Ladislav KVASZ, Karls Universität zu Prag

Didaktische Aspekte der Entwicklung der Sprache der Mathematik

Mathematik wird oft als die Sprache der Wissenschaft verstanden, aber man vergisst, dass Mathematik selbst eine linguistische Dimension hat. In dem ersten Kapitel des Aufsatzes werden verschiedene Potentialitäten der Sprache der Mathematik diskutiert. Es sind Potentialitäten wie *logische* oder *expressive* Kraft. In dem Zweiten Kapitel wird beschrieben, wie diese Potentialitäten konstituiert sind. Dadurch wird eine Theorie des Aufbaus der formalen Sprache der Mathematik vorgeschlagen. Im dritten Kapitel werden dann einige didaktischen Konsequenzen der vorgeschlagenen Theorie gezogen.

1. Potentialitäten der Sprache der Mathematik

Wir möchten gerne bei dem Studium der Sprache der Mathematik die folgenden sechs Potentialitäten unterscheiden:

1. *Logische Kraft der Sprache* – wie etwa, dass komplexe Formeln in der Sprache bewiesen werden können,

2. *Expressive Kraft der Sprache* - Welche neue Situationen kann man in der Sprache ausdrücken, die vorher unausdrückbar gewesen sind,

3. *Methodische Kraft der Sprache* - welche neue Methoden ermöglicht uns die Sprache einzuführen dort, wo auf den vorherigen Stufen nur einzelne Tricks existierten,

4. *Integrative Kraft der Sprache* - welche neue Arten von Einheit ermöglicht uns die Sprache zu sehen dort, wo wir nur isolierte einzelne Fälle gesehen haben,

5. *Explanatorische Kraft der Sprache* - wie uns die Sprache unsere eigenes Unvermögen, das wir an früheren Stufen der Entwicklung erfahren haben, zu erklären ermöglicht,

6. *Metaphorische Kraft der Sprache* - wie die Sprache, durch Übertretung der Regeln ihrer eigenen Syntax, Situationen beschreiben kann, die gängigen Beschreibungen entgehen.

Vier von diesen Potentialitäten sind in unserem Buch *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics* (Kvasz 2008a, S. 16) beschrieben. Die *methodische* und die *metaphorische* Kraft wurden aber erst vier Jahre später in unserem Aufsatz *Language in Change* (Kvasz 2012, S. 16) eingeführt.

Wir glauben, dass ein wesentlicher Teil des Mathematikunterrichtes zum Ziel hat, dass Lernende sich diese Potentialitäten aneignen. Wir unterrichten Mathematik nicht nur ihrer selbst wegen, sondern auch um das Denken der Lernenden zu kultivieren (sehe Kaenders und Kvasz 2011, S. 72-78). Es scheint, dass die sechs angeführten Potentialitäten sechs verschiedene Dimensionen des Denkens beschreiben, die wir kultivieren möchten.

2. Wie werden die Potentialitäten konstituiert?

Der Prozess der Konstruktion einer neuen symbolischen Sprache besteht aus Schritten, die immer wieder in der Geschichte der Mathematik wiederholt wurden. In dem folgenden Text werden wir sie am beispiel der Algebra und der Analysis illustrieren (sehe dazu Kvasz 2006 und Kvasz 2008b).

1. Die *logische Kraft der Sprache* hängt eng mit der Einführung einer neuen Art von Symbolen zusammen. In der Algebra war das Symbol für die Unbekannte x, in der Analysis das Symbol für die Funktion $f(x)$.

2. Die *expressive Kraft der Sprache* hängt mit der Einführung einer neuen Operation, die unbegrenzt wiederholbar ist, zusammen. In der Algebra ist es die Operation der Potenz x, x^2, x^3, x^4 ..., in der Analysis ist es die Operation der Ableitung $\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \frac{d^4 f}{dx^4}, \ldots$. Für einige erste Iterationen dieser Operation haben wir ein semantisches Verständnis (x ist Länge, x^2 ist Fläche, x^3 ist Volumen; die erste Ableitung ist Geschwindigkeit, die Zweite ist Beschleunigung), aber die weitere Iterationen verlassen diese Deutung und setzen sich ganz formal fort.

3. Die *methodische Kraft der Sprache* hängt mit der Einführung einer Konvention zusammen, die einem epistemischen Unterschied entspricht. In der Algebra ist es der Unterschied zwischen der Unbekannten und dem Parameter *x, y, z...// a, b, c …*; in der Analysis der Unterschied zwischen dem Wert und der Abweichung von ihm *x... // h....*

4. Die *integrative Kraft der Sprache* hängt mit der Vereinigung der Ausdrücke in eine einheitliche Form zusammen, die verschiedenen Sachverhalten entsprechen. In der Algebra werden so *Polynome* eingeführt; in der Analysis unendliche *Reihen*. Ein Polynom vereinigt Gleichungen nicht, weil sie denselben Sachverhalt beschreiben, sondern weil sie formal ähnlich sind.

5. Die *explanatorische Kraft der Sprache* hat mit der Umformung von Formen zu formalen Prädikaten zutun. In der Algebra sind es Prädikate wie

quadratische oder *kubische Irrationalität*; in der Analysis Prädikate *wie stetige* oder *differenzierbare Funktion*,

6. Die *metaphorische Kraft der Sprache* zeigt sich mit der Erweiterung der Realität um neue Objekte, die durch formale Prädikate definiert werden. In der Algebra sind das zum Beispiel die *negativen* und *komplexen Zahlen*; in der Analysis die ***nirgendwo***-*differenzierbaren Funktionen*. Diese Objekte verletzen die gewöhnlichen Eigenschaften der klassischen Objekte der entsprechenden Disziplin.

3. Didaktische Konsequenzen

Die oben beschriebenen sechs Schritte sind oft mit einer Reihe von didaktischen Problemen verknüpft.

1. Das Einführen einer neuen Art von Symbolen fordert von den Schülerinnen und Schülern eine Form der Vergegenständlichung, wie sie in der Theorie von Anna Sfard beschrieben wurde.

2. Die Einführung einer neuen, unbegrenzt wiederholbaren Operation, braucht auf der einer Seite eine Kontextbezogenheit dieser Operation, um sie überhaupt zu verstehen. Die Erweiterung der Operation über jede Grenze verlangt, auf der anderen Seite, ihre Dekontextualisierung. Was die Schüler lernen müssen, ist die Verknüpfung der Kontextbezogenheit und der Dekontextualisiertheit der durch die Operation erzeugten Ausdrücke.

3. Die Einführung der, einem epistemischen Unterschied entsprechenden, Konvention ist mit dem Problem verknüpft, das dieser Konvention in der Realität nichts entspricht. Die Schülerin/der Schüler muss lernen diese referentiell unfassbaren Unterscheidungen zu verstehen.

4. Die Vereinigung der formalen Ausdrücke, die verschiedenen Sachverhalten entsprechen, aber eine ähnliche Form haben, in einen Polynom ist auch nicht einfach. Der Schülerin/der Schüler muss lernen den Bezug zur Wirklichkeit zu unterdrücken und durch einen Bezug zu den rein Formalen Zusammenhängen zu ersetzen. Die Polynome werden als formale Objekte verstanden, die keine reale Referenz haben.

5. Die Umformung von Formen zu formalen Prädikaten ist deswegen schwer zu verstehen, weil die Unterschiede, die durch formale Prädikate eingeführt wurden, nur durch die Sprache zugänglich sind. In der Realität entspricht ihnen nichts. Der Schüler muss lernen, die empirische Realität durch eine formale Realität zu ersetzen.

6. Die Erweiterung der Realität um neue Objekte, die mit Hilfe der formaler Prädikate eingeführt werden – wie zum Beispiel die komplexe Zahlen – ist mit der Komplikation verknüpft, dass diese Objekte die gewöhnlichen

Eigenschaften der klassischen mathematischen Objekte verletzen. Die Schüler müssen lernen, den Begriff der Realität von diesen verletzten Eigenschaften zu trennen und sich an einen neuen, viel schwächeren Realitätsbegriff gewöhnen. Sie müssen die gewöhnlichen Eigenschaften der Objekte ausblenden und trotzdem ihren Anspruch an Realität aufrechterhalten.

Dank

Diese Arbeit wurde durch die Universitätspartnerschaft der Karls-Universität Prag mit der Universität zu Köln unterstützt. Der Autor ist Rainer Kaenders und Ysette Weiss-Pidstrygach für Diskussion und freundliche Unterstützung zu Dank verpflichtet. Schließlich gilt sein Dank der Grantagentur der Tschechischen Republik für die Unterstützung durch den Grant GA ČR P407/11/1740.

Literatur

Alten, H.-W., Naini, A.D., Folkerts, M., Schlosser, H., Schlote, K.-H. & Wussing, H. (2003). *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen*. Springer, Berlin.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2011). Mathematisches Bewusstsein. In: M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel a M. Rathgeb (eds.), *Mathematik Verstehen*, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, S. 71-85.

Kaenders, R.H., Kvasz, L., & Weiss-Pidstrygach,Y. (2011). Mathematical awareness by linguistic analysis of variable substitution. Paper to appear in the *Proceedings of CERME 7*, Rzeszów, Poland.

Kvasz, L. (1997). Why don't they understand us? *Science and Education* **6**, S. 263-272.

Kvasz, L. (2006). History of Algebra and the Development of the Form of its Language. *Philosophia Mathematica* **14**, S. 287-317.

Kvasz, L. (2007). Sprache und Zeichen in Algebra. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007; Vorträge auf der 41. Tagung fur Didaktik der Mathematik vom 26. – 30. 3. 2007 in Berlin*, Franzbecker Verlag, Berlin, S. 467-470.

Kvasz, L. (2008a). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser, Basel.

Kvasz, L. (2008b). Sprache und Zeichen in der Geschichte der Algebra – ein Beitrag zur Theorie der Vergegenständlichung. *Journal für Mathematik-Didaktik* **29**, S. 108-123.

Kvasz, L. (2012). *Language in Change. Fernando Gil International Prize 2010*. Fundacao Calouste Gulbenkian, Lisbon.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* **22**, S. 1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* **26**, S. 191-228.