SOMMERLADE, Franziska & EICHLER, Andreas
Universität Kassel

Prozedurales und konzeptuelles Wissen in der Differentialrechnung

Die Unterscheidung zwischen prozeduralem und konzeptuellem Wissen ist bedeutsam, um das Mathematiklernen besser zu verstehen. Studien zu den beiden Wissensarten beziehen sich selten auf die Sekundarstufe II und variieren immens bezüglich der Operationalisierung und Validierung des Testverfahrens. Daher zielt die vorliegende Studie darauf ab, einen Test zur Erfassung von prozeduralem und konzeptuellem Wissen in der Differentialrechnung von Schülern*innen der Sekundarstufe II zu entwickeln.

Theoretischer Hintergrund

Inhalte der Differentialrechnung zeichnen sich durch das Zusammenspiel von kalkülhaften Prozeduren, wie der Bestimmung von Extremstellen, und den zugrundeliegenden Konzepten aus, die in entsprechenden Kontexten für mehr Realitätsnähe im Mathematikunterricht sorgen. Hierbei wird häufig von prozeduralem und konzeptuellem Wissen gesprochen. Prozedurales Wissen bezieht sich dabei auf das Wissen "wie" eine spezifische Aufgabe zu lösen ist (Rittle-Johnson und Schneider 2015) und beruht somit auf Regeln, Algorithmen und Prozeduren, die zur Lösung notwendig sind (Hiebert und Lefevre 1986). Bei dem Wissen, "warum" die Aufgabe so gelöst werden kann, handelt es sich um konzeptuelles Wissen (Baroody 2003). Oft wird konzeptuelles Wissen auch als ein "Netzwerk an Wissen" (Hiebert und Lefevre 1986) beschrieben, in dem sowohl die Vernetzungen von Wissen untereinander als auch die isolierten Konzepte von Bedeutung sind. Konzeptuelles Wissen kann des Weiteren unterteilt werden in "general principle knowledge" (allgemeines Wissen zu Konzepten), welches nicht an eine spezifische Prozedur gebunden ist, sondern sich auf ein mathematisches Konzept bezieht und "knowledge of principles underlying procedures" (Crooks und Alibali 2014), welches das Wissen beschreibt, warum eine bestimmte Prozedur an einem Problem angewandt werden kann.

Empirischer Hintergrund

Die Vielzahl an Definitionen und teils fehlende Trennschärfe der Konstrukte hat unterschiedliche Vorgehensweisen der Operationalisierung in Studien zur Folge. Prozedurales und konzeptuelles Wissen steht bereits seit Anfängen der 1980er im Fokus zahlreicher Studien (vgl. Hiebert 1986). Diese Vielzahl an Studien sind stets an Themenbereiche gebunden wie beispielsweise das Zählen, die Addition und Subtraktion, die Dezimalzahlen und das Lösen

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

von Gleichungen. Trotz ähnlicher Ziele dieser Studien existiert keine einheitliche Vorgehensweise. Die uneinheitliche Operationalisierungen der Konstrukte (vgl. Crooks und Alibali 2014) und die fehlende Validierung der Erhebungen verhindern die Vergleichbarkeit der Studien und deren Ergebnisse.
Nur wenige Studien untersuchen prozedurales und konzeptuelles Wissen ab der Sekundarstufe II. Rach und Ufer (2020) haben beispielsweise überprüft, inwiefern das Vorwissen von Studienanfänger*innen den Studienerfolg im ersten Jahr an der Universität vorhersagt. Klinger (2017) entwickelte ein Testinstrument, um funktionales Denken zu erfassen im Übergang von Funktionenlehre und Differentialrechnung. Beide Studien haben die Konstrukte auf einer unidimensionalen Skala gemessen (Rach und Ufer 2020; Klinger 2017). In der Studie von Dorner und Ableitinger (2022) wurde sich ausschließlich auf prozedurales Wissen zu verpflichtenden mathematischen Inhalten der Sekundarstufe II fokussiert. Keine dieser Studien in der Differentialrechnung hat jedoch die beiden Konstrukte getrennt erfasst, was in anderen Themenbereichen bereits erfolgreich gelungen ist (Lenz et al. 2020).

Eine solche empirische Trennung für Inhalte der Differentialrechnung zu zeigen, ist wünschenswert, da insbesondere in der Lehre an Schule und Hochschule dieses Themenbereiches häufig unterschiedliche Ansätze verfolgt werden. Einerseits können Aufgaben der Differentialrechnung auf einem reinen prozeduralen Level ohne die Verknüpfung zu den zugrundliegenden Konzepten gelöst werden (Code et al. 2014). Anderseits bieten die Aufgaben eingebettet in realitätsnahe Kontexte das Potential der Problemorientierung und Schaffung von Relevanz, um konzeptuelles Wissen zu fördern. Dieses Potential wird allerdings nur selten genutzt (Törner et al. 2014).

Das Ziel unseres Forschungsprojektes ist die Konstruktion eines Tests, welcher prozedurales und konzeptuelles Wissen in der Differentialrechnung empirisch trennt. Den Problemen von vorherigen Studien bezüglich der uneinheitlichen Operationalisierung und Vergleichbarkeit der Ergebnisse möchten wir begegnen, indem wir einen Rasch-skalierten Test konstruieren. Somit lautet die Forschungsfrage des Projekts, lässt sich prozedurales und konzeptuelles Wissen in der Differentialrechnung mit einem Rasch-skalierten Test getrennt erfassen?

Testkonstruktion

Die vorliegende Studie entstand als eine Folgestudie des KoLA-Projekts (kurz für Konzepte von Lernenden in der Analysis). Diese vorherige Studie hatte das Ziel, die Fehlvorstellungen von Studierenden zu prozeduralen Aufgaben zu kategorisieren (Eichler et al. 2018). In diesem Projekt wurden verschiedene Itemkategorien entwickelt. Eine Auswahl dieser Items wird nun in der vorliegenden Studie verwendet und aufgrund theoretischer Überlegungen erweitert. Insgesamt kann zwischen Items unterschieden werden, die primär prozedurales oder konzeptuelles Wissen adressieren. Prozedural ausgerichtete Items umfassen meist die Anwendung von Verfahren oder Problemlösungsaufgaben und werden anhand der Korrektheit der Lösung bewertet, wohingegen konzeptuell ausgerichtete Items durch das Erläutern von Beispielen oder Lösungsverfahren und Entscheidungen im Lösungsprozess sowie die Übersetzung zwischen Repräsentationsebenen charakterisiert sind (Rittle-Johnson und Schneider 2015). Bei den eingesetzten Itemkategorien kann somit zwischen prozedural ausgerichteten Items unterschieden werden, die sich in die Kategorien Anwendung von Ableitungsregeln, Anwendung von den Bedingungen für Extrem- und Wendepunkte und dem Verfassen von Anleitungen zu Prozeduren einordnen lassen. Konzeptuell ausgerichtete Items können den Kategorien Umkehraufgaben, Begriffsaufgaben und Modellierungsaufgaben zugeordnet werden.

Methode

Der Test wurde im Sommer 2023 an 2 Schulen eingesetzt. Die Stichprobe bestand aus Schüler*innen der Sekundarstufe II. Der Test wurde an einem Termin durchgeführt und die Schüler*innen hatten eine Bearbeitungszeit von 40 Minuten. Es waren keine Hilfsmittel zur Lösung der Aufgaben erlaubt. Die Inhalte der Differentialrechnung, die zum Lösen der Aufgaben notwendig waren, hatten die Schüler*innen bereits im Unterricht behandelt. Die Daten wurden anschließend dichotom codiert. Beide Arten von Wissen wurden als latente Variablen modelliert. Es wurden Items implementiert, die hauptsächlich nur eine dieser Wissensarten adressieren. Um die Forschungsfrage zu beantworten, wird nun mit diesen Daten überprüft, ob eine Raschskalierung des Tests vorliegt und ob die Items gegebenenfalls für einen raschskalierten Test reduziert werden müssen. Die Rasch-Modelle wurden mithilfe eines explorativen Tools (Explorative Rasch-Package) anhand der Gütekriterien wie beispielsweise der Mean-Square-Fits geprüft (Linacre 2002).

Ergebnisse und Ausblick

Bereits bei einer Pilotierung des Tests im Rahmen der Mathematikvorkurse an der Universität Kassel zu Beginn des Wintersemesters 2023, haben wir die Fragestellung überprüft. Hier ließen sich trotz sehr geringer Stichprobe (N=43) Rasch-Modelle berechnen, die den Gütekriterien genügen. Neben der zu geringen Stichprobengröße, stellte insbesondere auch der sehr heterogene Bildungshintergrund der Studierenden ein Hindernis da. In der vorliegenden Studie wurde diese Fragestellung weitergeführt und insbesondere eine ausreichend große Stichprobe gewählt. Inwiefern sich die Raschskalierung des Tests und auch die aus der Pilotierung bereits erlangten Modelle bestätigen, wird im Rahmen der Tagung vorgestellt.

Literatur

Baroody, A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *Studies in mathematical thinking and learning. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise*. Erlbaum.

Code, W., Piccolo, C., Kohler, D. & MacLean, M. (2014). Teaching methods comparison in a large calculus class. *ZDM, 46*(4), 589–601. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0582-2

Crooks, N. M. & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344–377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.001

Dorner, C. & Ableitinger, C. (2022). Procedural mathematical knowledge and use of technology by senior high school students. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18*(12), em2202. https://doi.org/10.29333/ejmste/12712

Hiebert, J. (Hrsg.). (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (Online-Ausg). Routledge. http://site.ebrary.com/lib/alltitles/Doc?id=10752101

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (Online-Ausg, S. 1–28). Routledge.

Klinger, M. (2017). *Funktionales Denken Beim Übergang Von der Funktionenlehre Zur Analysis: Entwicklung Eines Testinstruments und Empirische Befunde Aus der Gymnasialen Oberstufe*. Essener Beiträge Zur Mathematikdidaktik. Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L. & Wittmann, G. (2020). Are conceptual knowledge and procedural knowledge empirically separable? The case of fractions. *The British journal of educational psychology, 90*(3), 809–829. https://doi.org/10.1111/bjep.12333

Linacre, J. M. (2002). What do infit and outfit, mean-square and standardized mean?. *Archives of Rasch Measuremen(16)*, 871–882. https://www.rasch.org/rmt/rmt162f.htm

Rach, S. & Ufer, S. (2020). Which prior mathematical knowledge is necessary for study success in the university study entrance phase? *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 6*(3), 375–403. https://doi.org/10.25673/81571

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. Cohen Kadosh, A. Dowker, B. Rittle-Johnson & M. Schneider (Hrsg.), *Oxford handbook of numerical cognition* (S. 1102–1118). Oxford University Press.

Törner, G., Potari, D. & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM, 46*(4), 549–560. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0612-0