STRUNK, Franziska & HATTERMANN, Mathias
Technische Universität Braunschweig

Orthogonalität im Raum mit Werkzeugen erfahren und verstehen

Der verständige Umgang mit der Orthogonalitätsrelation ist ein wesentlicher Bestandteil des ebenen Geometrieunterrichts innerhalb der Sekundarstufe I. Hattermann et al. (2024) unterscheiden hierbei die vier wesentlichen 2D-Orthogonalitätsvorstellungen zweier Geraden:

- Zwei sich schneidende Geraden sind orthogonal zueinander, wenn diese durch eine Achsenspiegelung an der jeweils anderen Geraden auf sich selbst abgebildet werden.
- Geraden stehen orthogonal zueinander, wenn sich das Geodreieck entsprechend anlegen lässt.
- Zeichnet man die Orthogonale h zu einer Geraden g durch einen Punkt P außerhalb von g, dann erhält man den kürzesten Weg von P zu g durch Betrachtung der geeigneten Strecke.
- Zu jedem Punkt P auf einer Geraden g gibt es genau eine Orthogonale h zu g, die P enthält.

In Anbetracht der zu bearbeitenden Inhalte im Themenbereich der analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II sind fundierte Vorstellungen zur Orthogonalitätsrelation auch im Raum notwendig. Daher ist es wichtig, bestehende 2D-Vorstellungen zu reflektieren und an die Erfordernisse des Raumes anzupassen, um möglichst aufwärtskompatible und flexible Vorstellungen auch im Raum auszubilden (Ulovec, 2007).

Fragestellung und methodisches Vorgehen

Wir berichten im vorliegenden Artikel über die Arbeit von Schüler*innen einer 9ten Klasse. Es wird der Frage nachgegangen, inwiefern es den Lernenden gelingt, das entsprechende 3D-Pendant durch Aufgreifen der 2D-Orthogonalitätsvorstellung und dessen Reflexion anhand enaktiver Zugänge und teilweise digitaler Unterstützung zu erfassen.

In den verwendeten Aufgabenbeispielen sollen tragfähige Vorstellungen zu folgenden Orthogonalitätskonzepten im Raum erarbeitet werden, die sich an den beiden letztgenannten 2D-Konzepten aus obiger Aufzählung orientieren:

- Fall Gerade/Gerade: Zu jeder Geraden g im Raum und jedem Punkt S außerhalb von g existiert genau eine Orthogonale h zu g, die den Punkt S

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

enthält. Die Strecke zwischen S und dem Lotfußpunkt P auf g ist die kürzeste Strecke zwischen S und g.
- Fall Gerade/Ebene: Zu jeder Geraden g im Raum und jedem Punkt S außerhalb von g, existiert genau eine Lotebene E zu g, die den Punkt S enthält.

Es wird von ersten Ergebnissen der Durchführung berichtet, die durch eine teilnehmende Beobachtung (Döring, 2023) generiert wurden.

Aufgabenbeispiele

Nach einer Wiederholung des Lotgeradenbegriffs und der Vorgehensweise zur Abstandsberechnung eines Punktes von einer Geraden in der Ebene, ermöglichte eine Aufgabe einen enaktiven Zugang zur Ermittlung aller Orthogonalen zu einer gegebenen Gerade g durch den Punkt P der Geraden im Raum (vgl. https://shorturl.at/4A0Fj). Dazu erhielten die Lernenden Wollfäden mit denen sie die Geraden darstellen und deren Lagebeziehung im Raum untersuchen konnten. Anschließend wurden sie aufgefordert, die Lage aller Orthogonalen im Punkt P zur Geraden g im Raum zu beschreiben. Zur Bildung des Begriffs Lotebene und zur Festigung der zuvor ermittelten Lage aller Lotgeraden nutzten die Lernenden eine GeoGebra-Datei, in der über die Verwendung des Schiebereglers die zu g im Punkt P orthogonale Gerade h um g unter Beibehaltung des Schnittwinkels von 90 Grad gedreht werden konnte. Durch das Aktivieren der Spur der gedrehten Geraden h war es möglich, das Zustandekommen der Lotebene zu g durch P zu visualisieren (vgl. Abb. 1).

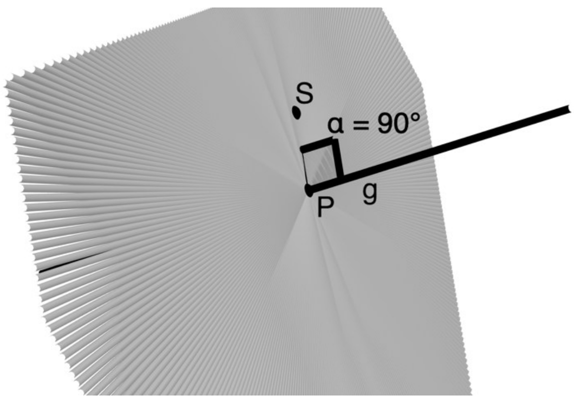

Abb. 1: Erzeugung der Lotebene

Weiter wurden die Lernenden im letzten Aufgabenteil dazu aufgefordert, zu beurteilen, ob alle Geraden, die orthogonal zur Geraden g im Punkt P verlaufen, mithilfe eines Kartonpapiers dargestellt werden können.

Nach dieser Aufgabe erfolgte eine Sicherung des Begriffs Lotebene unter Verwendung der GeoGebra-Datei.

Im ersten Aufgabenteil der folgenden Aufgabe sollte die Abstandsberechnung im Raum (Punkt-Gerade) über einen enaktiven Zugang ermittelt werden. Dafür standen den Lernenden Faden, Karton und Geodreieck zur Verfügung. In den weiteren Aufgabenteilen erfolgte ein Vergleich mit dem zu Beginn der Stunde wiederholten Konzept der Abstandsberechnung von Punkt und Gerade in der Ebene.

Ergebnisse: Erfahrungen aus dem Unterricht

Beim Einstieg zeigte sich, dass die Begriffe rechter Winkel, senkrecht und orthogonal den Lernenden bekannt waren. Zudem waren sie in der Lage, die zur Abstandsberechnung von Punkt und Gerade notwendige Orthogonale in der Ebene mit dem Geodreieck zu zeichnen.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe zur Nicht-Eindeutigkeit wurde mehrfach angenommen es existierten im Raum zu einer Geraden g im Punkt P nur genau zwei Orthogonalen. Dabei gingen die Lernenden davon aus, dass diese beiden Orthogonalen ebenfalls orthogonal zueinander seien und gemeinsam mit der ursprünglichen Geraden die Achsen eines dreidimensionalen Koordinatensystems bildeten (vgl. Abb. 2). Diese fehlerhafte Vorstellung konnte durch geeignete Hilfestellung mittels Aufforderung zur Nutzung des Materials zur Verifizierung der Aussage korrigiert werden. Nach der Bearbeitung dieser Aufgabe konnten die Lernenden auf Nachfrage die Lage aller Orthogonalen zu g durch P im Raum erläutern.

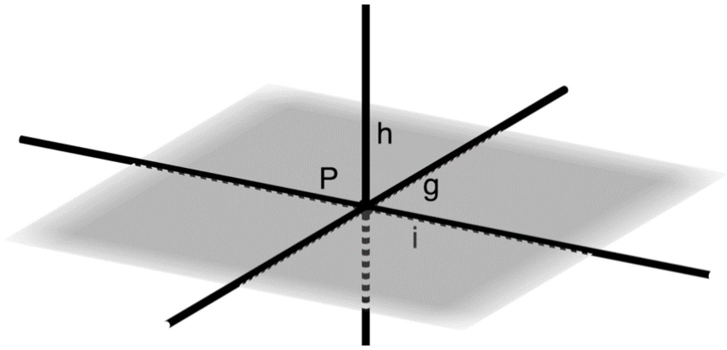

Abb. 2: Vorstellung von Lernenden zur Anzahl von Orthogonalen zu g durch P

Bei der Bearbeitung der Aufgabe zur Abstandsermittlung von Punkt und Gerade im Raum traten vermehrt Schwierigkeiten auf, sodass diese nicht von allen Lernenden vollständig bearbeitet wurde. Die Lernenden erkannten zwar, dass erneut eine Orthogonale zu konstruieren ist. Allerdings konnten nur wenige der Bearbeitenden erklären, wie diese Konstruktion erfolgt. Beim Vergleich des Verfahrens im Raum mit dem Vorgehen in der Ebene, verwiesen einzelne Lernende lediglich auf den Fall in der Ebene ohne Unterschiede herauszustellen und ohne das Vorgehen im Raum explizit zu beschreiben (vgl. Abb. 3).

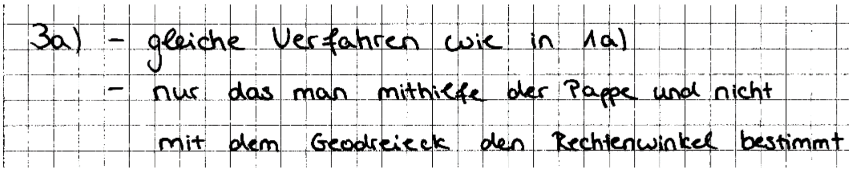
3a) – gleiche Verfahren wie in 1a)
– nur das man mithilfe der Pappe und nicht
mit dem Geodreieck den Rechtenwinkel bestimmt

Abb. 3: Beispielbearbeitung von Aufgabe 3

Bei den verwendeten Aufgaben wurden außerhalb der Geraden *g* liegende Punkte stets mit *S* bezeichnet, während Elemente der Geraden stets mit *P* bezeichnet wurden. Es stellte sich jedoch heraus, dass die Lernenden mehrfach die zugrundeliegende Situation verwechselten und daher nicht immer situationskonsistent argumentierten, was die Verwertbarkeit der Verschriftlichungen und Beobachtungen einschränkt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mehrere Lernende eine Fehlvorstellung zur Anzahl an Orthogonalen zu einer Geraden *g* durch einen Punkt *P* von *g* teilen, die wir *Koordinatenkreuz-Vorstellung* nennen. Diese Lernenden gingen davon aus, dass es genau zwei Orthogonalen *h* und *i* zu *g* durch *P* gäbe, welche jeweils orthogonal zueinander sind (vgl. Abb. 2). Bezüglich der Abstandsberechnung von Punkt und Gerade im Raum lässt sich feststellen, dass zwar die Notwendigkeit einer Orthogonalen den Lernenden bewusst ist, diese aber nicht in der Lage sind, ein Verfahren zur konkreten Feststellung des Abstandes zu verbalisieren.

Ausblick

Da die Unterrichtsbeobachtung nur in einer Klasse stattgefunden hat und bei der Beobachtung nicht ausreichend Einblicke in die Gedanken- und Argumentationsprozesse erfolgen konnten, werden weitere Untersuchungen benötigt. In zukünftigen Forschungsarbeiten sollen individuelle Vorstellungen zu 3D-Konzepten und insbesondere die Vorstellungsgenese von 2D-Konzepten zu den 3D-Verallgemeinerungen in den Blick genommen werden. Hierbei sollen individuelle Vorstellungen über einen längeren Zeitraum anhand von Einzelinterviews, Eye-Tracking Studien, 3D-DGS bzw. Augmented Reality-Umgebungen Verwendung finden.

Literatur

Döring, N. (2023). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial und Humanwissenschaften* (6., vollständig überarbeitete, aktualisierte und erweiterte Auflage.). Springer.

Hattermann, M.; Bender, R. & Mercan, S. (2024). Dimensionserweiterung und Objektübertragung in den Raum. *Der Mathematikunterricht*, 70(2), 16-25.

Ulovec, A. (2007). Wenn sich Vorstellungen wandeln. Ebenen der Zahlbereichserweiterung. *mathematik lehren*, 123, 10-13.