Peter M. KLÖPPING, Potsdam

Kombinatorische Grundfiguren im Kontext „Türme bauen“ – Aufgaben für Lehramtsstudierende

Grundaufgaben der Kombinatorik und die Beschäftigung mit systematischem Zählen sind längst Bestandteil des Primarstufencurriculums. Sie bilden nicht nur die Grundlage für stochastische Kompetenzen, die später in der Sekundarstufe zum Tragen kommen (Padberg & Büchter, 2015), sondern zeichnen sich insbesondere durch ihren offenen Charakter aus, der breite Differenzierungsmöglichkeiten zulässt (Sill & Kurtzmann, 2019). Kombinatorische Problemstellungen lassen zudem die Reflexion über einen begründeten, strukturierten Lösungsprozess zu, sodass geeignete Darstellungen gefunden und Strategien zur Strukturierung der gesuchten Anzahlen entwickelt werden müssen (Höveler, 2014). Vorgestellt wird folgend eine Lernumgebung für Mathematikstudierende des Primarstufenlehramts, die eine produktive, auf mathematische Denkprozesse bezogene Beschäftigung mit den kombinatorischen Grundfiguren, den grundlegenden kombinatorischen Fragestellungen, erlaubt. Dabei sollen die Studierenden durch systematisches Auflisten, die Verwendung geeigneter Darstellungen und durch den sinnvollen Einsatz fundamentaler Zählstrategien ein Verständnis für die kombinatorischen Grundfiguren aufbauen und die dazugehörenden Formeln ableiten.

Aufbau und Kontext der Lernumgebung

Im Rahmen der fachlichen und fachdidaktischen Veranstaltung „Stochastik und ihre Didaktik“ sollen Studierende ihre mathematischen und didaktischen Kompetenzen zur Leitidee Daten und Zufall erweitern und vertiefen. Fachliche und fachdidaktische Inhalte sollen dabei möglichst eng aufeinander bezogen thematisiert werden. Neben der Statistik und der Wahrscheinlichkeitstheorie bilden kombinatorische Fragestellungen den inhaltlichen Kern der Veranstaltung, die aus einer wöchentlichen Vorlesung und einer dazugehörigen Übung besteht. Die 90-minütige Übung dient der Vertiefung der Vorlesungsinhalte und ist bemüht, die Verknüpfung mathematischer und didaktischer Inhalte handlungsorientiert aufzuzeigen.

Die Lernumgebung „Türme bauen“ versteht sich daher als ergänzende und vertiefende Übung zu kombinatorischen Grundfiguren, welche in der gleichen Semesterwoche in der Vorlesung thematisiert werden. Die Aufgabenstellungen werden so gestellt, dass die grundlegenden kombinatorischen Fragestellungen systematisch und aufeinander bezogen behandelt werden. Ausgangspunkt jeder Problemstellung ist die Arbeit mit Bausteinen (Steckwürfeln) unterschiedlicher oder gleicher Farbe, die den Bau (die Anordnung) eines Turmes erlauben oder aber die Auswahl von Steckwürfel verlangen, was

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

in dem Kontext als Baumaterial für den Turm verstanden werden kann. In der Abfolge werden zunächst Anordnungsprobleme bearbeitet, bevor der Kontext auf Auswahlprobleme bezogen wird. Die Problemstellungen folgen dabei in einer Weise aufeinander, dass die Studierenden Darstellungen und Strategien zur Strukturierung der Anzahlen analog verwenden können. Nach jeder Problemstellung werden Lösungsprozesse reflektiert und eine Verallgemeinerung abgeleitet. Die einzelnen Aufgabenstellungen deren Abfolge und die allgemeinen Entsprechungen der Grundfiguren werden folgend konkretisiert.

Kombinatorische Grundfiguren im Kontext „Türme bauen“

Den Studierenden sind die kombinatorischen Grundfiguren entsprechend des Urnenmodells bekannt. Dabei werden die Figuren mit den gängigen Begriffen Permutation („mit Berücksichtigung der Reihenfolge“) und Kombination („ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“) jeweils mit dem Zusatz „mit Wiederholung“ und „ohne Wiederholung“ bezeichnet (Kütting & Sauer, 2014). Im Rahmen der Übung, beim Bearbeiten kombinatorischer Probleme, ist eine Kategorisierung in Anordnungs- und Auswahlproblemen ausreichend und zielführend, weil sich mit diesen Begriffen Handlungsvorstellungen verknüpfen lassen.

Bevor die eigentlichen Grundfiguren erarbeitet werden, beginnt die Lernumgebung mit einer Situation, die das Fundamentalprinzip des Zählens aufgreift. Solche Problemstellungen beziehen sich auf die Vorstellung der Multiplikation als Kreuzprodukt von Mengen. Dies ist den Studierenden aus der Arithmetik bereits bekannt und lässt sich nun zur Produktregel der Kombinatorik verallgemeinern (Padberg & Büchter, 2015). Im Kontext „Türme bauen“ lautet die Entsprechung: *Bauen Sie einen Turm mit zwei Stockwerken. Für ein Stockwerk stehen drei verschieden farbige Bausteine und für ein anderes Stockwerk zwei verschieden farbige Bausteine zur Verfügung.* Gefragt wird stets, welche und wie viele Türme sich bauen lassen.

Die Situation wird im Kontext nun so verändert, dass für die verschiedenen Stockwerke des Turmes die gleichen Steckwürfel zur Verfügung stehen: *Bauen Sie einen Turm mit drei Stockwerken. Sie haben vier Kisten mit Bausteinen in jeweils unterschiedlichen Farben. (Eine Kiste pro Farbe.) Sie können für jedes Stockwerk aus einer der Kisten wählen.* Um Differenzierungsmöglichkeiten aufzuzeigen und das Ableiten einer allgemeinen Formel anzustoßen, werden zusätzlich vier- und fünfstöckige Türme gebaut.

Von der Permutation (Variation) mit Wiederholung werden die Voraussetzungen abgewandelt, sodass sich die Grundfigur Permutation ohne Wiederholung ergibt: *Sie bauen wieder einen Turm mit drei Stockwerken. Es gibt* *aber insgesamt drei Bausteine in unterschiedlichen Farben.* Eine weiterführende Frage lautet entsprechend: *Was ändert sich, wenn wir einen Baustein anderer Farbe hinzufügen und jetzt Türme mit vier Stockwerken bauen?* Im anschließenden Problem bleibt die Anzahl verschiedener Bausteine gleich, aber die Anzahl der Stockwerke reduziert sich. Dadurch gelangt man zum allgemeinen Fall, dass nicht alle Elemente der Menge angeordnet werden.

Um nun von den Anordnungs- zu den Auswahlproblemen zu kommen, wird auf die Vorstellung von „Baumaterial" zurückgegriffen. Im Kontext des Turmbaus bedeutet eine Auswahl zu treffen, dass man die Bausteine eben nicht zusammenbaut, da die Reihenfolge nicht mehr berücksichtigt werden soll: *Diesmal bauen Sie den Turm nicht zusammen. Es gibt keine Stockwerke und Sie legen sich nur die Baumaterialien (Bausteine) zurecht. Wieder haben Sie insgesamt vier verschieden farbige Bausteine. Welche und wie viele Möglichkeiten haben Sie, zwei Bausteine auszuwählen?*

Von der Kombination ohne Wiederholung gelangt man mühelos zur Kombination mit Wiederholung, indem man eine ähnliche Situation verwendet wie bei der Permutation mit Wiederholung: *Sie wählen das Baumaterial aus vier Kisten mit Bausteinen in jeweils unterschiedlichen Farben. Sie dürfen mehrfach in eine Kiste greifen. Welche und wie viele Möglichkeiten haben Sie, zwei Bausteine auszuwählen?* Die Anzahl der auszuwählenden Bausteine wird weiterführend verändert.

Urnenmodell	**Ziffernkarten**	**Türme bauen**
Gezogene Kugeln werden wieder zurückgelegt („**mit Zurücklegen**")	Ziffern dürfen mehrfach auftreten	Bausteine gleicher Farbe stehen zur Verfügung
Gezogene Kugeln werden *nicht* wieder zurückgelegt („**ohne Zurücklegen**")	Keine Ziffer darf mehrfach auftreten	Bausteine verschiedener Farben stehen zur Verfügung
Verschiedene Reihenfolgen beim Ziehen werden unterschieden („**mit Berücksichtigung der Reihenfolge**")	Die Reihenfolge der Ziffern ist relevant	Türme werden gebaut
Verschiedene Reihenfolgen beim Ziehen werden *nicht* unterschieden („**ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**")	Die Reihenfolge der Ziffern ist nicht relevant	Baumaterial wird ausgelegt

Tab. 1: Kombinatorische Grundaufgaben. Entsprechungen in Modell und Kontexten

Eine gleiche Abfolge der Grundfiguren schlagen Padberg und Büchter (2015) für den Kontext „Ziffernkarten“ vor. Um eine Einordnung des Kontextes zu erleichtern, stellen sie den kombinatorischen Situationen im Urnenmodell die entsprechende Bedeutung im Kontext „Ziffernkarten“ gegenüber (Padberg & Büchter, 2015, S. 259; siehe Tabelle 1). Die Tabelle wurde hier um den Kontext „Türme bauen“ ergänzt.

Reflexion und Erkenntnisse aus der Lernumgebung

Die Lernumgebung erlaubt den Studierenden sich stets den Problemstellungen handelnd zu nähern. Insbesondere sieht man bei den Anordnungsproblemen, dass die Studierenden systematisch nach möglichen Türmen suchen, diese strukturiert bauen und auflisten sowie Baumdiagramme als geeignete Darstellungen aller möglichen Türme finden. In der Übung wird dies explizit aufgegriffen, indem die Lösungsprozesse, die Strategien und Darstellungen gemeinsam reflektiert werden.

Die Erfahrungen mit der Lernumgebung zeigen, dass sich aus dem Baumdiagramm und den Kenntnissen zum allgemeinen Zählprinzip die kombinatorischen Operationen für die Anordnungsprobleme herleiten lassen. Das deckt sich mit der Erkenntnis, dass das „systematische Auflisten […] die Ableitung sinnvoller Zählstrategien und Zählprinzipien [ermöglicht]. Mittels der Zählprinzipien ist daran anknüpfend eine auf Verständnis beruhende Rekonstruktion der zu den kombinatorischen Grundfiguren gehörenden Formeln möglich“ (Höveler, 2014, S. 15). Dadurch wird zudem die Verknüpfung fachlicher und fachdidaktischer Inhalte angestoßen.

Bei den Auswahlproblemen zeigen sich ähnliche Erfahrungen. Eine interessante Beobachtung ist, dass man bei der Kombination ohne Wiederholung zunächst von Türmen ausgehen kann, die man anschließend auseinanderbaut. Auf der Ebene der kombinatorischen Operationen ist dies gleichbedeutend mit der Division durch die Fakultät der Höhe des Turms. Es ergibt sich einsichtig der Binomialkoeffizient.

Literatur

Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme. Eine Untersuchung zu den Strukturierungs- und Zählstrategien von Drittklässlern* [Dissertation, TU Dortmund]. Eldorado. http://hdl.handle.net/2003/33604

Kütting, H. & Sauer, M. J. (2014). *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte* (3. Aufl., korrigierter Nachdruck). Springer Spektrum.

Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik*. Springer Spektrum.

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer Spektrum.