BERENDONK, Stephan & WENGEL, Robert
Wuppertal

Nebulöse geometrische Konstruktionsaufgaben

Inspiriert durch eine Übungsaufgabe aus dem Schulbuch „Elemente der Mathematik“ für die Mittelstufe von Reidt, Wolff und Athen und im Sinne eines Add-ons für die bekannte Konstruktions-App „Euclidea“ möchten wir im Rahmen dieses Beitrags exemplarisch anhand zweier Beispiele eine Klasse von geometrischen Konstruktionsaufgaben vorstellen, die wir als „nebulös“ bezeichnen wollen. Nebulös werden Konstruktionsprobleme, indem man bestimmte Objekte, wie beispielsweise Punkte oder Geraden, sperrt, sodass sie während der Konstruktion nicht genutzt werden können. Diese Beschränkung erlaubt es uns, klassische Konstruktionsaufgaben nochmals neu zu durchdenken.

Zwei nebulöse Konstruktionsaufgaben

Wir beginnen mit der Beschreibung zweier Konstruktionsaufgaben, wobei erstere sinngemäß aus o.g. Lehrwerk (S.105) entnommen ist:

- Gegeben seien zwei Geraden g und h, die sich in einem gemeinsamen Punkt S schneiden, sowie ein Punkt P, der weder auf g noch auf h liegt. Konstruiere die Verbindungsgerade PS der beiden Punkte P und S.
- Gegeben sei ein Trapez $ABCD$, das kein Parallelogramm ist, durch die Trägergeraden seiner Seiten. Die Trägergeraden AB und CD seien parallel zueinander. Konstruiere den Schnittpunkt der Diagonalen des Trapezes.

Beide Aufgaben sind zunächst trivial und erfordern keinerlei Überlegungen zu deren Lösung. Nun kommen jedoch die folgenden Bedingungen hinzu, die die obigen Aufgaben zu „Nebulösen Konstruktionsaufgaben“ werden lassen: In der ersten Aufgabe ist der Punkt S für die Lösungskonstruktion nicht zugelassen und in der zweiten fordern wir, dass die Eckpunkte A, B, C und D des gegebenen Trapezes nicht nutzbar sind. Die jeweiligen Objekte dürfen also nicht für die Konstruktion einer Lösung verwendet werden.

Eine allgemeine abbildungsgeometrische Lösungsstrategie

Obige Aufgaben und noch viele weitere nebulöse Konstruktionsaufgaben lassen sich mit der folgenden allgemeinen Idee lösen: Wende eine geometrische Abbildung (z. B. eine Verschiebung, eine Drehung, eine Spiegelung oder eine zentrische Streckung) auf die Ausgangssituation an, um die gesperrten Objekte aus dem Nebel herauszuziehen. Führe dann die gefragte Konstruktion an der erhaltenen Bildfigur durch. Wende schließlich die Umkehrabbildung an, um das konstruierte Objekt an die gewünschte Stelle in

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Bezug auf die Ausgangsfigur zu transferieren. Dieser Idee folgend lässt sich die erste Aufgabe mithilfe einer Achsenspiegelung wie folgt lösen:

1) Zeichne die Senkrechte zur Geraden g durch den Punkt P. Sei Q der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit h. Wähle einen von Q verschiedenen Punkt R auf h.
2) Zeichne den Kreis um Q durch R.
3) Zeichne den Kreis um P durch R. Sei R' der von R verschiedene Schnittpunkt der Kreise aus 2) und 3).
4) Zeichne die Gerade QR'. Sei S' der Schnittpunkt von QR' und g.
5) Zeichne die Gerade $S'P$. Sei T ein von S' und P verschiedener Schnittpunkt von $S'P$ und dem Kreis aus 3).
6) Zeichne den Kreis um Q durch T. Sei U der von T verschiedene Schnittpunkt des Kreises aus 6) und des Kreises aus 3).
7) Zeichne die Gerade PU. Es handelt sich um die gesuchte Gerade.

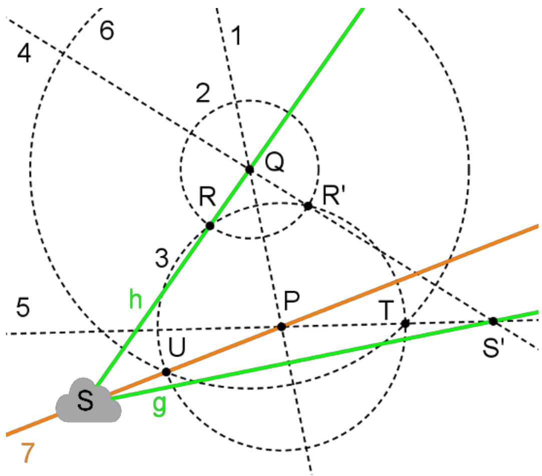

Abb. 1: Eine 7-Schritt-Lösung der Winkelteilungsaufgabe

Die Konstruktion löst die Aufgabe in 7 Schritten. Dabei wird das Zeichnen der Senkrechten als in einem Schritt durchführbar betrachtet und das Wählen von Punkten schritttechnisch vernachlässigt. Bei der in Schritt 1) gezeichneten Senkrechten handelt es sich um die Achse, an der gespiegelt wird. Wir haben die Achse so gewählt, dass die Gerade g eine Fixgerade der Spiegelung ist. Durch diese Wahl können wir im Vergleich zu einer beliebigen Wahl der Spiegelachse Konstruktionsschritte einsparen. Legt man der Konstruktion statt der Achsenspiegelung eine andere geometrische Abbildung zu Grunde, so lässt sich die Anzahl der Konstruktionsschritte auf analoge Weise durch Berücksichtigung der Fixelemente der Abbildung reduzieren. Erachtet man neben dem Zeichnen von Verbindungsgeraden, Kreisen und Senkrechten auch das Zeichnen von Mittelsenkrechten, Winkelhalbierenden und Parallelen als in jeweils einem Schritt durchführbar, so lässt sich für die

Aufgabe eine 6-Schritt-Lösung, die auf einer Punktspiegelung an P beruht, eine 5-Schritt-Lösung, die auf einer Verschiebung entlang von g beruht und eine 5-Schritt-Lösung, die eine auf einer zentrischen Streckung mit Streckzentrum P beruht, finden. Die oben vorgestellte 7-Schritt-Lösung erweist sich daher schritttechnisch gesehen als nicht sonderlich effizient.

Kurze problemspezifische Lösungen

Die allgemeine abbildungsgeometrische Lösungsstrategie hat uns im Falle der zentrischen Streckung und im Falle der Verschiebung jeweils eine 5-Schritt-Lösung der ersten Aufgabe eingebracht. Eine problemspezifische Lösung der Aufgabe, die ebenfalls 5 Schritte benötigt, lautet wie folgt: Ergänze in der Ausgangssituation die durch P verlaufenden Parallelen zu den gegebenen Schenkeln und erhalte auf diese Weise ein Parallelogramm. Nutze dann, dass die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren.

Die Aufgabe lässt sich jedoch sogar in vier Schritten lösen (Abb. 2, rechts):

1) Zeichne die Senkrechte zu g durch P. Sei A der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit h.
2) Zeichne die Senkrechte zu h und P. Sei B der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit g.
3) Zeichne die Gerade AB.
4) Zeichne die Senkrechte zu AB durch P. Bei dieser Senkrechten handelt es sich um die gesuchte Gerade.

Die Schritte 1) und 2) verschaffen uns ein Dreieck ABS, welches die in 1) und 2) gezeichneten Geraden als Höhen besitzt. Der Schnittpunkt P dieser Geraden ist somit der Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Bei der in Schritt 4) gezeichneten Senkrechten muss es sich daher um die dritte Höhe des Dreiecks handeln. Folglich läuft sie durch den nebulösen Punkt S. Da sie zudem per Definition durch P verläuft, handelt es sich um die zu konstruierende Gerade. Die Kenntnis, dass sich die Höhen des Dreiecks in einem gemeinsamen Punkt schneiden, hat uns somit eine elegante problemspezifische Konstruktion beschert, die kürzer ist als sämtliche Konstruktionen, die wir mit der allgemeinen abbildungsgeometrischen Lösungsstrategie gefunden haben.

Wir wenden uns nun der zweiten Aufgabe zu und präsentieren eine problemspezifische Lösung (Abb. 2, links), die auf der Tatsache beruht, dass der Schnittpunkt der Diagonalen eines Trapezes auf der Verbindungsgeraden der Mitten der einander gegenüberliegenden parallelen Seiten des Trapezes liegt:

Wähle einen Punkt E auf AD.

1) Zeichne die Parallele zu AB durch E. Sei F der Schnittpunkt dieser Parallelen mit BC.
2) Zeichne die Mittelsenkrechte von E und F. Sei G der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit EF. Sei H der Schnittpunkt von BC und AD.
3) Zeichne die Gerade GH. Sei I der Schnittpunkt von GH und CD. Sei J der Schnittpunkt von GH und AB.
4) Zeichne den Kreis um I durch H. Sei K ein Schnittpunkt dieses Kreises mit CD.
5) Zeichne den Kreis um J durch H. Sei L der Schnittpunkt dieses Kreises mit AB, sodass K und L in verschiedenen Halbebenen bezüglich GH liegen.
6) Zeichne die Gerade KL. Sei S der Schnittpunkt von KL und HG. Dann ist S der gesuchte Diagonalenschnittpunkt des Trapezes.

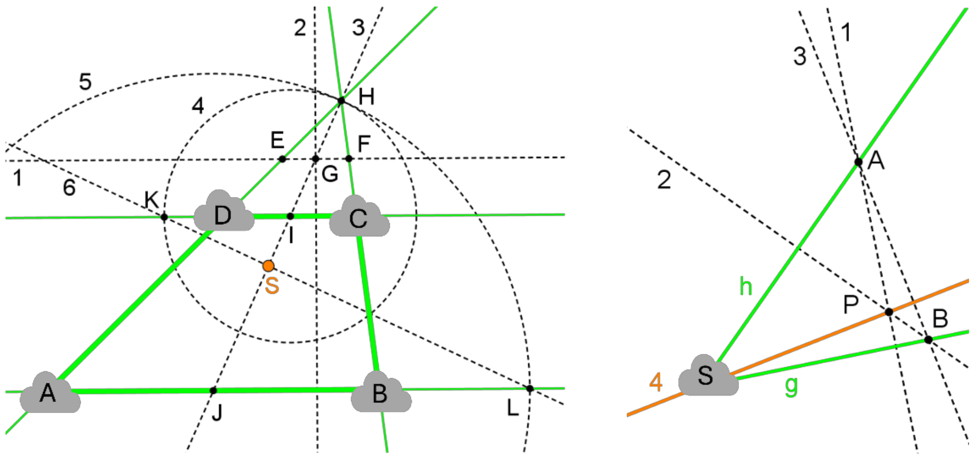

Abb. 2: Eine 6-Schritt-Lösung der Trapezaufgabe (links) und eine 4-Schritt-Lösung der Winkelteilungsaufgabe (rechts)

Verfolgt man die allgemeine abbildungsgeometrische Lösungsstrategie, so lässt sich für die Aufgabe eine 11-Schritt-Lösung basierend auf einer passend gewählten Achsenspiegelung, eine 9-Schritt-Lösung basierend auf einer passend gewählten zentrischen Streckung und eine 9-Schritt-Lösung basierend auf einer passend gewählten Punktspiegelung finden. Bei dieser Aufgabe ist die gefundene aus nur 6 Schritten bestehende Speziallösung somit sogar deutlich kürzer als die von uns mit Hilfe der allgemeinen Strategie gefundenen Lösungen. Offen bleibt, ob es sich bei dieser 6-Schritt-Lösung bezüglich der verwendeten Zählweise tatsächlich um die kürzeste Lösung handelt.

Literatur

Reidt, F., Wolff, G., Athen, H. (1968). *Elemente der Mathematik*. Schrödel Schöningh.