ZIMMERMANN, Alexander
Eisenstadt

Zur Darstellung wichtiger Beweise in akademischen Mathematiklehrbüchern: eine logische Fallanalyse

Motivation

Sowohl das Studienfach Mathematik als auch mathematiknahe Studienfächer haben laut empirischen Erhebungen noch immer mit hohen Studienabbruchquoten zu kämpfen. Nach Lumpe liegt „die Mathematik mit 51 % vorn, gefolgt von der Informatik (45 %), der Chemie (42 %) und der Physik (41 %)“ (Lumpe, 2019, S. 178). Die Situation scheint sich nicht verbessert zu haben, wobei die veränderten Studienumstände aufgrund der Maßnahmen gegen die Verbreitung von Corona zu berücksichtigen sind:

„In Mathematik und Naturwissenschaften ist die Studienabbruchquote mit 51% (ohne berücksichtigten Studienverbleib) bzw. 50% (mit berücksichtigtem Studienverbleib) überdurchschnittlich hoch […]. Im Vergleich zur letzten Berechnung […] 2018 stieg sie um acht bzw. sieben Prozentpunkte.“ (Heublein et al., 2022, S. 6)

Vielen Studierenden scheint also der Übergang von der Schulmathematik zur höheren Mathematik große Probleme zu bereiten, wovon neben Lehramts- auch Fachstudierende betroffen sind. Es sind allerdings nicht nur Studierende der Mathematik betroffen, sondern beispielsweise auch Lehramts- und Fachstudierende der Studienfächer Informatik und Physik sowie Fachstudierende unterschiedlicher Ingenieurswissenschaften. Um den hohen Abbruchquoten in MINT-Studienfächern entgegenzuwirken, entwickelten mehrere Universitäten und Hochschulen eigene Programme und setzten diese bereits um. Beispiele hierfür sind die Hamburger Universitäten und Hochschulen mit dem Programm MINTFIT und die Universität Kassel mit ihrem Orientierungsstudiengang plusMINT. Ferner bieten viele Universitäten und Hochschulen Brückenkurse und ähnliche Maßnahmen an, um die Studieneingangsphase in den betroffenen MINT-Studienfächern zu erleichtern.

Eine der wichtigsten Fragen im Zusammenhang mit den erheblichen Schwierigkeiten vieler Studierender beim Übergang von der schulischen zur akademischen Mathematik ist daher die nach den Ursachen. Eine wesentliche Ursache, womöglich sogar die Hauptursache hierfür ist, dass in der höheren Mathematik das (deduktive) Beweisen stark in den Vordergrund tritt, während das bloße, von der Schule bekannte Rechnen in den Hintergrund rückt. In der Schulmathematik ist eine entgegengesetzte Gewichtung vorherrschend. Das Beweisen spielt hier eine untergeordnete Rolle, das Hauptinteresse gilt stattdessen dem Rechnen. (Zimmermann, 2020, S. 3) Dabei ist das

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Wort >Rechnen< nicht im Sinne des Ausdrucks >berechnen<, also nicht in Anlehnung an den Berechenbarkeitsbegriff, sondern im Sinne von >ausrechnen< zu verstehen.

Seit geraumer Zeit wird in der Mathematikdidaktik die Tätigkeit des Beweisens als Prozess thematisiert. Dies wird dabei häufig mit den Termini >Argumentieren< und >Begründen< sowohl in der akademischen als auch in der schulischen Mathematik in Verbindung gebracht. Während den beiden Fachtermini >mathematisches Argumentieren< und >mathematisches Begründen< eine begriffliche Unschärfe attestiert wird, ist die Einschätzung des Fachterminus >mathematisches Beweisen< eine andere. So schreibt Brunner:

„Nicht nur die Begrifflichkeiten werden unterschiedlich verwendet, auch das Verhältnis zwischen Argumentieren und Begründen und ihre Beziehung zum Beweisen werden sehr verschieden interpretiert. Von den drei hier verwendeten Bezeichnungen ist ‚Beweisen' vergleichsweise gut geklärt […]." (Brunner, 2014, S. 29)

Vor allem zu Studienbeginn ist in den Fachmathematiklehrveranstaltungen jedoch etwas entscheidend, was grundlegender als das „Argumentieren, Begründen und Beweisen" ist, nämlich das Nachvollziehen vorgegebener Beweise. Dies aber setzt seinerseits eine Darstellung der vorgegebenen Beweise voraus, bei der zumindest die entscheidenden Voraussetzungen und logischen Beweisschritte explizit angegeben sind. Anderenfalls ist die Gefahr groß, dass den Studierenden nicht nur ein falsches Bild vom mathematischen Beweisen vermittelt wird, sondern auch Irrtümer und Fehler tradiert werden.

Zur Darstellung von Beweisen in akademischen Mathematiklehrbüchern

Der Vortrag ist deshalb den folgenden zwei Fragen gewidmet:

- Sind zumindest die für den jeweiligen Beweis entscheidenden Voraussetzungen explizit angegeben?
- Sind zumindest die wichtigsten logischen und damit auch die wichtigsten definitionstheoretischen Beweisschritte in diesen Darstellungen der Beweise explizit angeführt?

Beide Fragen betreffen den logischen Aspekt von Beweisen und ihren Darstellungen, einen Aspekt, der in der Hochschuldidaktik für Mathematik noch nicht so stark beachtet wird, wie er es angesichts seines überaus großen Potentials verdiente. Anhand einer Fallanalyse wird beispielhaft untersucht, ob aus den angeführten Voraussetzungen A_1, A_2, A_3, …, A_n mit n ist eine natürliche Zahl größer 0 die Konklusion C wirklich logisch folgt und ob dabei zumindest die aus logischer Sicht wichtigsten Beweisschritte B_1, B_2, B_3, …, B_k mit k ist eine natürliche Zahl größer 0 explizit angegeben sind, so dass die angegebene Folge von Sätzen wirklich eine streng und rein deduktive ist, so wie es von einem mathematischen Beweis, insbesondere von dessen Darstellung in akademischen Fachmathematiklehrbüchern, erwartet werden darf. Es geht also um die Frage, ob die jeweilige Folge

$$
\begin{gathered}
A_1 \\
A_2 \\
A_3 \\
\dots \\
A_n \\
B_1 \\
B_2 \\
B_3 \\
\dots \\
B_k = C
\end{gathered}
$$

eine deduktive Folge von Sätzen ist und somit diese Anforderung an mathematischen Beweisen erfüllt wird. Diese Frage ist keine empirische. Es geht nicht darum, ob (befragte) Menschen die entsprechende Folge von Sätzen für deduktiv *halten*, sondern ob sie deduktiv *ist*. Dies aber ist eine rein logische und auch definitionstheoretische Frage. Dabei spielen weder logische noch definitionstheoretische Kleinigkeiten eine Rolle, sondern es geht um die für den jeweiligen Beweis entscheidenden Voraussetzungen und Beweisschritte.

Ziel des Vortrags ist also weder, über Ergebnisse empirischer Untersuchungen zu berichten, ob Studierende Beweise, so wie sie in akademischen Mathematiklehrbüchern dargestellt sind, nachvollziehen können; noch ist es Ziel des Vortrags, über empirische Untersuchungen zu berichten, ob Studierende diese Darstellungen von Beweisen für logisch halten; sondern das Ziel ist, eine logische und – damit zusammenhängend – eine definitionstheoretische Analyse vorliegender Beweise vorzunehmen und auf ihre logischen Mängel aufmerksam zu machen.

Dazu werden beispielsweise anhand eines etwa in Analysislehrbüchern zu findenden Standardbeweises eines fundamentalen mathematischen Theorems logische und definitionstheoretische Mängel aufgezeigt. Der Beweis wird hierfür Schritt für Schritt logisch analysiert und die entscheidenden

Sprünge, Lücken und auch versteckten Voraussetzungen werden identifiziert und thematisiert. Dabei werden insbesondere auch definitionstheoretische Aspekte berücksichtigt. Angesichts des Anspruchs, ein Theorem im mathematischen Sinn zu beweisen, also rein deduktiv vorzugehen, wiegen diese Mängel schwer. Sie sind sogar derart schwerwiegend, dass mit dem angeführten Beweis genaugenommen gar nicht der zu beweisende Satz, sondern in Wirklichkeit ein anderer bewiesen wird. Dies steht einem Verstehen dieses Beweises und der damit einhergehenden begrifflichen Zusammenhänge diametral entgegen, was vor allem aus hochschuldidaktischer Sicht, gelinde formuliert, äußerst problematisch ist.

Besonders betroffen hiervon sind Erstsemestrige, denn zu Studienbeginn prasseln ja nicht nur neue komplexe und abstrakte Inhalte, sondern zugleich auch – um nur zwei weitere Herausforderungen anzuführen – neue Methoden, vor allem Beweismethoden, und eine neue semiformale Schreibweise auf sie ein. So ist es nicht verwunderlich, dass das Mathematikstudium gerade zu Studienbeginn mehr vom Repetieren und Glauben als von wirklichem Verstehen und Erkennen geprägt ist. Jedenfalls scheint dadurch der Einstieg in das Lehramts- und Fachstudium der Mathematik und anderer MINT-Studienfächer unnötig erschwert zu werden. Dies ist Grund genug, sich die Gesamtsituation genauer anzusehen.

Literatur:

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum.

Heublein, U., Hutzsch, C. & Schmelzer, R. (2022). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten in Deutschland*. (DZHW-Brief 05|2022). DZHW. https://doi.org/10.34878/2022.05.dzhw_brief

Lumpe, M. (2019). Studienabbruch in den MINT-Fächern. Fallstudien an der Universität Potsdam und mögliche Folgerungen. In W. Schubarth et al. (Hrsg.), *Alles auf Anfang! Befunde und Perspektiven zum Studieneingang* (S. 177–192). Universitätsverlag Potsdam.

Zimmermann, A. (2020). Mathematisches Argumentieren im Schulunterricht fördern. *R&E-SOURCE Online Journal for Research and Education, 13*, 1–10.