

SCHOLL, Theresa
Gießen

Philosophieren im Haus der Vierecke: Einblicke in Begriffsbildungsprozesse von Lehramtsstudierenden

Ist ein Quadrat ein Trapez? - Diese Frage zielt auf die Begriffsbeziehung Quadrat und Trapez im Haus der Vierecke ab, welches im Mathematikunterricht behandelt wird. Beim Lernen der Viereckstypen werden in der Literatur einige Schwierigkeiten beschrieben, die auch bei Lehramtsstudierenden noch auftreten. So haben Fujita und Jones (2007) in einer Studie 158 Lehramtsstudierende (elementary school) befragt, unter denen nur 8,9% der Studierenden die Frage nach der Beziehung zwischen Quadrat und Trapez fachmathematisch richtig beantworten konnten. In der Literatur wird beschrieben, dass beim Philosophieren Begriffsbildungsprozesse angeregt werden können. Auf der anderen Seite gibt es jedoch kaum Forschung, die die Begriffsbildungsprozesse beim Philosophieren untersuchen (Meerwald, 2011). Daher soll in dem folgenden Forschungsanliegen untersucht werden, welche Begriffsbildungsprozesse sich bei Lehramtsstudierenden beim Philosophieren im Haus der Vierecke zeigen.

Philosophieren und die Ordnung im Haus der Vierecke

Beim Ordnen von Viereckstypen, beschreibt Villiers (1994) zwei Klassifikationsarten der Viereckstypen. Zum einen können Viereckstypen partitional klassifiziert werden, wenn Klasseninklusion von Viereckstypen vermieden werden. Zum anderen können Viereckstypen hierarchisch klassifiziert werden, wobei Klasseninklusionen zugelassen werden. Die Art der Klassifikation hängt von der Definition der Vierecke ab. Hierarchische Klassifikationen bieten fachmathematisch viele Vorteile gegenüber partitionalen Klassifikationen (Villiers, 1994). Beim Begriffslernen werden in der Literatur verschiedene Stufenmodelle beschrieben (u. a. Hiele, 1965), die in Verbindung mit den Klassifikationsarten nach Villiers (1994) stehen. So vermeiden Kinder auf der Ebene des geometrisch-analysierenden Denkens Klasseninklusionen und nennen nur Eigenschaften der Viereckstypen, sodass sie die Vierecke eher partitional klassifizieren. Auf der Ebene des geometrisch-abstrahierenden Denkens lassen Kinder Klasseninklusionen jedoch zu, sodass hier hierarchische Klassifikationen der Viereckstypen möglich sind. Beim Philosophieren im Haus der Vierecke kann die Diskussion der Definitionen, der Klassifikationen der Viereckstypen und deren Vor- und Nachteile im innermathematischen und alltäglichen Gebrauch dazu beitragen, den Sinn von hierarchischen Klassifikationen der Viereckstypen innermathematisch zu klären und möglicherweise auch Konflikte mit der Begriffsverwendung

im Alltag aufzudecken. Wenn durch die Diskussion der verschiedenen Definitionen und Klassifikationen der Vierecke hierarchische Klassifikationen von Lernenden akzeptiert werden, kann dies möglicherweise dabei helfen die Ebene des geometrisch-abstrahierenden Denkens zu unterstützen.

Beim Philosophieren können aus den großen Denkrichtungen der Philosophie Denkmethoden beschrieben werden, um verschiedene Denkperspektiven zu einem Thema einzunehmen: phänomenologische, hermeneutische, analytische, dialektische und spekulative Methode. Dabei werden diese Denkmethoden des Philosophierens als eine Tätigkeit aufgefasst (Martens, 2014). Um die oben formulierten theoretischen Überlegungen zur Klassifikation von Vierecken zu untersuchen, wurden Aufträge zum Philosophieren für ein Lernmodul zum Themengebiet Haus der Vierecke entwickelt. Die Aufträge aus der Pilotstudie sind in Scholl (2023) publiziert. Neben den Aufträgen im Lernmodul verfassen die Studierenden erdachte Dialoge (s. Wille, 2017), in denen sie ein fiktives Gespräch zu einer Quizshowfrage zwischen einer Zuschauerin und dem Quizmaster aus dem Lernmodul weiterführen.

Datenerhebung und methodisches Vorgehen

Im Sommersemester 2021 haben 34 Studierende in Paarbearbeitung Aufträge im Lernmodul zum Philosophieren im Themengebiet Haus der Vierecke in einer Webkonferenz bearbeitet. Zusätzlich haben 35 Studierende erdachte Dialoge in Einzelarbeit verfasst. Die Paarbearbeitungen wurden videografiert. Die erdachten Dialoge wurden mithilfe qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) ausgewertet, welche mithilfe von Prozessmatrizen nach Utsch (2023) dargestellt werden. Anschließend wurde eine formale Begriffsanalyse nach Ganter (2016) durchgeführt, um die erdachten Dialoge der Studierenden zu gruppieren und diese Gruppen zu beschreiben. Danach wurden ausgewählte Bearbeitungsprozesse mittels qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) sowie ausgewählte Sequenzen der Bearbeitungsprozesse interpretativ ausgewertet.

Auszüge aus dem Fall von S81

S81 setzt den erdachten Dialog zwischen dem Quizmaster und einer Zuschauerin aus der Quizshow fort. In Abbildung 1 sind die Prozessmatrix und Ausschnitte des Dialoges sichtbar, dabei sind in den Zeilen die codierten Kategorien und in den Spalten die Codiereinheiten, hier nur die Codiereinheit 4, 5 und 6 dargestellt (Abb. 1). Die Oberkategorien sind Sprecher:in, Alltag, Vorstellungen, Viereckstypen, Eigenschaften, Definition und Ordnen.

Z: Ich habe folgendes Beispiel für Sie: Ein gleichschenkliges Trapez besitzt jeweils zwei zueinander parallele Seiten und mindestens eine Symmetrieachse - wie ein Rechteck auch. Das die parallelen Seiten unterschiedlich lang sein müssen, ist nicht notwendig. Dieser Spezialfall eines Trapez, gilt auch für das allgemeine Trapez. Und damit gilt die Definition für jedes Trapez. (Pos. 4)				
Q: Nunja, dies verstehe ich. Aber, wenn Sie sich ein Trapez in der Turnhalle anschauen, dann sind die beiden zueinander parallelen Seiten unterschiedlich lang. Ansonsten würde es Rechteck heißen und nicht Trapez. Stellen Sie sich einen herkömmlichen Fahrradrahmen vor. Der Fahrradrahmen hat eine lange Seite am Sattel, welche parallel zu der vorderen kleinen Seite an der Fahrradgabel ist. Der Rahmen wird als Trapezrahmen bezeichnet und besitzt die Eigenschaften eines allgemeinen Trapez. (Pos. 5)				
Z: Ich stimme Ihnen zu. Die Gegenstände die wir in unserem Alltag als Trapez bezeichnen, sehen so aus, wie Sie ein Trapez definiert haben. Es ist nicht einfach sich vorzustellen, dass ein Rechteck auch ein Trapez ist. Dennoch ist anzumerken, dass die Eigenschaften die ein Trapez ausmachen, auch auf ein Rechteck zutreffen. Das heißt, ein Rechteck ist eine spezielle Form eines Trapez. Die Seiten müssen nicht unterschiedlich lang sein. Können Sie sich nicht vorstellen, dass ein Rechteck auch ein Trapez sein könnte? (Pos. 6)				
	S81	4	5	6
	Sprecher:in	1	1	1
	Quizmaster	0	1	0
	Zuschauerin	1	0	1
	Alltag	0	1	1
	Vorstellungen	0	0	1
	Viereckstypen	1	1	1
	Rechteck	1	1	1
	Trapez	1	1	1
	Eigenschaften	1	1	1
	Paralleliät	1	1	0
	Symmetrie	1	0	0
	Seitenlänge	1	0	1
	gleichschenklig	1	0	0
	Definition	1	0	0
	Ordnen	0	0	1

Abb. 1: Auszug Prozessmatrix und erdachter Dialog von S81

Z. B. in Abschnitt vier des erdachten Dialoges von S81 wurden die Kategorien Viereckstypen, Eigenschaften und Definition codiert (Abb. 1, Spalte 4). S81 schreibt in diesem Abschnitt aus Sicht der Zuschauerin: "Ein gleichschenkliges Trapez besitzt jeweils zwei zueinander parallele Seiten und mindestens eine Symmetrieachse - wie ein Rechteck auch. Das (sic!) die parallelen Seiten unterschiedlich lang sein müssen, ist nicht notwendig" (Abb. 1, Pos. 4). Die Zuschauerin von S81 überträgt hier Eigenschaften eines gleichschenkligen Trapezes auf ein Rechteck. Des Weiteren beschreibt die Zuschauerin im Dialog von S81, dass die Eigenschaft der unterschiedlich langen parallelen Seiten nicht notwendig ist. Im nächsten Abschnitt sind die Kategorien Alltag, Viereckstypen und Eigenschaften codiert (Abb. 1, Spalte 5). Der Quizmaster von S81 nennt als Alltagsbeispiel für ein Trapez das "Trapez in der Turnhalle" (Abb. 1, Pos. 5). Bei diesem Trapez "sind die beiden zueinander parallelen Seiten unterschiedlich lang. Ansonsten würde [das Trapez in der Turnhalle] auch Rechteck heißen und nicht Trapez" (Abb.1, Pos. 5). In Abschnitt sechs sind die Kategorien Alltag, Vorstellungen, Viereckstypen, Eigenschaften und Ordnen codiert (Abb. 1, Spalte 6). In diesem beschreibt die Zuschauerin von S81, dass es "nicht einfach [ist] sich vorzustellen, dass ein Rechteck auch ein Trapez ist" (Abb.1, Pos. 6). Hierbei geht die Zuschauerin allgemein auf Vorstellungen zum Rechteck und Trapez ein. Zusätzlich ordnet sie die Begriffe Rechteck und Trapez, indem sie sagt, dass "ein Rechteck [...] eine spezielle Form eines Trapez (sic!) [ist]" (S81, Pos. 6).

Diskussion des Falls S81

Im Dialog von S81 definiert die Zuschauerin das gleichschenklige Trapez über die parallelen Seiten und die Symmetrieachse und lässt die Eigenschaft über die Länge der Seiten weg. Dadurch kann sie die Begriffe Trapez und Rechteck in eine Begriffshierarchie bringen und diese hierarchisch ordnen. Der Quizmaster im Dialog von S81 nimmt jedoch die Länge der Seiten als notwendige Eigenschaft für ein Trapez mit auf, sodass für ihn im Alltag Rechtecke keine Trapeze sind. Der Quizmaster von S81 ordnet diese beiden Viereckstypen im Alltag somit partitional. In dem Dialog von S81 ist zu erkennen, dass mithilfe des Philosophierens die unterschiedlichen Ordnungen im Alltag und in der Mathematik und Anwendbarkeit diskutiert werden.

Literatur

- Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3–20. <https://doi.org/10.1080/14794800008520167>
- Ganter, B. (2016). *Conceptual Exploration*. Springer.
- Hiele, P. M. van (1965). Piagets Beitrag zu unserer Einsicht in die kindliche Zahlbegriffsbildung. In J. Piaget, K. Resag, A. Fricke & P. M. van Hiele (Hrsg.), *Rechenunterricht und Zahlbegriff: Die Entwicklung des kindlichen Zahlbegriffs und ihre Bedeutung für den Rechenunterricht* (S. 105–131). Westermann.
- Martens, E. (2014). *Methodik des Ethik- und Philosophieunterrichts: Philosophieren als elementare Kulturtechnik* (10. Aufl.). Siebert.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., überarb. Aufl.). Beltz.
- Meerwald, D. (2011). Philosophieren als Unterrichtsprinzip im Mathematikunterricht. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 117–130). Vieweg+Teubner Verlag.
- Scholl, T. (2023). Geometrische Begriffsbildung philosophierend fördern: Ein digitales Lernangebot. In J. Härterich, M. Kallweit, K. Rolka & T. Skill (Hrsg.), *Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik: Bd. 9. Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2021: Beiträge zum gleichnamigen Online-Symposium am 12. November 2021 aus Bochum* (S. 223–239). WTM-Verlag.
- Utsch, N. (2023). Praktiken der Aufgabenbearbeitung von Lehramtsstudierenden in der Analysis I. In IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*. WTM. <https://doi.org/10.17877/DE290R-23362>
- Villiers, M. de (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11–18.
- Wille, A. (2017). Imaginary Dialogues in Mathematics Education. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38, 29–55. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0111-7>