

Myriam BURTSCHER, Salzburg & Michael GAIDOSCHIK, Brixen

„Aufteilen“ und „Verteilen“ im Denken von Kindern: Neue Einzelfallstudien und Überlegungen zum Unterricht

Problemaufriss

In fachdidaktischer Literatur besteht Konsens darüber, dass Kinder tragfähige Grundvorstellungen zur Division aufbauen sollten, *und* dass dafür wichtig sei, dass sie Dividieren sowohl mit Handlungen des *Aufteilens* als auch solchen des *Verteilens* verbinden. Weit verbreitet ist in diesem Zusammenhang aber auch die Warnung davor, mit Kindern eine „begriffliche Unterscheidung von Verteilen und Aufteilen“ (Schipper, 2009, S. 150) anzustreben. Diese sei nicht nötig, gar „einengend“ (Hefendehl-Hebeker, 1982, S. 37) und stelle tendenziell eine Überforderung dar (so etwa Schipper, 2009, S. 150; Padberg & Benz, 2021, S. 179). Andererseits wird ebenso verbreitet das „Anlegen eines breiten begrifflichen Verständnishintergrundes für das Dividieren“ (Lorenz & Radatz, 1993, S. 140) gefordert. Diesbezüglich konkreter als andere, fordern Padberg und Benz (2021), Kinder sollten „bei *Vorgabe* einer Divisionsaufgabe dazu sowohl eine konkrete *Aufteil-* als auch eine *Verteilsituation* angeben [...] können“ (S. 178; Hervorhebung im Original); unmittelbar anschließend betonen allerdings auch sie, dass eine „begriffliche Unterscheidung [durch Grundschul Kinder] *nicht* notwendig sei“ (S. 179; Hervorhebung im Original). Schulz und Wartha (2021, S. 136) hingegen empfehlen explizit die „begriffliche Unterscheidung zwischen Situationen des Aufteilens und des Verteilens“; anfangs sollten dafür aber „andere, anschaulichere *Begriffe*“ (Hervorhebung durch uns) verwendet werden.

Möglicherweise brächte es mehr Klarheit in den Diskurs, wenn zwischen *Begriff* im wissenschaftstheoretischen Sinn (i.e., den *wesentlichen Eigenschaften einer Sache* in ihrem Zusammenhang) und der konkreten sprachlichen *Bezeichnung* (dem *Wort*) unterschieden wird. Auf dieser Basis könnte stoffdidaktisch dafür argumentiert werden, und so verstehen wir Schulz und Wartha, dass mit Kindern im Unterricht eine gemeinsame Sprache gefunden werden sollte, um den *begrifflichen Unterschied* zwischen den beiden Divisionsaspekten auch zu *benennen* und so erst *gedanklich präzise festzuhalten*.

Es mangelt freilich an empirischer Forschung dazu, ob und wie solche oder andere stoffdidaktisch begründeten Empfehlungen aus fachdidaktischen Handbüchern von Lehrkräften im Unterricht umgesetzt werden und wenn, in welcher Weise sie im Denken der Kinder ankommen. Der Mangel an einschlägiger Entwicklungs- und Evaluationsforschung ist umso bedauerlicher,

als andererseits Studien deutlich machen, dass gravierende Defizite im Bereich der Grundvorstellungen zur Division weit verbreitet sind, bei Grundschüler*innen (u.a. Bönig, 1995) wie auch darüber hinaus.

Befunde aus 11 Einzelfallstudien zur *Entwicklung von Verständnis*

Um für ein in weiterer Folge geplantes Entwicklungsforschungsprojekt eine breitere empirische Basis zu gewinnen, hat die Autorin (Burtscher, 2022) elf Kinder zweier Klassen von Mitte der 2. bis Ende der 4. Schulstufe je viermal zu deren Divisionsverständnissen interviewt. Aus beiden Klassen wurden dafür je zwei gemäß Einschätzung der Lehrkraft in Mathematik leistungsschwache, leistungsstarke und in ihren Leistungen durchschnittliche Kinder ausgewählt, von denen elf an allen Interviews teilnahmen. Ein Hauptinteresse in den Interviews galt der Frage: *Zeigen die Kinder bei Darstellungswechseln von und zu Divisionstermen Schwierigkeiten, die mit der ‚Zwiegestalt‘ der Division als Verteilen und Aufteilen in Zusammenhang stehen?*

Dafür wurden die Kinder zu allen vier Terminen zu mehrfachen Darstellungswechseln (v.a. vom Term zur Darstellung mit Material; vom Term zur Textaufgabe; von einer Textaufgabe zum Term) aufgefordert und um Erläuterungen gebeten. Die ihnen vorgelegten Textaufgaben waren sowohl solche des Aufteilens wie auch des Verteilens. Sofern sie einen vorgegebenen Term von sich aus im Sinne des Aufteilens mit Material darstellten bzw. in eine Aufteil-Geschichte einkleideten, wurden sie jeweils auch mit der alternativen Übersetzung im Sinne des Verteilens konfrontiert, und umgekehrt.

Zum *Unterricht* der Kinder wurde erhoben, dass beide Lehrkräfte bei der ersten Erarbeitung der Division in Klasse 2 zunächst bewusst nur Situationen des Aufteilens (ca. drei Wochen lang) thematisiert haben, erst ca. fünf Wochen später auch solche des Verteilens (ca. zwei Wochen). Erst in den beiden letzten Wochen vor den Sommerferien seien dann Textaufgaben zu *beiden* Aspekten behandelt worden. Beide Lehrkräfte geben an, in Klasse 2 großen Wert darauf gelegt zu haben, dass Kinder Terme selbst mit Material darstellen und zu Termen passende Textaufgaben erfinden, ohne aber die beiden Aspekte einander gegenüber zu stellen und zu vergleichen; dies sei den Lehrkräften auch im dritten und vierten Schuljahr kein Anliegen gewesen.

Ausgewählte Ergebnisse: Im Vergleich zu anderen Studien (etwa Bönig, 1995) fällt zunächst auf, dass der Wechsel *vom Term zur Materialdarstellung* fast immer gelang (in 43 von 44 Fällen von t1 zu t4), zumeist begleitet von nachvollziehbaren Erläuterungen der Kinder. Sehr klar zeigt sich bei diesem Darstellungswechsel eine (schon bei Bönig für *diesen* Wechsel festgehaltene) *Präferenz für das Aufteilen*: In 38 Fällen stellten die Kinder den vorgelegten Term von sich aus als Aufteilen dar, nur fünfmal als Verteilen.

Anders beim Wechsel *vom Term zu einer Textaufgabe*. Dieser bereitete zum einen wesentlich größere Probleme: Vier Kindern von elf gelang es in *keinem* der Interviews auf Anhieb, eine zum vorgelegten Term passende Textaufgabe zu erzählen; bei insgesamt 44 Versuchen wurden *selbständig* nur in 13 Fällen Textaufgaben inklusive Frage *passend* formuliert. Zum anderen fällt auf, dass es sich in zehn dieser 13 Fälle um *Verteil*aufgaben handelte.

Bei allen untersuchten Darstellungswechseln kam es immer wieder zu *Überlagerungen* von Aufteil- und Verteilvorstellungen; bei Übersetzungen vom Term zur Textaufgabe (,Rechengeschichte‘) waren solche wesentlich dafür, dass gerade dieser Wechsel letztlich oft nicht gelang. Typischerweise begann in solchen Fällen ein Kind mit einer Geschichte im Sinne des *gerechten Verteilens*, geriet dann aber ins Stocken – teils, weil ihm die rechnerische Lösung, teils, weil ihm die Formulierung einer passenden Frage schwerfiel. In solchen Fällen griffen Kinder dann mitunter zum Material oder fertigten eine Zeichnung an. *Dabei* erfolgte dann aber oft ein Wechsel ins Aufteilen, indem nun der *Divisor als Teilmenge* dargestellt und der Dividend entsprechend *aufgeteilt* wurde. Die Darstellung passte somit nicht zur begonnenen Geschichte; die Auflösung dieses Knotens gelang dann zumeist nicht mehr. Freilich schien es den betreffenden Kindern selbst in der Regel nicht aufzufallen, dass ihre im Laufe des Gesprächs mehrfach veränderte Geschichte bis zum Schluss nicht in eine zum Term passende Form gebracht worden war.

Umgekehrt ergaben sich beim Wechsel vom Term zur Handlung in acht von 44 Fällen Unstimmigkeiten der Art, dass Kinder mit dem Material eine zum Term passende *Aufteilhandlung* vornahm, dazu aber eine Erläuterung im Sinne einer Geschichte versuchten – und dann in eine (zur Handlung nicht passende) *Verteilgeschichte* gerieten. Ein Beispiel: Petra nimmt, um $12 : 3$ darzustellen, zwölf Würfel. Sie kommentiert: „Die musst [du] immer auf drei Kinder zum Beispiel aufteilen.“ Tatsächlich bildet sie nun *Gruppen zu je drei Würfeln* – und endet wie folgt: „Und jetzt siehst du, weil, dividiert heißt, das sollst du aufteilen auf *so* viele Kinder [...]. Also jetzt haben wir da: Vier Kinder bekommen drei Steine.“ Petra selbst stutzt nur kurz, als sie bemerkt, dass sie nicht auf *drei* Kinder (wie ursprünglich von ihr angekündigt) verteilt hat – und ändert kurzerhand die Geschichte. Sie schien nicht nachhaltig irritiert.

Nach erfolgter Darstellung wurden die Kinder, wie erläutert, auch jeweils mit der alternativen Darstellung konfrontiert und dazu befragt, ob also z.B. zum Term $24 : 6$ (falls vom Kind zuvor im Sinne des Aufteilens als $6+6+6+6$ dargestellt) auch die Darstellung $4+4+4+4+4+4$ (im Sinne des Verteilens) passe. Pro Interviewtermin meinten jeweils zwischen sieben und neun der elf Kinder, dass die Darstellung im Sinne des Aufteilens *besser* oder auch, dass *nur* diese passe, wie etwa Nico, der die Verteildarstellung von $24 : 6$

entschieden zurückwies und erklärte, dass dies vielmehr $24 : 4$ sei, "weil 24 dividiert durch sechs ist halt, dass du immer sechs wegnehmen musst. Und 24 dividiert durch vier ist, dass du immer vier wegnehmen musst."

Diskussion und Ausblick

Die elf Kinder der Studie, aus der hier nur wenige Teilergebnisse präsentiert wurden, scheiterten mehrheitlich daran, zu einem vorgelegten Divisionsterm auf Aufforderung *beide* Sichtweisen, die des Auf- und Verteilens, einzunehmen *und* den Term in beiden Aspekten *inhaltlich* zu interpretieren. Den Kindern schienen zu einem Divisionsterm mehrheitlich eher *Alltagssituationen* im Sinne des *Verteilens* in den Sinn zu kommen, während sie, *mit Material* konfrontiert, dazu neigten, den Divisor als Menge darzustellen, und damit beim *Aufteilen* landeten. Beide Präferenzen sind nachvollziehbar: Im Alltag sind Kinder vermutlich häufiger mit Verteilsituationen konfrontiert als mit Aufteilproblemen; Aufteilen lässt sich mit Material leichter darstellen. Es scheint (und wir vermuten, dass dies über die elf Einzelfälle hinausreicht), dass die beiden Übersetzungen im Denken vieler Kinder *in ungeklärtem Verhältnis nebeneinander* existieren; ihre Grundvorstellungen zur Division sind in dieser Hinsicht zumindest *unvollständig* und jedenfalls *ausbaufähig*.

Freilich wurde im Unterricht der interviewten Kinder offenbar nicht daran gearbeitet, *Verbindungen* zwischen unterschiedlichen Darstellungswechseln herzustellen. Wir halten es für ein Desiderat fachdidaktischer Forschung, stoffdidaktisch valide Designs, die sich in der Erarbeitung der Division gerade auch um diese Verbindungen bemühen, zu konkretisieren und evaluieren. Dies schließt unseres Erachtens ein, dass mit Kindern das jeweils *Typische* der beiden Aspekte herausgearbeitet und auch sprachlich (etwa als ‚Bilden gleich großer Gruppen‘ und ‚gerechtes Verteilen‘) festgehalten wird.

Literatur

- Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Waxmann.
- Burtscher, M. (2022). *Entwicklungen von Divisionsverständnissen bei Kindern in der Grundschule. Eine qualitative Längsschnittstudie*. Springer.
- Hefendehl-Hebeker, L. (1982). Zur Einteilung des Teilens in Aufteilen und Verteilen. *Mathematische Unterrichtspraxis (IV. Quartal)*, 37–39.
- Lorenz, J.-H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Schroedel.
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik*. Springer Spektrum.
- Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Westermann.