

Thomas BAUER, Marburg, Eva MÜLLER-HILL, Rostock,  
Silke NEUHAUS-ECKHARDT, Bad Frankenhausen &  
Stefanie RACH, Magdeburg

## **„Illustrieren am Beispiel“ beim Beweisverstehen: Beispielkonstruktionsprozesse von Mathematikstudierenden**

### **Einleitung**

Beweisverstehen ist für Studierende neben der Beweiskonstruktion eine der wesentlichen Anforderungssituationen im Bereich des Beweisens, etwa beim Nachvollziehen von Beweisen in Vorlesungen, Übungen oder Lehrbüchern. Jedoch zeigen viele Studierende Schwierigkeiten, Beweise zu verstehen (vgl. z.B. Selden, 2012; Weber, 2001). In der fachdidaktischen Forschung wird deshalb das Thema ‚Beweisverstehen‘ intensiv und facettenreich diskutiert (vgl. Sommerhoff & Brunner, 2021). Insbesondere werden unterschiedliche Unterstützungsstrategien für Verstehensprozesse der Studierenden untersucht, darunter das sogenannte ‚Illustrieren am Beispiel‘ (vgl. Mali, 2014; Mills, 2014), also die Illustration einzelner Beweiszeilen durch Beispiele. Dieser Beitrag stellt erste qualitative Erkenntnisse einer Mixed-Methods-Studie zu Möglichkeiten vor, Beweisverstehen durch Illustrieren am Beispiel in den Zusammenhang der bereits in Bauer et al. (2021) beschriebenen quantitativen Ergebnisse zu setzen und diskutiert mögliche Implikationen für das weitere Vorgehen.

### **Illustrieren von Beweisen durch Beispiele – Forschungsstand und offene Fragen**

Der aktiven Konstruktion von Beispielen beim Beweisverstehen wird ein höherer Erfolg im Vergleich zum passiven Nachvollziehen von vorgegebenen Beispielen zugeschrieben (vgl. Chi, 2009). In der in Bauer et al. (2021) beschriebenen Interventionsstudie, in der Studierende zu einem Beweis ein illustrierendes Beispiel konstruieren sollten bzw. mit einem vorgelegten Beispiel arbeiten sollten, konnten wir jedoch keinen signifikanten Unterschied im Beweisverständnis zwischen konstruktiver und passiver Gruppe feststellen. Eine weitergehende, qualitative Analyse der vorhandenen Daten zeigte dabei zunächst, dass die teilnehmenden Studierenden häufig keine aus Sicht von Expert\*innen hilfreichen Beispiele konstruiert haben. In (ebd.) diskutieren wir ausgehend von diesen Ergebnissen verschiedene mögliche Erklärungen und Implikationen. In der Literatur findet sich bei unterschiedlichen Autor\*innen etwa die Ansicht, dass der Erfolg bei Strategien wie ‚Illustrieren am Beispiel‘ an den Grad der Expertise ihrer Anwender\*innen gebunden ist (z.B. Kalyuga et al., 2003). Eine mögliche Erklärung für unsere Ergebnisse

wäre demnach, dass Studierende mit der Strategie ‚Illustrieren am Beispiel‘ selbst noch nicht hinreichend vertraut sind, um sie effektiv anwenden zu können, etwa weil sie nicht genug darüber wissen, welche Eigenschaften ein Beispiel hilfreich machen. Aus diesem Erklärungsansatz haben wir als eine mögliche Implikation abgeleitet, für die Förderung von Beweisverstehen durch das Illustrieren am Beispiel die Studierenden zunächst mit der Strategie selbst besser vertraut zu machen, etwa Gütekriterien für hilfreiche Beispiele zu explizieren.

Um unsere Erklärungsansätze und Implikationen genauer zu hinterfragen und durch weitere empirische Ergebnisse auszuschärfen bzw. zu widerlegen, haben wir die quantitativ angelegte und auf die konstruierten Beispiele und das (dadurch) erlangte Beweisverständnis als ‚Produkte‘ ausgerichtete Interventionsstudie aus Bauer et al. (2021) erweitert und dabei stärker die Arbeits- und damit Beispielkonstruktions- und Verstehensprozesse fokussiert. Dafür haben wir eine qualitative Interviewstudie im Sinne eines Mixed-Methods-Ansatzes gewählt.

## **Methode**

Die Stichprobe der Interviewstudie bestand aus elf Studierenden aus Mathematik-Lehramtsstudiengängen an drei Universitäten, die alle eine Fachvorlesung zur Analysis 1 gehört hatten. Den Studierenden wurde ein Beweis zum Satz über monotone Teilfolgen einer reellwertigen Folge vorgelegt (vgl. Bauer et al., 2021). Zusätzlich wurde der erste (kürzere) der zwei im Beweis betrachteten Fälle anhand eines Beispiels illustriert. Die Studierenden wurden dann aufgefordert, diesen Fall zusammen mit der vorgelegten Beispiellillustration nachzuvollziehen und für den zweiten Fall ebenfalls ein Beispiel zur Illustration der einzelnen Beweisschritte zu konstruieren. Um die Denkprozesse zu erfassen, wurden die Studierenden gebeten, laut zu denken. Zum jetzigen Stand wurde ein erster Materialdurchgang vorgenommen als Vorschritt zur späteren Gliederung der Bearbeitungsprozesse, zur Sequenzauswahl und Diskrimination von Bedeutungseinheiten mit Blick auf Phänomene, die im Zusammenhang mit der Anwendung der Strategie ‚Illustrieren am Beispiel‘ auftreten.

## **Einblick in erste Ergebnisse der Untersuchung von Arbeitsprozessen**

Bereits die Ergebnisse dieser Datensichtung weisen, im ersten Schritt zunächst als allgemeine Beschreibungen formuliert, über unsere bisherigen Erklärungsansätze und Förderimplikationen hinaus. So scheint ein Problem mancher Studierender bei der Beispiellillustration weniger in der Strategie *an sich* zu liegen, im Sinne einer fehlenden Heranführung an diese Strategie oder an mangelnder Einsicht und Zustimmung dazu (auf Metaebene), dass

Beispiele für das Beweisverstehen hilfreich sind. Auch scheinen diese Studierenden, ebenfalls auf der Metaebene, offenbar zu wissen, was mit einer Beispielillustration *prinzipiell* für das Beweisverstehen erreicht werden soll, und können erkennen, ob ihr Beispiel hierfür grundsätzlich eher günstig und hilfreich ist oder nicht. Größere Schwierigkeiten offenbaren sich hingegen bei der konkreten Ausführung und ggf. nötigen Variation einer Beispielkonstruktion, also in den Handlungsschritten (auf Objektebene), die auf (Meta-)Einsichten der gerade genannten Art folgen würden.

## **Diskussion**

Die ersten Ergebnisse der Interview-Studie deuten darauf hin, dass über die in Bauer et al. (2021) formulierte Implikation, die Studierenden expliziter an die Strategie des Illustrierens am Beispiel an sich heranzuführen, weitere Unterstützungsschritte angezeigt sind, die das mögliche Leistungsspektrum von Beispielen in einem weitergehenden Sinne bearbeiten. Die Beurteilung, in welchem Maße ein gewähltes Beispiel zur Illustration eines einzelnen Beweisschritts wirklich genug leistet, oder ob die Suche nach einem hilfreicherem Beispiel ertragreich wäre, setzt unter anderem ein vertieftes Verständnis für spezifische Funktionen von Beispielen voraus. Ob eine davon geleitete Suche nach Beispielen dann aussichtsreich ist, hängt auch vom Repertoire an Beispielen und Variationsmöglichkeiten ab, das dem Individuum zur Verfügung steht, also vom inhaltlichen Wissen.

In diesem Sinne bleiben diese Ergebnisse aber mit der bereits erwähnten Einschätzung, dass das Illustrieren am Beispiel insbesondere eine erfolgreiche *Expertenstrategie* ist, verträglich. Diese Verträglichkeit kann man etwa unter Rückgriff auf das Konzept des *example space* weiter begründen (Watson et al., 2013): Im Gegensatz zu Expert\*innen verfügen die Studierenden möglicherweise noch nicht über einen hinreichend reichhaltigen *example space*; darüber hinaus fehlt ihnen möglicherweise eine ausreichend differenzierte Sicht auf Funktionen von Beispielen und darauf bezogene Gütekriterien, um die Strategie effektiv einsetzen zu können.

Grundlegend für eine wirksame Förderung von Beweisverstehen durch die Strategie des Illustrierens am Beispiel wäre demnach der verschränkte Auf- und Ausbau von geeigneten *example spaces* und von Verständnis für spezifische Funktionen und Gütekriterien von Beispielen bei der Illustration von Beweisen bei den Studierenden. In weiteren Auswertungsschritten im Rahmen der Studie soll als Basis zunächst untersucht werden, welche Varianten von Verschränkung bei Studierenden schon beobachtet werden können, ins-

besondere welche Arten und Variationen von Beispielen Studierende wählen, und welche Funktionen und Gütekriterien sie für diese Beispiele in Bezug auf das Beweisverstehen angeben.

Offen bleibt im Rahmen solcher erweiterter Erklärungsansätze: Warum hatte in der quantitativen Interventionsstudie die passive Gruppe, die mit einem vorgegebenen, aus Expertensicht hilfreichen Beispiel gearbeitet hat, keinen messbaren Vorteil? Auch dazu soll in weiteren Analysen der Interviewdaten der konkrete Umgang der Studierenden mit dem Beispiel bei der Illustration einzelner Beweisschritte fokussiert werden.

## Literatur

- Bauer, T., Müller-Hill, E., Neuhaus-Eckhardt, S. & Rach, S. (2021). Beweisverständnis im Mathematikstudium unterstützen: Vergleich unterschiedlicher Varianten der Strategie „Illustrieren am Beispiel“. *Journal für Mathematik-Didaktik*.  
<https://doi.org/10.1007/s13138-021-00191-6>
- Chi, M.T.H. (2009). Active-constructive-interactive: a conceptual framework for differentiating learning activities. *Topics in cognitive science*, 1(1), 73–105.
- Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P. & Sweller, J. (2003). The expertise reversal effect. *Educational Psychologist*, 38(1), 23–31.
- Mali, A. (2014). Lecturers' use of generic examples: the generic set. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 324–325.
- Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 106–118.
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and proving in mathematics education: the 19th ICMI study* (S. 391–422). Springer.
- Sommerhoff, D. & Brunner, E. (2021). Forschungsstand Mathematisches Argumentieren und Beweisen vom Elementar- bis zum Hochschulbereich: Eine Synthese aus drei Expert\*innenpodiumsdiskussionen. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch, & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 74–82). GDM.  
<https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/1021/1168>
- Watson, A., Sandefur, J., Mason, J. & Stylianides, G. (2013). The use of examples to provide representations in proving. *Proceedings of PME 37*, 4, 377–385.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101–119.