Grundlagen der Elektrotechnik III

Auflage 1998

Vorlesung von Prof. Dr.-Ing. D. Peier

Manuskript von

M. Hebbel
A. Örtel

Überarbeitet von

Dipl.-Ing. Andrea Altmann
Dipl.-Ing. Dirk Borneburg
Dipl.-Ing. Thomas Ebke
Dipl.-Ing Till Rümenapp

Inhaltsverzeichnis

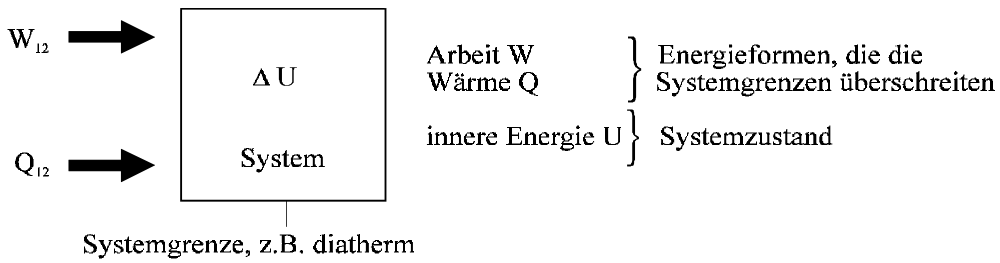
Grundlagen der Elektrotechnik III

1. Energie und Leistung

1.1 Systemzustand

1.1.1 Allgemeine Bemerkungen zum 1. Hauptsatz

Ein System ist ein Kontrollraum, d.h. ein eindeutig begrenzter Raum, dessen Zustand beschrieben oder dessen Zustandsänderung beobachtet werden soll.



1.1.1 Bild 1: Beispiel für ein geschlossenes System

Bei einer Zustandsänderung von "Zustand 1" in "Zustand 2" wird dem System Energie in Form von Arbeit *W* und/oder Wärme *Q* zugeführt oder entzogen. Die Arbeit *W* und die Wärme *Q* sind Energieformen, die die Systemgrenze überschreiten. Die innere Energie *U* charakterisiert den Systemzustand.

Wird nun das Prinzip der Energieerhaltung auf die Zustandsänderung (1 $\rightarrow$ 2) angewandt, so ergibt sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik zu

$$Q_{12} + W_{12} = U_2 - U_1 = \Delta U \ .$$

Laut DIN werden folgende Vorzeichenkonventionen vereinbart:

(Energie-) Zufuhr +
(Energie-) Abgabe -

Grundlegendes über elektrische Energie:

1) Elektrische Energie kommt -in verwertbarer Menge- in der Natur nicht vor.
2) Elektrische Energie muß aus (nichtelektrischer) *Primärenergie* gewandelt werden.
3) Elektrische Energie ist zu 100% Exergie, d.h. sie kann zu 100% in jede andere Energieform umgewandelt werden, weshalb sie auch als wertvolle Energie bezeichnet wird.

1.1.1 Bild 2: Umwandlung von Energie

Für die Änderung der inneren Energie ΔU bei Umwandlung von nichtelektrischer Primärenergie entsprechend *1.1.1 Bild 2* gilt:

$$W_{P12} - W_{S12} - Q_{12} = \Delta U$$

Da U zum Teil aus Feldenergie besteht, ist es schwierig die Systemgrenze zu bestimmen an der die Feldstärke von E und H null ist.

Leistung

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} \qquad \text{Energiestrom}$$

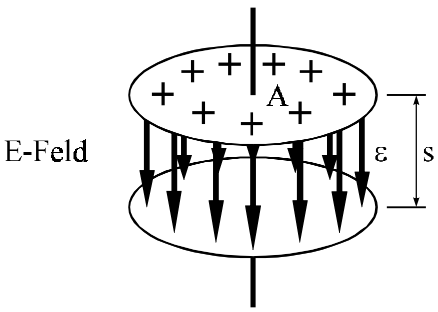
$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} \qquad \text{Wärmestrom}$$

1.1.2 Zustandsgrößen

feldtheoretische Größen			*netzwerktheoretische Größen*	
Stromdichte	$\vec{J} = \kappa\vec{E}$	$\leftrightarrow$	Strom	$I = \frac{1}{R}U$
elektrische Felddichte	$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\leftrightarrow$	Ladung	$Q = CU$
magnetische Flußdichte	$\vec{B} = \mu\vec{H}$	$\leftrightarrow$	magnetischer Fluß	$\phi = LI$

Die Materialdaten (κ, ε, μ) sind häufig skalar. Dies bedingt die skalaren Netzwerkelemente (R, C, L), die, falls $\kappa \neq f(\vec{E})$, $\varepsilon \neq f(\vec{E})$ und $\mu \neq f(\vec{H})$, konstant sind (sog. lineare Netzwerke).

Beispiel: Plattenkondensator



$$D = \varepsilon \cdot E$$

$$\underbrace{D \cdot A}_{Q} = \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{A}{s}}_{C} \cdot \underbrace{E \cdot s}_{U}$$

$$Q = C \cdot U$$

1.1.2 Bild 1: Plattenkondensator

An diesem Beispiel ist deutlich sichtbar, daß Gleichungen für feldtheoretische Größen sich einfach in Gleichungen für netzwerktheoretische Größen umformen lassen. Außerdem ist erkennbar, daß aus $\varepsilon \neq f(\vec{E})$ eine konstante Kapazität C resultiert.

Zustandsdiagramme

Die *magnetische Feldenergiedichte* läßt sich unter der Voraussetzung der Linearität und mit den Anfangsbedingungen $H_1, B_1 = 0$ berechnen zu

$$w_{m12} = \int_1^2 H\,dB = \frac{1}{2}HB = \frac{\mu}{2}H^2 .$$

Für die Energie einer Spule gilt

$$W_L = \int_1^2 I d\phi = \frac{1}{2} I\phi = \frac{L}{2} I^2 .$$

Nun stellt sich die Frage, ob L das ganze Feld erfaßt, denn dann müßte für die *magnetische Feldenergie* auch gelten

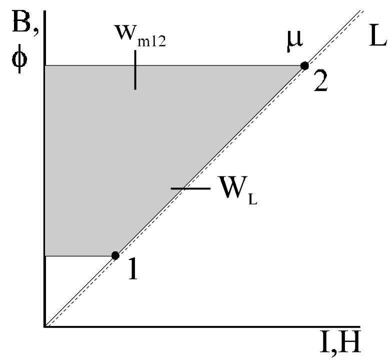
$$W_m = \iiint w_m dV \stackrel{?}{=} W_L .$$

Dies stimmt tatsächlich, denn $W_L = \int I d\phi$ läßt sich mit $d\phi = dBdA$ und $I = \int H ds$ umformen zum Volumenintegral $\iiint HdBdAds = \iiint w_m dV$.

1.1.2 Bild 2 verdeutlicht die magnetische Feldenergie(dichte) für den Fall der nicht verschwindenden Anfangsbedingungen $(H_1, B_1 \neq 0)$. In diesem Fall gilt

$$w_{m12} = \frac{\mu}{2}\left[H_2^2 - H_1^2\right].$$

Somit ergibt die grau schraffierte Fläche die magnetische Feldenergiedichte w_{m12} (bei Achsenbezeichnung *H,B* und Steigung der Geraden$:= \mu$). Da $W_L = \iiint w_m dV$ kann die schraffierte Fläche auch als magnetische Feldenergie der Spule W_L (Achsenbezeichnung I, ϕ und Steigung der Geraden$:= L$) aufgefaßt werden.



1.1.2 Bild 2: Magnetische Feldenergie(dichte)

Die *elektrische Feldenergiedichte* ist unter den Voraussetzungen der Linearität und der Anfangsbedingung $E_1, D_1 = 0$ gegeben durch

$$w_{e12} = \int_1^2 EdD = \frac{1}{2} ED = \frac{\varepsilon}{2} E^2$$

Die Energie einer Kapazität ist

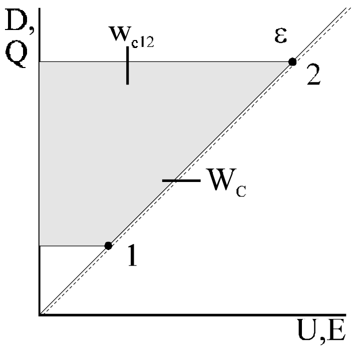
$$W_C = \int_1^2 U dQ = \frac{1}{2} UQ = \frac{C}{2} U^2 .$$

Erfaßt C das ganze Feld müßte wiederum gelten

$$W_e = \iiint w_e dV \stackrel{?}{=} W_C .$$

Auch diese Aussage hat Gültigkeit, denn mit $dQ = dDdA$ und $U = \int E ds$ läßt sich die Energie des Kondensators W_C mit $ds \cdot dA = dV$ umformen zu $W_C = \iiint w_e \, dV$.

1.1.2 Bild 3 stellt - analog zu *1.1.2 Bild 2* - die elektrische Feldenergie(dichte) für den Fall der nicht verschwindenden Anfangsbedingungen $(E_1, D_1 \neq 0)$ dar.



1.1.2 Bild 3: Elektrische Feldenergie(dichte)

Interpretation *L,C:* Symbol für Feldenergie Da die Feldenergie von der Prozeßführung abhängt, ist sie *keine* Zustandsgröße!

Für die *Verlustleistungsdichte* gilt

$$\dot{w}_V = JE = \kappa E^2 = \frac{J^2}{\kappa},$$

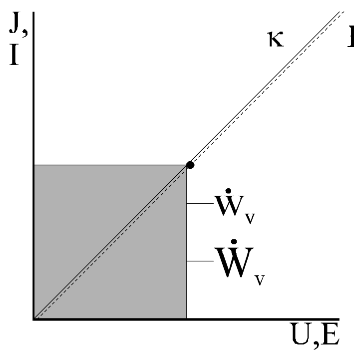
die *Verlustleistung* läßt sich berechnen durch

$$\dot{W}_V = IU = \frac{U^2}{R} = I^2 R .$$

Die Verlustenergiedichte ist gegeben durch

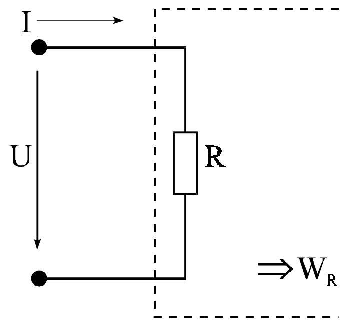
$$w_V = \int_0^t \dot{w}_V \, dt .$$

1.1.2 Bild 4 zeigt schraffiert die rechteckförmige Fläche, die je nach Achsenbezeichnung die Verlustleistungsdichte $\dot{w}_V$ (*J,E* Achsenbezeichnung, κ Steigung der Geraden) oder die Verlustleistung $\dot{W}_V$ (*U,I* Achsenbezeichnung, *R* Steigung der Geraden) darstellt.



1.1.2 Bild 4: Verlustleistung(sdichte)

1.1.2 Bild 5 verdeutlicht den Begriff der Verlustenergie. Am Widerstand R entstehen Verluste, weil der Prozeß nicht umkehrbar ist (irreversibler Prozeß). Der Verlust W_R entsteht durch thermodynamische Reibungsarbeit.



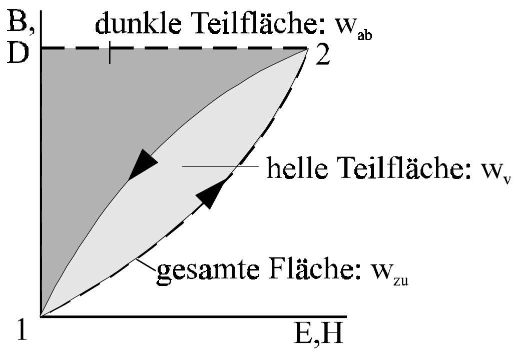
1.1.2 Bild 5: Wärmeverlust am Widerstand

Hysterese

Bei einem Kreisprozeß 1 → 2 → 1 mit Hystereseverlust entsprechend *1.1.2 Bild 6* gilt nach dem 1. Hauptsatz

$$w_{zu} - w_{ab} - w_V = 0 .$$

Bei Hystereseverlusten kann nur der Teil der im E- oder H-Feld gespeicherten Energie zurückgewonnen werden!



1.1.2 Bild 6: Hystereseschleife

Wie *1.1.2 Bild 6* verdeutlicht, geht jeweils beim Durchlaufen von 1 → 2 → 1 die Energie der "hellen Teilfläche" verloren.

Merke: Hystereseverlust setzt nichtlineares Material voraus, aber nichtlineares Material ruft nicht zwangsläufig Hystereseverlust hervor!

1.1.3 Energieerhaltungssatz (elektrisch)

Die beiden Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

lassen sich umformen zu (siehe TET 11.3)

$$\oiint_{O \vee G} \left(\vec{E} \times \vec{H} \right) d\vec{A} + \iiint_G \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \left(\frac{\varepsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 \right) dV$$

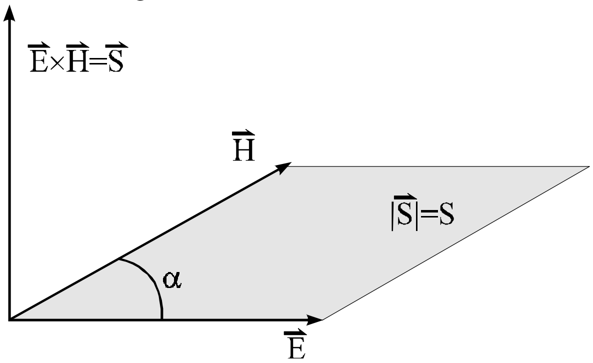
$$\oiint_{O \vee G} \vec{S} \, d\vec{A} + \iiint_G \dot{w}_V \, dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_G \left(w_e + w_m \right) dV$$

wobei: OvG...Integration über die Oberfläche des betrachteten Volumens G

Das Vektorprodukt $\vec{E} \times \vec{H} = \vec{S}$ ist wieder ein Vektor, dessen Produkt mit $d\vec{A}$ ein Skalarprodukt darstellt und ebenso wie die restlichen Produkte einen skalaren Wert ergibt. Daraus folgt, daß die Leistung zwar ortsbezogen ist, aber keine Richtung hat.

Poynting-Vektor $\underline{\vec{S}}$

Der Poynting-Vektor $\underline{\vec{S}}$ entsprechend *1.1.3 Bild 1* ist ein Leistungsdichtevektor, d.h. er gibt die Richtung und die Stärke des Leistungsflusses an.



1.1.3 Bild 1: Poynting-Vektor

Für den Poynting-Vektor gilt

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \ ,$$

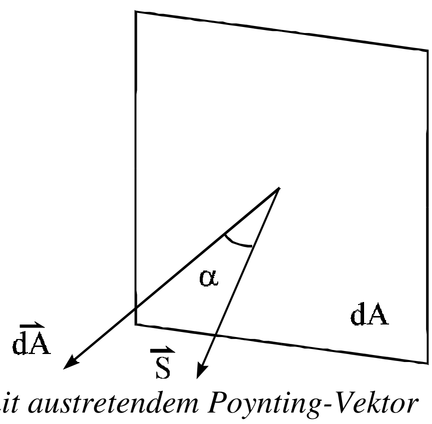
für seinen Betrag

$$S = E \cdot H \cdot \sin\alpha \ .$$

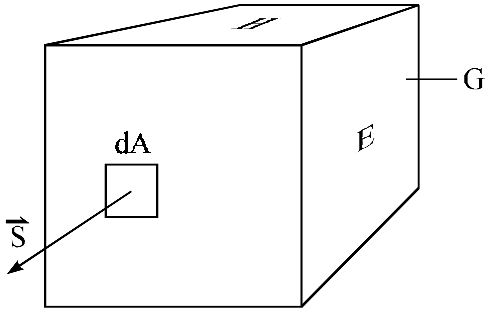
Die Einheit des Poynting-Vektors ist

$$[E][H] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \ .$$

Das Skalarprodukt $\vec{S}\,d\vec{A} = S\,dA\cos\alpha = S_n\,dA$ gibt, wie in *1.1.3 Bild 2* verdeutlicht, die in der Zeiteinheit durch das Flächenelement $d\vec{A}$ austretende Energie an (Achtung: α nun Winkel zwischen $d\vec{A}$ und $\vec{S}$).



1.1.3 Bild 2: Flächenelement mit austretendem Poynting-Vektor

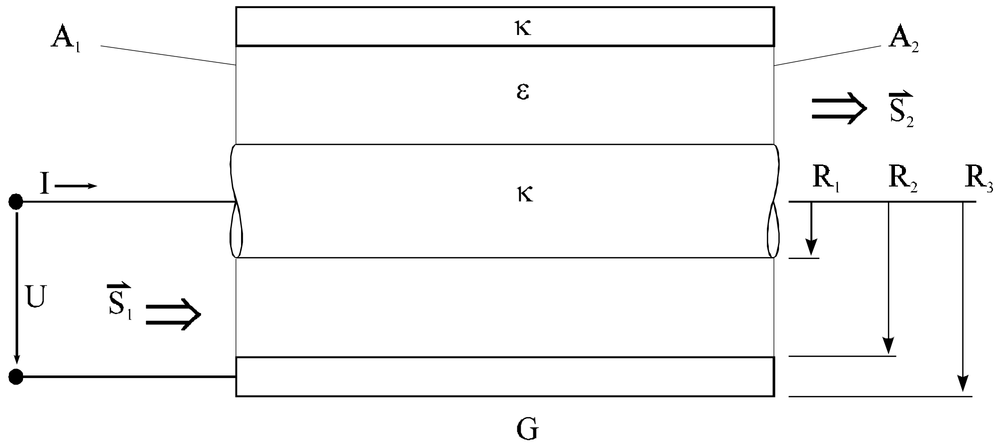


Abstrakte Interpretation:

Bei Abnahme der elektrischen und magnetischen Feldenergie in *G* "strahlt" die Oberfläche Leistung ab und dabei entsteht in *G* Verlustleistung.

1.1.3 Bild 3: Abstrahlende Leistung

Beispiel: *G*:= Koaxialkabel



1.1.3 Bild 4: Koaxialkabel

Unter der Voraussetzung, daß nur Stirnflächen mit $S \neq 0$ berücksichtigt werden und dem stationären Betrieb mit $\frac{\partial}{\partial\ t}\int_G (w_e + w_m) dV = 0$ folgt

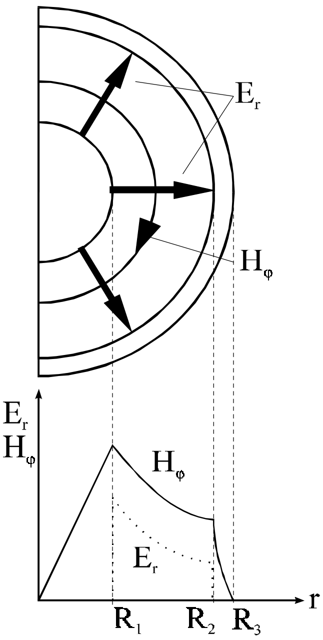
$$-\iint_{A_1} \vec{S}_1 d\vec{A} + \iint_{A_2} \vec{S}_2 d\vec{A} + \iiint_{\text{Leitervol.}} \vec{J} \cdot \vec{E} dV = 0 \,.$$

Da die Verlustleistung $\vec{J} \cdot \vec{E}$ positiv ist, muß $S_1 > S_2$ gelten.

1.2 Eigenschaften der Leistung

1.2.1 Leistungsfluß

Beispiel: Koaxial-Kabel



1.2.1 Bild 1: Feld im Koaxial-Kabel

Der Poynting-Vektor ergibt sich in diesem Beispiel zu

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S_z \end{pmatrix},$$

hat also nur eine Komponete in z-Richtung, für die gilt $S_z = E_r H_\varphi$.
Wie in *1.2.1 Bild 1* ersichtlich, ist dieses Produkt nur im Feldraum zwischen den Leitern ($R_1 \le r \le R_2$) ungleich Null.

Aus dieser Überlegung folgt, daß der *Leistungsfluß* (Energietransport) nur im Feldraum zwischen den Leitern stattfindet.

Nun wird die übertragene Leistung berechnet durch

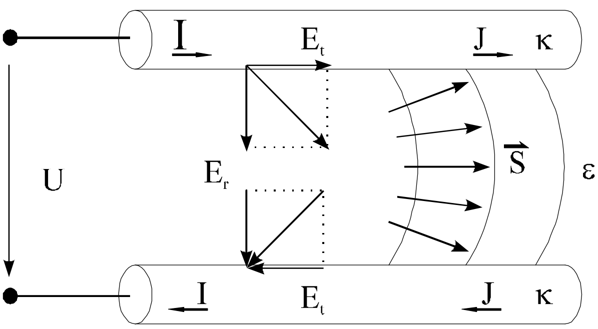
$$\iint_A \vec{S}\, d\vec{A} = \int_{R_1}^{R_2} E_r H_\varphi 2\pi r dr .$$

Mit $I = H_\varphi 2\pi R = \text{const.} \neq f(r)$ folgt

$$\iint_A \vec{S}\, dA = I \int_{R_1}^{R_2} E_r\, dr = U \cdot I .$$

Aus dem Ergebnis des Beispiels $\iint_A \vec{S}\, d\vec{A} = U \cdot I$ läßt sich erkennen, daß der Leistungsfluß durch Strom und Spannung bestimmt wird, obwohl er nicht im Leiter stattfindet.

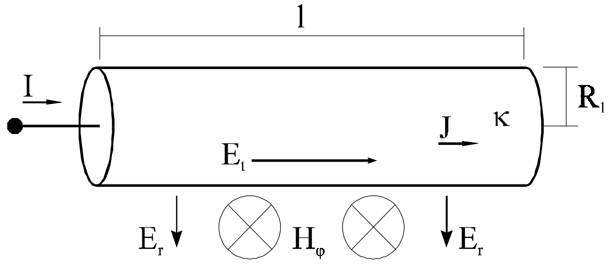
Beispiel: Zweidraht-Leitung



1.2.1 Bild 2: Zweidraht-Leitung

Da bei der realen Zweidrahtleitung gleichermaßen die Leitfähigkeit der Leiter und die Isolierfähigkeit des Isolationsmediums beschränkt ist, ergeben sich die in *1.2.1 Bild 2* eingezeichneten gekrümmten *E*-Feldlinien. Dies wiederum bewirkt eine Komponente des Poynting-Vektors zum Leiter hin (Verluste!).

Beispiel: Rundleiter



1.2.1 Bild 3: Rundleiter

Auch beim Rundleiter ergibt sich aufgrund der endlichen Leitfähigkleit eine tangentiale Komponente E_t des E-Feldes, die für die Verlustleistung verantwortlich ist.

Die Verlustleistung läßt sich berechnen zu (siehe *1.2.1 Bild 3*)

$$\iiint_{V_L} J \cdot E_t \, dV \stackrel{!}{=} \iint_{\text{OvL}} E_t \cdot H_{\varphi_0} \, dA = \iint_{\text{OvL}} S_r \, dA \,,$$

dabei ist *OvL* die Oberfläche vom Leiter.

1.2.2 Wechselstromleistungen im Zeitbereich

Über den Ansatz $\iint \vec{S} \, d\vec{A} = U \cdot I$ wird

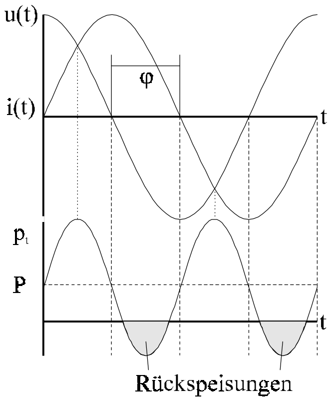
$$p_t = u(t) \cdot i(t)$$

als *Augenblickswert* der Leistung definiert. Der zeitliche Verlauf von Spannung und Strom ist jeweils gegeben durch $u(t) = \sqrt{2} U \cos \omega t$ und $i(t) = \sqrt{2} \; I \cos(\omega t + \varphi)$. U und I sind die Effektivwerte, aus denen sich die Amplituden mit $\hat{u} = \sqrt{2} U$ und $\hat{\imath} = \sqrt{2} I$ berechnen lassen.

Für p_t folgt

$$p_t = 2UI \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = UI\left(\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right).$$

Aus der Gleichung läßt sich leicht ablesen, daß p_t *mit* 2ω *pulsiert*!



1.2.2 Bild 1: Leistung im Zeitbereich

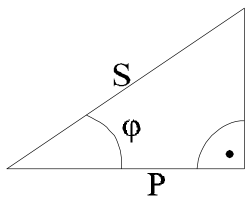
Wirkleistung

Die Wirkleistung wird definiert als

$$P =: \frac{1}{T} \int_T p_t \, dt = UI \cos \varphi = S \cos \varphi .$$

Scheinleistung

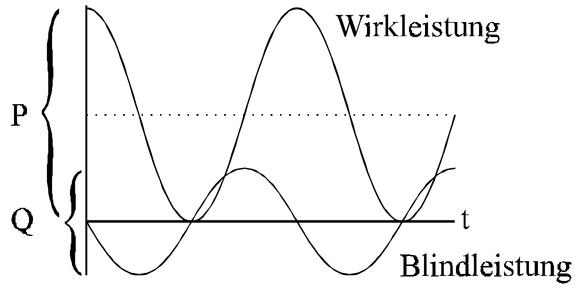
Die Scheinleistung wird definiert als $\boxed{S := UI}$.



1.2.2 Bild 2: Verknüpfung von Wirk- und Scheinleistung

Der Augenblickswert der Leistung läßt sich außerdem umformen zu

$$p_t = UI\left[\underbrace{(1+\cos 2\omega t)\cos\varphi}_{A} - \underbrace{\sin 2\omega t \sin\varphi}_{B}\right].$$

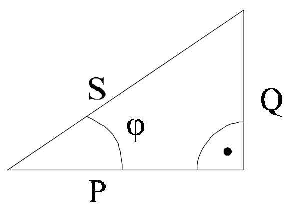


1.2.2 Bild 3: Wirk- und Blindleistung

Die Leistung, die Term **A** darstellt, ist unipolar und oszilliert mit 2ω, ihre Amplitude beträgt $P = UI\cos\varphi$. Term **B** hingegen stellt eine symmetrisch oszillierende Leistung mit der Amplitude $Q = UI\sin\varphi$ dar. Diese Leistung wird auch *Blindleistung Q* genannt!

Die Schein-, Wirk- und Blindleistung sind über das "Leistungsdreick" (*1.2.2 Bild 4*) verknüpft

$$S^2 = P^2 + Q^2 = (UI)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (UI)^2.$$

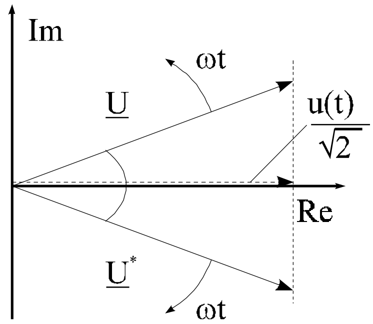


1.2.2 Bild 4: Leistungsdreieck

$Q := \pm\sqrt{S^2 - P^2}$; Für induktive Last ist der Ausdruck positiv, für kapazitive Last negativ (laut DIN/VDE). Für den Sonderfall $\varphi = \pm 90°$ ist $P = 0$ und $S = |Q|$.

1.2.3 Zeigerdarstellung der Leistung

Harmonisch oszillierende Größen lassen sich durch komplexe Zeiger darstellen. Die Zeigerlänge entspricht dem Effektivwert. *1.2.3 Bild 1* veranschaulicht die Darstellung der Spannung $u(t)$ mittels zweier in entgegengesetzte Richtungen rotierender konjugiert komplexer Spannungszeiger.



1.2.3 Bild 1: Spannungszeiger

Mit dem Ansatz $u(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}+\underline{U}^{*}\mathrm{e}^{-j\omega t}\right)$ und $i(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{I}e^{j\omega t}+\underline{I}^{*}e^{-j\omega t}\right)$ läßt sich der Augenblickswert der Leistung bestimmen zu

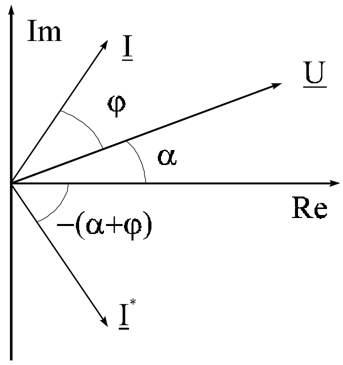
$$p_t=\frac{1}{2}\underbrace{\left[\underline{U}\,\underline{I}^{*}+\underline{U}^{*}\underline{I}\right]}_{\text{ruhende Zeiger}}+\frac{1}{2}\underbrace{\left[\underline{U}\,\underline{I}e^{j2\omega t}+\underline{U}^{*}\underline{I}^{*}e^{-j2\omega t}\right]}_{\text{mit }2\omega\text{ rotierende Zeiger}}.$$

Komplexe Leistung

Für die komplexe Leistung gilt

$$\boxed{\underline{S}=\underline{U}\,\underline{I}^{*}}.$$

Mit dem Ansatz $\underline{U}=Ue^{j\alpha}$ und $\underline{I}^{*}=Ie^{-j(\varphi+\alpha)}$ folgt $\underline{S}=UIe^{-j\varphi}=UI(\cos\varphi-j\sin\varphi)$.



1.2.3 Bild 2: Spannungs- und Stromzeiger für ohmsch-kapazitive Last

Ein Koeffizientenvergleich liefert $S=|\underline{S}|, P=\mathrm{Re}\{\underline{S}\}, Q=\mathrm{Im}\{\underline{S}\}$. Die Blindleistung Q ist in diesem Beispiel negativ, da es sich um eine ohmsch-kapazitive Last handelt.

Für den *komplexen Poynting-Vektor*, der die Flächenleistungsdichte angibt, gilt analog $\underline{S}=\underline{E}\times\underline{H}^{*}$. **Vorsicht**, nicht verwechseln mit komplexer Leistung!

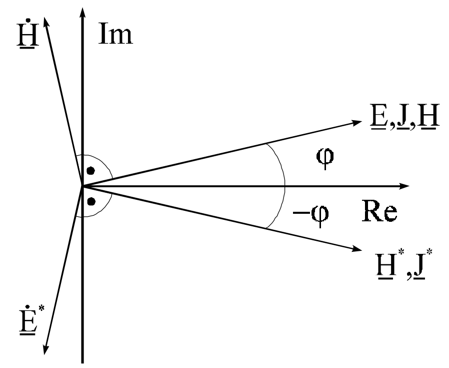
Der Gauß'sche Integralsatz besagt $\oint_A \underline{S}dA=\int_V \mathrm{div}\;\underline{S}dV$, wobei $\mathrm{div}\underline{S}=\mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{H}^{*}\right)$ die *Volumenleistungsdichte* ist, die sich mit Maxwell 1+2 weiter auflösen läßt zu

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{H}^*\right) &= \underline{H}^*\mathrm{rot}\underline{E}-\underline{E}\mathrm{rot}\underline{H}^*\\ &= \underline{H}^*\left(-\dot{\underline{B}}\right)-\underline{E}\left(\underline{J}+\dot{\underline{D}}\right)^*\\ &= -\mu\underline{H}^*\dot{\underline{H}}-\underline{E}\underline{J}^*-\varepsilon\underline{E}\dot{\underline{E}}^*\end{aligned}$$

Um in das Verbraucherzählpfeilsystem zu wechseln, wird die rechte Seite der Gleichung mit (-1) multipliziert und es ergibt sich für die Volumenleistungsdichte

$$\mathrm{div}\left(\underline{E}\times\underline{H}^*\right)=\underbrace{\mu\underline{H}^*\dot{\underline{H}}}_{1}+\underbrace{\underline{E}\,\underline{J}^*}_{2}+\underbrace{\varepsilon\underline{E}\dot{\underline{E}}^*}_{3}.$$

1.2.3 Bild 3 soll die Lage der Zeiger der obigen Größen veranschaulichen. Die Ableitung eines Zeigers entspricht hierbei einer Multiplikation mit $\pm j\omega$, also einer Drehung um ±90°.



1.2.3 Bild 3: Darstellung der Zeiger

Term 1: magnetische Feldleistungsdichte

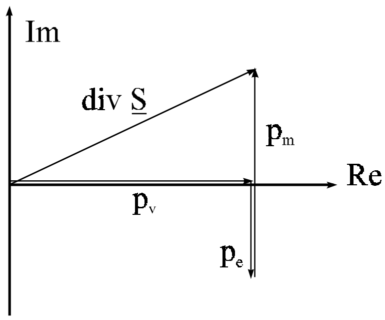
$p_m = He^{-j\varphi}\mu\omega He^{j(\varphi+90°)} = j\omega\mu H^2 \quad \Rightarrow$ induktive Blindleistung

Term 2: Verlustleistungsdichte

$p_V = Ee^{j\varphi}Je^{-j\varphi} = E\cdot J = \frac{1}{\kappa}J^2 \quad \Rightarrow$ Wirkleistung

Term 3: elektrische Feldleistungsdichte

$p_e = \omega\varepsilon Ee^{j\varphi}Ee^{-j(\varphi+90°)} = -j\omega\varepsilon E^2 \quad \Rightarrow$ kapazitive Blindleistung

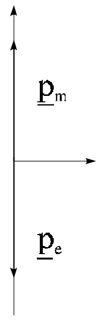


1.2.3 Bild 4: Verknüpfung der Leistungsdichten

Wie oben gezeigt, gilt für die Verknüpfung der Leistungsdichten $\mathrm{div}\,\underline{S}=\underline{p_m}+\underline{p_V}+\underline{p_e}$. Dies verdeutlicht *1.2.3 Bild 4.*

1.2.4 Anwendungsbeispiele

Kompensation der Feldleistung



1.2.4 Bild 1: Kompensation der Feldleistung

Damit die Feldleistung kompensiert wird, muß, wie in *1.2.4 Bild 1* gezeigt, für die magnetische und elektrische Feldleistungsdichte gelten

$$\underline{p}_F = \underline{p}_e + \underline{p}_m = -j\omega\varepsilon E^2 + j\omega\mu H^2 \overset{!}{=} 0 .$$

Diese Bedingung ist erfüllt für

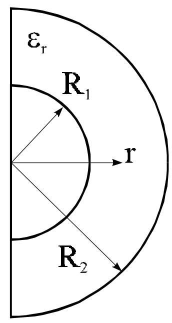
$$\boxed{\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_F}.$$

Z_F wird *Feldwellenwiderstand* genannt und beträgt in Luft $\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega = 120\pi\Omega$.

Beispiel: Koaxialkabel
Den Querschnitt des Koaxial-Kabels zeigt *1.2.4 Bild 2*.

Im Feldraum ist

$$E = \frac{U}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} .$$



1.2.4 Bild 2: Koaxialkabel im Querschnitt

Für den Quotienten $\frac{E}{H}$ ergibt sich also mit $H = \frac{I}{2\pi r}$ nach Einsetzen der Gleichungen

$$\frac{E}{H} = \frac{U 2\pi r}{r \ln \frac{R_2}{R_1} I} = \frac{U}{I} \frac{2\pi}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \overset{!}{=} \frac{377\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{120\pi\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} .$$

Damit läßt sich nun der *Leitungswellenwiderstand* Z_L definieren zu

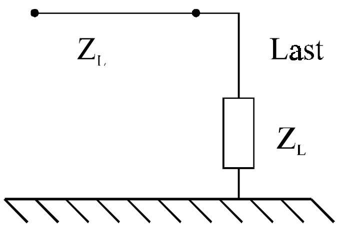
$$\frac{U}{I} = Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\varepsilon_r}} \ln \frac{R_2}{R_1} .$$

Übliche Leitungswellenwiderstände für Meßkabel sind $Z_L = 50\Omega$ mit $\varepsilon_r = 2{,}3$ (PE) und für Antennenkabel $Z_L = 60\Omega$ bzw. 75Ω.

Über die Leitungsbeläge läßt sich der Leitungswellenwiderstand auch definieren als

$$Z_L = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} .$$

Wird eine Leitung mit dem Leitungswellenwiderstand Z_L abgeschlossen, so spricht man von einem reflexionsfreien Abschluß, wie *1.2.4 Bild 3* verdeutlicht.



1.2.4 Bild 3: Reflexionsfreier Abschluß einer Leitung

Isolationsverluste

Da ein realer Isolierstoff immer auch eine geringe Leitfähigkeit hat, muß zur Berechnung der Isolationsverluste sowohl die Verlustleistungsdichte als auch die elektrische Feldleistungsdichte beachtet werden. Wie im Zeigerdiagramm *1.2.4 Bild 5* verdeutlicht ist, läßt sich für den Winkel δ zwischen Isolationsleistungsdichte und elektrischer Leistungsdichte die Beziehung

$$\frac{p_V}{p_e} = \tan\delta$$

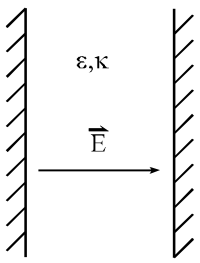
aufstellen. $\tan\delta$ wird als *Verlustfaktor* bezeichnet.

Die obige Beziehung läßt sich umformen zu

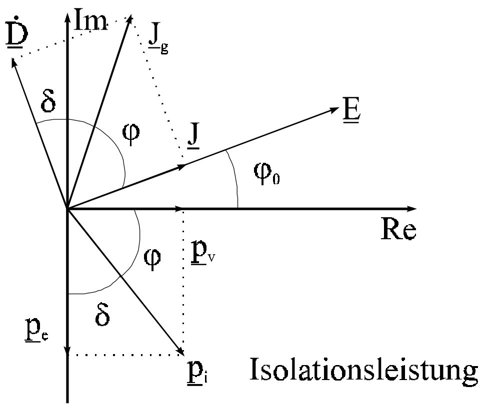
$$\frac{p_V}{p_e} = \frac{\kappa E^2}{\omega\varepsilon E^2} = \frac{\kappa E}{\omega\varepsilon E} = \frac{J}{\dot{D}} = \boxed{\tan\delta = \frac{\kappa}{\omega\varepsilon}} = 10^{-1} \ldots 10^{-6} .$$

Für das Zeigerdiagramm der Isolationsleistung (siehe *1.2.4 Bild 5*) gelten die folgenden Zusammenhänge:

1. Ausgangspunkt elektrische Feldstärke $\underline{E}$ mit Winkel φ_0.
2. Stromdichte $\underline{J}$ in Phase mit $\underline{E}$ und $\underline{\dot{D}}$ um 90° voreilend.
3. Gesamtstromdichte $\underline{J}_g$ ergibt sich als Summe von $\underline{J}$ und $\underline{\dot{D}}$.
4. Der Winkel zwischen $\underline{\dot{D}}$ und $\underline{J}_g$ wird als Verlustwinkel δ bezeichnet.
5. Dieser Winkel δ taucht analog zwischen $\underline{p}_e$ und $\underline{p}_i$ auf, wobei zusätzlich $\underline{p}_V$ in der reellen und $\underline{p}_i$ in der negativen imaginären Achse liegen muß.
6. Somit ist der qualitative Zusammenhang aller Größen gegeben.



1.2.4 Bild 4: Isolation



1.2.4 Bild 5: Zeigerdarstellung der Isolationsleistung

Mit dem Verlustfaktor läßt sich die Verlustleistungsdichte umformen zu

$$\boxed{p_V = \tan\delta\,\omega\varepsilon E^2}.$$

Über Integrieren der Verlustleistungsdichte ergibt sich die Verlustleistung zu

$$P_V = \tan\delta\,\omega C U^2.$$

Ersatzschaltbild Isolation

Damit kann das Ersatzschaltbild der Isolation entsprechend *1.2.4 Bild 6* erstellt werden.

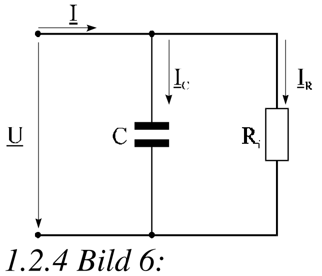
Über den Ansatz

$$P_V = \tan\delta\,\omega C U^2 \overset{!}{=} \frac{U^2}{R_i}$$

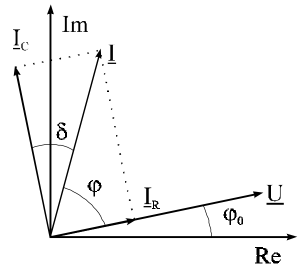
läßt sich der "Parallelwiderstand" berechnen zu

$$R_i = \frac{1}{\tan\delta\,\omega C},$$

woraus sich ableiten läßt, daß $R_i >> \frac{1}{\omega C}$, was wiederum bedeutet, daß $I_R << I_C$. Diesen Sachverhalt verdeutlicht das Zeigerdiagramm in *1.2.4 Bild 7.*



1.2.4 Bild 6: Ersatzschaltbild Isolation



1.2.4 Bild 7: Zeigerdiagramm zu 1.2.4 Bild 6

Die *"Güte"* der Isolation ist gegeben durch

$$\frac{P_e}{P_V} = \frac{1}{\tan\delta}.$$

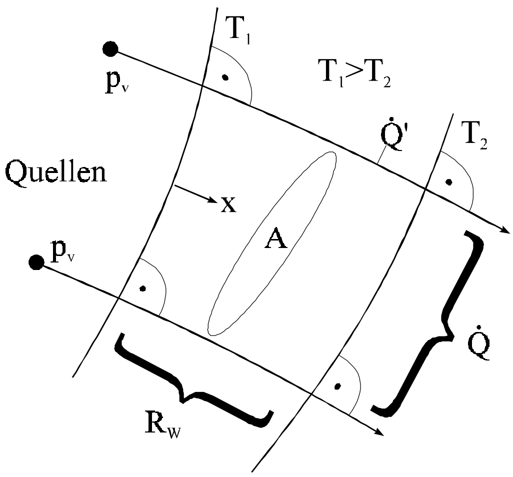
1.3 Temperatur und Wärme

Die Temperatur ist eine wichtige Führungsgröße elektrischer Systeme!

1.3.1 Wärmeleitung und Analogiebeziehungen

Wärme [Energie]	Q		q	?
Wärmestrom	$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$	[Leistung]	$I = \frac{dq}{dt}$	Ψ
Wärmestromdichte	$\dot{Q}' = \frac{d\dot{Q}}{dA}$	[L.-Dichte]	$J = \frac{dI}{dA}$	$D = \frac{d\Psi}{dA}$
	$\dot{Q}' = -\lambda \operatorname{grad} T$		$J = \kappa E = -\kappa \operatorname{grad} \varphi$	$D = \varepsilon E = -\varepsilon \operatorname{grad} \varphi$
	$\operatorname{div} \dot{Q}' = p_V$		$\operatorname{div} J = 0$	$\operatorname{div} D = \rho$

An der Stelle des Fragezeichens in der Tabelle müßte eigentlich die magnetische Einheitsladung stehen, die allerdings nicht existiert.
Die obigen Analogiebeziehungen können beim Rechnen sehr hilfreich sein. Mittels der Analogiebeziehungen läßt sich ein Wärmeflußbild erstellen (vgl. *1.3.1 Bild 1*). Die (Wärme)-Quellen p_V verursachen einen Wärmefluß in dem Material, analog wie eine Stromquelle einen Stromfluß in einem Leiter.



1.3.1 Bild 1: Wärmefluß

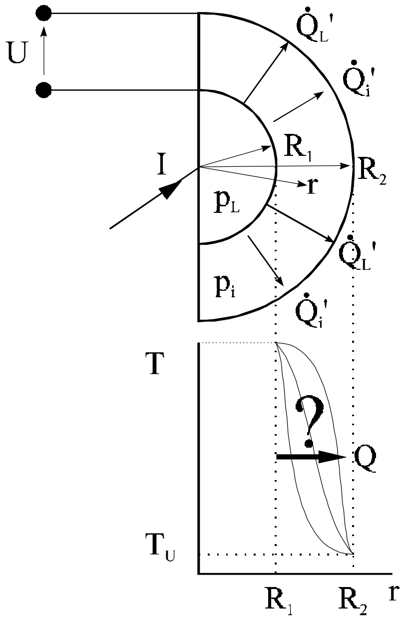
Im Gebiet mit $p_V = 0$ ist der *differentielle Wärmewiderstand* $dR_W = \frac{dx}{\lambda A(x)}$. Der *Wärmewiderstand* ist demnach $R_W = \int_{x=0}^{S} dR_W$.
Für die Temperaturänderung läßt sich nun ein Ausdruck ähnlich dem ohmschen Gesetz herleiten $T_1 - T_2 = \Delta T = R_W \cdot \dot{Q}$. Mit diesem Wissen lassen sich nun Wärmefluß-Netzwerke analog zu elektrischen Netzwerken aufstellen.

1.3.2 Temperaturprofil

Beispiel: Koaxialkabel mit Verlusten

Bei diesem Beispiel nutzen wir die Symmetrie und betrachten nur eine Hälfte des Kabels im Querschnitt (siehe *1.3.2 Bild 1*).
Als Ansatz zum Berechnen der Temperatur im Kabel wählen wir

$$\operatorname{div} \dot{Q}' = p_V \,.$$



1.3.2 Bild 1: Wärmefluß im Koaxialkabel

Durch Integrieren der Gleichung folgt

$$\int_V \operatorname{div} \dot{Q}' dV = \int_V p_V \, dV = \oint_A \dot{Q}' dA = \dot{Q} \,.$$

Die Leiterverluste sind

$$\dot{Q}_L = \frac{J^2}{\kappa_L} \pi R_1^2 l = I^2 R_L \,,$$

für die Wärmestromdichte ergibt sich damit

$$\dot{Q}_L' = \frac{I^2 R_L}{2\pi r l} = \frac{I^2 R_L'}{2\pi R_1} \cdot \frac{1}{r/R_1} \,.$$

Die Isolationsverluste sind

$$\dot{Q}_i = \int_{R_1}^{r} p_i \underbrace{2\pi \;\; r \;\; l\,dr}_{dV} = \tan\delta \quad \omega C U^2 \frac{\ln r/R_1}{\ln R_2/R_1} \,,$$

unter der Annahme $R_2/R_1 = e$ und $C' = \dfrac{C}{l}$ ist die Wärmestromdichte gegeben durch

$$\dot{Q}_i' = \frac{\tan\delta \quad \omega C' U^2}{2\pi R_1} \cdot \frac{\ln r/R_1}{r/R_1} \,.$$

Weiterhin ist das Temperaturprofil im Isolierstoff T_U von Interesse, da prinzipiell verschiedene Verläufe (siehe *1.3.2 Bild 1*) denkbar wären. Der tatsächliche Verlauf soll im folgenden bestimmt werden.

Der gesamte Wärmestrombelag ist

$$\sum \dot{Q}' = \dot{Q}_L' + \dot{Q}_i' = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \,.$$

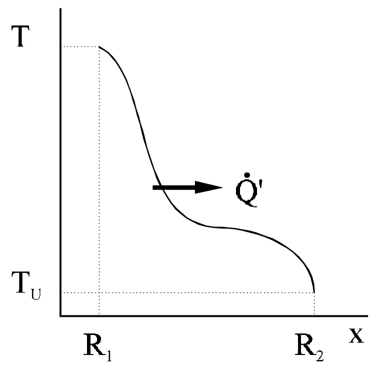
Als Lösung für T ergibt sich

$$T(r) = -\frac{R_1}{\lambda} \int \sum \dot{Q}' d\left(\frac{r}{R_1}\right) + K \,.$$

Die Integrationskonstante K läßt sich aus der Bedingung $T = T_U$ für $r = R_2$ bestimmen. Für die Temperatur im Leiter $\left(R_1 \le r \le R_2\right)$ folgt

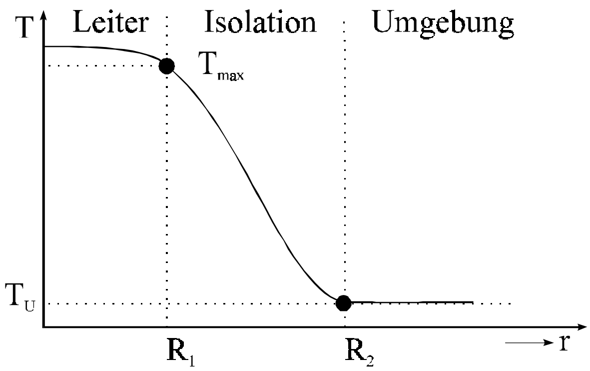
$$T(r) = T_U + \frac{I^2 R_L'}{2\pi\lambda}\left(1 - \ln\frac{r}{R_1}\right) + \frac{\tan\delta\,\omega C' U^2}{4\pi\lambda}\left(1 - \ln^2\frac{r}{R_1}\right).$$

Die Gleichung stellt ein mathematisches Modell für die Verknüpfung der Führungsgrößen *U,I* und *T* dar. Somit kann der Verlauf für das Temperaturgefälle entsprechend *1.3.2 Bild 2* angegeben werden.



1.3.2 Bild 2: Temperaturgefälle im Leiter

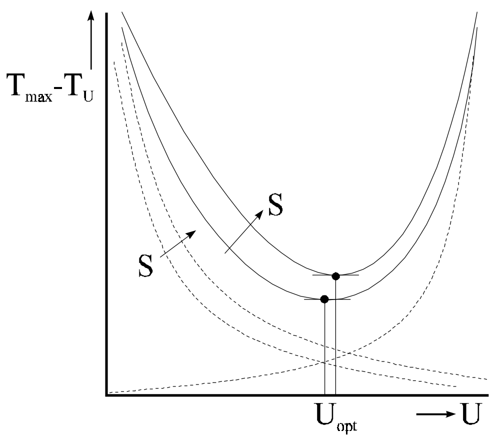
1.3.3 Optimale Systemspannung



1.3.3 Bild 1: Temperaturgefälle im Kabel

Die maximale Isolationstemperatur $T_{\max}$ tritt bei $r = R_1$ auf und darf die maximal zulässige Temperatur der Isolierung (des Dielektrikums) nicht überschreiten.
Die Aufgabe der Leitung ist die Übertragung der Leistung $S = UI$. Für $T_{\max}$ ergibt sich damit

$$\boxed{T_{\max} = T_U + \frac{R_L'}{2\pi\lambda}\frac{S^2}{U^2} + \frac{\tan\delta\omega C'}{4\pi\lambda}U^2}.$$



1.3.3 Bild 2: Diagramm zur opimalen Systemspannung

Die optimale Systemspannung ist an der Stelle gegeben, an der $T_{\max}$ möglichst klein ist (vgl. *1.3.3 Bild 2*) und läßt sich berechnen durch

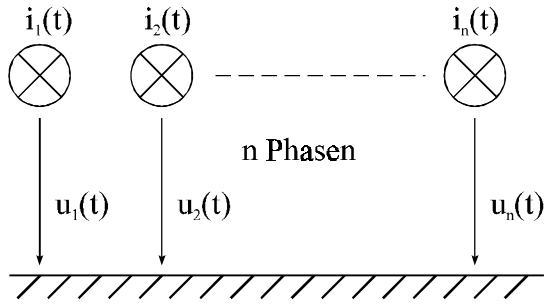
$$U_{\text{opt}} = \left(\frac{2R_L'}{\tan\delta\,\omega C'} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{S}\ .$$

Anhand der Gleichung läßt sich erkennen, daß für steigende Leistung auch die optimale Systemspannung steigen muß!

Aus dieser Überlegung folgt, daß aus technologischen und ökonomischen Gründen *Hochspannung* für die Übertragung von größeren Leistungen *zwingend* ist.

1.4 Leistung im Mehrphasensystem

1.4.1 Mehrphasenwechselstromsystem



1.4.1 Bild 1: Wechselstromsystem mit n Phasen

Die Voraussetzungen für ein symmetrisches Mehrphasensystem sind:

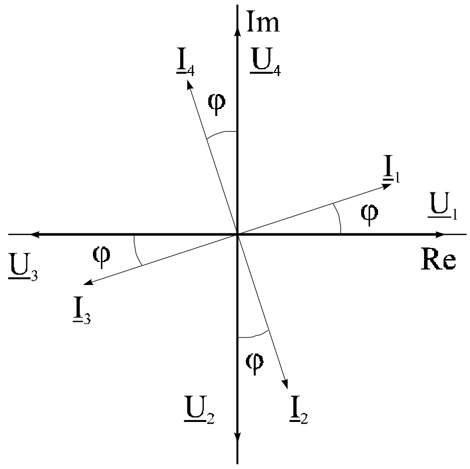
Phasenwinkel	$\varphi_v = \varphi = \text{const.}$
Spannungen	$U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U$
Ströme	$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = I$
Phasenverschiebung zwischen Teilsystemen	$\alpha_v = \alpha = \dfrac{360°}{n}$

<u>Beispiel: Symmetrisches 4-Phasensystem</u>

Die Phasenverschiebung zwischen den Teilsystemen entspricht $\alpha = \frac{360°}{4} = 90°$.

Der *Augenblickswert der Leistung* ist gegeben durch

$$\boxed{p_{tMPS} = \sum_{v=1}^{n} p_{tv}}.$$



1.4.1 Bild 2: Zeigerdiagramm für Spannung und Strom im 4-Phasensystem

1.4.2 Augenblicksleistung im symmetrischen Mehrphasensystem

2 Phasen

Für ein symmetrisches Zweiphasensystem beträgt $\alpha = 180°$. Der Augenblickswert der Leistung beträgt laut *Kapitel 1.2.2* (Umformung A)

$$\frac{p_{t2}}{UI} = \underbrace{\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)}_{1.\,\text{Teilsystem}} + \underbrace{\cos\varphi + \cos(2\omega t - 360° + \varphi)}_{2.\,\text{Teilsystem}}$$
$$= 2(\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi))$$

Wie sich an der Gleichung ablesen läßt, verdoppelt sich die Leistung im Zweiphasensystem und pulsiert mit 2ω.

3 Phasen

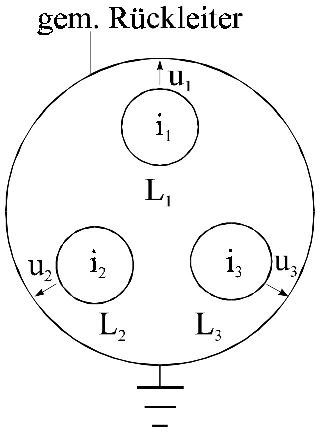
Im symmetrischen Dreiphasensystem mit $\alpha = 120°$ ist der Augenblickswert der Leistung gegeben durch

$$\frac{p_{t3}}{UI} = \underbrace{\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)}_{1.\,\text{Teilsystem}} + \underbrace{\cos\varphi + \cos(2\omega t - 240° + \varphi)}_{2.\,\text{Teilsystem}} + \underbrace{\cos\varphi + \cos(2\omega t + 240° + \varphi)}_{3.\,\text{Teilsystem}}$$
$$= 3\cos\varphi + \underbrace{\cos(2\omega t + \varphi) + 2\cos\frac{4\omega t + 2\varphi}{2}\underbrace{\cos\frac{480°}{2}}_{-0,5}}_{=0}$$

$$p_{t3} = 3UI\cos\varphi \neq f(t) \;!$$

Im 3-phasigen Mehrphasensystem tritt also auch die dreifache Leistung auf, aber ohne Pulsation! Dieses *Drehstromsystem* bildet die Basis der Energietechnik.

1.4.3 Drehstrom- und Spannungssystematik



Für die übertragene Leistung gilt

$$\iint \vec{S}\, d\vec{A} = p_{t3} \neq f(t)\,,$$

sie ist also über die Zeit konstant, aber die örtliche Leistungsdichteverteilung wandert.

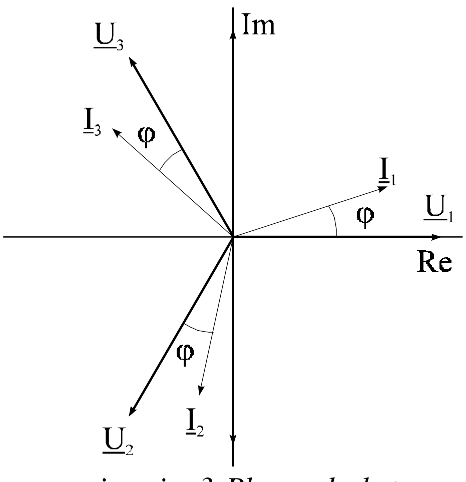
1.4.3 Bild 1: Drehstromleiter

<u>Zeitbereich</u>

Spannungen	Ströme
$u_1 = \sqrt{2}U \cos \omega t$	$i_1 = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi)$
$u_2 = \sqrt{2}U \cos(\omega t - 120°)$	$i_2 = \sqrt{2}I \cos(\omega t - 120° + \varphi)$
$u_3 = \sqrt{2}U \cos(\omega t + 120°)$	$i_3 = \sqrt{2}I \cos(\omega t + 120° + \varphi)$

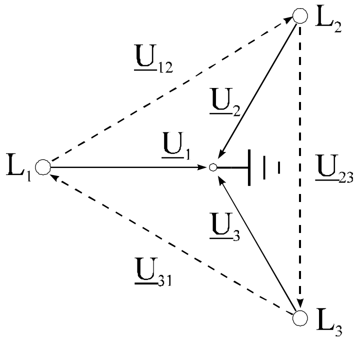
Der Gesamtstrom ist gegeben durch $\sum_{\nu=1}^{3} i_\nu(t) = 0$, für alle t. Dies bedeutet, daß der Rückleiter stromlos ist.
Im Vergleich zum Wechselstrom liefert der Drehstrom die dreifache Leistung bei 1,5 fachem Materialeinsatz.

<u>Zeiger</u>



1.4.3 Bild 2: Strom- und Spannungszeiger im 3-Phasendrehstromsystem

Jedes Drehstromsystem liefert zwei Spannungssysteme. Die Spannung zwischen Leiter und Erde heißt Sternspannung, die Spannung zwischen den Phasen wird als verkettete oder Dreieckspannung bezeichnet und läßt sich berechnen durch $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ usw. Die Beträge sind gegeben durch $U_{\text{Dreieck}} = \sqrt{3} U_{\text{Stern}}$. Im Niederspannungsnetz beträgt $U_{\text{Stern}} = 230\,\text{V}$ und $U_{\text{Dreieck}} = \sqrt{3} \cdot 230\,\text{V} = 400\,\text{V}$.



1.4.3 Bild 3: Stern- und Dreieckspannung

Drehstromleistung

Wirkleistung	$P_{DS} = 3U_{\text{Stern}} I \cos\varphi$	$= \sqrt{3} U_{\text{Dreieck}} I \cos\varphi = p_{tDS}$
Scheinleistung	$S_{DS} = 3U_{\text{Stern}} I$	$= \sqrt{3} U_{\text{Dreieck}} I$
Blindleistung	$Q_{DS} = \pm 3U_{\text{Stern}} I \sin\varphi$	$= \pm\sqrt{3} U_{\text{Dreieck}} I \sin\varphi$
komplexe Leistung	$\underline{S}_{DS} = 3U_{\text{Stern}} I e^{-j\varphi}$	$= \sqrt{3} U_{\text{Dreieck}} I e^{-j\varphi}$

$\vdots$

usw.

2. Bemessung von Isolierungen

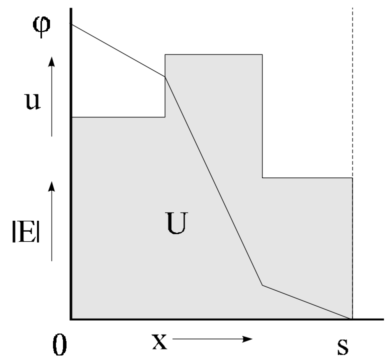
2.1 Elektrisches Feld

2.1.1 Forderungen an den Feldaufbau

Der Leistungsdichtevektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ hängt direkt von der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$, dem Träger der Nutzgröße, ab. Da die Leiterumgebung (Isolierung) nicht mit beliebigen Feldstärken belastbar ist, muß gelten $\boxed{E \leq E_{\max}}$.

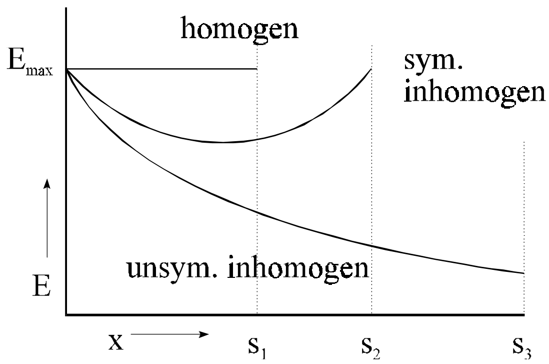
Spannung, Potential, Feldstärke
Für das elektrische Feld gilt $E = -\text{grad}\,\varphi$ und die Spannung als Potentialdifferenz läßt sich berechnen über das Integral der elektrischen Feldstärke $\int_0^s E\,dx = \varphi_1 - \varphi_2 = U_{12}$.

Die Spannung ist also die Fläche im Diagramm unterhalb der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$, die umgekehrt wiederum von der Steigung von φ abhängt ($E = -\text{grad}\,\varphi$). Anhand des Diagramms läßt sich erkennen, daß für $\varphi = 0$ nicht zwangsläufig auch das elektrische Feld gleich Null sein muß, da dieses eben von der Steigung von φ abhängt.



2.1.1 Bild 1: Spannung, Potential und Feldstärke

I) Randbedingung: $U = \text{const}, E_{\max} = \text{const}$
Wie im Diagramm zu erkennen ist, wächst der Raumbedarf des Feldes mit zunehmender Inhomogenität, da U (die Fläche unter E) und $E_{\max}$ als konstant angenommen werden.

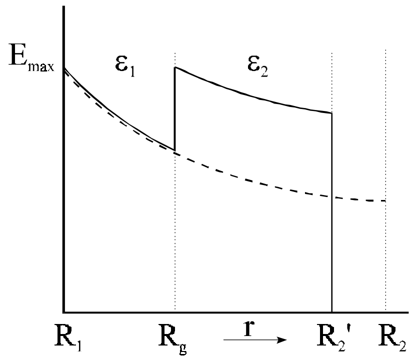


2.1.1 Bild 2: Raumbedarf für verschiedene Anordnungen

Beispiel: Koaxialkabel

Allgemein gilt für das elektrische Feld $E(r) = \dfrac{U}{r \ln R_2 / R_1}$.

Um die Abmessungen eines Koaxialkabels gering zu halten, wird zwischen die Leiter ein Schichtdielektrikum eingebracht mit $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, das einen Sprung des elektrischen Feldes an der Stelle R_g verursacht, so daß der Außenradius R_2 kleiner werden kann (R_2'), um die Fläche unterhalb von E konstant zu halten.



2.1.1 Bild 3: Isolierung mit ε-Sprung

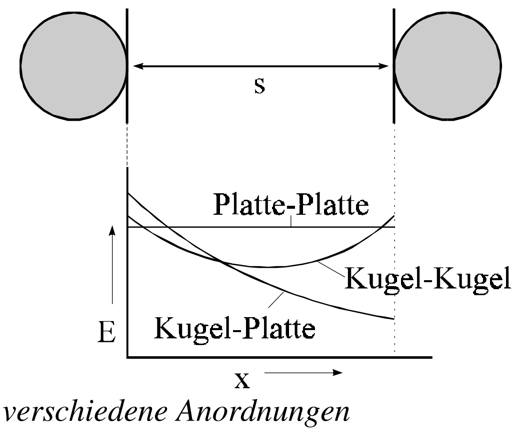
An der Grenzschicht gilt für das Verhältnis der Felder

$$\frac{E_1(R_g)}{E_2(R_g)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Da $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ist, gilt für die E-Felder an der Grenzschicht $E_2(R_g) > E_1(R_g)$.

II) Randbedingung: $U = \text{const}$, $s = \text{const}$

Werden nun die Abmessungen und die Spannung für unterschiedliche Anordnungen konstant gehalten, so stellen wir fest, daß die maximale elektrische Feldstärke $E_{\max}$ und somit auch die Materialbelastung mit zunehmender Inhomogenität ansteigt.

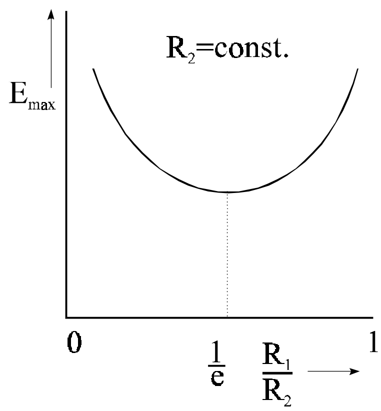


2.1.1 Bild 4: Feldstärke für verschiedene Anordnungen

Platte-Platte Anordnungen sind homogen, Kugel-Kugel Anordnungen symmetrisch inhomogen und Kugel-Platte Anordnungen unsymmetrisch inhomogen.

Beispiel: Koaxial-Zylinder

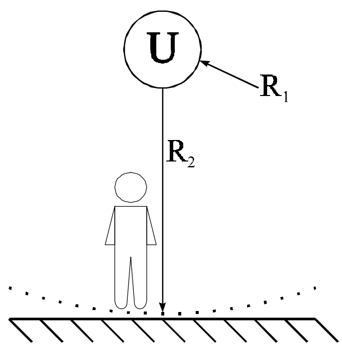
Für die maximale elektrische Feldstärke gilt $E_{max} = \dfrac{U}{R_1 \ln R_2/R_1}$. E_{max} hängt also von dem Verhältnis der Radien R_1 und R_2 ab. Tragen wir E_{max} in Abhängigkeit vom Verhältnis R_1/R_2 auf, so erkennen wir, daß beim Verhältnis $R_1/R_2 = 1/e$ E_{max} ein Minimum aufweist.
Für konzentrische Kugeln ist das optimale Verhältnis $R_1/R_2 = 1/2$.



2.1.1 Bild 5: Maximale E-Feldstärke für verschiedene Radienverhältnisse

III) Randbedingung: $U = \text{const}$, Min-Max-Vorgabe

Während die Materialfestigkeit die maximal zulässige Feldstärke $E_{max} = \dfrac{U}{R_1 \ln R_2/R_1}$ festlegt, ist die für den Menschen gerade noch zulässige Feldstärke (EMV(U)) im Abstand R_2 gegeben als $E_{min} = \dfrac{U}{R_2 \ln R_2/R_1}$. Damit ist das System eindeutig bestimmt (2 Gleichungen, 2 Unbekannte).



2.1.1 Bild 6: Auf Menschen wirkendes E-Feld

2.1.2 Maximalwertmethode (Schwaiger)

Einige Ausdrücke für die maximale elektrische Feldstärke sind in der folgenden Tabelle dargestellt, S ist dabei die Schlagweite.

parallele Platten	$E_{max} = \dfrac{U}{s \cdot 1}$
koaxiale Zylinder	$E_{max} = \dfrac{U}{s} \cdot \dfrac{R_2 - R_1}{R_1 \ln R_2/R_1}$

konzentrische Kugeln $$E_{\max} = \frac{U}{s} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 \left(1 - R_1 / R_2\right)}$$

Bei allen Anordnungen fällt auf, daß $E_{\max}$ sich nach dem gleichen Muster berechnen läßt, nämlich

$$\boxed{E_{\max} = \frac{U}{s \cdot \eta}},$$

η wird *Schwaigerscher Ausnutzungsfaktor* genannt.

Beispiel: Koaxial-Zylinder

Der Schwaigersche Ausnutzungsfaktor beträgt

$$\eta = \frac{R_1 \ln R_2/R_1}{R_2 - R_1} = \frac{\ln R_2/R_1}{\frac{s+R_1}{R_1} - 1} = \frac{\ln q}{p-1} = f\left(p,q\right).$$

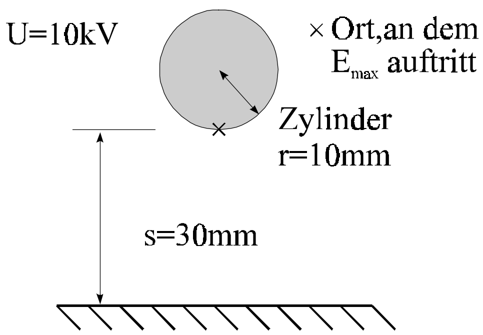
Die geometrischen Charakteristiken der Anordnung sind nun in den Variablen p und q zusammengefaßt.

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \frac{R_2}{R_1} = \frac{R}{r} \\ p &= \frac{s+R_1}{R_1} = \frac{s+r}{r} \end{aligned}}$$

Man erkennt nun, daß alle Anordnungen mit gleichen q und p unabhängig von ihrer Größe den gleichen Ausnutzungsfaktor η besitzen.

Für verschiedene Anordnungen gibt es Tabellen und Diagramme, aus denen sich der Ausnutzungsfaktor η ablesen läßt.

Beispiel



2.1.2 Bild 1: Beispiel zum Ausnutzungsfaktor

Damit ergibt sich:

$$q = \infty$$

$$p = \frac{30+10}{10} = 4$$

$$\eta = 0{,}52 \text{ laut Diagramm}$$

$$E_{\max} = \frac{10\text{kV}}{3\text{cm} \cdot 0{,}52} = 6{,}4\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

Der Ausnutzungsfaktor läßt sich auch definieren durch

$$\boxed{\eta = \frac{U}{s \cdot E_{\max}} = \frac{E_{\text{mittel}}}{E_{\max}}},$$

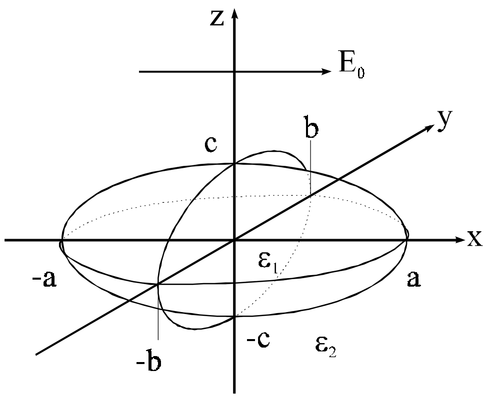
woran zu erkennen ist, daß η ein Maß für die Feldinhomogenität (Güte der Konstruktion) ist. Ein Ausnutzungsfaktor von $\eta = 1$ bedeutet, daß das Feld als homogen anzusehen ist, Felder mit $\eta > 0{,}3$ sind schwach inhomogen und Felder mit $\eta < 0{,}3$ stark inhomogen.

Kapazitätsberechnungen einer Anordnung haben die gleiche Basis wie *E*-Feldberechnungen, dazu wird die *Lufteinheitskapazität* $C_{\text{LE}} = f(p,q)$ eingeführt. Auch für die Lufteinheitskapazität gibt es Tabellen und Diagramme Bei zylindrischen Anordungen läßt sich die Kapazität berechnen zu $C = \varepsilon_r \cdot l \cdot C_{\text{LE}}$, für Kugel-Anordnungen gilt $C = \varepsilon_r \cdot r \cdot C_{\text{LE}}$.

Beispiel:
Die Kapazität zwischen einem Zylinder und einer Ebene mit $r = 10\text{mm}$ und $s = 30\text{mm}$ beträgt $C_{\text{LE}} = 0{,}26\frac{\text{pF}}{\text{m}}$.

2.1.3 Lokale Feldstörung

Eine lokale Feldstörung wird hervorgerufen durch einen *Störkörper* (Ellipsoid) mit abweichender Dielektrizitätszahl ε_1 vom umgebenden Dielektrikum mit ε_2. Die *Grenzflächenbedinungen* lauten (siehe TET) $\varphi = \text{const}$ und $D_n = \text{const}$.



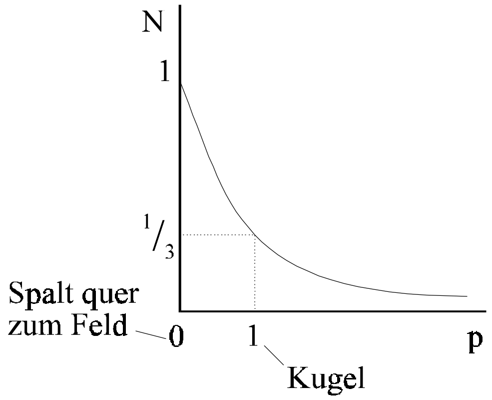
2.1.3 Bild 1: Störkörper im Dielektrikum

Die Innenfeldstärke E_i ist als homogen anzunehmen. Das Verhältnis von *Innenfeldstärke* des Störkörpers zu Homogenfeldstärke E_0 ist gegeben durch

$$\frac{E_i}{E_0} = \frac{1}{1 + N\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2}}$$

Für einen Rotationsellipsoiden (*b*=*c*) gilt für den Entelektrisierungsfaktor

$$N = \frac{1}{p^2 - 1}\left[\frac{p}{\sqrt{p^2 - 1}}\ln\left(p + \sqrt{p^2 - 1}\right) - 1\right] \qquad \text{mit } p = a/b.$$



2.1.3 Bild 2: Entelektrisierungsfaktor in Abhängigkeit von p

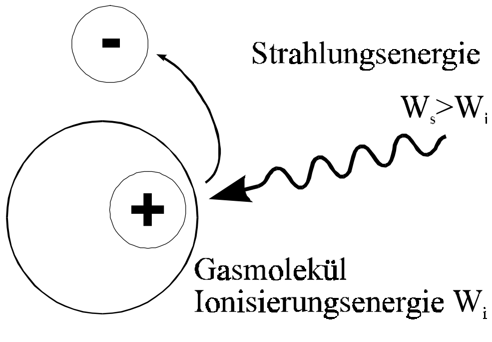
Anhand von *2.1.3 Bild 2* läßt sich erkennen, daß ein schlanker Störkörper ($p \to \infty$) in Feldrichtung E_i kaum beeinflußt.
In der Praxis bestehen Störkörper häufig aus *Gaseinschlüssen* (Lunker), für die gilt $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r$.

Bei Schichtdielektrika können Spalte quer zum Feld auftreten Die Innenfeldstärke ist dann gegeben durch $\frac{E_i}{E_0} = \varepsilon_r$. Bei Gießharzen können sich Luftblasen (Kugeln) bilden, für die gilt $\frac{E_i}{E_0} = \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1}$. Dabei ist die Innenfeldstärke immer größer $(E_i > E_0)$ als die Homogenfeldstärke E_0 !

2.2 Elektrische Festigkeit von Gasen

2.2.1 Dunkelstrom

Trifft auf ein Gasmolekül Strahlungsenergie W_S , die mindestens so groß ist wie die Ionisierungsenergie W_i des Moleküls, so löst sich ein Elektron des Moleküls. Das Molekül wird ionisiert. Die Strahlungsenergie läßt sich berechnen mit $W_S = h \cdot f$, mit $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Ws}^2$.



2.2.1 Bild 1: Ionisierung durch Strahlungsenergie

Einige Ionisationsenergien:

Gas	O_2	N_2	SF_6	H_2
W_i [eV]	12,8	15,8	19,3	24,6

mit $1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Ws}$

Durch UV-Strahlung, Höhenstrahlung und radioaktive Stahlung der Erde werden 5-20 Elektron-Ion-Paare pro Sekunde und cm^3 erzeugt. Aus der Differenz der Bildungs- und Rekombinationsrate in Luft folgt für die tatsächlich vorhandenen Elektron-Ion-Paare $n_I \approx 500\ 1/\text{cm}^3$.

Driftgeschwindigkeit

Die Driftgeschwindigkeit von elektrisch geladenen Teilchen läßt sich berechnen über die Formel

$$\vec{v}_D = b \cdot \vec{E}\,,$$

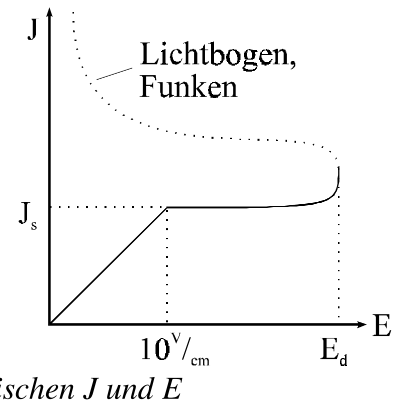
dabei ist *b* die Beweglichkeit der Ladungsträger. Die folgende Tabelle soll die unterschiedlichen Beweglichkeiten der Teilchen verdeutlichen.

Elektron	$500 \frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}}$
Ion	$1 \frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}}$
Großion	$10^{-4} \ldots 10^{-1} \frac{\text{cm/s}}{\text{V/cm}}$

Die Stromdichte in einem Leiter läßt sich berechnen durch

$$\vec{J} = \underbrace{q_e\left(n_I^+ b_I^+ + n_I^- b_I^- + n_e b_e\right)}_{\kappa \approx 10^{-16}\frac{1}{\Omega\text{cm}}\text{ für Luft}}\vec{E}\,.$$

Der lineare Zusammenhang zwischen $\vec{J}$ und $\vec{E}$ gilt allerdings nur in einem Bereich kleiner Feldstärken unter etwa $10\,\text{V/cm}$, wie *2.2.1 Bild 2* darstellt.



2.2.1 Bild 2: Zusammenhang zwischen J und E

Die *Sättigungsstromdichte* J_S erklärt sich dadurch, daß alle pro Zeiteinheit erzeugten Ladungsträger in dieser Zeiteinheit die Elektroden erreichen. Um die Sättigungsstromdichte zu erhöhen müßten mehr Ladungsträger geschaffen werden. Dies könnte zum Beispiel durch Bestrahlen des Gasraumes mit einer energiereicheren Strahlung geschehen ($J_S = f(\text{externen Quellen!})$).

Wird die elektrische Festigkeit E_d überschritten, so kommt es zu einer selbständingen Vermehrung der Ladungsträger, dem Durchschlag.

Die *Durchschlagspannung* einer Anordnung läßt sich berechnen durch

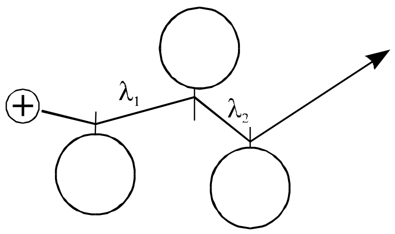
$$\boxed{U_d = E_d \cdot s \cdot \eta}.$$

2.2.2 Stoßionisation

Die Moleküldichte eines Gases läßt sich bestimmen durch

$$n = \frac{p}{kT},$$

dabei ist p der Druck und die Boltzmannkonstante $k = 1{,}37 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{Ws/K}$.



2.2.2 Bild 1: Ladungsträgerstöße

Die mittlere freie Weglänge, die die Ladungsträger zurücklegen ohne mit einem Gasmolekül zu kollidieren ist

$$\lambda = \frac{1}{n\pi\left(R + r_q\right)^2}.$$

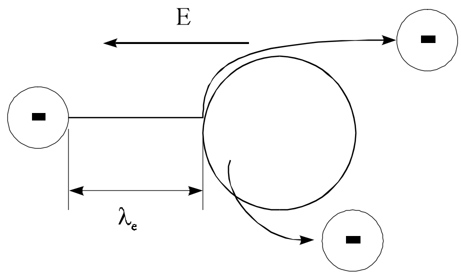
Dabei ist R der Radius der Gasmoleküle $\left(R = 0{,}1 \ldots 0{,}2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)$ und r_q der Radius der Ladungsträger (für Elektronen $r_q = 1{,}87 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$).
Ist der Ladungsträger ein Elektron, so gilt $r_q << R$ und die mittlere freie Weglänge des Elektrons wird $\lambda_e = \dfrac{1}{n\pi R^2}$.

Für Ionen gilt $r_q \approx R$ und für die mittlere freie Weglänge

$$\lambda_I = \frac{1}{4\pi n R^2}$$

.

Vergleicht man die beiden Ausdrücke, so fällt auf daß $\lambda_e = 4\lambda_I$ ist. *2.2.2 Bild 2* verdeutlicht die Ionisierung durch einen Elektronenstoß.



2.2.2 Bild 2: Ionisierung durch Elektronenstoß

Die kinetische Energie des auftreffenden Elektrons kann nun berechnet werden durch

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = qE\lambda_e\,.$$

Ist die kinetische Energie größer als die Ionisierungsenergie eines Moleküls $(W_{\text{kin}} \ge W_i)$, so wird bei einem Elektronenstoß das Molekül ionisiert.
Nun läßt sich die freie Weglänge berechnen, die ein driftendes Elektron mindestens haben muß, um ein weiteres Elektron aus einem Molekül herauszuschlagen.

$$\lambda_i = \frac{W_i}{qE}$$

Für die tatsächlich vorhandene Weglänge λ muß somit gelten

$$\lambda \ge \lambda_i\,.$$

Um die Anzahl der Stoßionisationen pro Weglänge berechnen zu können wird der *Ionisierungskoeffizient* eingeführt.

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}}}$$

Dabei gibt $\frac{1}{\lambda}$ die Zahl der Kollisionen pro Wegeinheit an, der Ausdruck $e^{-\frac{\lambda_i}{\lambda}}$ gibt die Wahrscheinlichkeit für die Erfüllung der Ionisierungsbedingung an.
Der Ionisierungskoeffizient läßt sich durch Einsetzen der bekannten Größen auflösen zu

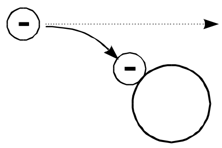
$$\alpha = \frac{\pi R^2 p}{kT} e^{-\left(\frac{W_i \pi R^2 p}{q_e EkT}\right)} = Ape^{-\frac{B}{E/p}}\,.$$

Dabei sind die allgemeinen und gasspezifischen Konstanten in A bzw. B zusammengefaßt. Für Luft ist $A = 64{,}5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm Pa}}$ und $B = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kV}}{\text{cm Pa}}$, für SF_6 gilt $A = 113 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm Pa}}$ und $B = 2{,}37 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kV}}{\text{cm Pa}}$ (bei T=293K).

Für elektronegative Gase (O_2, Halogene, SF_6) muß der Ionisierungskoeffizient korrigiert werden, da die elektronegativen Gasmoleküle dazu tendieren, die freien Elektronen an sich zu binden (siehe *2.2.2 Bild 3*). Damit stehen weniger Elektronen zur Verfügung, um Stoßionisationen ausführen zu können. Der *effektive Ionisierungskoeffizient* ist gegeben durch

$$\alpha^* = \alpha - \eta_a\,,$$

η_a ist der *Anlagerungskoeffizient* ($\eta_a = f(E/p)$).



2.2.2 Bild 3: Elektronegatives Molekül bindet freies Elektron

Wie in *2.2.2 Bild 4* ersichtlich ist, wird die Funktion α^*/p mit steigendem η_a zunehmend linear.

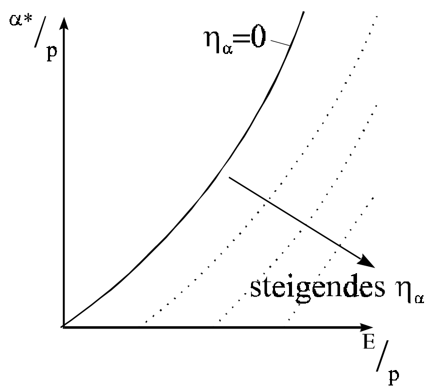
Für *Luft* gilt
$$\frac{\alpha^*}{p} = k\left[\frac{E}{p} - \left(\frac{E}{p}\right)_0\right]$$

mit $k = 0{,}22\frac{\text{cm bar}}{\text{kV}^2}$ und $\left(\frac{E}{p}\right)_0 = 24{,}4\frac{\text{kV}}{\text{cm bar}}$.

Für SF_6 gilt dann
$$\frac{\alpha^*}{p} = k\left[\frac{E}{p} - \left(\frac{E}{p}\right)_0\right]$$

mit $k = 28\frac{1}{\text{kV}}$ und $\left(\frac{E}{p}\right)_0 = 87{,}7\frac{\text{kV}}{\text{cm bar}}$.

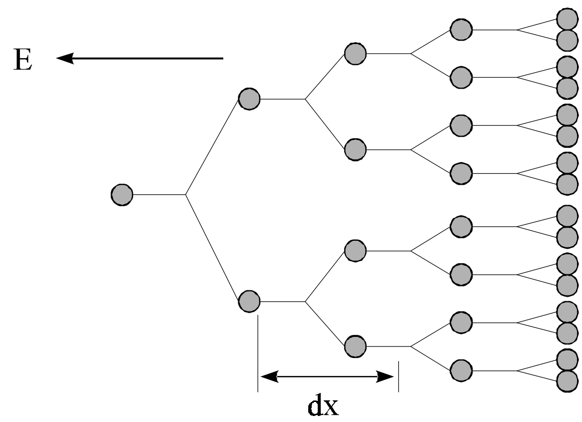
Somit ist offensichtlich $\eta_{aSF_6} >> \eta_{a\,\text{Luft}}$. *2.2.2 Bild 4* verdeutlicht den Verlauf von a*/p



2.2.2 Bild 4: Effektiver Ionisierungskoeffizient

2.2.3 Lawinenbildung

Bei ausreichend hohen Feldstärken erhöht sich die Elektronenkonzentration durch fortgesetzte Stoßionisation.



2.2.3 Bild 1: Bildung einer Elektronenlawine

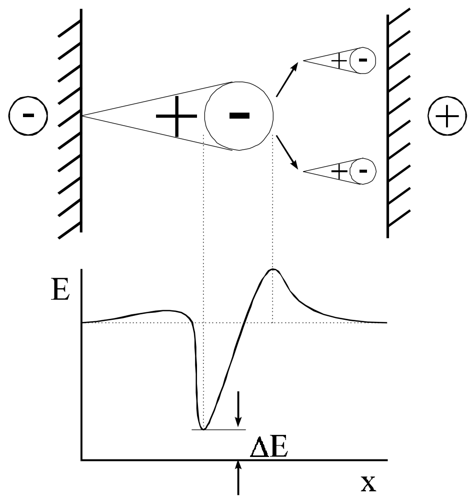
Die Zunahme der Elektronenzahl pro Wegelement ist gegeben durch

$$\frac{dN_e}{dx} = N_e(x) \cdot \alpha^* .$$

Für die Elektronenzahl nach einer Weglänge *x* ergibt sich

$$N_e(x) = N_{e0} e^{\int_0^x \alpha^* dx} .$$

Da der effektive Ionisierungskoeffizient α^* von *E* abhängt, hängt er auch von *x* ab.
Die Elektronenzahl wächst für $\alpha^* > 0$ zwar exponentiell, eine Lawine verursacht aber noch keinen Durchschlag!



2.2.3 Bild 2: Ladungsschwerpunkte einer Lawine und ihr Potential

Für ein Raumladungsfeld gilt die Poissongleichung (siehe TET)

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{E} .$$

Für $\Delta E = 0$ kann eine kritische Lawine entstehen. Die *Zündbedingung für den Streamermechanismus* lautet

$$\int_0^{x_{cr}} \alpha^* dx \equiv K_{St} = 14 \ldots 18 .$$

Die Vorwachsgeschwindigkeit ist $v_{St} = 10 \ldots 100 \, \mathrm{cm}/\mu\mathrm{s}$.

Erreicht die Lawine die Gegenelektrode ohne kritischen Zustand, so gilt für die Elektronenzahl bei $x=S$

$$N_e = N_{e0} \exp\left(\int_0^S \alpha^* dx \right).$$

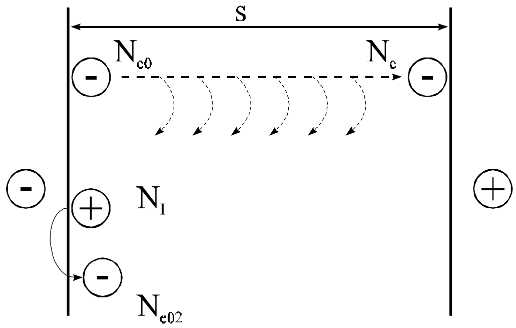
In der Primärlawine müssen dementsprechend

$$N_I = N_{e0}\left[\exp\left(\int_0^S \alpha^* dx \right) - 1 \right]$$

positive Ionen entstehen, die zur Kathode driften.
Prallen die Ionen auf die Kathode auf, so werden aus der Kathode Elektronen emittiert, aus denen eine Sekundärlawine entstehen kann.
Die Zahl der Sekundärelektronen läßt sich berechnen durch

$$N_{e02} = \gamma N_{e0}\left[\exp\left(\int_0^S \alpha^* dx \right) - 1 \right],$$

γ wird Nachlieferungskoeffizient genannt und hängt ab vom Gas und dem Kathodenmaterial ($\gamma = 10^{-5} \ldots 10^{-7}$).
2.2.3 Bild 3 veranschaulicht die Entstehung von Primär- und Sekundärlawine.



2.2.3 Bild 3: Primär- und Sekundärlawine

Als Bedingung für ein unbegrenztes Anwachsen der Ladungsträgerdichte muß gelten, daß die Zahl der Sekundärelektronen größer sein muß, als die Anzahl der Primärelektronen:

$$N_{e02} > N_{e0}$$

Aus dieser Bedingung ergibt sich die Zündbedingung für den sogenannten *Generations-mechanismus*

$$\int_0^S \alpha^* dx > \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma} \right) = K_g = 12 \ldots 16 .$$

Der Kanalaufbau wird die durch *langsame Ionendrift* bestimmt.

2.2.4 Durchschlagspannung

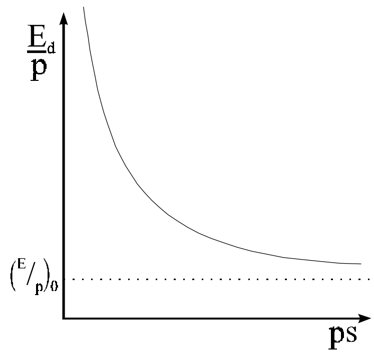
Setzt man den Grenzfall der Zündbedingung $\alpha^* \cdot s = K$ in die Formel aus 2.2.2 für Luft ein so folgt für ein <u>homogenes Feld</u>

$$\frac{\alpha^*}{p} = \frac{K}{ps} = k\left[\frac{E_d}{p} - \left(\frac{E}{p}\right)_0\right]^2 .$$

Aufgelöst nach der Durchschlagsfeldstärke erhält man

$$\frac{E_d}{p} = \sqrt{\frac{K}{kps}} + \left(\frac{E}{p}\right)_0 .$$

Dieser Verlauf ist in *2.2.4 Bild 1* dargestellt.
In der Praxis werden Diagramme für Normalbedingungen für E_{d0} als Funktion der Schlagweite S angegeben.



2.2.4 Bild 1: Diagramm für Zündbedingung

Die Durchschlagfeldstärke läßt sich wie folgt für *Realbedingungen* umrechnen

$$E_d = E_{d0}\frac{\mathrm{v}_0}{\mathrm{v}} = E_{d0}\frac{T_0}{p_0}\frac{p}{T} = 293\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{bar}}\frac{p}{T}E_{d0}$$ v: spez.Volumen des Gases.

Für <u>schwach inhomogene Felder</u> gilt $E_{d0} = f(r)$, dabei ist r der Radius der kleineren Elektrode.

Der <u>Streamermechanismus</u> hat eine sehr kurze Aufbauzeit, da die Gasionisation mit Lichtgeschwindigkeit (Photonen) überbrückt wird. Typische Aufbauzeiten liegen im Bereich von 10 ns.

Die *Durchschlagspannung* ist gegeben durch

$$U_d = E_d \cdot s .$$

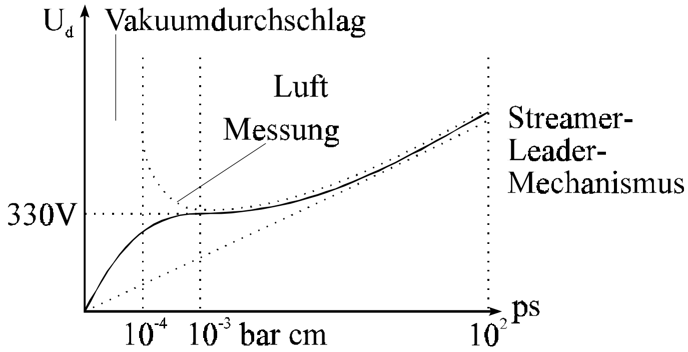
Für Luft gilt dann

$$U_d = \sqrt{\frac{Kps}{k}} + ps\left(\frac{E}{p}\right)_0 .$$

Die Durchschlagspannung U_d ist eine Funktion von $p \cdot s$

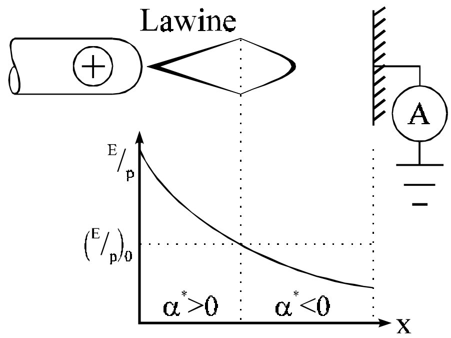
$$U_d = f(p,s).$$

Diese Gleichnug wird Paschen-Gesetz genannt. Die dazu gehörigen Diagramme heißen Paschen-Kurven. Der Ansatz $\frac{E_d}{p}$ ist für kleine $p \cdot s$ fehlerhaft.



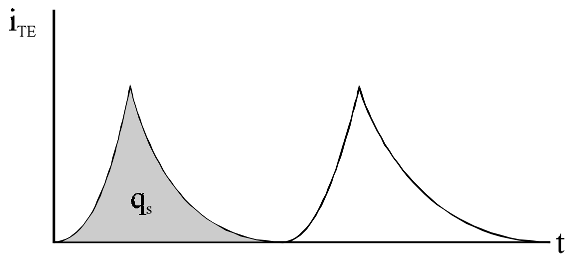
2.2.4 Bild 2: Durchschlagspannung

Für <u>stark inhomogene Felder</u> entstehen Teilentladungen (TE) für $U > U_e$. Diese Spannung wird als Einsetzspannung bezeichnet. Die Entstehung der Lawine im stark inhomogenen Feld zeigt *2.2.4 Bild 3*.



2.2.4 Bild 3: Lawine im stark inhomogenen Feld

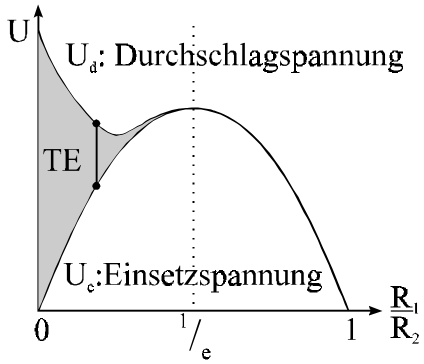
Die Ladungspakete q_s, die beim TE-Durchschlag auftreten (s. *2.2.4 Bild 4*) sind verantwortlich für Verluste und können Rundfunkstörungen (EMV) verursachen.



2.2.4 Bild 4: Auftreffende Ladungspakete

Es gilt für $\eta < 0{,}3$ $\quad U_e = E_d \cdot s \cdot \eta$. Ist η groß genug ($\eta > 0{,}3$), so daß ein nahezu homogenes Feld vorliegt, führt das Einsetzen einer Teilentladung zum Durchschlag, so daß gilt $U_e = U_d = E_d \cdot s \cdot \eta$ (η: Maß für Inhomogenität des Feldes).

Beispiel: Koaxial-Zylinder



2.2.4 Bild 5: Durchschlag- und Einsetzspannung für koaxiale Zylinder

Für steigende R_1/R_2 nähert sich das Feld zwischen Innen- und Außenleiter immer mehr einem homogenen Feld an, deshalb ist ab einem bestimmten Verhältnis von R_1/R_2 die Durchschlagspannung U_d gleich mit der Einsetzspannung U_e.

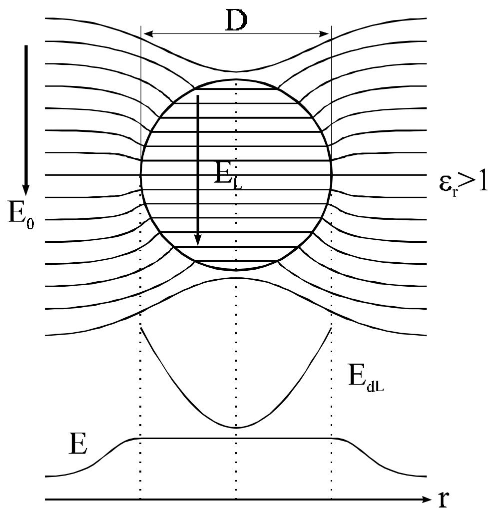
2.3 Feststoffestigkeit

2.3.1 TE-Durchschlag (TE: Teilentladung, engl.: pd, partial discharge)

Ist in die Isolierung ein Lunker (Luftblase) mit $\varepsilon_{rL} = 1$ eingeschlossen, so gilt für die Feldstärke im Lunker

$$E_L = E_0 \frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r + 1},$$

dabei ist ε_r die Dielektrizitätskonstante des Isolierstoffes.



2.3.1 Bild 1: E-Feld im Lunker

Man erkennt, daß die Feldstärke im Lunker homogen und größer als im umgebenden Dielektrikum ist.
Die Durchschlagfeldstärke für den Lunker läßt sich nun berechnen mit

$$E_{dL} = \frac{K_1}{\sqrt{D}} + K_2 .$$

Steigt nun die Spannung, so daß sie die Feldstärke im Lunker E_{dL} überschreitet, erfolgt ein Durchschlag durch das Zentrum des Lunkers (diametral).

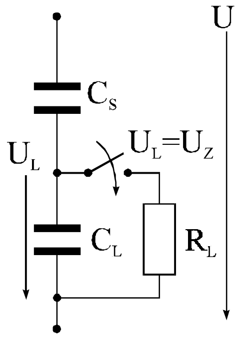
Die Feldenergie, die sich im Lunker aufgebaut hat wird dabei in Wirkenergie umgewandelt, die auf der Isolierstoffoberfläche Erosion bewirken kann (z.B. nadelförmiges Aufbrechen des Isolierstoffes).

Die Energie, die pro Teilentladung in Wärme umgewandelt wird, ist gegeben durch

$$W_{TE} = \frac{\varepsilon_0}{2} E_{dL}^2 V_L = \frac{1}{2} C_L U_Z^2 .$$

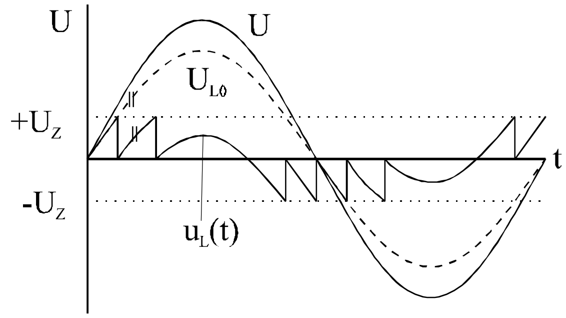
Mit $U_Z = E_{dL} D$ ergibt sich für die Kapazität des Lunkers $C_L = \frac{\varepsilon_0 \pi}{6} D$.

Die Kapazität des Isolierstoffes liegt "in Reihe" zu dem Lunker und wird deshalb serielle Isoliersoffkapazität C_S genannt (vgl. *2.3.1 Bild 2*). Die Kapaziät des Lunkers ist größer als die serielle Isoliersoffkapazität $C_L > C_S$.



2.3.1 Bild 2: Ersatzschaltbild mit serieller Isolierstoffkapazität

Bei $U_L = U_Z$ $(U = U_e)$ setzten die Teilentladungen ein. Erfolgt nun ein Dauerbetrieb mit $U > U_e$, so wird um den Spannungs-Nulldurchgang die Isolierstoffoberfläche fortwährend mit Impulspaketen belastet (s. *2.3.1 Bild 3*). Dies verursacht eine Alterung des Isolierstoffes, die sich über mehrere Jahre hinziehen kann (Langzeitmechanismus).

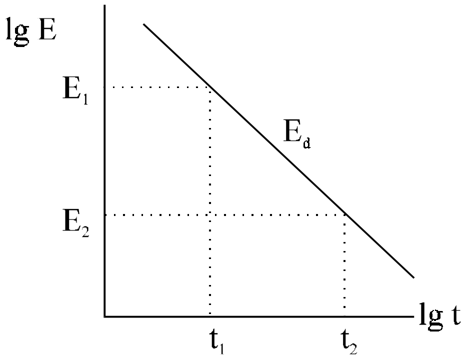


2.3.1 Bild 3: Klemmenspannung mit Teilentladungen

Um die Lebensdauer eines Isolierstoffes berechnen zu können, wird das Lebensdauergesetz eingeführt. Es lautet

$$\boxed{\lg E_d = \text{const} - \frac{1}{N}\lg t}.$$

Wird diese Funktion graphisch dargestellt, ergibt sich in doppelt logarithmischer Darstellung eine Gerade (siehe *2.3.1 Bild 4*).



2.3.1 Bild 4: Zusammenhang zwischen Lebensdauer und Feldstärke

2.3.2 Wärmedurchschlag

Laut *Kapitel 1.3.1* ist die in die Isolierung abgegebene Leistungsdichte

$$p_{ab} = -\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T.$$

Die in die Isolierung abgegebene Leistungsdichte im eindimensionalen Fall ist dann

$$p_{ab} = -\lambda \frac{d^2T}{dx^2}.$$

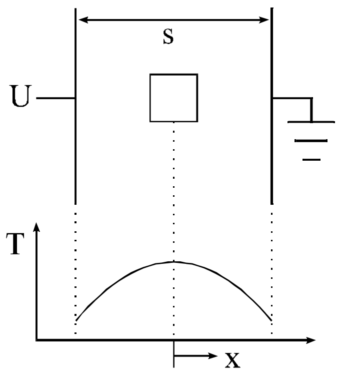
Aufgelöst nach der Temperatur folgt

$$T = -\frac{1}{2}\frac{p_{ab}}{\lambda}x^2 + C_1 x + C_2,$$

Aufgrund von Symmetrie ist $C_1 = 0$.

Für $x = 0$ muß $T = T_{\max}$ gelten, also ist $C_2 = T_{\max}$. Für die Stelle $x = \frac{S}{2}$ folgt somit

$$T = T_{\mathrm{U}} = -\frac{1}{8}\frac{p_{ab}}{\lambda}S^2 + T_{\max}. \text{ (s. 2.3)}$$



2.3.2 Bild 1: Temperaturprofil

Nach der abgegebenen Leistungsdichte aufgelöst folgt

$$p_{ab} = \frac{8\lambda}{S^2}\left(T_{\max} - T_{\mathrm{U}}\right).$$

Für die Verlustleistungsdichte gilt

$$p_V = \tan\delta\,\omega\varepsilon E^2 = p \cdot E^2 .$$

Die Verlustziffer wird definiert zu

$$p = p_0 e^{\beta(T - T_{\mathrm{U}})}.$$

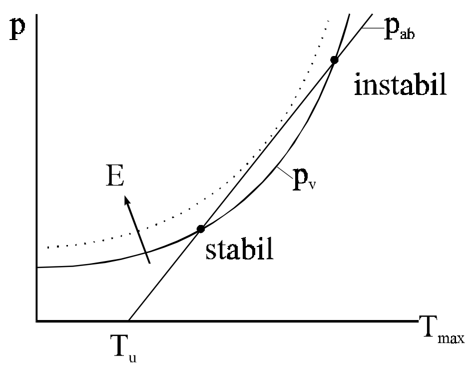
β wird als Verlustanstieg bezeichnet.

Wird nun $p_V = p_{ab}$ gesetzt, erhält man die Arbeitspunkte (vgl. *2.3.2 Bild 2*).

Die Stabilität ist nur gewährleistet, solange für die Steigungen gilt

$$\boxed{\frac{d\ p_{ab}}{d\ T_{\max}} \geq \frac{d\ p_V}{d\ T_{\max}}}.$$

Steigt U_d soweit an, daß die Arbeitspunkte in einen "Berührpunkt" der Kurven fallen, so ist die Stabiliät nicht mehr gegeben und $T_{\max}$ steigt soweit an, daß innerhalb von Minuten ein Wärmedurchschlag erfolgt.



2.3.2 Bild 2: Deutung des Wärmedurchschlags

Nach Elimination von $T_{\max}$ ergibt sich die Durchschlagspannung für den Wärmedurchschlag zu

$$U_d = 1{,}72 \sqrt{\frac{\lambda}{\beta\, p_0 \exp\left(\beta\left(T_U - T_0\right)\right)}}\,.$$

Man erkennt, daß die Durchschlagspannung nicht von s, also von der Geometrie abhängt, sondern nur von den Stoffkenngrößen.

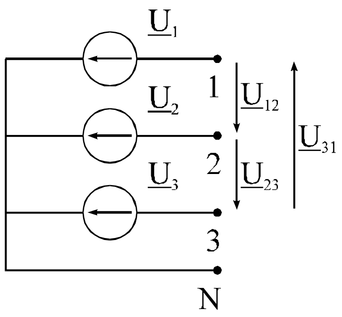
3. Drehstrom-Schaltungen

3.1 Drehstrom-Erzeuger (in der Regel symmetrisch)

Laut Kapitel 1.4.3 gilt für die Spannungen zwischen Phase und Erde des symmetrischen Drehstrom-Erzeugers

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{U}_1 &= Ue^{j0°}\\ \underline{U}_2 &= Ue^{-j120°}\\ \underline{U}_3 &= Ue^{j120°}\end{aligned}}.$$

Die Spannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ werden *Sternspannung* genannt.

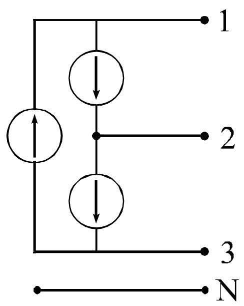


3.1 Bild 1: Sternschaltung mit eingezeichneten Spannungen

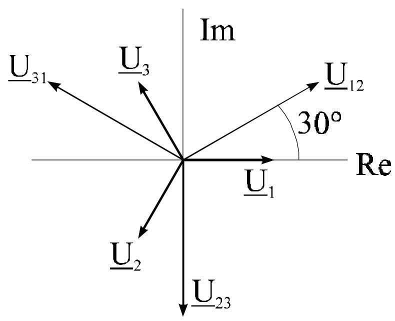
Betrachtet man die Maschenumläufe, so ergibt sich die *Dreieckspannung* $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}$ (oder verkettete Spannung)(Äquivalente Dreieckschaltung für sym. Betrieb s. *3.1 Bild 2*)

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = U\left[1 - e^{-j120°}\right] = U\left[1 - (\cos 120° - j\sin 120°)\right]\\ &= U\left[1{,}5 + j0{,}866\right] = U\sqrt{1{,}5^2 + 0{,}866^2}\, e^{j\arctan\frac{0{,}866}{1{,}5}} = \sqrt{3}Ue^{j30°}\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \sqrt{3}Ue^{j30°}\\ \underline{U}_{23} &= \sqrt{3}Ue^{-j90°}\\ \underline{U}_{31} &= \sqrt{3}Ue^{j150°}\end{aligned}}$$



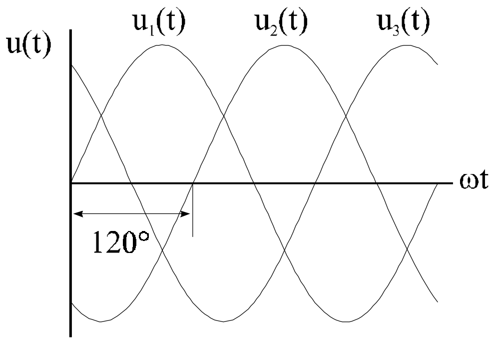
3.1 Bild 2: Äquivalenz mit Sternschaltung für sym. Betrieb



3.1 Bild 3: Zeiger von Stern- und Dreieckspannung

Die Lage und Größe von Stern- und Dreieckspannung zueinander ist in *3.1 Bild 3* sowie der zeitliche Verlauf in *3.1 Bild 4* dargestellt.

zeitlicher Verlauf



3.1 Bild 4: zeitlicher Verlauf der Spannungen

Addiert man die zeitabhängigen Spannungen erhält man $u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)=0$. Dies gilt auch für die Addition der Stern- bzw. Dreieckspannungen, da durch Aneinanderreihung der Spannungszeiger (Addition) jeweils ein gleichseitiges Dreieck entsteht.

3.2 Drehstrom-Verbraucher

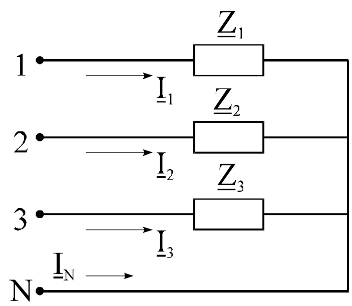
3.2.1 Sternschaltung

Es wird von einem Verbraucher in Sternschaltung entsprechend *3.2.1 Bild 1* ausgegangen. Für die Ströme in den einzelnen Strängen gilt

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_1 / \underline{Z}_1$$
$$\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2$$
$$\underline{I}_3 = \underline{U}_3 / \underline{Z}_3$$

Die Knotenpunktsforderung lautet

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_N = 0 \,.$$



3.2.1 Bild 1: Verbraucher in Sternschaltung

Da in einem symmetrischen Verbraucher die Impedanzen der einzelnen Stränge gleich sind gilt mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ und der Knotenpunktsforderung

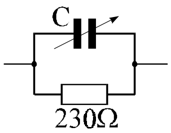
$$\frac{1}{\underline{Z}}\left[\underline{U}_1+\underline{U}_2+\underline{U}_3\right]+\underline{I}_N=0\,.$$

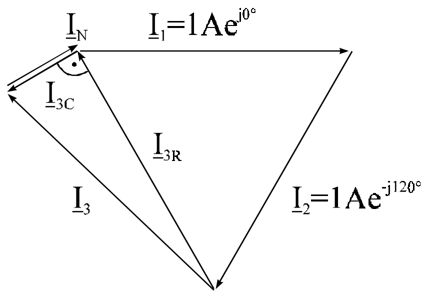
Wie gezeigt ist die Summe der Spannungszeiger Null, also gilt für den Nulleiterstrom

$$\boxed{\underline{I}_N=0}.$$

Da der Nulleiterstrom Null ist, wird für symmetrische Drehstrom-Verbraucher kein Rückleiter benötigt. Die Anzahl der Leitungen kann also von vier auf drei reduziert werden.

<u>Beispiel für unsymmetrischen Verbraucher</u>

$U=230\text{V}$, $Z_1=Z_2=230\Omega$, $Z_3=$ 



3.2.1 Bild 2: Ströme des unsymmetrischen Verbrauchers

Für den Nulleiterstrom gilt dann $\underline{I}_N=-\underline{I}_{3C}=-\frac{\underline{U}_3}{1/j\omega C}=\omega CUe^{j30°}$.

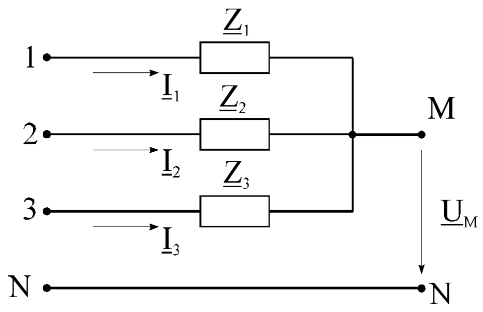
3.2.2 Unsymmetrische Sternschaltung mit freiem Sternpunkt

Für die unsymmetrische Sternschaltung mit freiem Sternpunkt (Störfall) ergibt sich eine Differenzspannung $\underline{U}_M$ (vgl. *3.3.2 Bild 1*) zwischen Sternpunkt und Nulleiter. Für die Spannungen gilt dann

$$\begin{aligned}\underline{U}_1&=\underline{I}_1\underline{Z}_1+\underline{U}_M=\underline{U}_1'+\underline{U}_M\\\underline{U}_2&=\underline{I}_2\underline{Z}_2+\underline{U}_M=\underline{U}_2'+\underline{U}_M\\\underline{U}_3&=\underline{I}_3\underline{Z}_3+\underline{U}_M=\underline{U}_3'+\underline{U}_M\end{aligned}\,.$$

Die Knotenpunktsforderung lautet wegen des freien Sternpunktes immer noch

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0\,.$$



3.2.2 Bild 1: Sternschaltung mit freiem Sternpunkt

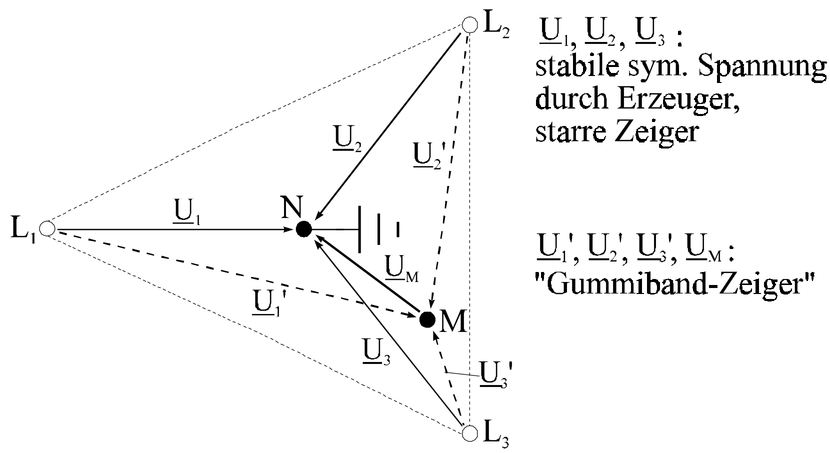
Setzt man das obige Gleichungssystem in die Knotenpunktsforderung ein folgt

$$\frac{\underline{U}_1-\underline{U}_M}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{U}_2-\underline{U}_M}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{U}_3-\underline{U}_M}{\underline{Z}_3}=0.$$

Damit ist

$$\underline{U}_M=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3}\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\right).$$

Somit ergibt sich in der Regel $U_m \neq 0$, wodurch Personen gefährdet werden können!



3.2.2 Bild 2: Spannungen für die Sternschaltung mit freiem Sternpunkt

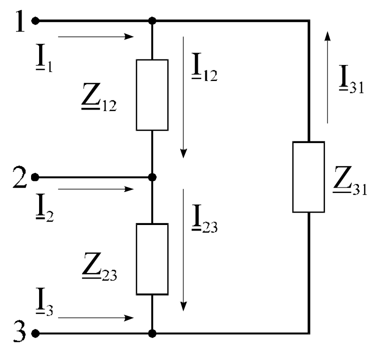
<u>Beispiel</u> Kurzschluß in $\underline{Z}_3$ (vgl. *3.2.2 Bild 2*)

Ist Z_3 kurzgeschlossen, so ist $\underline{U}_3'=0$ und der Punkt M fällt auf L_3. Damit werden $\underline{U}_m=\underline{U}_3$ und $\underline{U}_2'=\underline{U}_{23}$ usw.

3.2.3 Dreieckschaltung

Im folgenden wird von einem Verbraucher in Dreieckschaltung entsprechend *3.2.3 Bild 1* ausgegangen. Die *Strangströme* werden angesetzt mit

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}$$
$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}.$$
$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

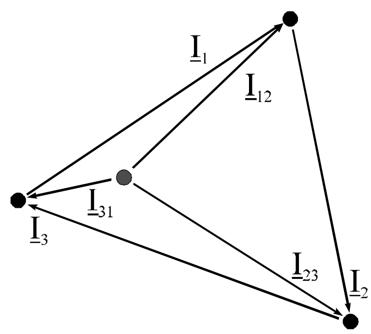


3.2.3 Bild 1:Verbraucher in Dreieckschaltung

Die *Außenleiterströme* lassen sich berechnen durch

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}.$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

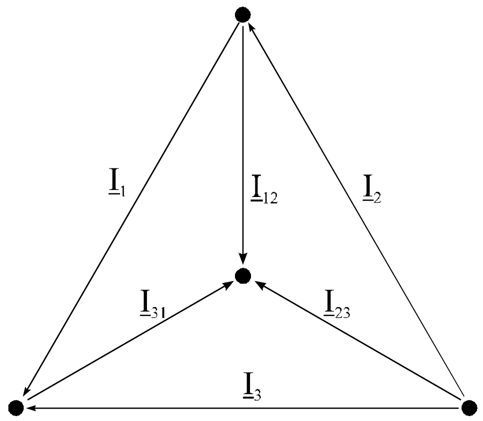
Werden die Außenleiterströme addiert, folgt $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ und zwar unabhängig von den einzelnen Impedanzen. Dieses Ergebnis läßt sich dadurch erklären, daß die Dreieckschaltung als strukturierter Knoten (Makroknoten) anzusehen ist.
Werden die auftretenden Ströme graphisch aufgetragen, erkennt man, daß jedes der *vier* Dreiecke für sich eine der vier Knotengleichungen darstellt (siehe *3.2.3 Bild 2*).



3.2.3 Bild 2: Strangströme für unsymmetrischen Dreieckverbraucher

Ist der Verbraucher symmetrisch, sind alle Impedanzen gleich $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}$ und für die Strangströme muß gelten

$$\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} \overset{!}{=} 0.$$



3.2.3 Bild 3: Strangströme für symmetrischen Dreieckverbraucher

Durch geometrische Überlegungen (siehe *3.2.3 Bild 3)* folgt für symmetrische *Außenleiter-ströme*

$$I = \sqrt{3} I_{\text{Strang}} .$$

Bei der Sternschaltung gilt

$$I = I_{\text{Strang}} .$$

Scheinleistung bei Stern- und Dreieckschaltung:

Schaltung	*Stranggrößen*	*Stranggrößen*	*Außenleitergrößen*
Stern	$S = 3I_{Strang}U_{Strang}$	$S = 3IU_{Strang}$	$S = \sqrt{3}IU$
Dreieck	$S = 3I_{Strang}U_{Strang}$	$S = 3\frac{I}{\sqrt{3}}U_{\Delta}$	$S = \sqrt{3}IU$

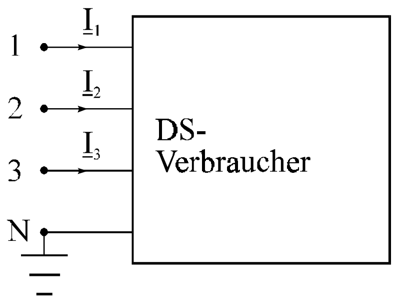
3.3 Vierpoldarstellung von Drehstrom-Schaltungen

3.3.1 Admittanz-Matrix

Den Drehstrom-Verbraucher kann man sich als "Black-Box" mit 4 Anschlüssen vorstellen (siehe *3.3.1 Bild 1*). Die Eingangsspannungen $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ sind im Prinzip unabhängig, während $\underline{U}_N = 0$ den Bezugspunkt darstellt. Die Ströme müssen die Knotenpunktsforderung des Makroknotens erfüllen, also gilt $\underline{I}_N = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)$. Damit läßt sich ein Gleichungssystem mit $N-1$ Gleichungen wie folgt aufstellen

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{13}\underline{U}_3 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{23}\underline{U}_3 \\ \underline{I}_3 &= \underline{Y}_{31}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{32}\underline{U}_2 + \underline{Y}_{33}\underline{U}_3 \end{aligned}\right\} [\underline{I}] = [\underline{Y}] \cdot [\underline{U}].$$

$[\underline{I}]$ und $[\underline{U}]$ sind Spaltenvektoren für Strom, bzw. Spannung, $[\underline{Y}]$ bildet eine komplexe 3×3 *Admittanzmatrix* mit $\underline{Y}_{\mu\nu} = \underline{Y}_{\nu\mu}$ wegen der geltenden *Reziprozität* (vgl. TI).



3.3.1 Bild 1: Drehstromverbraucher als Black-Box

Wird das gesamte Netz betrachtet, muß die Summe über alle Drehstrom-Verbraucher gebildet werden

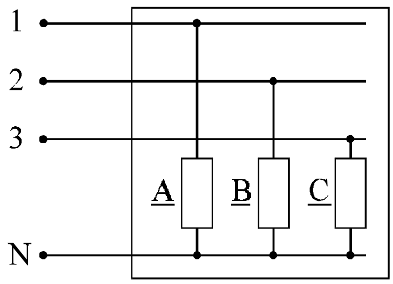
$$[\underline{I}] = [\underline{Y}]_1[\underline{U}] + [\underline{Y}]_2[\underline{U}] + \ldots = \underbrace{\{[\underline{Y}]_1 + \ldots + [\underline{Y}]_N\}}_{\left[\sum \underline{Y}\right]}[\underline{U}].$$

<u>Sternverbraucher</u>

Für Sternverbraucher gemäß *3.3.1 Bild 2* lautet die Admittanzmatrix

$$[\underline{Y}_{\text{Stern}}] = \begin{bmatrix} \underline{A} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{B} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{C} \end{bmatrix}.$$

Die einzelnen Impedanzen sind $\underline{Z}_1 = \dfrac{1}{\underline{A}}$ usw. Für symmetrische Verbraucher gilt natürlich $\underline{A} = \underline{B} = \underline{C}$.



3.3.1 Bild 2: Sternverbraucher als Black-Box

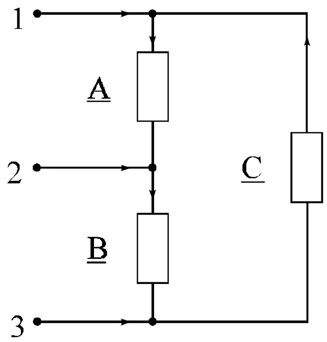
<u>Dreieckverbraucher</u>

Für Dreieckverbraucher gemäß *3.3.1 Bild 3* läßt sich das Gleichungssystem aufstellen zu

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \underline{A}(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) - \underline{C}(\underline{U}_3 - \underline{U}_1) = (\underline{A} + \underline{C})\underline{U}_1 - \underline{A}\underline{U}_2 - \underline{C}\underline{U}_3 \\
\underline{I}_2 &= -\underline{A}(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) + \underline{B}(\underline{U}_2 - \underline{U}_3) = -\underline{A}\underline{U}_1 + (\underline{A} + \underline{B})\underline{U}_2 - \underline{B}\underline{U}_3\,. \\
\underline{I}_3 &= -\underline{B}(\underline{U}_2 - \underline{U}_3) + \underline{C}(\underline{U}_3 - \underline{U}_1) = -\underline{C}\underline{U}_1 - \underline{B}\underline{U}_2 + (\underline{B} + \underline{C})\underline{U}_2
\end{aligned}$$

Die Admittanzmatrix für Dreieckverbraucher lautet somit

$$[\underline{Y}_{\text{Dreieck}}] = \begin{bmatrix} (\underline{A}+\underline{C}) & -\underline{A} & -\underline{C} \\ -\underline{A} & (\underline{A}+\underline{B}) & -\underline{B} \\ -\underline{C} & -\underline{B} & (\underline{B}+\underline{C}) \end{bmatrix}.$$



3.3.1 Bild 3: Dreieckverbraucher als Black-Box

Für symmetrische Dreieckverbraucher mit $\underline{A} = \underline{B} = \underline{C}$ läßt sich die Matrix vereinfachen zu

$$[\underline{Y}_{\text{Dreieck,sym}}] = \underline{A} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

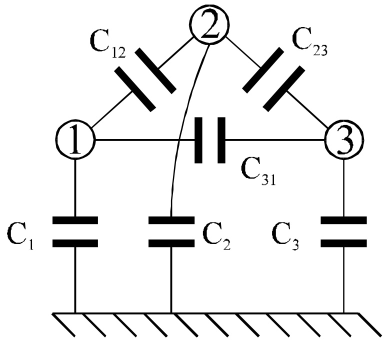
Für die Admittanzmatrix von symmetrischem und unsymmetrischem Verbraucher gilt:

$$\boxed{\sum \text{Spaltenelemente} = 0}.$$

Dies muß allgemeine Gültigkeit haben, da $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \overset{!}{=} 0$.

3.3.2 Leitungskapazitäten

Bei einer Drehstrom-Freileitung müssen Kapazitäten sowohl zwischen den einzelnen Leitern, als auch zwischen den Leitern und der Erde (vgl. *3.3.2 Bild 1*) berücksichtigt werden.

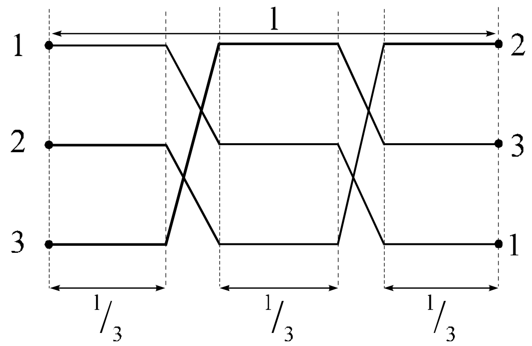


3.3.2 Bild 1: Leitungskapazitäten der Drehstrom-Freileitung

Unter der Voraussetzung, daß die Abstände zwischen den Leitern 1-2 und 2-3 gleich sind, gilt

$$\begin{array}{c} C_{12} = C_{23} \neq C_{31} \\ C_1 = C_3 \neq C_2 \end{array}.$$

Die Leitung kann also als unsymmetrischer Stern-Dreieckverbraucher angesehen werden. Um dieser Unsymmetrie entgegenzuwirken werden die Leiter nach dem Schema in *3.3.2 Bild 2* verdrillt.



3.3.2 Bild 2: Verdrillung der Leitungen

Nun ist jede Phase gleichlang in jeder Position und es gilt

$$\begin{array}{c} C_{12} = C_{23} = C_{31} = C_L \\ C_1 = C_2 = C_3 = C_E \end{array}.$$

Durch die Verdrillung ist nun also ein symmetrischer Stern-Dreieckverbraucher entstanden mit folgender Admittanzmatrix

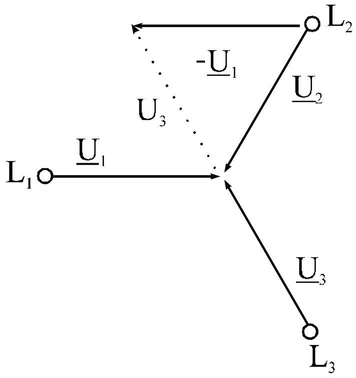
$$[Y] = j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} C_E & 0 & 0 \\ 0 & C_E & 0 \\ 0 & 0 & C_E \end{bmatrix}}_{\text{Stern}} + j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} 2C_L & -C_L & -C_L \\ -C_L & 2C_L & -C_L \\ -C_L & -C_L & 2C_L \end{bmatrix}}_{\text{Dreieck}}$$

$$= j\omega \underbrace{\begin{bmatrix} C_E + 2C_L & -C_L & -C_L \\ -C_L & C_E + 2C_L & -C_L \\ -C_L & -C_L & C_E + 2C_L \end{bmatrix}}_{\text{Stern+Dreieck}}.$$

<u>Dreieck-Stern-Umwandlung</u>

Für die obige Dreiecksmatrix war $\underline{I}_1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= j\omega[2C_L\underline{U}_1 - C_L\underline{U}_2 - C_L\underline{U}_3] \\ &= j\omega[2C_L\underline{U}_1 - C_L(\underline{U}_2 + \underline{U}_3)] \\ &= j\omega 3C_L\underline{U}_1 \quad \text{mit } \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = -\underline{U}_1 \ \text{(siehe 3.3.2 } \textit{Bild } 3) \end{aligned}.$$



3.3.2 Bild 3: $\underline{U}_2 + \underline{U}_3 = -\underline{U}_1$

Werden die anderen Ströme äquivalent umgerechnet, so folgt für die Matrix

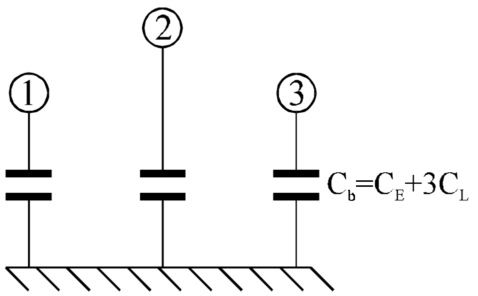
$$[Y_{\text{Stern}}] = j\omega \begin{bmatrix} 3C_L & 0 & 0 \\ 0 & 3C_L & 0 \\ 0 & 0 & 3C_L \end{bmatrix}.$$

Diese umgewandelte Matrix läßt sich nun leicht mit der obigen Stern-Matrix addieren und es folgt

$$[Y] = j\omega \begin{bmatrix} C_b & 0 & 0 \\ 0 & C_b & 0 \\ 0 & 0 & C_b \end{bmatrix}$$

mit der *Betriebsersatzkapazität*

$$C_b = C_E + 3C_L.$$

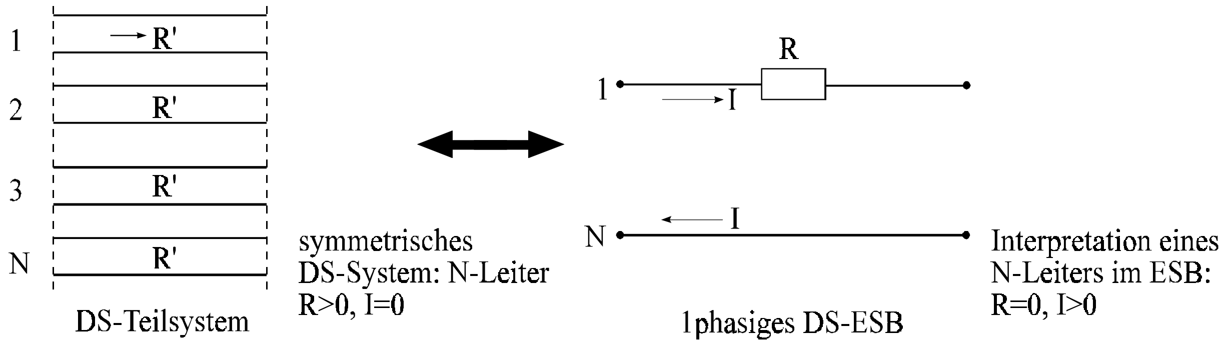


3.3.2 Bild 4: Leitungskapazitäten mit Betriebsersatzkapazität

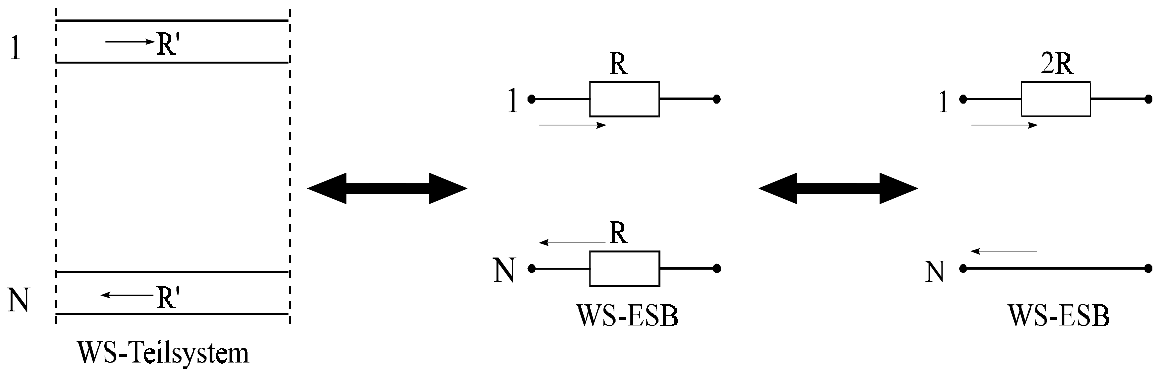
Man erkennt, daß durch die Dreieck-Stern-Transformation die Kopplung zwischen den Phasen aufgehoben wird.

Durch eine Entkopplung der Phasen läßt sich jedes symmetrische Drehstromnetz in ein 1-phasiges Ersatzschaltbild überführen.

Die folgenden Bilder 3.3.2 Bild 5 und 3.3.2 Bild 6 verdeutlichen diese Umformung für ein symmetrisches Drehstromsystem sowie ein Wechselstromsystem (Grundgedanke: stromloser N-Leiter mit R > 0, wird übergeführt in stromführenden N-Leiter mit R = 0).

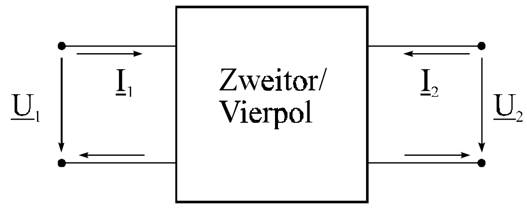


3.3.2 Bild 5: Umwandlung von Drehstrom-Teilsystem in 1-phasiges Drehstrom-ESB



3.3.2 Bild 6: Umwandlung von Wechselstrom-Teilsystem in Wechselstom-ESB

3.3.3 Zweitore (Vierpol mit Ein-/Ausgabeverhalten)



3.3.3 Bild 1: Zweitor/Vierpol

3.3.3 Bild 1 verdeutlicht den Vierpol, von dem im folgenden ausgegangen werden soll. $\underline{U}_2$ wird nun als Ausgangsspannung betrachtet. Für das einphasige Drehstrom-Ersatzschaltbild würde der untere Leiter durchgezeichnet werden, da nur 3 Pole zur Verfügung ständen.

Laut *Kapitel 3.3.1* sind Ströme und Spannungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \\ [\underline{I}] &= [\underline{Y}]\cdot[\underline{U}] \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \\ [\underline{U}] &= [\underline{Z}]\cdot[\underline{I}] \end{aligned}}.$$

$[\underline{Y}]$ ist die Admittanzmatrix, $[\underline{Z}]$ wird als Impedanzmatrix bezeichnet.

Die Matrizen können für $\mathrm{Det}[\,]\neq 0$ durch Matrixinversion ineinander übergeführt werden:

$$\begin{aligned} [\underline{Z}] &= [\underline{Y}]^{-1} \\ [\underline{Y}] &= [\underline{Z}]^{-1} \end{aligned}$$

Um die Eingangsgrößen in Abhängigkeit der Ausgangsgrößen darzustellen, wird die *Kettenmatrix* $[A]$ eingeführt, so daß gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{a}_{11}\underline{U}_2 + \underline{a}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{a}_{21}\underline{U}_2 + \underline{a}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}} \qquad \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = [A]\cdot\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

dabei ist zu beachten, daß $\underline{I}_2$ umgekehrt gepfeilt wird.

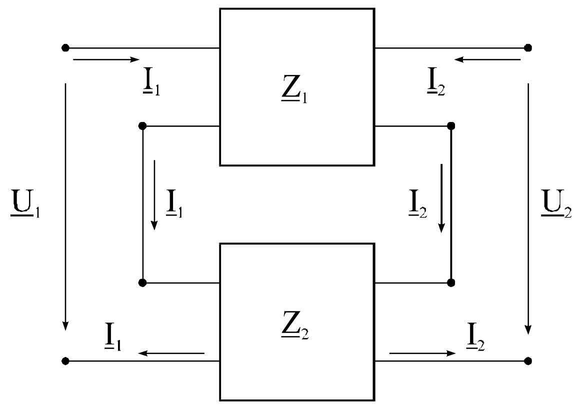
Die einzelnen Elemente der Kettenmatrix lassen sich bestimmen mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & a_{12} &= \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{U_2=0} = \frac{Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}} \\ a_{21} &= \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_{21}} & a_{22} &= \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_2=0} = \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{aligned}.$$

Zweitor-Verbindungen

Bei Stromgleichheit (Reihenschaltung) addieren sich die Impedanzen zu

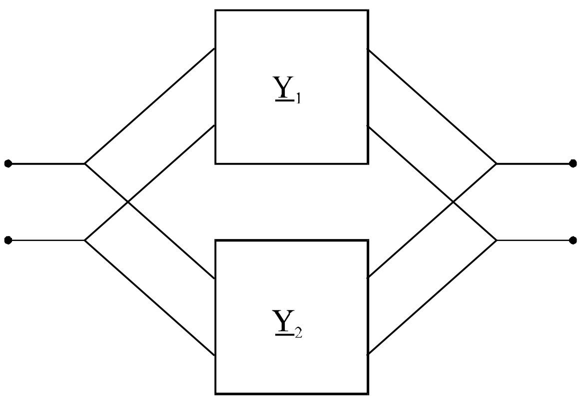
$$[Z] = [Z_1] + [Z_2].$$



3.3.3 Bild 2: Reihenschaltung von Vierpolen

Bei Spannungsgleichheit (Parallelschaltung) addieren sich die Admittanzen zu

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2].$$



3.3.3 Bild 3: Parallelschaltung von Vierpolen

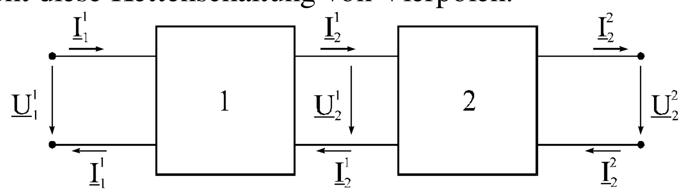
Liegt eine Kettenschaltung vor, so gilt

$$\begin{bmatrix} U_1^1 \\ I_1^1 \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} U_2^1 \\ I_2^1 \end{bmatrix} = [A_1][A_2] \begin{bmatrix} U_2^2 \\ I_2^2 \end{bmatrix},$$

die Matrix wird also zu

$$[A] = [A_1] \cdot [A_2].$$

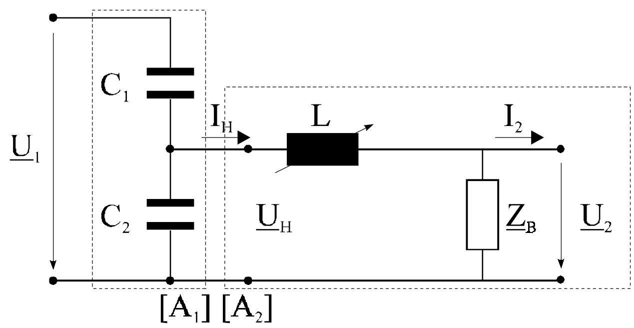
3.3.3 Bild 4 verdeutlicht diese Kettenschaltung von Vierpolen.



3.3.3 Bild 4: Kettenschaltung von Vierpolen

3.3.4 Zweitorketten (Anwendungsbeispiel)

<u>Kapazitiver Spannungswandler</u>



3.3.4 Bild 1: Kapazitiver Spannungswandler als Kettenschaltung von 2 Vierpolen

Die Bauelemente werden so gewählt, daß gilt $C_1 << C_2$, also ist $U_1 >> U_2$. Außerdem wird der Leerlauffall betrachtet ($I_2 = 0$).

Das Verhältnis der Spannungen ergibt sich zu

$$\left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_2=0} = a_{11}^1 a_{11}^2 + a_{12}^1 a_{21}^2 ,$$

dem 11-Element der Produktmatrix.

Wird
$$a_{11}^1 = \left.\frac{U_1}{U_H}\right|_{I_H=0} = \frac{C_2}{C_1} + 1 \qquad a_{11}^2 = \left.\frac{U_H}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{j\omega L + Z_B}{Z_B}$$
$$a_{12}^1 = \left.\frac{U_1}{I_H}\right|_{U_H=0} = \frac{1}{j\omega C_1} \qquad a_{21}^2 = \left.\frac{I_H}{U_2}\right|_{I_2=0} = \frac{I_H}{I_H Z_B} = \frac{1}{Z_B} ,$$

in die obige Gleichung eingesetzt, so folgt

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{j\omega C_1 Z_B + j\omega C_2 Z_B - \omega^2 C_1 L - \omega^2 C_2 L + 1}{j\omega C_1 Z_B} .$$

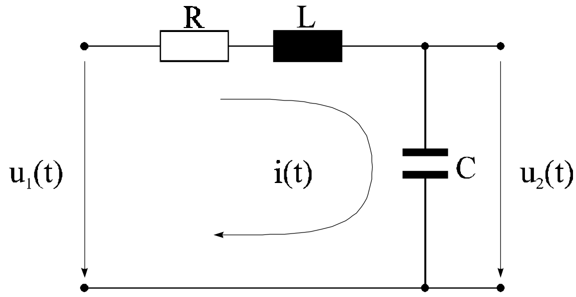
Wird nun L auf den Resonanzfall eingestellt mit $\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}}$ ergibt sich

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} \neq f(Z_B).$$

4. Einschwingvorgänge in linearen Netzwerken (L, C, R=const.)

4.1 Differentialgleichungen

4.1.1 Ansatz der DGL-Systeme

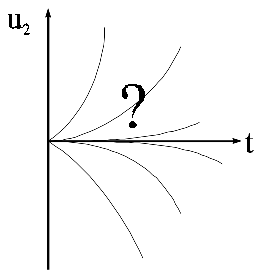


4.1.1 Bild 1: R,L,C-Schwingkreis

Um die Augenblickswerte für $u_1(t)$ und $i(t)$ der Schaltung nach *4.1.1 Bild 1* bestimmen zu können, wird die Knoten- bzw. Maschengleichung aufgestellt

$$u_1(t) = R \cdot i(t) + L\frac{di}{dt} + u_2(t)$$
$$i(t) = C\frac{du_2}{dt}$$

Für $t = 0$ sollen die Energiespeicher leer sein und es gilt $u_2(0) = 0$ und $i(0) = C\frac{dU_2}{dt} = 0$. Dies sind die gewählten *Anfangsbedingungen*. Die Spannung $u_2(t)$ soll nun weiter untersucht werden. *4.1.1 Bild 2* stellt mögliche Verläufe von u_2 dar.



4.1.1 Bild 2: Mögliche Verläufe von u_2

Wird nun $i(t) = \frac{Cdu_2}{dt}$ und $\frac{di(t)}{dt} = \frac{Cd^2u_2}{dt^2}$ in die Gleichung für $u_2(t)$ eingesetzt, so folgt die Differentialgleichung

$$LC\frac{d^2u_2}{dt^2} + RC\frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1(t).$$

Um die Gleichung zu vereinfachen werden folgende Konstanten eingeführt:

Resonanzkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Schwingkreiswiderstand $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Schwingkreisgüte $Q = \frac{Z_0}{R}$

Mit der normierten Zeit $\tau = \omega_0 t$ und der Resonanzkreisfrequenz folgt $t = \tau\sqrt{LC}$, eingesetzt in die Differentialgleichung folgt

$$\frac{d^2u_2}{d\tau^2} + \frac{1}{Q}\frac{du_2}{d\tau} + u_2(\tau) = u_1(\tau).$$

4.1.2 Lösung der homogenen Differentialgleichung

Bei der homogenen Differentialgleichung wird die eingeprägte Spannung $u_1 := 0$.
Damit folgt

$$\frac{d^2u_2}{d\tau^2} + \frac{1}{Q}\frac{du_2}{d\tau} + u_2(\tau) = 0.$$

Um die Differentialgleichung zu lösen wird der Ansatz $u_2 = Ke^{p\tau}$ mit $K, p = \text{const}$ in die homogene Differentialgleichung eingesetzt. Nach der Division durch $Ke^{p\tau}$ folgt die *charakteristische Gleichung* für homogene Differentialgleichungen:

$$p^2 + \frac{1}{Q}p + 1 = 0.$$

Die Eigenwerte sind gegeben durch

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}.$$

Ein wichtiger Grenzfall tritt auf, wenn der Wurzelausdruck zu Null wird. Dies geschieht für $Q = 0{,}5$. Dies ist der Fall der *kritischen Dämpfung*. Der zugehörige Eigenwert ist dann $p_1 = p_2 = -1$.

Im folgenden werden die Fälle der schwachen bzw. starken Dämpfung untersucht.

<u>schwache Dämpfung</u> $Q > 0{,}5$

Für $Q > 0{,}5$ wird der Wurzelterm der Eigenwerte negativ und damit die Eigenwerte konjugiert komplex: $p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ mit

$$\alpha = \frac{1}{2Q} \text{ und } \beta = \frac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung wird nun angesetzt mit

$$U_{2K}(\tau) = K_1 e^{p_1\tau} + K_2 e^{p_2\tau}.$$

Dabei werden K_1 und K_2 konjugiert komplex zueinander gewählt, um eine reelle Lösung der Differentialgleichung zu erhalten. Da K_1 zu K_2 konjugiert komplex ist, gilt somit für den Realteil $\mathrm{Re}\{\underline{K}_1\} = \mathrm{Re}\{\underline{K}_2\} = \frac{A}{2}$. Für den Imaginärteil muß gelten $-\mathrm{Im}\{\underline{K}_1\} = \mathrm{Im}\{\underline{K}_2\} = \frac{B}{2}$.

Werden die Werte für K_1, K_2, p_1 und p_2 in die Lösung der Differentialgleichung eingesetzt, so folgt nach Umformung für den Fall der schwachen Dämpfung

$$U_{2K}(\tau) = e^{-\alpha\tau}\left(A\cos\beta\tau + B\sin\beta\tau\right).$$

Diese Gleichung stellt eine exponentiell gedämpfte Schwingung dar.

<u>starke Dämpfung</u> $Q < 0{,}5$

In diesem Fall werden die Eigenwerte p_1, p_2 negative reelle Größen.

Für den Fall $Q^2 << \frac{1}{4}$ läßt sich durch Reihenentwicklung $\left(\sqrt{1-4Q^2} = 1 - 2Q^2 - 16Q^3 - \ldots\right)$ und Abbruch nach dem 2. Glied der Wurzelausdruck $\sqrt{1-4Q^2}$ umformen zu $1-2Q^2$. Die Eigenwerte lassen sich für diesen Spezialfall somit berechnen durch

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2Q} \pm \frac{1}{2Q}\left(1-2Q^2\right).$$

Die Eigenwerte ergeben sich damit zu $p_1 = -Q$ und $p_2 = -\frac{1}{Q} + Q \approx -\frac{1}{Q}$.

Die Lösung der Differentialgleichung im Fall der starken Dämpfung ist also

$$u_{2K}(\tau) = K_1 e^{-Q\tau} + K_2 e^{-\tau/Q}.$$

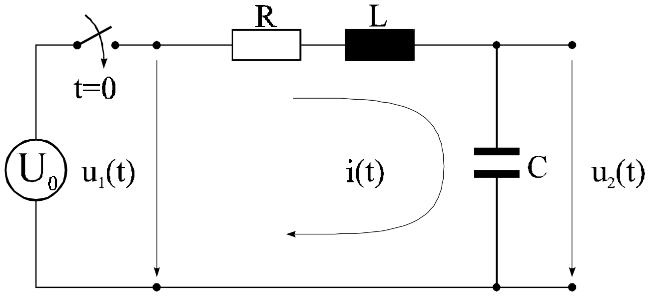
Diese Gleichung stellt eine Doppel-*e*-Funktion dar.

4.1.3 Lösung der vollständigen Differentialgleichung

Die Lösung der vollständigen Differentialgleichung ergibt sich durch Überlagerung der Lösung der homogenen Differentialgleichung mit einer partikulären Lösung. Die partikuläre Lösung kann eine beliebige Lösung sein, z.B. auch für $t \to \infty$. Allerdings muß die Erregung bekannt sein.

<u>Beispiel: Einschalten einer Gleichspannung bei starker Dämpfung</u>

Wird die Schaltung nach *4.1.3 Bild 1* mit Gleichspannung betrieben, lädt sich der kapazitive Speicher (Kondensator) auf. Für $t \to \infty$ gilt für den Strom $i, \frac{di}{dt} = 0$, also wird die Spannung über dem Kondensator zu $u_2(\infty) = u_0$.



4.1.3 Bild 1: Aufladen eines Kondensators

Um die vollständige Lösung der Differentialgleichung zu erhalten muß nun die partikuläre Lösung für $t \to \infty$ zu der Lösung der homogenen Differentialgleichung addiert werden:

$$u_2 = u_0 + K_1 e^{-Q\tau} + K_2 e^{-\tau/Q}.$$

Die Anfangsbedingungen für $t = 0$ lauten

$$\begin{aligned} u_2 &= 0 = u_0 + K_1 + K_2 \\ i &= 0 = C\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{Z_0}\frac{du_2}{d\tau} = -K_1 Q - K_2/Q \end{aligned}.$$

Mit den Anfangsbedingungen lassen sich nun die Konstanten bestimmen zu

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{U_0}{1-Q^2} \\ K_2 &= \frac{U_0 Q^2}{1-Q^2} \end{aligned}.$$

Werden die Konstanten in die vollständige Lösung eingesetzt, folgt

$$u_2 = u_0\left(1 - \frac{1}{1-Q^2}e^{-Q\tau} + \frac{Q^2}{1-Q^2}e^{-\tau/Q}\right).$$

Mit den Konstanten aus *Kapitel 4.1.1* ergibt sich für die Spannung des Kondensators

$$u_2 = U_0\left(1 - \underbrace{\frac{1}{1-Q^2}}_{\text{Term 1}} e^{-\frac{t}{RC}} + \underbrace{\frac{Q^2}{1-Q^2}}_{\text{Term 2}} e^{-\frac{R}{L}t}\right) \text{mit}\, Q^2 = \frac{L}{CR^2}.$$

Wird nun nur die Aufladung eines *RC*-Gliedes betrachtet, ist $L = 0$ und damit auch $Q^2 = 0$ und für die Spannung des Kondensators gilt

$$u_2 = u_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

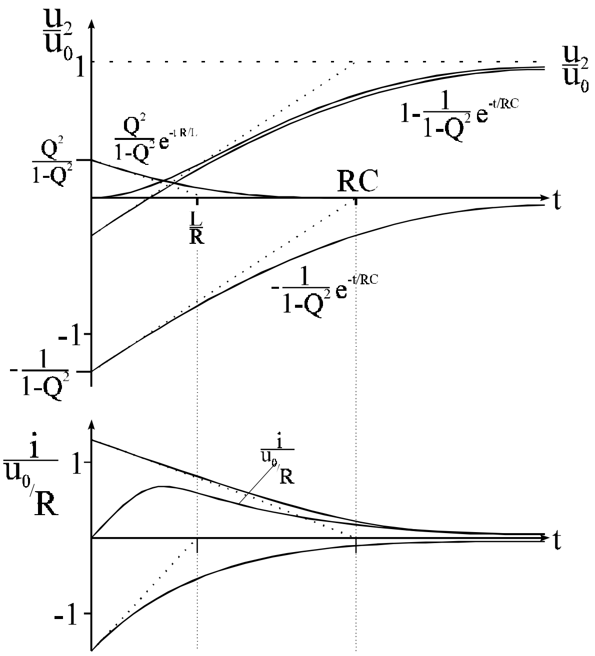
Der allgemeine Ladestrom läßt sich über $i(t) = \frac{C du_2}{dt}$ berechnen zu

$$i(t) = \frac{u_0}{R(1-Q^2)}\left[e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Für ein RC-Glied mit $L = 0$ ist der Ladestrom gegeben durch

$$i(t) = \frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Die Verläufe von Ladespannung und Ladestrom für den allgemeinen Fall sind in *4.1.3 Bild 2* dargestellt.



4.1.3 Bild 2: Ladespannung und Ladestrom am Kondensator für starke Dämpfung eines RLC-Gliedes

Speicherwirkungsgrad

Die Quellenenergie des Kondensators beträgt

$$W_Q = \int_0^\infty u i dt = u_0 \int_0^\infty i dt = u_0 Q = C u_0^2.$$

Die Speicherenergie ist gegeben durch

$$W_S = \frac{1}{2} C u_0^2.$$

Der Speicherwirkungsgrad beträgt damit

$$\eta = \frac{W_S}{W_Q} = 50\% \,.$$

Es entsteht also eine Verlustenergie in Form von Wärme, für sie gilt

$$W_V = R\int_0^\infty i^2 dt \overset{!}{=} \frac{1}{2} C u_0^2 \,.$$

<u>Beispiel: Einschalten einer Wechselspannungsquelle bei schwacher Dämpfung</u>
Die Erregerspannung wird für Zeiten $t \geq 0$ angenommen als

$$u_1(t) = \hat{u}_1 \cos \omega t \,.$$

Um die vollständige Lösung der Differentialgleichung zu erhalten wird nun wieder nach einer partikulären Lösung gesucht. Die Schaltung nach *4.1.1 Bild 1* kann als Spannungsteiler angesehen werden und das Verhältnis der Spannungen im eingeschwungenen Zustand (Annahme $\underline{u}_1$ in der reellen Achse = u_1) läßt sich mit Zeigerrechnung bestimmen zu

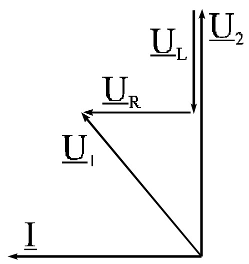
$$\frac{\underline{u}_2}{u_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \,,$$

mit der Resonanzkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Für den Fall $\omega < \omega_0$ ergibt sich für die komplexe Ausgangsspannung nach Betrag $\left(\sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}\right)$ und Phase $\left(\varphi = \arctan\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)$ zu

$$\underline{u}_2 = \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right] u_1 e^{-j\frac{\omega}{\omega_0}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\frac{180°}{\pi}}$$

Wird Q groß genug (Q > 0,707) gewählt und die Erregerkreisfrequenz ist $\omega < \omega_0$, so kann $u_2 > u_1$ werden. In diesem Fall spricht man von einer *kapazitiven Spannungserhöhung*.
Das Zeigerdiagramm in *4.1.3 Bild 3* verdeutlicht die Lage der Spannungen zueinander.



4.1.3 Bild 3: Lage des Stroms und der Spannungen der einzelnen Bauteile

Aus diesem Bild kann abgelesen werden, daß aufgrund der charakteristischen Lage von $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_L$ $U_2>U_1$ wird. Man spricht von Spannungserhöhung.
Um die vollständige Lösung der Differentialgleichung zu erhalten, wird nun die oben erhaltene partikuläre Lösung zur allgemeinen homogenen Lösung addiert und es folgt

$$u_2 = \left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)\right]\hat{U}_1 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\frac{180°}{\pi}\right) + e^{-\alpha\omega_0 t}\left(A\cos\beta\omega_0 t + B\sin\beta\omega_0 t\right)$$

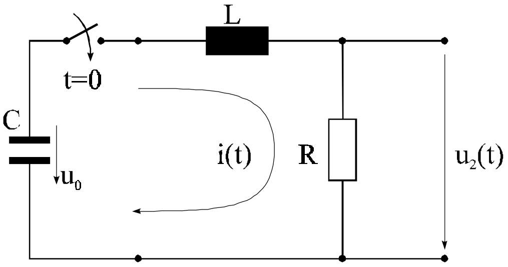
mit $\alpha = \dfrac{1}{2Q}$ und $\beta = \dfrac{\sqrt{4Q^2-1}}{2Q}$ (siehe *Kapitel 4.1.2*).

Die Bestimmung der Konstanten *A* und *B* kann wie zuvor über die Randbedingungen erfolgen.

4.1.4 Äquivalente Netzwerke

Im folgenden soll ein Reihenschwingkreis untersucht werden, da er ein Modell für viele praktische Fälle darstellt.

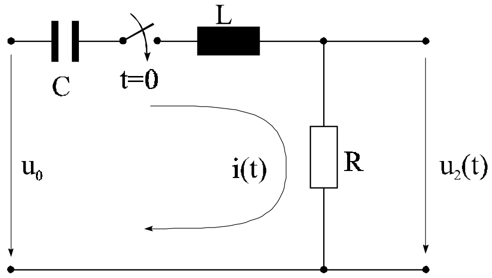
Beispiel: Kondensatorentladung



4.1.4 Bild 1: Kondensatorentladung im Reihenschwingkreis

Für $t \geq 0$ wird der Schalter in *4.1.4 Bild 1* geschlossen, so daß sich der Kondensator entlädt und somit einen Stromfluß durch Spule und Widerstand verursacht.

Der geladene Kondensator in der Schaltung nach *4.1.4 Bild 1* läßt sich einfach durch einen ungeladenen Kondensator in Reihe mit einer Spannungsquelle, die die gleiche Spannung des geladenen Kondensators liefert, ersetzen. Dann geht die Schaltung über in *4.1.4 Bild 2*.



4.1.4 Bild 2: Äquivalentes Netzwerk zu Bild 1

Laut *Kapitel 4.1.3* ist der Ladestrom für $Q << 0{,}5$ gegeben durch

$$i(t) = \frac{U_0}{R\left(1-Q^2\right)}\left[e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{R}{L}t}\right].$$

Die Spannung $u_2(t)$ über dem Widerstand R läßt sich nun einfach durch das ohmsche Gesetz berechnen zu

$$u_2(t) = i(t)\cdot R = \frac{U_0}{1-Q^2}\left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Für die *Energieerhaltung* muß laut *Kapitel 1* gelten

$$\frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{R}\int_0^\infty U_2^2\,dt\ .$$

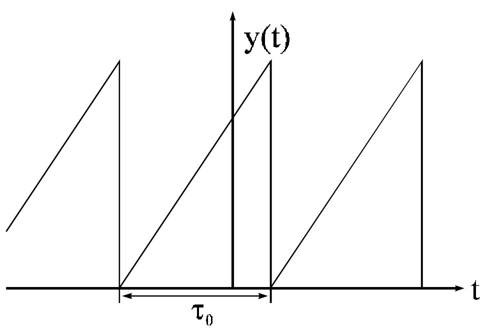
Der prinzipielle zeitliche Verlauf der Spannung u_2 ist in *4.1.4 Bild 3* graphisch dargestellt.

4.1.4 Bild 3: Verlauf der Entladespannung des Kondensators

4.2 Fourier-Tansformation

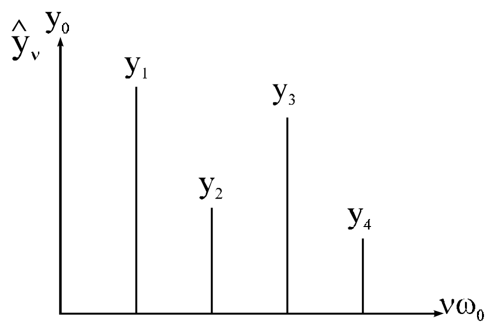
4.2.1 Fourier-Reihe und Fourier-Integral

In vielen Anwendungen der Elektrotechnik treten periodische Vorgänge auf, wie z.B. eine Sägezahnfunktion, dargestellt in *4.2.1 Bild 1.*



4.2.1 Bild1: Periodische Funktion mit der Grundperiode

Von grundlegendem Interesse ist die Frage, aus welchen Schwingungen mit den Kreisfrequenzen $\nu\omega_0$ mit $\nu = 1,2,\ldots$ sich die periodische Funktion $y(t)$ zusammensetzt. In *4.2.1 Bild 2* sind die dabei auftretenden Frequenzen mit ihrer Intensität $\hat{y}_\nu$ als Linienspektrum dargestellt.



4.2.1 Bild 2: Linienspektrum der periodischen Funktion

Damit läßt sich die Funktion $y(t)$ in Form einer Fourier-Reihe wie folgt darstellen

$$y(t) = y_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{y}_\nu \cos(\nu\omega_0 t + \alpha_\nu) = y_0 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{y}_\nu \left(e^{j(\nu\omega_0 t + \alpha_\nu)} + e^{-j(\nu\omega_0 t + \alpha_\nu)}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{j\nu\omega_0 t}$$

mit

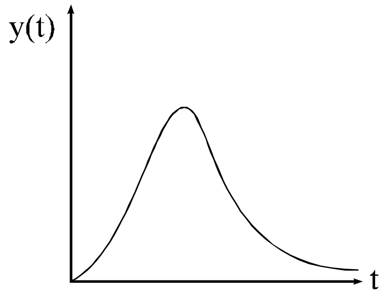
$$c_\nu = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) e^{-j\nu\omega_0 t}\, dt, \nu \in \mathrm{Z}.$$

erhält man:

$$c_0 = y_0, c_\nu = \frac{1}{2}\hat{y}_\nu e^{j\alpha_\nu}, c_{-\nu} = \frac{1}{2}\hat{y}_\nu e^{-j\alpha_\nu}, \nu = 1,2,\ldots \quad .$$

Für beliebige geeignete Funktionen $y(t)$ (auch aperiodische mit $T_0 \to \infty$ z.B. *4.2.1 Bild 3*) werden nicht nur die Kreisfrequenzen $\nu\omega_0$ sondern alle $\omega \in \mathrm{R}$ zur Darstellung benötigt. Damit ergibt sich anstelle der Fourier-Reihe die Fourier-Intergal-Darstellung:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega = F^{-1}(Y(j\omega))$$

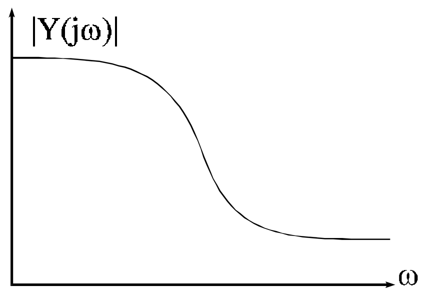


4.2.1 Bild 3: Beliebige geeignete Funktion $y(t)$

Für die Umkehrtransformation vom Zeit- in den Frequenzbereich gilt:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t}\, dt = |Y(j\omega)| e^{j\alpha(\omega)} = F(Y(t)) .$$

Bei diesen Gleichungen treten allerdings häufig Konvergenzprobleme auf, weshalb anstelle der Fourier-Transformation die Laplace-Transformation angewandt wird. Im Gegensatz zur Fourier-Reihe ergibt sich nun anstelle des Linienspektrums ein kontinuierliches Amplitudendichtespektrum der Funktion $y(t)$.

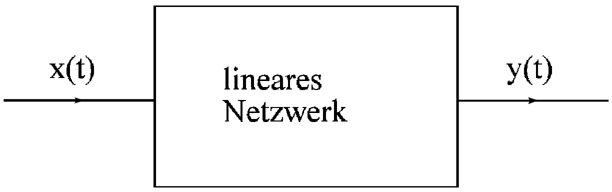


4.2.1 Bild 4: Kontinuierliches Amplitudendichtespektrum

$\Rightarrow$ Zeit/Frequenzbereichstransformation

4.2.2 Berechnungsverfahren

Betrachtet wird ein lineares Netzwerk, dargestellt in *4.2.2 Bild 1*, mit der Eingangsgröße $x(t)$ und existierender Fourier-Transformierter $X(j\omega)$ sowie der Ausgangsgröße $y(t)$ mit Fourier-Transformierter $Y(j\omega)$. Diese Größen können Spannung, Strom etc. darstellen.



4.2.2 Bild 1: Lineares Netzwerk

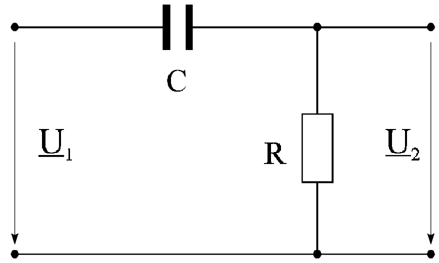
Um den *Frequenzgang*

$$F(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$$

für den eingeschwungenen Zustand $(t \to \infty)$ des linearen Netzwerks zu berechnen, wird das Verhältnis von $Y(j\omega)$ zu $X(j\omega)$ berechnet (stat. Lösung der Differentialgeichung nach Abklingen der Einschwingvorgänge $(t \to \infty)$). Damit gilt im Frequenzbereich der multiplikative Zusammenhang:

$$\boxed{Y(j\omega) = F(j\omega) \cdot X(j\omega)}.$$

<u>Beispiel</u>
Der Frequenzgang des Netzwerks aus *4.2.2 Bild 2* soll nun untersucht werden.

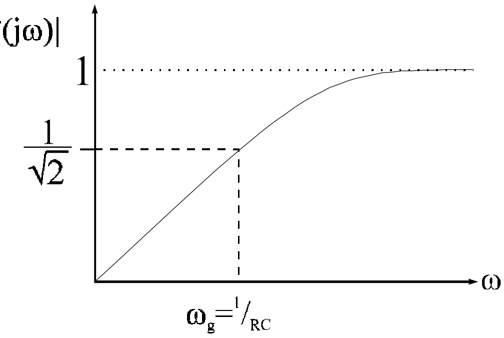


4.2.2 Bild 2: Hochpaß

Für den Frequenzgang gilt

$$F(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Trägt man den Frequenzgang F(jω) auf (vgl *4.2.2 Bild 3*), so erkennt man, daß hohe Frequenzen kaum beeinflußt werden, niedrige hingegen werden abgeschwächt.



4.2.2 Bild 3: Frequenzgang eines Hochpaß

Die *Grenzfrequenz* eines Hochpaß beträgt $\omega_g = \frac{1}{RC}$.

Vorgehensweise bei der Analyse linearer Netzwerke unter der Voraussetzung: $x(t) = 0$ für $t \le 0$ und es existiert $F(x(t)) = \int_0^\infty x(t) e^{-j\omega t} dt$.

1. Transformation von $x(t)$ in den Frequenzbereich mit

$$F(x(t)) = \int_0^\infty x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega).$$

2. Berechnen der Fouriertransformierten $F(y(t))$ durch Multiplikation im Frequenzbereich

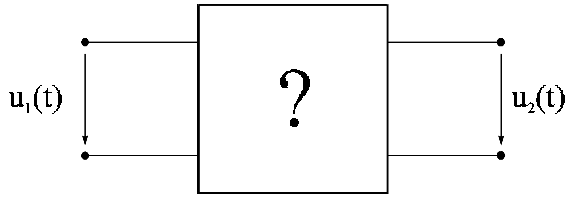
$$F(y(t)) = F(j\omega) \cdot F(x(t)) = Y(j\omega).$$

3. Rücktransformation

$$y(t) = F^{-1}(Y(j\omega))$$

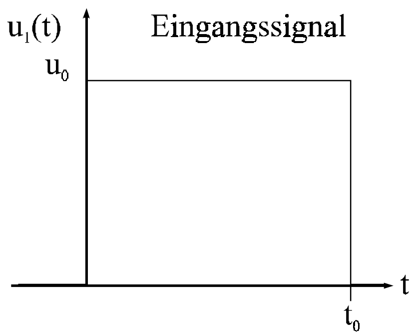
4.2.3 Synthese einer Impulsspannungsquelle

Im weiteren soll das Spektrum einer Impulsspannungsquelle untersucht werden. Die Spannungsquelle wird als Black-Box angesehen, die Ein- bzw. Ausgangsgrößen sind bekannt (s. *4.2.3 Bild 1*).



4.2.3 Bild 1: Impulsspannungsquelle als Black-Box

Die Eingangsspannung ist eine Rechteckspannung,, siehe *4.2.3 Bild 2*.

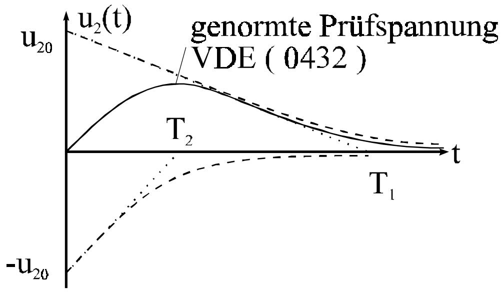


4.2.3 Bild 2: Eingangsspannung

Die Ausgangsspannung der Black-Box beträgt

$$u_2(t) = U_{20}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

mit $T_1 >> T_2$ und $t_0 >> T_1$. Den Verlauf der Ausgangsspannung zeigt *4.2.3 Bild 3*.



4.2.3 Bild 3: Ausgangsspannung einer Impulsspannungsquelle

Der Frequenzgang ist nun, wie in *Kapitel 4.2.2* gezeigt, gegeben durch den Quotienten

$$F(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$$

der Fourier-Transformierten.

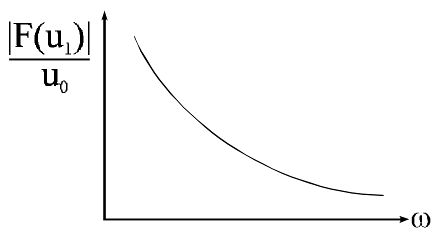
Für die Fourier-Transformierte von $u_1(t)$ gilt

$$F(U_1) = U_1(j\omega) = U_0 \int_0^{t_0} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{U_0}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_0^{t_0} = \frac{U_0}{j\omega}\left[1 - e^{-j\omega t_0}\right]$$

und für $t_0 \to \infty$ ist

$$F(u_1) = U_1(j\omega) = \frac{U_0}{j\omega}$$

(siehe *4.2.3 Bild 4*).

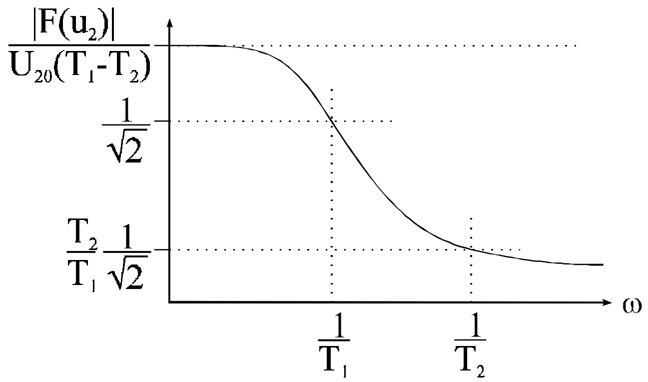


4.2.3 Bild 4: Amplitudendichtespektrum des Eingangssignals (Sprung)

Die Fourier-Transformierte $F(u_2) = U_2(j\omega)$ von $u_2(t)$ ist:

$$F(U_2) = U_2(j\omega) = U_{20} \int_0^{\infty} \left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) e^{-j\omega t}\, dt = U_{20} \int_0^{\infty} \left(e^{-t\left(\frac{1}{T_1}+j\omega\right)} - e^{-t\left(\frac{1}{T_2}+j\omega\right)} \right) dt$$

$$= U_{20} \left[\frac{T_1}{1 + j\omega T_1} - \frac{T_2}{1 + j\omega T_2} \right] = U_{20} \frac{T_1 - T_2}{1 - \omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 + T_2)}$$



4.2.3 Bild 5: Amplitudendichtespektrum des Ausgangssignals

Die *Spannungszeitfläche* ist gegeben durch

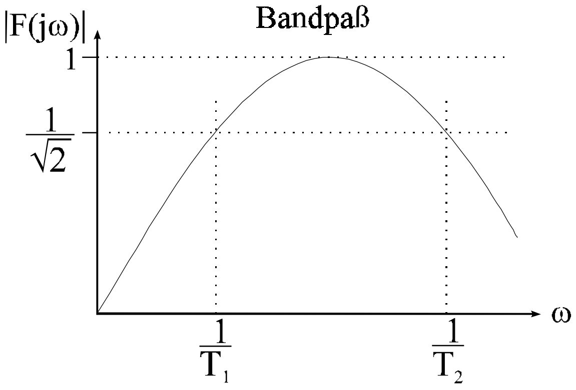
$$\int_0^\infty u_2(t)dt = U_{20}(T_1 - T_2).$$

Der Frequenzgang dieses Netzwerks beträgt damit (unter der Voraussetzung $t_0 \to \infty$, "Eingangssprung")

$$\boxed{F(j\omega) = \frac{U_{20}}{U_0} \frac{j\omega(T_1 - T_2)}{1 - \omega^2 T_1 T_2 + j\omega(T_1 + T_2)}}.$$

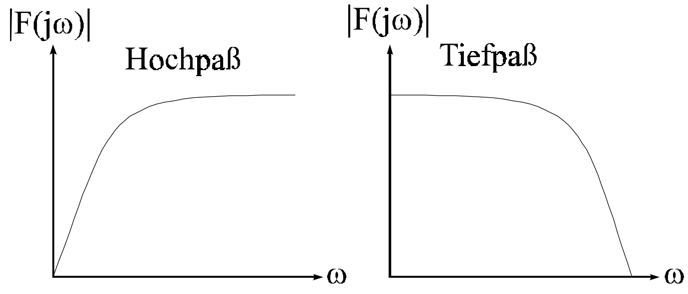
Mit $T_1 >> T_2$ ergibt sich der Betrag des Frequenzgangs, dargestellt in *4.2.3 Bild 6* zu

$$|F(j\omega)| = \frac{\omega T_1}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2 (1 + (\omega T_2)^2)}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}.$$



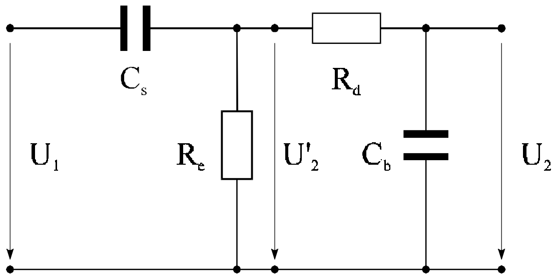
4.2.3 Bild 6: Frequenzgang vom Bandpaß

Man erkennt am Frequenzgang, daß hohe und tiefe Frequenzen abgeschwächt werden, mittlere hingegen nicht beeinflußt werden, daher nennt man ein solches Bauteil einen Bandpaß.
Um einen Bandpaß technisch zu realisieren, wird einfach ein Hochpaß mit einem Tiefpaß in Reihe geschaltet (vgl. *4.2.3 Bild 7 und 4.2.3 Bild 8*).



4.2.3 Bild 7: Frequenzgang von Hochpaß und Tiefpaß

Das entstandene Schaltbild ist in *4.2.3 Bild 8* dargestellt.



4.2.3 Bild 8: Reihenschaltung von Hoch- und Tiefpaß

Der Frequenzgang läßt sich nun auch durch eine Kettenmatrix-Multiplikation berechnen. Dies darf allerdings nur bei Rückwirkungsfreiheit durchgeführt werden. Für den Frequenzgang gilt somit auch

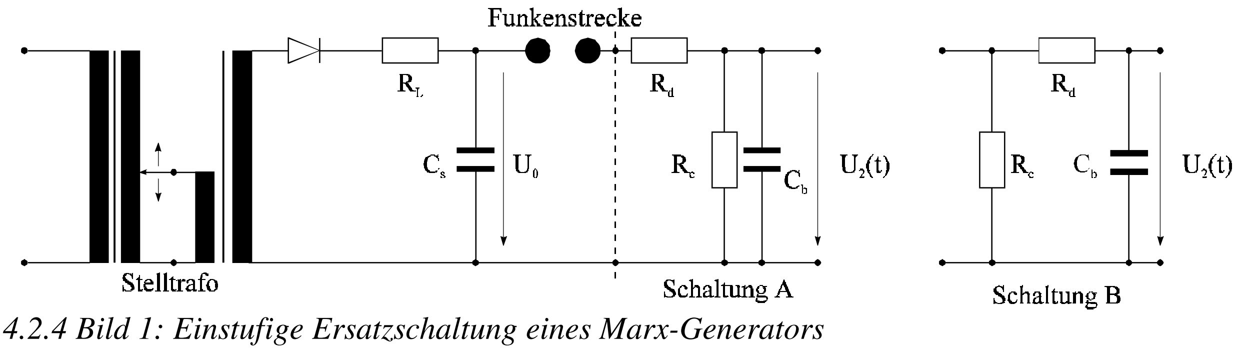
$$F(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \frac{\underline{U'}_2}{\underline{U'}_2} = \frac{j\omega C_S R_e}{1 - \omega^2 C_S C_b R_e R_d + j\omega\left[C_b\left(R_e + R_d\right) + C_S R_e\right]} .$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der beiden Gleichungen für den Frequenzgang lassen sich die Konstanten T_1, T_2 und U_{20} wie folgt bestimmen (wobei $R_d << R_e$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{U_{20}}{U_0}\left(T_1 - T_2\right) &= C_S R_e \\ T_1 + T_2 &= C_b\left(R_e + R_d\right) + C_S R_e \\ T_1 T_2 &= C_S C_b R_e R_d \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} T_1 &= R_e\left(C_b + C_S\right) \\ T_2 &= R_d \frac{C_S C_b}{C_S + C_b} \\ U_{20} &= U_0 \frac{T_1 T_2}{C_b R_d \left(T_1 - T_2\right)} \end{aligned}\right.$$

4.2.4 Marx-Generator (VDE/IEC)

Der Marx-Generator dient der Erzeugung von Stoßspannungen. Die einstufige Ersatzschaltung ist in *4.2.4 Bild 1* dargestellt.

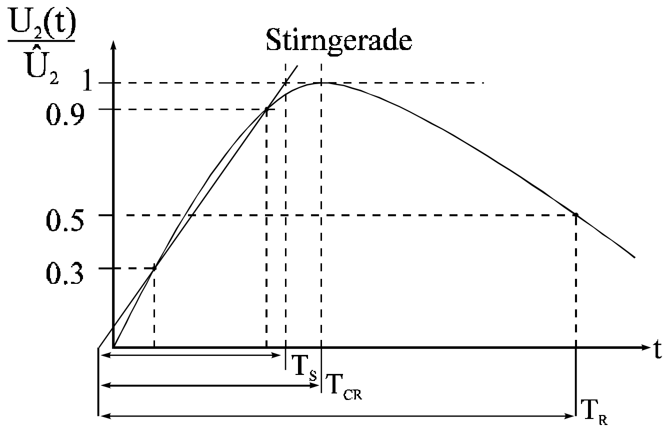


4.2.4 Bild 1: Einstufige Ersatzschaltung eines Marx-Generators

Über die Kombination von Stelltransformator und Hochspannungstransformator wird eine variable Hochspannung erzeugt. Die Sekundärspannung wird gleichgerichtet und lädt den Speicherkondensator C_S über den hochohmigen Ladewiderstand R_L auf die Ladespannung U_0 auf. Ist der Kondensator soweit geladen, daß die Funkenstrecke zündet, so entlädt er sich über das Netzwerk aus Dämpfungswiderstand R_d, Entladewiderstand R_e und Belastungskondensator

C_B. Die Schaltung A und B unterscheiden sich nur bezüglich der Netzwerkauslegung. Die Stoßspannung kann über dem Belastungskondensator C_b abgegriffen werden.

Die Entladespannung u_2 bezogen auf ihre Amplitude ist im Diagramm in *4.2.4 Bild 2* dargestellt.



4.2.4 Bild 2: Stoßspannung des Marx-Generators

Die Zeiten, die in *4.2.4 Bild 2* eingezeichnet sind, werden im folgenden benannt und Berechnungsvorschriften werden angegeben.

Stirnzeit	$T_S = k_S T_2$
Rückenhalbwertszeit	$T_R = k_R T_1$
Scheitelzeit	$T_{CR} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2}$
Ausnutzungsgrad	$\eta = \frac{\hat{U}_2}{U_0} < 1$

Die Kenngrößen T_1, T_2 und η lassen sich wie folgt berechnen:

	Schaltung *A*	Schaltung *B*
T_1	$(R_d + R_E)(C_S + C_b)$	$R_e(C_S + C_b)$
T_2	$\frac{R_d R_e}{R_d + R_e} \frac{C_S C_b}{C_S + C_b}$	$R_d \frac{C_S C_b}{C_S + C_b}$
η	$\frac{R_e}{R_d + R_e} \frac{C_S}{C_S + C_b}$	$\frac{C_S}{C_S + C_b}$

Man kann anhand der Formeln erkennen, daß der Ausnutzungsfaktor für Schaltung *B* besser (größer) ist als der der Schaltung *A* ($\eta_B > \eta_A$).

Man unterscheidet bezüglich der Schaltzeiten zwischen *Blitzstoßspannung* für $T_{CR} < 100\mu s$ und *Schaltstoßspannung* $T_{CR} > 100\mu s$.

Wie in der obigen Tabelle erkennbar, sind die Zeitkenngrößen T_1, T_2 proportional zur Stirn-, bzw. Rückenhalbwertszeit.
Die Proportionalitätsfaktoren k_S, k_R hängen vom Verhältnis von T_S und T_R ab. Die folgende Tabelle gibt die Proportionalitätsfaktoren für die wichtigsten Verhältnisse an.

$\frac{T_S/\mu s}{T_R/\mu s}$	$1{,}2/5$	$1{,}2/50$	$1{,}2/500$
k_S	1,49	2,96	3,15
k_R	1,44	0,73	0,70