HOFFMANN, Max
Paderborn

Vom Pfeil zum Vektorterm: Darstellungsvernetzung beim Spiegeln in der analytischen Geometrie

Darstellungsvernetzung in der vektoriellen analytischen Geometrie

Im Unterricht zur vektoriellen analytischen Geometrie in der Sekundarstufe II werden vektorielle Methoden der linearen Algebra verwendet, um geometrische Konfigurationen des Raumes und der Ebene in einer spezifischen Weise darzustellen und diese Darstellungen dann gewinnbringend für die Beantwortung mathematischer Fragestellungen zu benutzten (z.B. Henn & Filler, 2015; Tietze et al., 2000). Bei der Bearbeitung von Aufgaben wechseln Lernende im Zuge ihrer Lösungsprozesse Darstellungen sowohl implizit als auch explizit, eingefordert durch die Aufgabenstellungen. Aus einer semiotischen Perspektive (vgl. Lambert, 2020; Lotz, 2022) kann dabei zwischen konstruktiv-geometrischen, formal-algebraischen und verbal-begrifflichen Darstellungen unterschieden werden. Der verständige (im Sinne von Lotz' (2022) EIS-Palette) Wechsel von formal-algebraischen in konstruktiv-geometrische Darstellungen kann als *Geometrisieren*, der umgekehrte Wechsel von formal-algebraischen Darstellungen in konstruktiv-geometrische als *Algebraisieren* (z.B. Tietze et al., 2000; Vohns, 2016) bezeichnet werden. Mit Blick auf den vektoriellen Fokus ist es sinnvoll, in beiden Sprachformen (konstruktiv-geometrisch, formal-algebraisch) zusätzlich zwischen Darstellungen *mit* und *ohne* Vektoren (bzw. Vektorpfeilen) zu unterscheiden. Letztere bilden für die Lernenden gleichzeitig auch wichtige Anknüpfungspunkte an Vorwissen aus der Sekundarstufe I (insb. Elementargeometrie, und lineare Gleichungen mit ggf. mehreren Variablen).

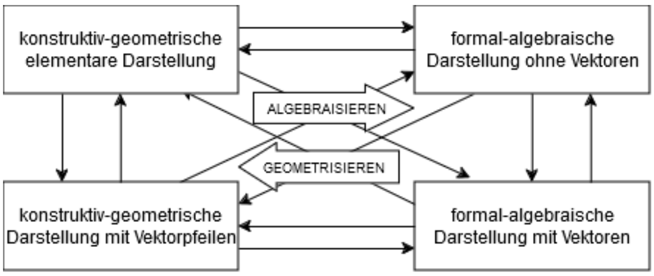

Abb. 1: Reduziertes vektorzentriertes Darstellungsmodell zur analytischen Geometrie.

Daraus ergibt sich das in Abb. 1 dargestellte vektorzentrierte Darstellungsmodel zur analytischen Geometrie, das für die Zwecke dieses Artikels auf seine Kernelemente reduziert ist. Insbesondere wird nicht auf die Bedeutung verbal-begrifflicher Darstellungen, das Arbeiten innerhalb einzelner

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Darstellungen sowie die weitere Unterscheidung nach koordinatisierten und nicht-koordinatisierten Darstellungen eingegangen.

Prediger et al. (2022) heben das durchgängige Nutzen und explizite Vernetzen von Darstellungen als wichtigen Bestandteil qualitätsvollen Mathematikunterrichts hervor. Bereits die oben beschriebenen vier Darstellungsformen (Abb. 1) bieten rein kombinatorisch diverse Möglichkeiten für Darstellungswechsel wobei a priori offen ist, welche Potenziale sich daraus für Verstehensorientierung und welche Hürden sich in Bezug auf oberflächliches Wissen ergeben. Hier ist weitere Forschung notwendig.

Forschungskontext: Wissensspeicher zum Spiegeln

Im Kontext verschiedener Entwicklungsforschungaktivitäten (Hußmann et al., 2013) zum Lehren und Lernen von analytischer Geometrie und linearer Algebra wurde im Frühjahr 2024 eine Wissensspeicheraktivität (Prediger et al., 2021) zum "Spiegeln an Geraden und Ebenen" in einem Q1-Leistungskurs im Klassensetting erprobt (https://go.upb.de/lianmu_spiegeln24). Die Aktivität wurde so konzipiert, dass nicht ein prozedurales Ausrechnen eines Spiegelpunktes über einen Vektorterm im Mittelpunkt steht, sondern im Sinne der Verstehensorientierung zunächst ein konzeptuelles Verständnis von "Spiegelsituationen". Dieses konzeptuelle Verständnis umfasst u.a. die Kollinearität von Urbild, Bild und Schnittpunkt mit der Spiegelgerade/ebene, die Orthogonalität der Urbild-Bild-Gerade zur Spiegelgerade/ebene und die Mittelpunktseigenschaft des Schnittpunkts mit der Spiegelgerade/ebene. Der Wissensspeicher ist so strukturiert, dass Lernende gespiegelte Situationen zunächst elementargeometrisch beschreiben, dann durch passende Pfeile konstruktiv-geometrisch vektorisieren und darauf aufbauend formal-algebraische Darstellungen mit Vektoren entwickeln. Es werden also verschiedene der in Abb. 1 dargestellten Darstellungswechsel adressiert, wobei eine Anbindung an Vorwissen im Sinne der Durchgängigkeit gewährleistet wird. Die im Rahmen der Erhebung entstandenen Wissensspeicher werden aktuell unter Verwendung des oben beschriebenen Darstellungsmodells mit qualitativen Methoden analysiert. In diesem Beitrag gebe ich abschließend einen exemplarischen Einblick in einen Auswertungsschwerpunkt, der die Nutzung der von den Lernenden entwickelten geometrisch-konstruktiven Pfeildarstellungen als Grundlage für Algebraisierungsaktivitäten in den Fokus nimmt.

Empirische Einsichten zur Doppelrolle von Pfeildarstellungen

Verständiges Algebraisieren als Teil der Darstellungsvernetzung wird im Wissensspeicher dadurch gefördert, dass Lernende dazu aufgefordert sind, Pfeildarstellungen explizit einzuzeichnen. Wittmann (2003, S. 399) betont dahingehend die "verbindende Rolle [des schulischen, nicht-axiomatischen Vektorkonzepts] zwischen Geometrie und Algebra". Den geometrisch-konstruktiven Pfeildarstellungen fällt dabei eine entscheidende Doppelrolle zu. Diese lässt sich mit der von Lotz (2022) eingeführten Unterteilung der Art von Zeichen in *objekthaft*, *entlehnt* und *kodifiziert* präziser charakterisieren. Lotz (2022, S. 104) betont, dass Zeichen "nicht per se entlehnt oder kodifiziert [sind], sondern […] von den Lernenden entsprechend wahrgenommen [werden]". Konstruktiv-geometrische Pfeildarstellungen können entlehnt oder kodifiziert sein.

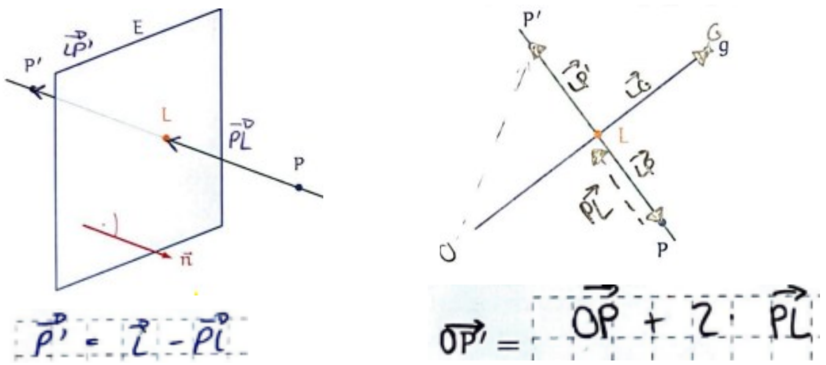

Abb. 2: Ausschnitt aus den Wissensspeichern von Leo (links) und Philipp (rechts).

Werden wie von Leo (Abb. 2), Pfeile vom Urbild zum Lotfußpunkt und vom Lotfußpunkt zum Bild eingezeichnet, so ist es plausibel, dass diese zunächst als entlehnte Zeichen wahrgenommen werden, die in gewisser Weise den Prozess des Spiegelns dynamisch beschreiben. Zum kodifizierten Zeichen werden diese Pfeile, wenn Sie als konstruktiv-geometrische Darstellungen eines Vektors interpretiert werden. Dabei ist im Allgemeinen unklar, ob diese Umdeutung tatsächlich bereits bei der Arbeit mit der konstruktiv-geometrischen Darstellung geschieht oder ggf. in der formal-algebraischen Darstellung. Schließlich kann auch die formal-algebraische Darstellung $\overrightarrow{PL}$ als entlehntes Zeichen für den Pfeil von P nach L wahrgenommen werden und ist somit für Leo nicht zwingend ein kodifiziertes Zeichen. Trotz der passenden konstruktiv-geometrischen Darstellung gelingt Leos Vektorterm nicht vollständig (korrekt wäre " ... $+ \overrightarrow{PL}$" oder " $- \overrightarrow{LP}$"). Bei Philipp (Abb. 2) deutet die Skizze auf eine eher statische Beschreibung der gespiegelten Situation hin. Durch den korrekten Vektorterm und die darin implizit genutzte Gleichsetzung von $\overrightarrow{PL}$ und $\overrightarrow{LP'}$ ist klar, dass er entweder bereits die Pfeile, mindestens aber die formal-algebraischen Vektoren als kodifizierte Zeichen wahrnimmt und in verständiger Weise (bezogen auf die Anforderungen dar Aufgabe) damit operiert. Weitere Erkenntnisse zu dieser ersten Produktauswertung verspricht die Analyse der zugehörigen Lernprozesse über das erhobene Audio- und Videomaterial.

Die semiotische Doppelrolle von Pfeilen und Darstellungen der Form $\overrightarrow{PQ}$ als entlehnte und kodifizierte Zeichen ist eng verbunden mit einem in der Literatur diskutierten stoffdidaktischen Problem geometrisch-konstruktiver Pfeildarstellungen (z.B. Henn & Filler, 2025, S. 88 f.): Lernende setzen einen (konkreten, nicht verschiebbaren) Pfeil mit einem Vektor gleich, statt diesen als einen von vielen Repräsentanten aufzufassen. Die oben eingenommene semiotischen Perspektive erlaubt, dieses Phänomen durch unterschiedliche Wahrnehmungen der Art einer Pfeilzeichens durch die Lernenden (entlehnt vs. kodifiziert) zu beschreiben. Trotz der beschriebenen fachlichen Diskontinuität ist allerdings keineswegs ausgeschlossen, dass auch entlehnten Pfeildarstellungen bei der "zeichnerischen Vektorisierung" geometrischer Situationen eine lernförderliche Rolle zukommt und die Uminterpretation von Pfeilen von entlehnten zu kodifizierten Zeichen ebenfalls einen relevanten Anlass zur Darstellungsvernetzung birgt.

Literatur

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek & S. Prediger (Hrsg.), *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25–42). Waxmann.

Lambert, A. (2020). Mathematik und / oder Mathe (in der Schule) ein Vorschlag zur Unterscheidung. *Der Mathematikunterricht, 66*(2), 3–15.

Lotz, J. (2022). *enaktiv-ikonisch-symbolisch. Eine semiotisch basierte Präzisierung und deren unterrichtspraktische Konkretisierungen*. https://doi.org/10.22028/D291-37052

Prediger, S., Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2021). Towards a research base for textbooks as teacher support: the case of engaging students in active knowledge organization in the KOSIMA project. *ZDM - Mathematics Education, 53*(6), 1233–1248. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01245-2

Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education, 7*. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.969212

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2*. Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6

Vohns, A. (2016). Algebraisierung, Geometrisierung und Kapselung. Globale Ideen bei den Vektoren im Unterricht zur Analytischen Geometrie. *Der Mathematikunterricht, 62*(4), 4–14.

Wittmann, G. (2003*). Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie. Mathematikhistorische, epistemologische und empirische Untersuchungen*. Franzbecker.