art: Großkabinen-Pendelbahn
Gewicht leere Kabine: 1600 kg
Gewicht volle Kabine: 3900 kg
Höhe Talstation: 1933 m
Höhe Bergstation: 2214,2 m
Horizontaler Abstand: 905,77 m
Fahrtgeschwindigkeit: 8 m/s
Förderleistung: 500 Personen/h
Antrieb: 120 PS



Abb. 2: Beschreibung der realweltlichen Situation ‚Seilbahn‘

Um Probleme zu entwickeln, muss die gegebene Situation verstanden und im Hinblick auf Möglichkeiten zur Entwicklung eines Problems analysiert werden (Baumanns & Rott, 2018). Dazu muss zwischen relevanten und irrelevanten Informationen differenziert werden und Beziehungen zwischen den relevanten Informationen müssen hergestellt werden (Bonotto & Santo, 2015). Auf Grundlage dieser Beziehungen können mögliche mathematische Probleme generiert und im Hinblick auf die Kohärenz und Lösbarkeit evaluiert werden (Baumanns & Rott, 2018). Die damit verbundene tiefgehende Analyse der gegebenen Situation kann bereits Modellierungsaktivitäten beinhalten, die für die Konstruktion eines adäquaten Realmodells notwendig sind und gewinnbringend für den Lösungsprozess sind (Hartmann et al., 2021). Diesen theoretischen Überlegungen zufolge kann modellierungsbezogenes Problem Posing einen positiven Einfluss auf den nachfolgenden Modellierungsprozess haben. Empirische Studien liefern erste Hinweise, die diese Überlegungen stützen. So zeigte sich, dass Studierende bei der Lösung selbstentwickelter Probleme zu realweltlichen Artefakten (z. B. Rechnungen aus dem Supermarkt) Aspekte der realen Welt in ihren Lösungsprozess einbeziehen. Darüber hinaus zeigten Prozessanalysen, dass die Entwicklung eines Problems bereits Planungen einer möglichen Lösungsstrategie beinhaltet (Baumanns & Rott, 2018). Die damit einhergehende Antizipation möglicher Lösungsschritte kann bereits Aktivitäten beinhalten (z.B. Strukturierung und Mathematisierung), die zur Lösung des selbstentwickelten Problems notwendig sind. Allerdings fehlt es bisher an systematischen Untersuchungen zu den Modellierungsaktivitäten, die im Rahmen des modellierungsbezogenen Problem Posings stattfinden.

Das übergeordnete Ziel der Untersuchung ist, die Verbindungen zwischen dem Problem Posing und dem Modellieren aufzudecken. Dafür wird das Auftreten der Modellierungsaktivitäten im Problem Posing Prozess untersucht. Dies führt zu folgenden Forschungsfragen:

- Welche Modellierungsaktivitäten finden während des modellierungsbezogenen Problem Posings statt?
- Im Rahmen welcher Problem Posing Aktivitäten treten die Modellierungsaktivitäten auf?

Methode

Zur Beantwortung der Forschungsfragen nahmen sieben angehende Mathematiklehrkräfte der Universität Münster (vier Frauen, drei Männer, Alter: 20–26 Jahre) an der Studie teil. Zur Datenerhebung wurde ein qualitatives Design bestehend aus den Methoden des Lauten Denkens und einem Stimulated

Recall, der offen gebliebene Aspekte fokussierte, durchgeführt. Den angehenden Lehrkräften wurden drei realweltliche Situationen präsentiert, zu denen sie zunächst aufgefordert wurden, ein Problem zu entwickeln und es anschließend zu lösen. Die realweltlichen Situationen entstammen Modellierungsaufgaben und wurden durch weitere authentische Informationen ergänzt, um die Generierung einer Vielzahl von Problemen zu ermöglichen. Die aufgezeichneten Videos der Entwicklung und Bearbeitung sowie des Stimulated Recalls wurden zur Datenanalyse transkribiert, sequenziert und mit Hilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) ausgewertet. Das Kategoriensystem (siehe Abb. 2) wurde induktiv-deduktiv gebildet.

Problem Posing Aktivitäten		Modellierungsaktivitäten	
Verstehen	Verstehen der realweltlichen Situation und Informationen auf Grundlage der Situationsbeschreibung.	Verstehen	Verstehen der realweltlichen Situation und Informationen auf Grundlage der Situationsbeschreibung.
Exploration	Entdecken/ Sammeln relevanter Informationen und Organisation der Informationen	Vereinfachen/ Strukturieren	Differenzierung zwischen relevanten und irrelevanten Informationen, Identifizierung fehlender Informationen, Treffen von Annahmen bezüglich fehlender Informationen und Identifizierung von Lösungsschritten.
Generierung	Aufwerfen und Formulierung möglicher Fragestellungen und Festlegung einer Fragestellung.	Mathematisieren	Übersetzung der ausgewählten Informationen in ein mathematisches Modell.
Problemlösen	Planung eines mehr oder weniger konkreten Weges zur Lösung der generierten Fragestellung.	Math. Arbeiten	Ausführen der mathematischen Operationen zur Generierung eines mathematischen Resultats.
Evaluation	Bewertung möglicher Fragestellungen auf der Grundlage individueller Kriterien.	Interpretieren	Rückinterpretation des mathematischen Ergebnisses in Bezug auf die realweltliche Situation und Fragestellung.
		Validieren	Überprüfung des Modells und des Resultats auf Plausibilität durch Rückbezug auf die realweltliche Situation.

Abb. 3: Kategoriensystem für die Problem Posing und Modellierungsaktivitäten

Alle Daten wurden von der Erstautorin selbst und mehr als 50% von einer zweiten unabhängigen Person zur Bestimmung der Interrater-Reliabilität kodiert. Die Interrater-Reliabilitäten waren im akzeptablen Bereich ($\kappa \geq .76$).

Ergebnisse und Diskussion

Die Analyse der Problem Posing Prozesse ergab, dass alle Modellierungsaktivitäten außer dem Validieren bereits am modellierungsbezogenen Problem Posing beteiligt waren. Insbesondere die Modellierungsaktivitäten Verstehen, Vereinfachen und Strukturieren konnten bereits während der Entwicklung identifiziert werden. Das Verstehen war am Problem Posing beteiligt, da es wesentlicher Bestandteil beider Konzeptualisierungen (Problem Posing und Modellieren) ist. Das Vereinfachen und Strukturieren ähnelt der Exploration des Problem Posings, da beide Aktivitäten darauf abzielen, die gegebene Situation eingehend zu analysieren. Die beiden Aktivitäten traten in der Regel gemeinsam auf. Daher kann es sein, dass beim Problem Posing bereits

ein Situations- und Realmodell zur gegebenen realweltlichen Situation entwickelt wurde. Das Mathematisieren war weniger stark am modellierungsbezogenen Problem Posing beteiligt, trat aber typischerweise zusammen mit dem Problemlösen auf. Problemlöseaktivitäten während des Problem Posings können Problemlösenden helfen, mögliche Lösungsschritte zu planen, indem mathematische Modelle antizipiert werden. Die übrigen Modellierungsaktivitäten (mathematisches Arbeiten, Interpretieren und Validieren) traten nur selten oder gar nicht auf, sodass diese Aktivitäten möglicherweise nicht durch das modellierungsbezogene Problem Posing ausgelöst werden.

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass insbesondere die Modellierungsaktivitäten während des Problem Posings auftreten, die einen direkten Bezug zur realen Welt haben. Folglich könnte das modellierungsbezogene Problem Posing eine vertiefte Analyse der realweltlichen Situation anregen und somit helfen, Schwierigkeiten, die auf oberflächlich gebildete Realmodelle zurückzuführen sind, zu überwinden (Krawitz et al., 2018). Zukünftige Studien sollten untersuchen, wie selbstentwickelte Modellierungsaufgaben gelöst werden und ob Problem Posing die Modellierungsleistung positiv beeinflussen kann. Zusammenfassend zeigen die Ergebnisse eine enge Verbindung zwischen dem Problem Posing und dem Modellieren und legen nahe, dass modellierungsbezogenes Problem Posing ein innovativer und gewinnbringender Ansatz zur Förderung des Modellierens sein könnte.

Literatur

- Baumanns, L. & Rott, B. (2018). Problem Posing – Ergebnisse einer empirischen Analyse zum Prozess des strukturierten Aufwerfens mathematischer Probleme. In B. Rott, A. Kuzle & R. Bruder (Hrsg.), *Herbsttagung des GDM Arbeitskreises Problemlösen 2017* (S. 37–51). WTM.
- Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Bonotto, C. & Santo, L. D. (2015). On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. In F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Hrsg.), *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (S. 103–124). Springer.
- Cai, J. & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 287–301.
- Hartmann, L.-M., Krawitz, J. & Schukajlow, S. (2021). Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modeling problems? *ZDM*, 53(4), 919–935.
- Krawitz, J., Schukajlow, S., van Dooren, W. (2018). Unrealistic responses to realistic problems with missing information: what are important barriers? *Educational Psychology*, 38(10), 1221–1238.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse*. Beltz.