

GOGESCH, Isabella & LUDWIG, Matthias  
Frankfurt a. M.

## **Das Unsichtbare sichtbar machen: Eine Untersuchung des Situationsmodells**

### **Einleitung**

Das mathematische Modellieren beschäftigt sich mit der Modellierung realer Situationen und der Bearbeitung dieser mit mathematischen Methoden. Ein Modell, mit welchem das mathematische Modellieren beschrieben werden kann, ist der Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005). Viele Phasen dieses Kreislaufes sind gut untersucht (z.B. Jablonski, 2021), wobei das richtige Aufstellen eines Situationsmodells, welches die wichtigste Grundlage für ein adäquates Lösen der realen Probleme darstellt, bisher kaum bis gar nicht erforscht ist. Welche kognitiven Prozesse im Kopf von Lernenden wirklich ablaufen ist nicht offensichtlich (Reusser, 1997). Es gibt aber die Eye-Mind-Hypothese (Just & Carpenter, 1980), die besagt, dass es eine direkte Verbindung zwischen dem Blick einer Person und den kognitiven Prozessen der Person gibt. Daher wird angenommen, dass durch die Blickbewegungen ein mentales Modell erzeugt werden kann (Wu & Liu, 2022). Eine explorative Eyetracking-Studie nimmt diesen Schritt genauer unter die Lupe.

### **Theoretischer Hintergrund**

Von den sieben Schritten im Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005) fokussiert sich dieser Beitrag auf die ersten drei Schritte, welche in drei verschiedenen Entwicklungsstadien des verwendeten Modells resultieren: dem Situationsmodell, dem Realmmodell und dem mathematischen Modell. Ob und wie die beiden ersten Entwicklungsstadien (Situations- und Realmmodell) unterschieden werden können, ist seit mehreren Jahren Thema der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Diskussionen (Borromeo Ferri, 2006).

Das Situationsmodell wird in der Literatur synonym mit mentaler Repräsentation der Situation (Borromeo Ferri, 2006), Problemsituation (Kintsch & Greeno, 1985) oder mentalem Modell (Greefrath et al., 2013) verwendet. Laut Borromeo Ferri (2006) identifizieren Blum und Leiß das Verstehen, mit dem Situationsmodell als Resultat, als eine der wichtigsten, wenn nicht sogar die wichtigste Phase des Modellierungskreislaufes. Es bildet die Basis für alle weiteren Modellierungsaktivitäten (Borromeo Ferri, 2006). Realmodelle werden in der Regel über grafische Repräsentationen identifiziert, während bei mathematischen Modellen die entsprechenden Grafiken durch mathematische Bezeichnungen, wie z.B. Variablen, Formen und Formeln

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

angereichert werden (z.B. Schmitz und Schukajlow, 2020). Das Situationsmodell scheint sich diesem Zugang zu verschließen. Die unseres Wissens nach einzige konkrete Darstellung eines Situationsmodells kann in Blum und Leiß (2007) betrachtet werden, welche unserem Verständnis nach allerdings eher einem Realmodell entspricht. Dies könnte ein Indiz für einen fließenden Übergang zwischen Real- und Situationsmodell sein.

### **Forschungsstand**

Wie bereits beschrieben, ist nicht klar, welche kognitiven Prozesse im Kopf der Lernenden beim Lösen von Modellierungsaufgaben wirklich ablaufen (Reusser, 1997). Um ein tieferes Verständnis für die kognitiven Prozesse zu erlangen, haben sich Schmitz und Schukajlow (2020) die Blickbewegungen der Lernenden genau angeschaut und konnten in den Auswertungen rechtwinklige Dreiecke erkennen, die für die Generierung eines Modells sprechen. Es bleibt unklar, ob es sich dabei um das Situationsmodell handeln kann.

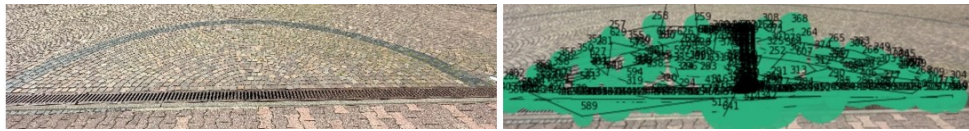
### **Forschungsfrage und Methode**

Daraus ergibt sich für uns die Forschungsfrage, ob das Situationsmodell mithilfe von Eyetracking beim Lösen mathematischer Modellierungsaufgaben an realen Objekten im Freien sichtbar gemacht werden kann.

Um uns der Beantwortung der Frage anzunähern, haben wir eine explorative Studie mit Mathematikdidaktikern durchgeführt, die jeweils drei geometrische Modellierungsaufgaben an realen Objekten gelöst haben. Dabei haben die Teilnehmenden eine mobilen Eyetracker von Pupil Labs getragen, der die Blickbewegungen beim Lösen der Aufgaben an den realen Objekten aufgezeichnet hat. Zusätzlich zu den Blickbewegungen wurden auch die verbalisierten Gedanken der Teilnehmenden über die Audioaufnahmefunktion der Eyetracking-Brille aufgenommen. Die Fixationen und Sakkaden wurden anschließend mit Scanpaths und Heatmaps ausgewertet, indem die Blickpunkte manuell auf ein Referenzfoto gemapped wurden.

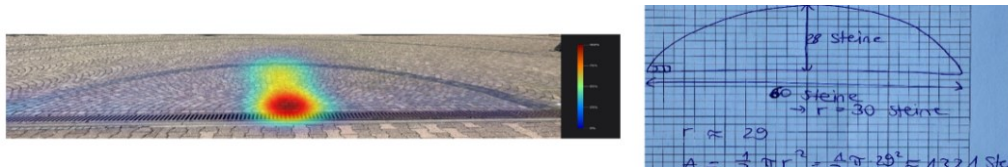
### **Erste Ergebnisse**

Die Ergebnisse der explorativen Studie zeigen, dass die verschiedenen Entwicklungsstadien des verwendeten Modells identifizierbar sind. Bei der Modellierungsaufgabe "Steinkreis" sollten die Teilnehmenden möglichst gut bestimmen, wie viele Steine in dem von dem grauen Ring und der Rinne umrahmten Bereich liegen (Abb. 1, links). Der entsprechende Scanpath zu der Lösung eines Teilnehmenden ist in Abbildung 1 (rechts) zu sehen.



**Abb. 1:** Referenzfoto "Steinkreis" (links), Scanpath zur Aufgabe "Steinkreis" (rechts)

Das individuelle Real- und mathematische Modell kann in Abbildung 2 (rechts) betrachtet werden. Der Scanpath und das Realmodell der Aufgabe weisen Gemeinsamkeiten in Bezug auf den Durchmesser und den Radius des Halbkreises auf. Die dicken schwarzen Streifen auf dem Scanpath demonstrieren die intensive visuelle Exploration dieser Bereiche durch den Teilnehmer in beide Richtungen, was zu zahlreichen Sakkaden in diesen Regionen geführt hat. Die Heatmap in Abbildung 2 (links) bestätigt diese Erkenntnis nochmal. Im Realmodell können wir offensichtlich die markanten Bereiche aus dem Scanpath sehen, die die Grundlage für die Skizze bilden.



**Abb. 2:** Heatmap zur Aufgabe "Steinkreis" (links), Realmodell und mathematisches Modell der Aufgabe "Steinkreis" (rechts)

## Diskussion und Ausblick

Der Einsatz des mobilen Eyetrackers in Kombination mit verbalen und schriftlichen Berichten über die Lösungsprozesse unterstützt unsere Hypothese, dass sich durch die Analyse der Blickbewegungen verschiedene kognitive Prozesse erkennen lassen. Da die reine Skizze als Realmodell identifiziert werden kann und der Scanpath als deren Vorläufer fungiert, könnten Scanpaths als die Situationsmodelle der Aufgabe betrachtet werden.

Wie oben ausgeführt, nimmt das Situationsmodell für die adäquate Problemlösung der Aufgabe eine wichtige Rolle ein. In der vorliegenden explorativen Studie erzielten alle Teilnehmenden korrekte Ergebnisse und die analysierten Scanpaths deuten auf ein angemessenes Situationsmodell hin. Dadurch wird die theoretische Annahme bestätigt, dass ein passendes Situationsmodell entscheidend für eine korrekte Lösung ist.

Als Limitation ist anzumerken, dass die Teilnehmenden mit dem mathematischen Modellieren sehr vertraut waren und somit eine besondere Sichtweise auf die Mathematik in der realen Welt haben. Die Verwendung von realen Objekten als Grundlage für die mathematische Modellierungsaufgabe schränkt die Übertragbarkeit der Ergebnisse ein, da ähnliche Analysen mit rein textbasierten Aufgaben bisher nicht durchgeführt wurden. Schließlich

wurden in der Studie längere Zeitabschnitte untersucht, was zwar einen umfassenden Überblick verschafft, aber möglicherweise die Erkenntnisse aus der Analyse kürzerer, spezifischerer Intervalle des Modellierungsprozess in den Hintergrund rückt.

Im nächsten Schritt ist die Durchführung einer Pilotstudie mit Modellierungsnovizen geplant, um zu analysieren, wie sie die Aufgaben bearbeiten und ob sich in ihren Blickbewegungen ebenfalls Hinweise auf die Konstruktion von Situationsmodellen erkennen lassen.

## Literatur

- Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *Mathematik lehren*, 128, 18-21.
- Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA12)-Education, Engineering and Economics*.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95.
- Cahyono, A. & Ludwig, M. (2017). Examining motivation in mobile app-supported math trail environments. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 - 5, 2017)*. DCU Institute of Education and ERME.
- Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri et al. *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (11-37).
- Jablonski, S. (2021). *Wie potenziell mathematisch begabte Kinder argumentieren*. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-33385-0>
- Just, M.A. & Carpenter, P.A. (1980). A theory of reading: From eye fixations to comprehension. *Psychological Review*, 87(4), 329-354. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329>
- Kintsch, W. & Greeno, J.G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.92.1.109>
- Ludwig, M. & Jablonski, S. (2021). Step by Step - Simplifying and Mathematizing the Real World with MathCityMap. *Quadrante*, 30(2), S. 242-268.
- Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen im Literaturüberblick. In F.E. Weinert & A. Helmke, *Entwicklung im Grundschulalter* (141-155). Weinheim: Psychologie Verlags Union.
- Schmitz, M. & Schukajlow, S. (2020). Blickbewegungen auf Bild und Text bei mathematischen Modellierungsaufgaben. In H.-S. Siller, W. Weigel & J.F. Wörler (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 8829-8832). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA9783959871402.0>
- Wu, C.-J. & Liu, C.-Y (2020). Refined use of the eye-mind hypothesis for scientific argumentation using multiple representations. *Instructional Science*, 50(4), 551-569. <https://doi.org/10.1007/s11251-022-09581-w>