FISCHER, Michael & OBERBUCHER, Christoph
Graz

Österreich, ein Land der Extrema

„Ein globales Extremum ist natürlich erst recht auch ein lokales Extremum,“ heißt es bei Heuser (2000, S. 266) und „alles andere würde auch nicht für eine besonders sinnvolle Begriffsbildung sprechen,“ ergänzen Büchter & Henn (2010, S. 257). Trotzdem gilt diese Kernaussage der Analysis-Vorlesung in einer Vielzahl der österreichischen Schulbücher nicht. Ursache sind unterschiedliche Definitionen (Greefrath et al., 2016; Krön, 2019). Greefrath et al. (2016, S. 193) sieht es allgemein als „eine gewinnbringende Übungsaufgabe, die Definitionen von Extremwerten in unterschiedlichen Analysis-Lehrbüchern und Schulbüchern zu untersuchen,“ Humenberger (2015) wiegt die unterschiedliche Definitionen im Kontext von Extremwertaufgaben ab, Krön (2019) hingegen bezeichnet einige auftretende Definitionen schlichtweg als falsch. Es stellt sich daher die zentrale Frage dieses Beitrags:

Inwiefern werden lokale und globale Extrema in österreichischen Schulbüchern voneinander unterschieden, und wie ist eine Trennung mit der zugrunde liegenden (Fach-)Mathematik vereinbar?

Wir präsentieren zur Beantwortung dieser Frage erste Ergebnisse aus einer Schulbuchanalyse, wobei wir im Folgenden Auszüge aus Malle et al. (2019) als Repräsentant einer Klasse von Schulbüchern diskutieren und mit Werken der Analysis und ihrer Didaktik vergleichen.

Der Mathematische Hintergrund

Betrachten wir zunächst zwei mögliche, unterschiedlichen Definitionen, wobei wir die Variablen vereinheitlicht haben. Bei Büchter & Henn (2010, S. 257) heißt es, „Die Funktion f sei in $D \subset \mathbb{R}$ definiert und es sei $p \in D$. Die Stelle p heißt lokale Maximumstelle von f, wenn es eine Umgebung $U_\epsilon = (p-\epsilon, p+\epsilon)$ mit $\epsilon > 0$ gibt, sodass für alle $x \in U_\epsilon \cap D$ gilt $f(x) \leq f(p)$. Dann heißen f lokales Maximum und der Punkt $(p|f(p))$ lokaler Hochpunkt von f.“ Aufgrund der Definition einer Umgebung als offenes, symmetrisches Intervall um p geschnitten mit D kann ein Randpunkt des Intervalls D auch ein lokales Extremum sein.

Demgegenüber besagt die Schulbuchdefinition in Malle et al. (2019, S. 45): „Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Eine Stelle $p \in D$ heißt lokale Maximumsstelle von f, wenn es eine Umgebung $U(p) \subseteq D$ gibt, sodass p Maximumsstelle von f in $U(p)$ ist.“ Es wird, bezugnehmend auf mögliche Extrema am Rand, im Anschluss folgende Bemerkung angefügt (Malle et al., 2019, S. 45): „Unter einer Umgebung $U(p)$ einer Stelle p verstehen wir in

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

diesem Buch ein beliebiges Intervall, welches p als innere Stelle enthält (d.h. p darf keine Randstelle des Intervalls sein). Die Umgebung $U(p)$ erstreckt sich also sowohl links als auch rechts von p, muss aber nicht symmetrisch um p liegen. Ist p eine lokale Extremstelle einer Funktion f, dann muss nach der obigen Definition die Umgebung $U(p)$ ganz im Definitionsbereich D von f liegen. Somit kann in diesem Buch eine Randstelle von D keine lokale Extremstelle (wohl aber eine globale Extremstelle) sein."

Wie ersichtlich ist, liegt der Unterschied nicht direkt in unterschiedlichen Formulierungen von lokalen Extrema, wie als Übung in Greefrath et al. (2016, S. 193) diskutiert, sondern, wie die Bemerkung in Malle et al. (2019) unterstreicht, um eine grundlegend verschiedene Handhabung einer Umgebung U eines Punktes p. Da p laut Malle et al. (2019) ein innerer Punkt der Umgebung $U(p)$ ist, und diese Umgebung vollständig in D enthalten sein muss, lässt sich nach dieser Auffassung keine Umgebung $U(a)$ um den Randpunkt a eines abgeschlossenen Intervalls $D = [a, b]$ mit a als inneren Punkt finden und somit könne $x = a$ keine lokale Extremstelle sein. Dem gegenüber steht die übliche Forderung nach $x \in U(a) \cap D = [a, b] = [a, a + \epsilon)$, sie ist „bei der Definition der lokalen Extremstellen unabdingbar; eine beliebige Funktion muss nicht für jeden Punkt einer Umgebung […] definiert sein" (Büchter & Henn, 2010, S. 257).

Die (Grund-)Vorstellung einer Umgebung tritt im Österreichischen Lehrplan in der 10. Schulstufe zusätzlich im Kontext von Folgen und Grenzwerten auf. Sie wird in der 11. Schulstufe erneut bei einer heuristischen Betrachtung des Differenzialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten gesehen, „man kann sich also unter dem Differentialquotienten an der Stelle x einen Differenzenquotienten in einer sehr kleinen Umgebung von x vorstellen" (Greefrath et al., 2016; Malle et al., 2019, S. 20).

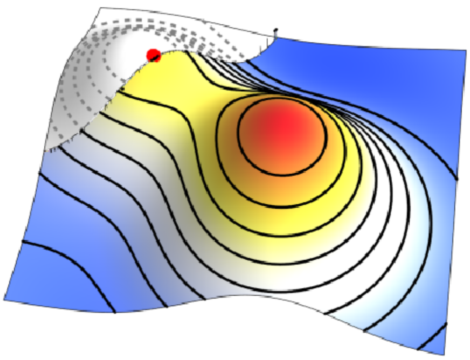
Erste Resultate einer Schulbuchanalyse

Für die Schulbuchanalyse wurde als Samplingeinheit sieben in Österreich zugelassene Reihen von Mathematikschulbüchern für Allgemeinbildende Höhere Schule in einer kategoriengeleiteten Textanalyse analysiert (Mayring & Fenzl, 2019). Dabei wurden Definitionen, Sätze, begriffserklärende Beispiele sowie Merksätze als Textbestandteile festgelegt. Die deduktiven Kategorien wurden in einem top-bottom Ansatz aus der Literatur abgeleitet, bei Sichtung des Materials ergaben sich weitere induktive Kategorien. Auf Basis der Forschungsfrage präsentieren wir im Folgenden Ergebnisse zu Grundvorstellungen, Definitionen und Eigenschaften einer Umgebung sowie lokalen Extrema in einer horizontalen Sichtung des Materials.

Drei Werke w_1, w_2, w_3, definieren als Umgebung ein offenes Intervall mit $p \in (a, b)$, ein Werk w_4 gibt ein beliebiges Intervall mit p als inneren Punkt vor, ein Werk w_5 verlangt ein Intervall um p, dazu ähnlich ein Werk w_6 eine nicht näher definierte Umgebung U in D. Ein Werk w_7 definiert schließlich als Umgebung ein symmetrisches Intervall um p über $[p - \epsilon, p + \epsilon]$, mit $\epsilon > 0$. Darauf aufbauend thematisieren w_1 und w_4, dass Randpunkte mangels Umgebung um p keine lokalen Extrema. Ein Werk w_2 schließt, dass lokale Extrema im inneren von D liegen müssen, aus zwei weiteren Werken w_3, w_7 lässt sich dies nur aus Beispielen und Merksätzen zu globalen Extrema schließen. In zwei Schulbuchreihen w_5, w_6 sind Randextrema auch lokale Extrema.

Diskussion und Ausblick

Basierend auf den Überlegungen im vorigen Abschnitt lassen sich zwei Schulbuchreihen identifizieren, die lokale Extrema am Rand aufgrund einer von der Standard-Literatur abweichenden Auffassung von Umgebungen behandeln, auf die wir nun eingehen. Es gibt viel Literatur zur didaktischen Reduktion von Mathematik für den schulischen Gebrauch. Abweichende Definitionen erschweren in jedem Fall den Übergang von der Schule zur Universität in MINT-Studiengängen.



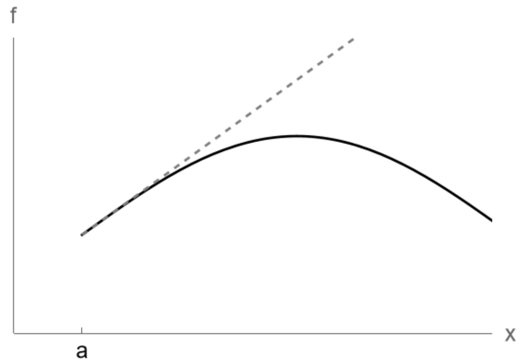


Abb. 1: Links, ein lokales Maximum an der Grenze einer Landschaft. Rechts die Klassifizierung eines lokalen Minimums am Rand mit Hilfe der linearen Approximation.

Die in Malle et al. (2019) präsentierte Auffassung von Umgebungen ist jedoch bereits nicht mit dem schulischen Konzept der Stetigkeit einer Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall vereinbar. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, deren Stetigkeit wir in a untersuchen möchten. Dann bedeutet $\lim_{x \to a} f(\mathrm{x}) = f(a)$, dass sich für $\epsilon > 0$ ein $U_\delta(a)$ finden lässt, mit $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ für alle $x \in U_\delta(a)$ (Hoppe & Kaiser, 2024), nach Malle et al. (2019) lässt sich $U_\delta(a)$ jedoch niemals finden. Des Weiteren lässt sich letztere Definition nicht konsistent in die höhere Mathematik implementieren (Gaunersdorfer, 2025; Krön, 2019). Auch von einem Standpunkt der didaktischen Phänomenologie aus ist letztere Definition nicht nachvollziehbar. Sei beispielsweise in Abbildung 1 links ein Gebirge in Grenznähe gegeben, so ist schwer nachvollziehbar, weshalb der rote Punkt nicht lokal der höchste im zu untersuchenden Gebiet der Landschaft sein soll.

Das thematische Eingehen auf lokale Extrema am Rand eröffnet stoffdidaktisch Möglichkeiten zum Begründen im Analysisunterricht. Häufig wird die erste Ableitung als Hilfsmittel für lokale Extrema im Inneren gesehen, doch greift dies zu kurz. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in a differenzierbar ist mit $f'(a) > 0$, so ist a ein striktes, lokales Minimum von f. Dies folgt auch aus dem lokalen Trennungssatz (Humenberger, 2015) oder geometrisch-intuitiv über die Grundvorstellung der lokalen Linearität in a (Greefrath et al. 2016), siehe Abbildung 1 rechts. Es handelt sich um ein weiteres, sinnvolles Beispiel zum geometrisch-intuitiven Begründen von Aussagen mit Hilfe der Tangentialsteigung (Fischer, 2025). Auf Basis dieser Überlegungen schließen wir uns den Ansichten von Gaunersdorfer (2025) und Krön (2019) an und empfehlen eine Definition, die mit der mathematischen Fachliteratur konsistent ist.

Literatur

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie.* Spektrum Akademischer Verlag.

Fischer, M. (2025). A framework for refutations to recipes and algorithms. *Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. CERME 14, Bozen-Bolzano, Italy.

Gaunersdorfer, A. (2025). Definition von Extremstellen (No. 131; Mathebrief, S. 4). Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Heuser, H. (2000). *Lehrbuch der Analysis*. Vieweg+Teubner Verlag.

Hoppe, H., & Kaiser, J. T. (2024). Grundvorstellungen und Aspekte des Stetigkeitsbegriffs im Übergang von der Schule zur Hochschule. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*. WTM

Humenberger, H. (2015). Die zweite Ableitung bei Extremwertaufgaben – ein hartnäckiges, schulübliches Ritual. *Der Mathematikunterricht*.

Krön, B. (2019). *Analysis in einer Variable für das Lehramt* [Skriptum zur Vorlesung].

Malle, G., Koth, M., Woschitz, H., Malle, S., Salzger, B., & Ulovec, A. (2019). *Mathematik verstehen 7* (1. Auflage). Österreichischer Bundesverlag Schulbuch.

Mayring, P., & Fenzl, T. (2019). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 633–648). Springer