

Marvin TITZ, Aachen/Wassenberg

## **Ist die Numerik im Lehramtsstudium angezählt? – Zentrale Ideen als Bindeglied zwischen Hochschule und Schule**

Der Stellenwert der numerischen Mathematik in den mathematischen Lehramtsstudiengängen in Nordrhein-Westfalen ist je nach Universität sehr unterschiedlich und mancherorts einem wiederholten Wandel unterworfen. In vielen gymnasialen Lehramtsstudiengängen existieren Lehrveranstaltungen zur numerischen Mathematik nur im Wahlbereich oder sie wurden sogar vollständig aus dem fachlichen Studienanteil gestrichen. Ungeachtet dieser Entwicklungen steht die Numerik weiterhin in den empfohlenen Bildungsstandards für die Lehrerbildung (DMV, GDM, MNU, 2008). Zudem hat sie eine hohe Bedeutung für die angewandte Mathematik, sodass eine vertiefte Behandlung einer Abrundung des Mathematikbilds zuträglich ist. Vor diesem Hintergrund stellen sich die Fragen (1.) ob eine intensive Auseinandersetzung mit der numerischen Mathematik für (werdende) Lehrkräfte überhaupt als sinnvoll erachtet werden kann und (2.) wie Bezüge zwischen Hochschul- und Schulmathematik in diesem Kontext gestaltet werden können. Dies führt u.a. zu den folgenden Forschungsfragen:

### **Fragestellungen**

- Welche mathematischen Grundgedanken kennzeichnen die num. (Hochschul-)Mathematik? Welche didaktischen Aspekte können unter Betrachtung spezifischer Charakteristika herausgearbeitet werden?
- Inwiefern ist durch diese Grundideen eine Vermittlung der numerischen Mathematik in der Schule gewinnbringend möglich?

Eine zielgerechte Beantwortung der zweiten Frage kommt dabei nicht ohne die Frage nach dem Mehrwert für Lehrkräfte sowie Schüler\*innen aus, sodass diese implizit mitgestellt wird.

### **Methodisches Vorgehen**

Auf Basis einer didaktischen Betrachtung des mathematischen Teilgebiets sollen zentrale Ideen kriterienbasiert herausgearbeitet werden. Wesentliches Merkmal soll die Möglichkeit sein, diese Ideen sowohl auf Schulniveau reduzieren als auch auf aktuellem Forschungsniveau konkretisieren zu können. Angestrebt wird ein Schulunterricht, der im Sinne eines Spiralcurriculums so gestaltet werden kann, dass er anschlussfähig zu aktuellen Anwendungen und zur Forschung ist. Neben einer isolierten Analyse der einzelnen Ideen ist zudem die Komposition als Ganzes hinsichtlich möglicher Defizite und Redundanzen zu betrachten, um einen nützlichen Katalog zu entwickeln.

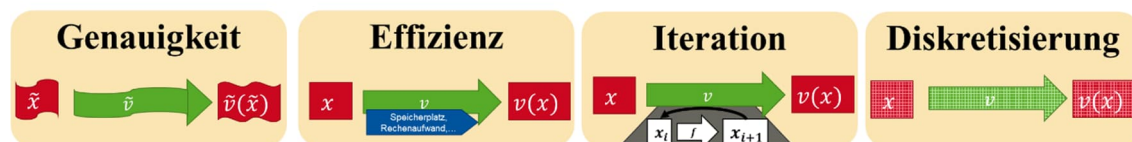
Die Praxistauglichkeit des Ideenkatalogs und dessen Vermittelbarkeit für die Schule wird durch die Konzeption und Entwicklung von Unterrichtsmaterialien exemplarisch überprüft. Elementar sind dazu schulnahe Erprobungen und Evaluationen im fachdidaktischen Forschungsbereich.

### Zentrale Ideen der Numerik – Vorschlag eines Ideenkatalogs

Ausgangspunkt ist zunächst eine Verständigung darauf, was unter numerischer Mathematik verstanden wird. Zweckdienlich ist in diesem Fall die Beschreibung nach Rannacher (2006): „Aufgabenstellung der numerischen Mathematik ist die Entwicklung von Methoden [und Berechnungsverfahren], mit denen die Lösungen mathematischer Problemstellungen effektiv berechnet bzw. möglichst mit Fehlerangabe angenähert werden können.“

Zur Präzisierung hilft eine vergleichende Gegenüberstellung analytischer und numerischer Methoden. Richenhagen (1983) sieht als Ziel der numerischen Sichtweise eine quantitative Beschreibung von Lösungen. Dem gegenüber steht die analytische Sichtweise, deren Ziel die Angabe einer geschlossenen Formel ist, womit eine qualitative Beschreibung angestrebt wird.

Damit der Katalog über ein hohes Abstraktionsniveau verfügt, erfolgte eine Beschränkung auf vier zentrale Ideen, die vereinfacht durch die Begriffe Genauigkeit, Effizienz, Iteration und Diskretisierung darstellbar sind.



**Abb. 1:** Vorgeschlagener Katalog zentraler Ideen der numerischen Mathematik

*Idee Genauigkeit:* Ungenauigkeiten müssen beim Umgang mit Zahlen immer mitbedacht werden. Gerade bei numerischen Berechnungen sind Ursachen und Auswirkungen dieser unvermeidlichen Fehlerbehaftung zu berücksichtigen, sodass die Quantifizierung der Fehlerfortpflanzung eine wichtige Aufgabe ist. In Abhängigkeit des Anwendungskontextes und der Genauigkeit der Ausgangswerte liegt eine Herausforderung in der Bestimmung einer sinnvollen Genauigkeit für jeden Schritt der Rechnung.

*Idee Effizienz:* Die Durchführung eines Berechnungsverfahrens führt zwangsläufig zu einem Ressourcenverbrauch. Besonderer Fokus liegt auf der verwendeten Rechenzeit und dem benötigten Speicherplatz. Bei der Entwicklung und dem Einsatz numerischer Verfahren ist man bestrebt den Ressourcenverbrauch möglichst gering zu halten bzw. die verfügbaren Ressourcen bestmöglich zu nutzen. Deutliche Effizienzsteigerungen sind bspw. durch Nutzung mathematischer Strukturen oder einer geschickten Modellie-

rung möglich, was in praktischen Anwendungen oft zum Einsatz hochspezialisierter Verfahren führt. Häufig findet eine Abwägung zwischen dem Ressourcenverbrauch und der Ergebnisgenauigkeit statt.

*Idee Iteration:* Viele Berechnungsverfahren arbeiten iterativ, indem Rechenschritte wiederholt ausgeführt werden. Oft dient dies einer schrittweisen Annäherung an die Lösung. Eine Analyse typischer Eigenschaften dieses Vorgehens (wie bspw. Abbruchbedingungen, Startwerte und Konvergenzverhalten) ist deshalb wesentlich. In vielen Fällen wird die Berechnung einer (Näherungs-)Lösung durch iteratives Vorgehen überhaupt erst ermöglicht.

*Idee Diskretisierung:* Übergänge zwischen kontinuierlichen und diskreten Darstellungen sind typische Prozesse beim Betreiben von Numerik. Zu beachten sind damit verbundene Restriktionen, aber auch Möglichkeiten für Berechnungen sowie resultierende Informationsverluste und Erkenntnisgewinne. Zudem gibt es viele analytisch nichtlösbare Problemstellungen, die durch eine Überführung in entsprechende endlich-dimensionale Problemstellungen zumindest näherungsweise berechenbar sind.

Ein Potenzial eines solchen Ideenkatalogs liegt in der möglichen Vernetzung unterschiedlicher Bereiche und Anspruchsniveaus. Einerseits sind alle Ideen auf Sekundarstufenniveau vermittelbar. Andererseits sind diese bis zur Hochschulmathematik tragfähig und sind in vielen aktuellen Anwendungsbereichen grundlegend. Gerade diese Bezüge sollten für die Vermittlung mehr genutzt werden.

Durch die Entwicklung und Erprobung von Unterrichtsmaterialien u.a. zur effizienten Lösung großer Gleichungssysteme und zum Umgang mit (un-)genauen Zahlen konnte die unterrichtliche Umsetzbarkeit gezeigt werden.

### **Umsetzung durch Lehramtsstudierende an der RWTH Aachen**

Ein Ziel zur Stärkung der Numerik im Lehramtsstudium ist die Erweiterung fachdidaktischer Begleitmaßnahmen der fachwissenschaftlichen Inhalte, sodass die Brücke zwischen Fachwissenschaft und schulnaher Vermittlung geschlagen wird. An der RWTH Aachen konnten bereits erste Schritte zur Integration dieser fachdidaktischen Ansätze zur Numerik in das Lehramtsstudium vorgenommen werden. Ein Baustein sind einzelne Vorlesungstermine zur „Didaktik der Numerik“ im Masterstudiengang.

Schlussendlich sollen Lehramtsstudierende fachwissenschaftliche und fachdidaktische Kenntnisse unmittelbar anwenden können. Deshalb werden studentische Abschlussarbeiten zur Entwicklung und Erprobung von Unterrichtseinheiten und -materialien im Bereich Numerik angeboten. Die Studierenden sollen zeigen, dass sie in der Lage sind, mit Hilfe dieses didaktischen

Gerüsts, numerische Grundgedanken schülergerecht zu vermitteln. Durch studentische Umsetzungen wurde sichtbar, wie angehende Lehrkräfte ausgewählte Themen auf Schulniveau herunterbrechen können. Beispiele sind Workshops und Arbeitshefte zu Themen wie „Iterationsverfahren zur Nullstellenbestimmung“, „mathematischer Umgang mit Messungenauigkeiten“ oder „Numerische Lösung von Differentialgleichungen“.

### **Ausblick**

Die numerische Mathematik ist ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik mit großer Bedeutung für viele Anwendungen und Forschungsprojekte. Steuerungssysteme, Simulationen, Modellberechnung, Verschlüsselungsverfahren sind nur einige Bereiche. Aus dieser Überzeugung heraus sollte die Numerik zur Abrundung des Mathematikbildes sowohl im Lehramtsstudium als auch im Schulunterricht gestärkt werden. Ein großes Potenzial liegt dazu im Aufzeigen der vorgestellten *zentralen Ideen der Numerik*.

Dennoch wäre eine weitere Vertiefung des fachdidaktischen Diskurses im Bereich „Numerik in der Schule“ wünschenswert. Daran anschließend stellt sich die Frage, wie diese fachdidaktischen Erkenntnisse in den Lehramtsstudiengang so integriert werden können, dass Studierende Bezüge zwischen schulischer Vermittlung und fortgeschrittener Hochschulmathematik gewinnen können. Eine Antwort kann hier lediglich angedeutet werden.

Erstrebenswert ist eine verstärkte Elementarisierung der Inhalte in bestehenden Fachveranstaltungen. So ist die Entwicklung von Konzepten, die eine Sensibilisierung von (werdenden) Lehrkräften für Inhalte der numerischen Mathematik fördern, ein hilfreicher Schritt zur Stärkung numerischer Themen im Schulunterricht und kann gleichzeitig bei der Legitimation dieser Inhalte in (gymnasialen) Lehramtsstudiengängen helfen.

### **Literatur**

- DMV, GDM, MNU (2008). Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM und MNU.
- Plangg, S. (2018). Mathematikunterricht im Wandel - Eine fachdidaktische Analyse. In K. J. Fuchs (Hrsg.), *Aktuelle Themen fachdidaktischer Forschung, Band 6*. Shaker.
- Rannacher, R. (2006). *Numerik 0: Einführung in die Numerische Mathematik*. Heidelberg University Publishing. <https://doi.org/10.17885/heiup.206.281>
- Richenhagen, G. (1983). „Numerisch vs. analytisch. Überlegungen zum epistemologischen Ort der Schulanalysis“, *mathematica didactica*, 54(6), 45 – 56.
- Schuppar, B. & Humenberger, H. (2015). *Elementare Numerik für die Sekundarstufe*. Springer Spektrum.
- Titz, M. (2021). *Zentrale Ideen der numerischen Mathematik – Vorschlag eines Katalogs und unterrichtliche Umsetzungen* (Dissertation). RWTH Aachen University.