

Gudula VOLBERS, Münster, Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster,  
Gilbert GREEFRATH, Münster & Janina KRAWITZ, Münster

## **Zeichnen einer Skizze - (K)eine geeignete heuristische Strategie zur Lösung nicht-linearer Probleme?**

Während das Anfertigen einer Skizze im Allgemeinen als leistungsstarke Strategie zur Lösung mathematischer Probleme gilt, stellten De Bock et al. (2003) überraschenderweise fest, dass sich das Zeichnen einer Skizze negativ auf die Leistung von Lernenden beim Lösen von Aufgaben zu nicht-linearen Geometrieproblemen auswirkt. Als wichtigen Grund für diesen negativen Effekt erkannten die Autoren, dass das Anfertigen einer Skizze die Tendenz zur sogenannten Linearen Übergeneralisierung verstärkte. Eine an die Ergebnisse der Analyse von De Bock et al. (2003) anknüpfende Studie von Krawitz & Schukajlow (2020) deutete an, dass das Zeichnen einer Skizze neben Linearen Übergeneralisierungen auch andere Fehler triggern muss. Ziel dieser Untersuchung ist es, weitere Faktoren für den negativen Effekt der Skizzenerstellung auf die Leistung zu finden. Diese sollen perspektivisch Ansätze für Interventionen geben, die eine produktive Nutzung selbst erstellter Skizzen bei der Bearbeitung von nicht-linearen Geometrieproblemen ermöglichen. Dafür werden in einem ersten Schritt die Daten der Studie von Krawitz & Schukajlow (2020) reanalysiert.

### **Lineare Übergeneralisierung, selbsterstellte Skizzen und nicht-lineare Geometrieprobleme – ein kurzer Überblick**

Das Phänomen der Linearen Übergeneralisierung beschreibt die Tendenz vieler Schüler\*innen, lineare Modelle in nicht-linearen Situationen anzuwenden (De Bock et al., 2003). Am intensivsten erforscht ist diese Erscheinung bei der Lösung nicht-linearer Geometrieprobleme (z.B. de Bock et al., 2003; De Bock et al., 2007). Gemeint sind Aufgaben zu Flächeninhalten und Volumina skaliertes Figuren und Körper wie im folgenden Beispiel:

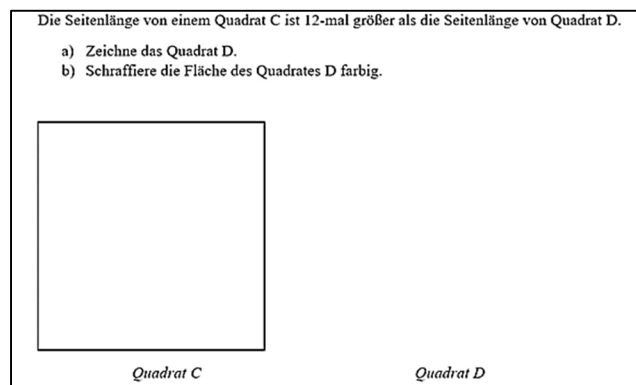
Die Seitenlänge von einem Quadrat C ist 12-mal größer als die Seitenlänge von Quadrat D. Wenn der Flächeninhalt von Quadrat C  $1440 \text{ cm}^2$  groß ist, wie groß ist dann der Flächeninhalt von Quadrat D?

**Abb. 1:** Beispielaufgabe zu nicht-linearen Geometrieproblemen aus

Statt der korrekten Lösung –  $A_D = 1400 \text{ cm}^2 : 12^2 = 10 \text{ cm}^2$  oder einer entsprechenden Lösung mit Hilfe der Flächeninhaltsformel – wählen viele Schüler\*innen den falsch linearen Lösungsweg  $A_D = 1440 \text{ cm}^2 : 12 = 120 \text{ cm}^2$ .

In der Forschung werden positive Effekte auf die Leistung durch das Zeichnen einer Skizze als angenommen. Das Erstellen einer Skizze soll als Organisationsstrategie helfen, einzelne Informationen im Text zu verknüpfen, das

Arbeitsgedächtnis entlasten und so Kapazitäten für die weitere Informationsverarbeitung freisetzen sowie Schlussfolgerungen für weitere Schritte im Lösungsprozess erleichtern (Cox, 1999). Wichtiger Indikator für die positive Wirkung einer selbsterstellten Skizze ist die Skizzenqualität, die durch Korrektheit und Vollständigkeit der Skizze hinsichtlich der Schlüsselinformationen und ihrer Beziehungen definiert wird. Ein weiterer Faktor für eine positive Wirkung ist das strategische Wissen über das Erstellen und den Nutzen einer Skizze (Krawitz & Schukajlow, 2020; Rellensmann et al., 2017). Entgegen der Vermutung, dass Skizzen auch bei der Lösung nicht-linearer Geometrie-probleme hilfreich sind, stellten De Bock et al. (2003) fest, dass das Zeichnen einer Skizze die Leistung der Lernenden durch die starke Zunahme der falsch linearen Lösungen sogar negativ beeinflusste. Ein vermuteter Grund ist, dass das Anfertigen der Skizze den Fokus der Schüler\*innen auf lineare Größen bzw. Tätigkeiten (z.B. Messen der Seitenlänge, Berechnung der neuen Seitenlänge) lenkte. In einer an diese Ergebnisse anknüpfenden Studie untersuchten Krawitz & Schukajlow (2020), ob eine verbesserte Skizzenqualität die Tendenz zur Linearen Übergeneralisierung zumindest abschwächen kann. Während die Experimentalgruppe D (Drawing) vor der Aufgabe zur Berechnung des Flächeninhalts bzw. des Volumens (siehe Abb. 1) nur auf-gefordert wurde, die skalierte Figur zu zeichnen (Abb. 2, Aufgabenteil a), sollte die Experimentalgruppe DQ die Fläche zusätzlich markieren, um den Fokus der Schüler\*innen auf die gesuchte Größe zu lenken (Abb. 2, Aufgabenteil b).



**Abb. 2:** Beispiel: Aufforderung zum Zeichnen und Schraffieren

Die Ergebnisse der Studie bestätigten die negative Wirkung der Zeichenstrategie auf die Leistung und die Zahl der Linearen Übergeneralisierungen. Die verbesserte Zeichenstrategie reduzierte zwar die Zahl der Linearen Übergeneralisierungen, verbesserte jedoch nicht die Leistung der Schüler\*innen. Für beide Zeichenstrategien wurde deutlich, dass die Skizzenerstellung die Leistung stärker (negativ) beeinflusste als die Zahl der Linearen Übergeneralisierungen, das Zeichnen der Skizze also auch andere Fehler triggern

muss. Um diesen Befund zu erklären, ergaben sich folgende Forschungsfragen:

- Wie beeinflusst die Zeichenstrategie die Wahl des Lösungsweges allgemein und für richtige bzw. falsche Lösungen?
- Welche Rolle spielt die Skizze bei der Berechnung der Flächeninhalte bzw. Volumina allgemein und innerhalb der richtigen bzw. falschen Lösungen?

## **Methode**

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden die vier relevanten Aufgaben der 198 Testhefte der Studie von Krawitz & Schukajlow (2020) reanalysiert. Neben der dargestellten Aufgabe (Abb. 1 und 2) handelte es sich um analoge Aufgaben Kreis, Kugel und Würfel betreffend. Die Stichprobe bestand aus 198 Schüler\*innen (57,2% weiblich,  $M = 16,15$  Jahre alt) der Klassen 9 bis 11 von 4 Gymnasien und einer Gesamtschule. Die folgenden drei Gruppen wurden betrachtet:

- Kontrollgruppe K: Keine Zeichenaufforderung (41 Testhefte)
- Experimentalgruppe D: Aufforderung zum Zeichnen (77 Testhefte)
- Experimentalgruppe DQ: Aufforderung zum Zeichnen und Markieren (80 Testhefte).

Die Aufgaben wurden mit Hilfe eines in einem deduktiv-induktiven Vorgehen erweiterten Kodiermanuals hinsichtlich der gewählten Lösungswege und der in den Lösungen erkennbaren Skizzennutzung analysiert. Alle Daten wurden von der Erstautorin und zwei weiteren Personen kodiert. Die Interrater-Reliabilitäten waren im akzeptablen Bereich (Fleiss-Kappa  $\kappa \geq 0,715$ ).

## **Ergebnisse und Diskussion**

Die Analyse zeigte signifikante Unterschiede zwischen der Kontrollgruppe einerseits und den Experimentalgruppen andererseits hinsichtlich der Zahl der Linearen Übergeneralisierungen sowie der Lösungswege ‚Formellösung‘ und ‚Lösung mit Hilfe der Skizze‘. Diese Unterschiede entstanden vor allem innerhalb der falschen Lösungen. Die deutliche Mehrheit der korrekten Lösungen beruhte in allen Gruppen auf einer Formellösung. Zwischen den Zeichengruppen gab es keine signifikanten Unterschiede die gewählten Lösungswege betreffend. Eine Nutzung der Skizze in den Zeichengruppen erfolgte nur in ca. 15% der Aufgaben, und zwar meist für die fälschliche Berechnung der Größe der gezeichneten Figur. Dies war neben der linearen Lösung in beiden Zeichengruppen eine weitere bedeutsame Fehlerquelle. Nur wenige Schüler\*innen haben – beispielsweise mit Hilfe einer geeigneten

Rasterung der großen Fläche bzw. des großen Volumens – das Verhältnis der Flächeninhalte bzw. Volumina hergeleitet. Eine Beschriftung der Skizze mit relevanten Informationen erfolgte nur einmal.

Insgesamt wurde deutlich, dass ein Großteil der Schüler\*innen die Skizze nicht als Heuristik zur Herleitung des Größenverhältnisses zwischen den Flächeninhalten bzw. Volumina genutzt hat. Ein Grund hierfür könnte sein, dass die Schüler\*innen die Aufgabe nicht als Problemaufgabe, sondern als eine – mit Hilfe von Formeln zu lösende – Routineaufgabe ansahen und daher bei auftretenden Problemen (fehlende Formelkenntnisse, Probleme bei Termumformungen) eine einfache und intuitive, aber falsche Lösung wählten statt leistungsstarke Heuristiken anzuwenden (De Bock et al., 2007). Unklar bleibt, ob die Schüler\*innen über das nötige strategische Wissen (Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017) zur Nutzung der Skizze verfügten - hier war eine Erfassung des Größenverhältnisses durch eine zumindest gedankliche Rasterung der großen Fläche bzw. des großen Volumens nötig. Hinderlich für eine heuristische Nutzung der Skizze könnte auch der Zeitpunkt der Skizzenerstellung vor dem Stellen der Aufgabe zur Berechnung sein. Die mit der Skizzenerstellung verbundenen kognitiven Prozesse standen somit nicht im Zusammenhang mit der Lösung dieser Aufgabe (Cox et al., 1999). In vielen Fällen wird durch die nachträgliche Analyse nicht ersichtlich, ob und wie die Skizze die Wahl des Lösungsweges oder den Lösungsprozess beeinflusst hat. Hier soll eine Eye Tracking Studie Aufschluss geben.

## Literatur

- Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9(4), 343–363.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The Illusion of Linearity: From Analysis to Improvement*. Springer.
- De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W. & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modeling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, 13(4), 441–463.
- Krawitz, J. & Schukajlow, S. (2020). When can making a drawing hinder problem solving? Effect of the drawing strategy on linear overgeneralizations and problem solving. *Frontiers in Psychology*, 11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00506>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78.