Taha Ertuğrul KUZU, Münster

Kreative Denkwege oder umständliches Denken? Einblicke in alternative Vorgehensweisen zur ‚Hilfsaufgabe'

Einleitung: Halbschriftliche Strategien in der Primarstufe

In der Mathematikdidaktik der Primarstufe spielen sogenannte halbschriftliche Rechenstrategien eine überaus wichtige Rolle und werden in spezifischen Zuschreibungsformen (z.B. ‚Schrittweise', ‚Stellenweise', ‚Hilfsaufgabe' und Mischformen) betrachtet (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Allerdings gibt es in der Funktionsweise dieser Strategien große Unterschiede: Die ‚Hilfsaufgabe' beispielsweise weicht von Zahlzerlegungsstrategien wie der ‚Stellenweise'- oder ‚Schrittweise'-Strategie insofern stark ab, als dass zunächst ein ‚primärer Zahlenblick' notwendig wird, mit welchem Lernende die *Nähe* der Zahlen zu anderen Zahlen identifizieren müssen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018; Threlfall, 2002), um dann die Zahlenterme zu *verändern*. Dabei brechen Lernende mit der Norm, mit der vorgegeben Aufgabe zu rechnen, und bearbeiten zunächst eine gänzlich andere Aufgabe. Dies verändert den Blick auf Zahlen auf eine präalgebraische Weise: Sie werden betrachtet wie *modifizierbare Objekte*, die man manipulieren kann, sofern man die Veränderung im Sinne des Konstanzgesetzes – der zugrundeliegenden Struktur – kompensiert (Steinweg, 2013). Eine derartige, äquivalenzbasierte Perspektive auf Zahlenterme ist hochgradig relevant mit Blick auf den Übergang zur Sekundarstufe, da sie wichtige inhaltliche Vorerfahrungen für die Einführung von Termen und Gleichungen umfasst (Kuzu, 2022).

Eine Unklarheit besteht allerdings bei der Frage, *wann* eine ‚Hilfsaufgabe' als (un-)geschickt gilt. In der Fachliteratur gibt es auf diese Frage unterschiedliche Antworten, die von einer engeren Deutung der ‚Hilfsaufgabe' als aufgerundete Aufgabe bei Einern ‚nah' am Zehner bis hin zu einer weiter gefassten Deutung als strategisches Werkzeug reichen (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018). Die kreative Nutzung der ‚Hilfsaufgabe' im Rahmen der hier vorgestellten Studie weicht von den klassischen Zuschreibungen ab.

Methode: Interpretative Basis- und Vertiefungsanalysen

Im Rahmen einer fachdidaktischen Entwicklungsforschungsstudie werden interpretative Analysen zu Deutungs- und Verallgemeinerungsprozessen von n = 16 Lernenden im Übergang von der Grundschule zur Sekundarstufe (Klasse 3 bis 6) zur halbschriftlichen Strategie der ‚Hilfsaufgabe' durchgeführt. Die für Forschungszwecke iterativ (weiter-)entwickelte Lehr-Lernumgebung basiert auf spezifischen Designprinzipien, die auf das inhaltliche

In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.
56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872089.0

Verständnis der ‚Hilfsaufgabe' vor dem Kalkül abzielen und einem fach- und sprachintegrierten Ansatz entsprechen (Kuzu & Nührenbörger, 2021). Verwoben mit dieser konstruktiven Forschungsperspektive geht es bei den Analysen primär um folgende rekonstruktive Forschungsfrage: *Wie deuten und verallgemeinern Lernende den Rechenweg zur ‚Hilfsaufgabe'?*

Zur Beantwortung der Forschungsfrage wird eine zweischrittige Analyse durchgeführt: Zunächst werden interpretative Basisanalysen durchgeführt; das heißt in einem turn-by-turn Verfahren werden sequenzierte Daten in Form von Transkripten sowie Schriftprodukten auf eine vorsichtige und kritische Weise in Forschendengruppen analysiert, um konsolidiertere (Deutungs-)Hypothesen formulieren zu können (Brandt & Tiedemann, 2019). In einem zweiten Analyseschritt werden aufgrund komplexer Zeichendeutungsprozesse Vertiefungsanalysen mit ‚epistemologischen Dreiecken' durchgeführt: Ausgehend von den vorliegenden Zeichen werden Referenzkontexte betrachtet, das heißt zur Deutung und Erklärung der Zeichen herangezogene Objekte, um so im Zeichendeutungsprozess implizite begriffliche Aspekte zu verstehen (Nührenbörger & Steinbring, 2010).

Analyse: Eine untypische ‚Hilfsaufgabe'

Die erste Aufgabenstellung erforderte das Berechnen einzelner Aufgaben auf einem selbst gewählten Wege und die Erklärung der Vorgehensweise (vgl. Abbildung 1).

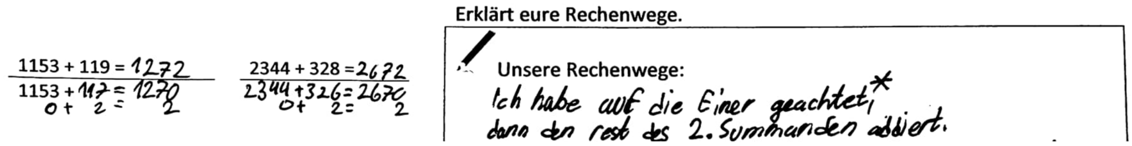

Abb. 1: Marcels Rechnung und erste Erklärung, Sequenz 1

Marcels Erklärung ist zunächst stark implizit: Was genau mit „Rest des 2. Summanden" gemeint ist, erscheint nicht ganz eindeutig, und die Lehrkraft bittet Marcel um eine genauere Antwort („Kannst du noch dazuschreiben, was du meintest, wie du dachtest?"), woraufhin Marcel ein Sternchen dazuschreibt und seine Erklärung erweitert (vgl. Abbildung 2).

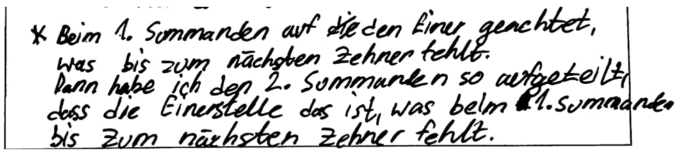

Abb. 2: Marcels Rechnung und erste Erklärung, Sequenz 2

Hier expliziert Marcel nun, was er im ersten Teil seiner Erklärung meinte: Mit „den Einern" meinte er jenen Betrag, der ausgehend vom Einer des ersten Summanden „bis zum nächsten Zehner fehlt", sodass der Einer des zweiten Summanden zunächst zerlegt gedacht wird: In den „fehlenden Teil” (bis zur zehn) sowie den „Rest”, der am Ende noch dazuaddiert werden muss. Seine Vorgehensweise, in der er seinen Rechenweg durch variablenartige Sprachmittel wie „Einerstelle“ oder „nächsten Zehner“ verallgemeinert (Akinwunmi, 2012), wirkt zunächst wie die ‚Schrittweise’-Strategie, da er den zweiten Summanden verkleinert, dies tut er allerdings zur Veränderung des Zahlentermes in einen einfacheren, ‚runderen’ Term (mit Blick auf eine einfachere Summierbarkeit der Einer). Dass es ihm um „*besonders einfach* […] *zu rechnen*[de]“ (Hilfs-)Aufgaben geht, betont er anschließend in einer unmittelbar auf die erste Erklärung folgenden Sequenz (vgl. Abbildung 3).

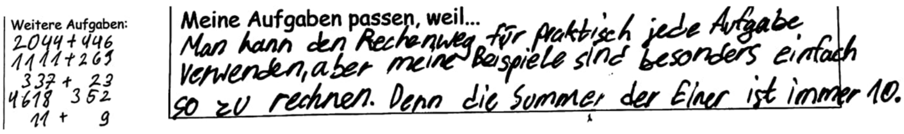

Abb. 3: Marcels Rechnung und erste Erklärung, Sequenz 3

Marcels primärer Zahlenblick ist damit hochgradig komplex und geschickt: Er sieht die Zerlegbarkeit des zweiten Summanden mit Blick auf den Einer des ersten Summanden und generiert dieser Vorabbetrachtung entsprechend eine einfachere ‚Hilfsaufgabe’ (vgl. Abbildung 4).

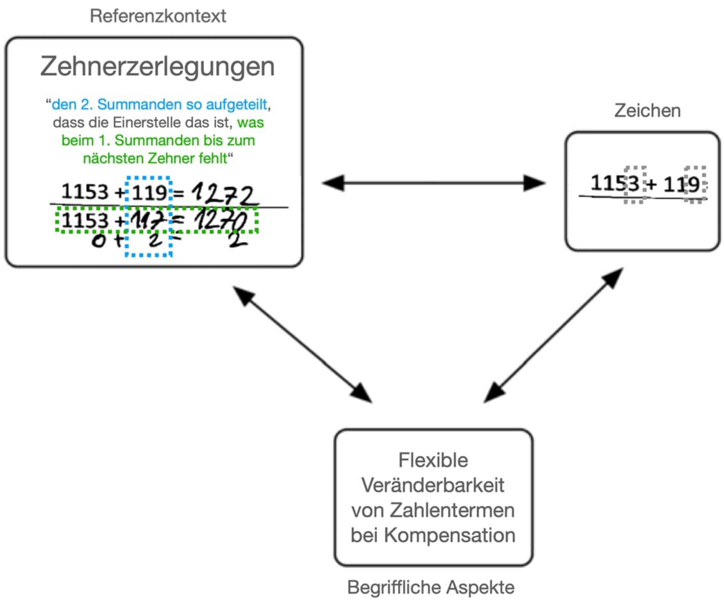

Abb. 4: Das epistemologische Dreieck zu Marcels Deutung

Das Zeichen, das Marcel zunächst fokussiert, ist der Einer des ersten und zweiten Summanden. Ausgehend davon überlegt er – vermutlich referrierend auf aus dem Unterricht bekannte Zehnerzerlegungen – , wie er die „9” so zerlegen kann, dass sie mit der „3” zusammen zehn ergibt. Anschließend kompensiert er seine Zahlmodifikation durch die erneute Addition von „2”. Damit zeigt er auf begrifflicher Ebene eine flexible Sicht auf den ursprünglichen Zahlenterm, den er zielgerichtet *verändert*.

Diskussion und Ausblick

Die Analysen in Kapitel 3 geben einen exemplarischen Einblick in den hohen Grad der Variabilität bei der Konstruktion einer ‚Hilfsaufgabe'. Marcel hat nicht aufgerundet, sondern den Einer des zweiten Summanden um einen spezifischen Betrag reduziert, dies dann aber auf tragfähige Weise kompensiert. Marcels Denkweg zeigt, dass eine (vorschnelle) Zuschreibung als ‚Schrittweise'-Strategie seiner Vorstellungskomplexität nicht entspräche und weiterführende Analysen aus der Studie bestätigen, dass dies kein Einzelfall ist: Viele Lernende nutzen die ‚Hilfsaufgabe' in Formen, die von einer möglichen, normativen ‚Standardform' abweichen: Manche Lernende runden auch bei „6" auf, andere Lernende runden ab und rechnen analog zur ‚Schrittweise'-Strategie, *denken* aber wie Marcel vereinfachend und konstruieren ‚Hilfsaufgaben'. Aus mathematikdidaktischer Sicht sind derartige, unkonventionelle Formen der ‚Hilfsaufgabe' kein ‚Störbild' oder ‚Defizit', im Gegenteil: Es zeigt die Fülle an Möglichkeiten und unterschiedlichen Perspektiven auf Zahlen und Relationen und gerade darin liegt ein besonderes prä-algebraisches Potenzial: Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten der termischen Modifikation – der ‚Spielereien mit Termen bei Erhaltung der Konstanz' (Steinweg, 2013) – und dabei können die genutzten Strategien auf kreative und geschickte Weise von ‚Standardformen' abweichen.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster.* Springer Spektrum.

Brandt, B. & Tiedemann, K. (2019). *Mathematiklernen aus interpretativer Perspektive I*. Waxmann.

Kuzu, T. & Nührenbörger, M. (2021). The conceptual understanding of mental calculation strategies: Meaning-making in the case of the 'Auxiliary task'. In J. Novotna & H. Moraova (Hrsg.), *Proceedings of SEMT* (S. 270–280). Charles University.

Kuzu, T. (2022). Understanding the ‚Auxiliary Task' conceptually – discrete versus continous cardinal objects. In G. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Hrsg.), *Proceedings of the 45th IGPME Conference* (Bd. 3, S. 99–106). PME.

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, C. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln: Grundlagen – Förderung – Beispiele*. Springer.

Steinbring, H. & Nührenbörger, M. (2010). Mathematisches Wissen als Gegenstand von Lehr-/Lerninteraktionen. Eigenständige Schülerinteraktionen in Differenz zu Lehrerinterventionen. In U. Dausendschön-Gay, C. Domke & S. Ohlhus (Hrsg.), *Wissen in (Inter-)Aktion* (S. 161–188). De Gruyter.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen.* Springer Spektrum.

Threlfall, J. (2002). Flexible Mental Calculation. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29–47.