SZŰCS, Kinga
Erfurt

CAS-unterstützte Beweisprozesse in der Hochschulmathematik: Ein Weg vom experimentellen zum formalen Beweis

Die Mathematik unterscheidet sich von anderen empirischen Wissenschaften vor allem durch die deduktive Art der Argumentation, die Beweise charakterisiert, daher gilt das Beweisen in der Fachwissenschaft Mathematik als eine essenzielle, identitätskonstituierende Tätigkeit (Heintz, 2000). Ziel des Mathematikstudiums ist, Studierende in diese Disziplin einzuführen (Weber & Lindmeier, 2020). Da in der Schule oft Plausibilitätsüberlegungen herangezogen werden, um Aussagen oder Regeln zu begründen (Rach et al. 2016), die keine deduktiven Argumentationen darstellen, müssen Studierende am Übergang Schule-Hochschule erkennen, dass in der Hochschulmathematik Beweise das zentrale Instrument der Evidenzerzeugung sind (Weber & Lindmeier, 2020), und sie müssen zum formal-deduktiven Beweisbegriff durchdringen. In dieser Arbeit werden Beispiele aufgezeigt, wie Beweisprozesse in der Hochschulmathematik durch Computer-Algebra-Systeme (CAS) unterstützt werden können, indem im Sinne der Medienintegration auf digitale Kompetenzen aus der Schulzeit der Studierenden zurückgegriffen wird.

1. Theoretischer Rahmen

Die Auseinandersetzung mit Beweisen in der Hochschulmathematik erfolgt nicht problemlos. Zahlreiche empirische Studien synthetisierend identifiziert Kirsten (2021) drei Bereiche, in denen Studierende während der Begegnung mit Beweisen Schwierigkeiten haben können. Einer dieser Bereiche ist das selbstständige Konstruieren von Beweisen. Die Autorin konnte feststellen, dass Schwierigkeiten hierbei u. a. auf Mängel hinsichtlich des Methodenwissens zurückgeführt werden können. Letzteres umfasst vor allem Wissen darüber, (1) dass ein Beweis eine Kette deduktiver Schlüsse ist, (2) von der Voraussetzung zur Behauptung führt, beziehungsweise, (3) dass in einem Beweis jede Aussage aus der vorherigen Aussage folgt (Heinze & Reiss, 2003).

Ein Modell, mit dessen Hilfe zum einen das Methodenwissen vermittelt und zum anderen ermöglicht wird, den Weg von bekannten Plausibilitätsüberlegungen hin zu formal-deduktiven Beweisen einschlagen zu können, geht auf Wittmann und Müller (1988) zurück. Dieses Modell unterscheidet zwischen experimentellen, operativen und formalen Beweisen und wird als Taxonomie verstanden. Experimentelle Beweise – die Plausibilitätsüberlegungen zugeordnet werden können – verifizieren oder falsifizieren einen vermuteten Zusammenhang anhand einiger konkreter Beispiele. Sie geben allerdings keine zuverlässige Einsicht in die Allgemeingültigkeit des Zusammenhangs,

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

daher gelten sie aus mathematischer Sicht nicht als Beweis. Operative und formale Beweise sind demgegenüber deduktiv (1) und unterscheiden sich voneinander nur in der Ebene der Darstellung: Während bei formalen Beweisen an durch Symbole dargestellten Objekten symbolische Operationen durchgeführt werden, stützen sich operative Beweise auf konkrete Operationen, die an konkreten Darstellungen ausgeführt werden (Wittmann, 2014). In beiden Fällen verdeutlichen die Operationen eine Kette von Schlussfolgerungen (3), welche von der Voraussetzung zur Behauptung führt (2). Somit wird klar, dass das Durchlaufen der Stufen vom experimentellen über den operativen zum formalen Beweis einen Zugang zu formalen Beweisen sowohl in der Schule als auch in der Hochschule ermöglichen kann. Zudem wird hierbei das notwendige Methodenwissen vermittelt.

Beweisprozesse werden im Mathematikunterricht bereits seit mehreren Jahrzehnten digital unterstützt, allerdings erscheint der bislang kaum beforschte CAS-Einsatz hierbei zunächst in einem negativen Licht. In einer der wenigen Studien mit Fokus auf CAS identifizierten Jankvist und Misfeldt (2019) im Rahmen einer Lehrwerkanalyse drei Typen des CAS-Einsatzes bei Beweisprozessen. Beim ersten ("complete outsourcing to CAS") und zweiten Typ ("partial outsourcing to CAS") sehen die Autoren die Gefahr, dass durch das Ausblenden der Beweisschritte Lernende keinen Zugang zur deduktiven Argumentation bekommen. Beim dritten Typ ("additional verification by CAS") können ihrer Meinung nach Fehlvorstellungen (Beweise würden keine Allgemeingültigkeit der Aussagen gewährleisten) begünstigt werden.

2. Forschungsfragen

Vor diesem Hintergrund stellen sich folgende Forschungsfragen: 1) Inwiefern kann der CAS-Einsatz Studierenden einen Zugang zu formal-deduktiven Beweisen ermöglichen? 2) Inwieweit kann das Modell von Wittmann und Müller (1988) erfolgreich bei CAS-unterstützten Beweisprozessen in der Hochschulmathematik eingesetzt werden? Dies bedeutet insbesondere, wie Studierende den Übergang vom experimentellen zum operativen bzw. vom operativen zum formalen Beweis bewältigen.

3. Methodisches Vorgehen: Interventionsstudie

Zur Untersuchung der Forschungsfragen wird aktuell eine Interventionsstudie im Rahmen einer Fellowship für Innovationen in der digitalen Hochschullehre (gefördert vom Stifterverband und vom TMWWDG) unter Studierenden des Lehramts im Fach Mathematik durchgeführt. Teilnehmer:innen der Intervention sind 35 Studierende einer Seminargruppe, die die Einführungsveranstaltung Arithmetik und Algebra besuchen. Die Intervention umfasst zum einen die Auseinandersetzung mit dem Modell des experimentellen, operativen und formalen Beweises zu Beginn des Semesters unter Rückgriff auf das CAS, hierzu haben bereits veröffentlichte Beispiele (Szűcs, 2022) als Grundlage gedient. Zum anderen erfolgt die CAS-unterstützte Konstruktion von Beweisen mit Hilfe des Modells, wobei jede Woche einige Beweise der aktuellen Übungsserie bewiesen und diskutiert werden.

4. Erste Ergebnisse

Um Aussagen darüber treffen zu können, inwieweit der CAS-Einsatz den Studierenden eher einen Zugang zu formal-deduktiven Beweisen ermöglichen als der herkömmliche Paper-und-Pencil-Unterricht, wurde die Fähigkeit zur Beweiskonstruktion zu Beginn des Semesters sowohl in der Interventions- als auch in der Kontrollgruppe (weitere 7 Seminargruppen im selben fachwissenschaftlichen Modul) mit einem Fragebogen ermittelt. Ergebnisse bezogen auf die Entwicklung im Bereich der Beweiskonstruktion sind gegen Ende des Wintersemesters 2024/25 zu erwarten (Forschungsfrage 1). In den Seminarsitzungen werden zudem Studierendenlösungen zu den aktuellen Aufgaben in Form von Screenshots gesammelt. Die Auswertung der ersten Lösungen zeigt folgendes Bild: Die Erstellung von experimentellen Beweisen stellt insgesamt keine Herausforderung dar. Erkennbar ist zudem das Bedürfnis, zu einem operativen Beweis überzugehen. Bei diesem Schritt passieren eventuell Syntaxfehler: In der nachfolgenden Studierendenlösung (Abb. 1) ist ein richtiger experimenteller Beweis zum Satz $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ zu erkennen. Anschließend wird durch das Einschalten des *Assist Mode* versucht, die Berechnungsschritte einzublenden, allerdings fehlen die Klammern beim Befehl *Expand*. Diesen Fehler korrigiert der Proband bei der erneuten Verwendung desselben Befehls.

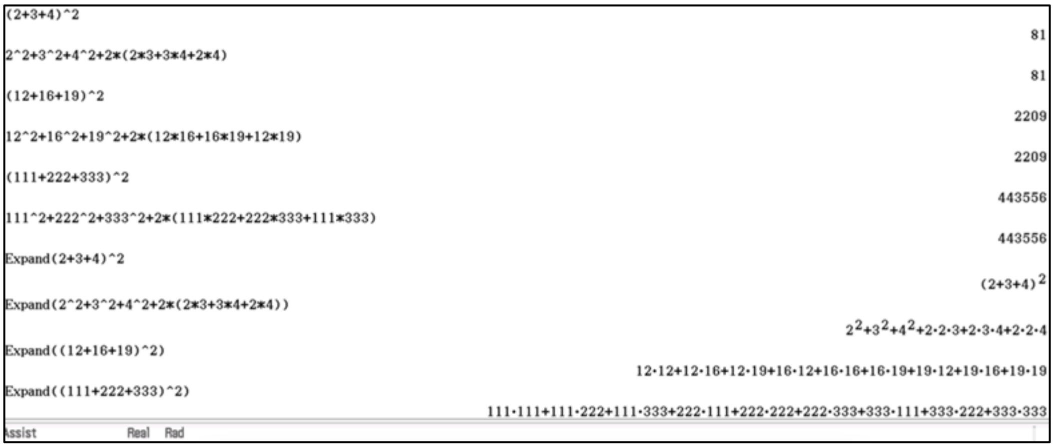

Abb. 1: Schritt vom experimentellen zum operativen Beweis

Beim Übergang vom operativen zum formalen Beweis nutzen die Studierenden erfolgreich die Erkenntnisse auf der operativen Ebene (Abb. 2).

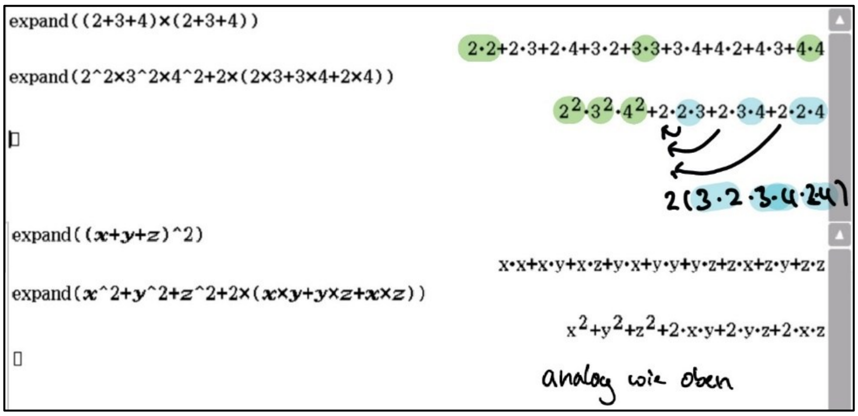

Abb. 2: Schritt vom operativen zum formalen Beweis mit Markierungen des Probanden

Die Befunde lassen somit vermuten, dass das Modell erfolgreich bei CAS-unterstützten Beweisprozessen eingesetzt werden kann (Forschungsfrage 2).

5. Literatur

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Springer Verlag.

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof,* 4–6. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf

Jankvist, U.T., & Misfeldt, M. (2019). CAS assisted proofs in upper secondary school mathematics textbooks. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 8*(3), 232-266. https://doi.org/10.17583/redimat.2019.3315

Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden. Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten.* Springer.

Rach, S., Siebert, U., & Heinze, A. (2016). Operationalisierung und empirische Erprobung von Qualitätskriterien für mathematische Lehrveranstaltungen in der Studieneingangsphase. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase. Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 601–619). Springer.

Szűcs, K. (2022). Digitale Brücke zwischen Schule und Hochschule? Ausgewählte Vorschläge für die Unterstützung von Beweisprozessen durch CAS in der Hochschulmathematik. *Proceedings of the Fourth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM), 19th to 22nd of October, Hannover* (p. 345–346).

Weber, B-J., & Lindmeier, A. (2020). Viel Beweisen, kaum Rechnen? Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben im Studium. *Mathematische Semesterberichte, 67*, 263–284. https://doi.org/10.1007/s00591-020-00274-4

Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *Mathematica Didactica, 37*, 213-232.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237-257).