

KLINGBEIL, Katrin & MOONS, Filip
Essen, Utrecht

Variablen verstehen lernen – eine Latente Transitionsanalyse zur Letter-as-Object-Fehlvorstellung

Eine häufige Fehlvorstellung beim Umgang mit Variablen ist die *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung (u.a. Küchemann, 1981), bei der Lernende die Variable als Abkürzung für ein Objekt begreifen. Mithilfe einer Latenten Transitionsanalyse wurden in dieser Studie Antwortmuster von 2220 7./8.-Klässler*innen untersucht, die den SMART-Test "Bedeutung von Variablen erfassen" zur Diagnose eben dieser Fehlvorstellung bearbeitet hatten. Die identifizierten fünf latenten Klassen geben Aufschluss über vorhandene Denkmuster und deren Entwicklung nach vier Wochen Algebra-Unterricht.

Variablen (miss-)verstehen

Um ein umfassendes Verständnis von Variablen aufzubauen, müssen Lernende die verschiedenen Rollen von Variablen erfassen. Variablen können als Platzhalter, Unbekannte, allgemeine Zahl, Variable (im eigentlichen Wortsinn, als (ko-)variierende Größe) oder Parameter auftreten (Arcavi et al., 2017). All diesen Facetten gemein ist, dass die Variable stellvertretend für einen oder mehrere numerische Werte steht. Gerade diese Interpretation als numerischer Wert ist für Lernende zu Beginn häufig schwierig; sie begreifen die Variable stattdessen beispielsweise als Abkürzung für ein Objekt. Ein Beispiel für diese Fehlvorstellung, von Küchemann (1981) als *Letter-as-Object* (LO) bezeichnet, wäre die Interpretation der Gleichung $6e = 12$ als "6 Enten kosten 12 Euro" anstatt "6-mal der Preis einer Ente entspricht 12 Euro". Eine Interpretation der Variable e als "Euro" kann als Subtyp *Letter-as-Unit* (LU) bezeichnet werden. Ein weiterer Subtyp, den Küchemann (1981) identifizierte, ist die *Solution-as-Coefficient*-Fehlvorstellung (SAC). Hierbei interpretieren Lernende die Gleichung als eine Art (abgekürzten) Lösungssatz, indem die Koeffizienten eine (mögliche) Lösung angeben. So wird beispielsweise die Gleichung $35f + 10d = 100$ als Kurzform für "35 Fahrräder und 10 Dreiräder haben zusammen 100 Reifen" angegeben bzw. gelesen, selbst wenn f und d als die Anzahl der Fahr- bzw. Dreiräder definiert wurden.

Um einen tieferen Einblick in das Vorhandensein und die weitere Entwicklung dieser Fehlvorstellungen zu gewinnen, wurde folgende Frage untersucht: Welche latenten Klassen bezüglich der *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung können bei 7./8.-Klässler*innen identifiziert werden und wie entwickeln sich die Schüler*innen bezüglich dieser latenten Klassen während einer vierwöchigen Unterrichtseinheit?

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Methodik

Für diese Studie wurden 103 Lehrkräfte aus sechs Bundesländern gebeten, den SMART-Test "Bedeutung von Variablen erfassen" (siehe Abb. 1) während einer Algebra-Unterrichtseinheit in ihrer 7. oder 8. Klasse einzusetzen – zum ersten Mal nach etwa 1-2 Wochen und zum zweiten Mal nach 4 weiteren Wochen Unterricht. Da der Fokus auf vorhandenen Fehlvorstellungen lag, wurde keine kontrollierte Unterrichtsintervention durchgeführt, sondern den Lehrkräften aufgetragen, die Ergebnisse des SMART-Assessments nach eigenem Ermessen in ihren regulären Unterricht einzubinden. Insgesamt nahmen 2220 Schüler*innen teil (876 aus Klasse 7, 1344 aus Klasse 8), von denen 1219 sowohl Prä- als auch Posttest beantworteten.







Bedeutungs-Items	Additive Items	Proportionale Items
 Enten Lucy hat 6 Enten für insgesamt 12 Euro gekauft. Sie hat folgende Gleichung aufgeschrieben: $6e = 12$. Wofür steht das e in Lucys Gleichung? <input type="checkbox"/> den Preis einer Ente (COR) <input type="checkbox"/> eine Ente (LO) <input type="checkbox"/> Enten (LO) <input checked="" type="checkbox"/> Euro (LU)	 Garten Payam hat für seinen Garten r rote Rosen-Sträucher und l lila Lavendel-Pflanzen gekauft. Ein Rosen-Strauch kostet jeweils 4 €. Eine Lavendel-Pflanze kostet jeweils 5 €. Welche Gleichung gibt an, dass die Pflanzen insgesamt 70 € gekostet haben? <input type="checkbox"/> $4r + 5l = 70$ (COR) <input type="checkbox"/> $r + l = 70$ (LO) <input type="checkbox"/> $10r + 6l = 70$ (SAC)	 Kugelschreiber Kugelschreiber werden in 3er-Packungen verkauft. Sam hat p Packungen gekauft und hat jetzt insgesamt k Kugelschreiber. Wähle die passende Gleichung: <input type="checkbox"/> $3p = k$ (COR) <input type="checkbox"/> $p = 3k$ (LO) <input type="checkbox"/> $p = 3$ (LO) <input type="checkbox"/> $k + p = 4$ (LO) <input type="checkbox"/> $30k = 10p$ (SAC)
 Bausteine Tina hat 9 gleich große Bausteine aufeinander gesteckt und dadurch einen 99 mm hohen Turm gebaut. Sie hat folgende Gleichung aufgeschrieben: $9y = 99$. Wofür steht das y in Tinas Gleichung? <input type="checkbox"/> die Höhe eines Bausteins (COR) <input type="checkbox"/> einen Baustein (LO) <input type="checkbox"/> die Bausteine im Turm (LO) <input type="checkbox"/> Millimeter (LU)	 Räder In einem Geschäft gibt es f Fahrräder (mit jeweils 2 Reifen) und d Dreiräder (mit jeweils 3 Reifen). Welche Gleichung gibt an, dass es in dem Geschäft insgesamt 100 Reifen gibt? <input type="checkbox"/> $2f + 3d = 100$ (COR) <input type="checkbox"/> $f + d = 100$ (LO) <input type="checkbox"/> $35f + 10d = 100$ (SAC)	 Rennstrecke Ein Auto braucht 12 Minuten für eine Runde der Rennstrecke. Ein Rennfahrer fährt in m Minuten r mal die Runde. Wähle die passende Gleichung: <input type="checkbox"/> $12r = m$ (COR) <input type="checkbox"/> $12m = r$ (LO) <input type="checkbox"/> $r = 12$ (LO) <input type="checkbox"/> $5r = 60m$ (SAC)
<input checked="" type="checkbox"/> Korrekt <input type="checkbox"/> LO (Letter-as-Object) <input type="checkbox"/> LU (Letter-as-Unit) <input type="checkbox"/> SAC (Solution-as-Coefficient)		

Abb. 1: Die sechs Multiple-Choice-Items des SMART-Tests "Bedeutung von Variablen erfassen" mit Unterteilung in drei Item-Typen.

Die Antwortmuster der Schüler*innen wurden anschließend mittels latenter Transitionsanalyse (LTA; Collins & Lanza, 2010) untersucht. Dabei wurde der hierarchischen Struktur der Daten durch eine Mehrebenenanalyse Rechnung getragen. Mithilfe von Mplus 8.9 (Muthén & Muthén, 2017) wurden iterativ verschiedene Modelle mit unterschiedlicher Anzahl von latenten Klassen erstellt und verglichen. Das im Folgenden vorgestellte Modell mit fünf latenten Klassen mit angenommener Messinvarianz (d. h. mit denselben latenten Klassen in Prä- und Posttest) wies die besten AIC/BIC-Werte, keine zu kleinen sowie inhaltlich interpretierbare Klassen auf.

Ergebnisse

Abbildung 2 zeigt die identifizierten fünf latenten Klassen mit den sie charakterisierenden Antwortwahrscheinlichkeiten pro Item. Obwohl latente Klassen einer LTA grundsätzlich nicht hierarchisiert sind, sind die latenten Klassen hier aufsteigend nach der Durchschnittswahrscheinlichkeit für korrekte Antworten angeordnet.

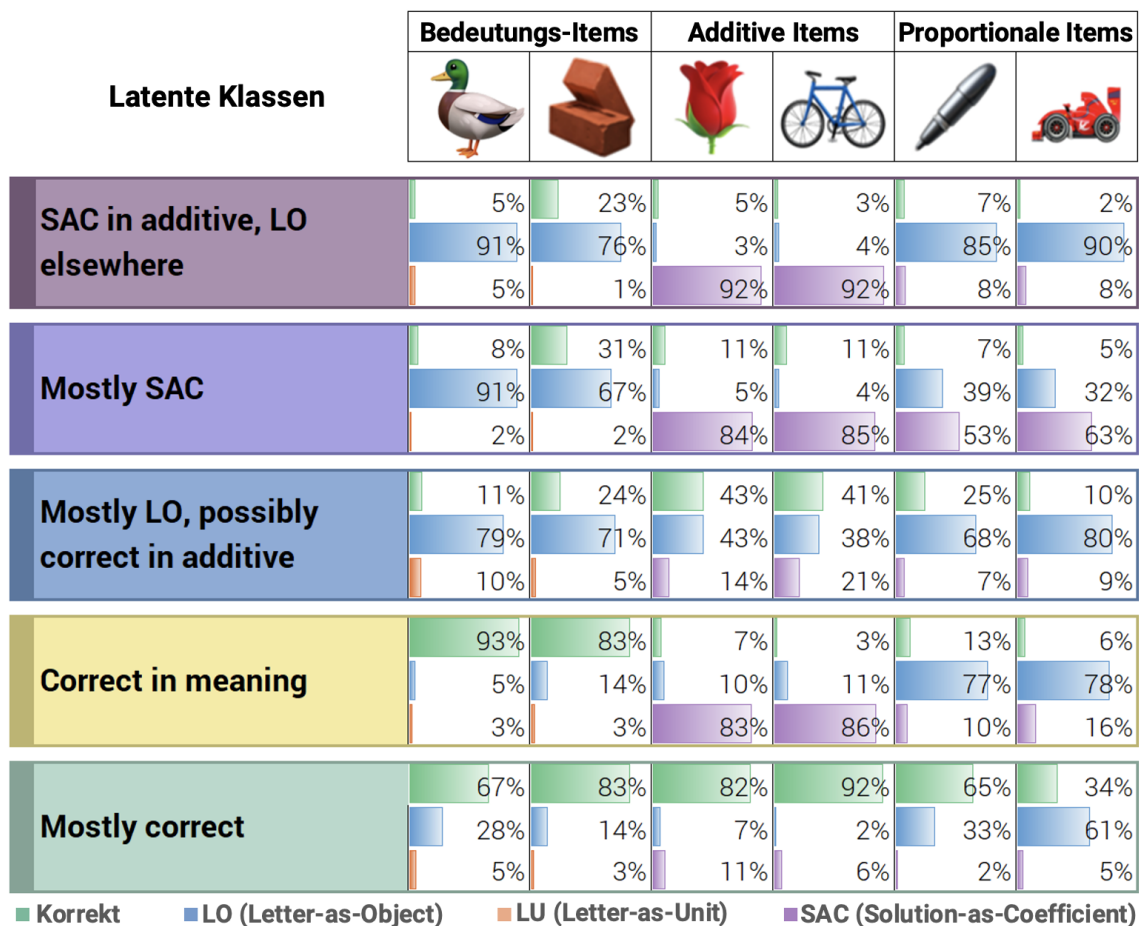


Abb. 2: Latente Klassen mit ihren Antwortwahrscheinlichkeiten je Item.

Prätest	Prävalenz Prä	Posttest				
		1.	2.	3.	4.	5.
1. SAC in additive, LO elsewhere	39.0%	58.2%	0.0%	13.2%	18.6%	10.0%
2. Mostly SAC	10.9%	26.5%	37.6%	12.4%	11.6%	11.9%
3. Mostly LO, poss. corr. in add.	36.3%	9.5%	0.0%	68.6%	1.7%	20.2%
4. Correct in meaning	6.6%	34.7%	0.0%	6.3%	28.3%	30.8%
5. Mostly correct	7.2%	10.5%	0.0%	6.4%	2.6%	80.5%
	Prävalenz Post:	32.1%	4.1%	32.3%	11.2%	20.3%

Tab. 1: Prävalenzen für Prä- und Posttest sowie Transitionswahrscheinlichkeiten von Prä- zu Posttest. Fett gedruckt: Anteil von Schüler*innen, die nicht transitionieren.

Die jeweilige Verteilung der latenten Klassen in Prä- und Posttest kann Tabelle 1 entnommen werden. Außerdem finden sich dort die Wahrscheinlichkeiten für die Transitionen von Prä- zu Posttest.

Diskussion und Ausblick

Grundsätzlich lässt sich erkennen, dass die *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung (LO) bei den untersuchten 7./8.-Klässler*innen äußerst prävalent ist: lediglich 7,2% stimmten im Prätest am besten mit der *Mostly correct*-Klasse überein (was überdies nicht mit einer vollständigen Abwesenheit der Fehlvorstellung gleichgesetzt werden kann). Zwar verdreifacht sich dieser Anteil über vier Wochen beinahe, trotzdem sind es im Posttest nur ein Fünftel aller Schüler*innen, die ein grundsätzliches Verständnis der Bedeutung von Variablen aufweisen. Die beiden häufigsten Klassen (*SAC in additive, LO elsewhere; Mostly LO, possibly correct in additive*) bleiben hingegen weiterhin am stärksten vertreten. Interessant ist, dass *Mostly SAC* stark abnimmt und auch keine Schüler*innen in diese Klasse wechseln. Das deutet daraufhin, dass eine SAC-Interpretation in proportionalen Items nicht unterrichtsbedingt ist, sondern eher als eine vage (alternative) erste Idee in den Unterricht gebracht wird. Prinzipiell unterscheiden sich die Ausprägungen der LO-Fehlvorstellung insbesondere in Hinblick auf das Vorhandensein des Subtyps *Solution-as-Coefficient* (SAC) in additiven Items. Dieser Unterschied bleibt auch über den Verlauf von vier Wochen überwiegend stabil: Nur 6,9% aller Schüler*innen wechseln aus einer der drei SAC-Klassen (*SAC in additive, LO elsewhere; Mostly SAC; Correct in meaning*) zu *Mostly LO, possibly correct* (kein SAC), andersherum sogar nur 4,1%. Dies unterstreicht, dass der Subtyp SAC durchaus verschieden ist von LO und Schüler*innen nicht leicht zwischen ihnen hin- und herwechseln.

Während diese Erkenntnisse einen tieferen Einblick in das Denken von 7./8.-Klässler*innen bezüglich der *Letter-as-Object*-Fehlvorstellung ermöglichen, eröffnen sich gleichzeitig weitere Fragen nach Einflussfaktoren und Unterrichtsempfehlungen, welche in Zukunft untersucht werden sollen.

Literatur

- Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities*. Routledge.
- Collins, L. M., & Lanza, S. T. (2010). *Latent class and latent transition analysis: With applications in the social, behavioral, and health sciences*. Wiley.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Hrsg.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (S. 103–119). John Murray.
- Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (2017). *Mplus user's guide. Eighth edition*. Muthén & Muthén. https://www.statmodel.com/download/usersguide/MplusUserGuide-Ver_8.pdf