Hartwig MEISSNER, Münster

Arithmetikunterricht modernisieren

Summary. *In primary schools today we still teach arithmetic almost like we did 30 years ago when there were no calculators. But paper & pencil skills are not used any longer in daily life. How to modernize our arithmetic teaching? We will discuss three aspects: We need more mental arithmetic, a better number sense and more independence from the calculator. (In addition to this paper there also is a special web page in English:* http://wwwmath1.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/TR.htm).

Zusammenfassung*. Wir unterrichten in der Grundschule auch heute die vier Grundrechenarten praktisch wie vor 30 Jahren, als es noch keine Taschenrechner gab. Aber das Schriftliche Rechnen ist in Alltag und Beruf verschwunden. Wie sollte sich ein moderner Arithmetikunterricht dieser Situation anpassen? Wir diskutieren drei Schwerpunkte: Wir brauchen mehr Kopfrechnen, ein besseres Zahlgefühl und mehr Unabhängigkeit vom Taschenrechner.*

1. Das Problemfeld

In Alltag und Beruf sind einfache Taschenrechner überall griffbereit, ein schriftliches Rechnen gibt es dort praktisch nicht mehr. Wie rechtfertigen wir dann unseren Grundschulkindern gegenüber, dass (laut Schipper 1998, S. 10) "... in den Klassen 3 und 4 ... manchmal bis zu 50% der gesamten Unterrichtszeit dem Einüben der Algorithmen gewidmet wird"?

Zwar sind sich Didaktiker und Schulverwaltungen des Problems bewusst, man vergleiche z.B. die "Rückentwicklung" der Schriftlichen Rechenverfahren im NRW-Lehrplan-Entwurf von 2003 im Vergleich zu 1985, jedoch sind die Schritte nur halbherzig. Wir gehen hier radikaler vor. Wir fordern die Abschaffung der traditionellen schriftlichen Rechenverfahren und statt dessen (realitätsnah) die Zulassung des Taschenrechners ab dem 2. Schuljahr. Natürlich sind diese Forderungen nur sinnvoll, wenn sie eingebettet werden in ein entsprechend angepasstes Curriculum. Wir fordern deshalb gleichzeitig mehr Kopfrechenfertigkeiten und ein besseres Zahlgefühl.

2. Lernpsychologischer Hintergrund

Wir fordern für Beruf und Alltag den Taschenrechner "ordentlich" einzuführen und "überflüssige" Rechenverfahren abzuschaffen, aber gleichzeitig auch, keine Abhängigkeit vom Taschenrechner zu erzeugen. Diese scheinbare Diskrepanz kann nur aufgelöst werden, wenn wir die im Hintergrund ablaufenden mentalen Prozesse genauer analysieren und dann beim Unterricht entsprechend berücksichtigen. Beim Problemlösen arbeiten wir nämlich zweigleisig, spontan, unbewusst und intuitiv in System S1 und parallel dazu analytisch-logisch, reflektierend in System S2, wobei die zugehörigen Vorstellungen sich manchmal ergänzen, aber auch kollidieren können.[1]

S1-Vorstellungen sind schnell und automatisch und brauchen keine großen Anstrengungen oder viel Speicherplatz. Aber sie sind sehr resistent gegenüber Veränderungen. S2-Vorstellungen dagegen sind bewusst, überlegend, langsam und anstrengend, aber relativ flexibel und anpassungsfähig. Um S1-Erfahrungen bewusst zu machen und damit in entsprechend flexiblere S2-Erfahrungen überzuführen sind Diskussionen ein geeignetes Mittel. S2-Erfahrungen dagegen können automatisiert zu S1-Prozessen führen.

Wenn wir im Arithmetikunterricht von "Zahlgefühl" bzw. "number sense" sprechen, so handelt es sich im wesentlichen um S1-Vorstellungen: “Number sense refers to an intuitive feeling for numbers and their various uses and interpretations; an appreciation for various levels of accuracy when figuring; the ability to detect arithmetical errors, and a common sense approach to using numbers. ... Above all, number sense is characterized by a desire to make sense of numerical situations” (Reys 1991). Untersuchen wir also, wo im klassischen Arithmetikunterricht number sense entsteht.

System S1	**Inhalte**	**System S2**
automatisieren	Kopfrechnen	herleiten, reflektierend einüben
"Größen" (Maßzahl mit Einheit)	Zahlraum bis 100	Rechenzahlen, "<" und ">", ...
Stützpunktwissen	Schätzen = verinnerlichtes Handeln: Vergleichen oder Messen	üben
	Zahlraum bis 1 Million	Stellenwert und Ziffernfolgen
	Überschlagen: Runden & rechnen & runden	reflektierend üben
	"geschicktes" Rechnen	üben & begründen
	halbschriftliches Rechnen	herleiten, reflektierend einüben (Zahlbegriff?)
	schriftliche Rechenverfahren	herleiten, reflektierend üben (Arbeiten mit Ziffernfolgen)
"automatisch"	Ergebniskontrolle	per "Auftrag"
Zeichenfolgen tippen	unreflektierter TR-Gebrauch	

Abb. 1. *Klassischer Arithmetikunterricht*

Es fällt auf, dass es im 3. und 4. Schuljahr praktisch keine S1-Aktivitäten gibt, also kann sich ein "Gefühl" für große Zahlen und für Beziehungsgefüge der Form "$a \otimes b = c$" (vier Grundrechenarten) kaum entwickeln.

[1] vgl. Dual Process Theory, siehe z.B. Leron & Hazzan 2006

3. Schriftliches Rechnen abschaffen

Schriftliches Rechnen findet über Schulung und Training im wesentlichen in System S2 statt. S1-Vorstellungen dagegen bauen sich intuitiv auf. Notwendig dafür ist das Sammeln zahlreicher eigener i.a. unbewusster Erfahrungen. Hierfür bietet der Taschenrechner ausgezeichnete Gelegenheiten.

3.1 Zahlgefühl verbessern

Mit dem Taschenrechner lassen sich die vier Grundrechenarten "simulieren". Durch Versuchen und Probieren ähnlich wie am Simulator (Autofahren, Flugzeug steuern, ...) können die Schüler hier das additive bzw. multiplikative Beziehungsgefüge der vier Grundrechenarten intuitiv erforschen ("je-desto-Erfahrungen" bzw. Proportionalität/Antiproportionalität). Die Grundidee dabei ist das sog. *Prinzip der Einbahnstraße* (vgl. Meissner 2003, 2006, 2007). Hiernach werden Aufgaben der Form "$a \otimes \quad = c$" oder "$\quad \otimes b = c$" nicht durch Umformen, sondern durch Raten und Verifizieren mit dem Taschenrechner "gelöst". Sinnvollerweise wählt man dabei für c ein geeignetes Intervall (various levels of accuracy, vgl. Reys).

Wir wollen dies am Beispiel des Taschenrechnerspiels *Zielwerfen* verdeutlichen. In diesem Spiel sind Intervall $[c_1,c_2]$ und Faktor k gegeben. Finde z so, dass das Produkt "$z \times k$" im Intervall $[c_1,c_2]$ liegt.

Beispiel:

$? \xrightarrow{\times 17} [790,810]$

Eingabe	***Anzeige***

Abb. 2: *Finde z so, dass z×17 im Intervall [790,810] liegt.*

Es entstehen typische S1-Probiertabellen, sie zeigen: Die Schüler entwickeln für Zahlen k und z aus dem Hunderter-Raum ein Gefühl für Größenordnungen (gute Startzahlen) und Proportionalität (intuitive Strategien beim Probieren). Ähnliche Ergebnisse erhalten wir über Versuchen und Probieren bei anderen Taschenrechnerspielen.

3.2 Zahlbegriff stärker im Hunderter-Raum verankern

Im Zahlraum bis 100 entwickeln die Schüler umfangreiche S1- und S2-Erfahrungen. Hier lernen sie Kopfrechnen für die vier Grundrechenarten. Um aber für große Zahlen das schriftliche Rechnen abzuschaffen brauchen wir mehr als ein verbessertes Zahlgefühl in den großen Zahlräumen. Im Notfall sollte man auch ohne Taschenrechner zu einem exakten Rechenergebnis kommen können. Dazu muss auch eine Schwerpunktverlagerung beim Zahlbegriff erfolgen. Unser Motto dafür lautet *Große Zahlen klein machen*. Das Rechnen mit großen Zahlen soll ersetzt werden durch das

Rechnen mit Zahlen aus dem Hunderter-Raum. Hierzu interpretieren wir alle großen Zahlen als *Größen* (Maßzahl mit Einheit, ggf. *Zehner*, *Hunderter*, *Tausender*, ... als "Einheit") und spalten sie gedanklich auf in eine kleine Maßzahl mit entsprechender Einheit:

		(a)			(b)			(c)		
	THZE	THZE	.		THZE	.		THZE	.	
3576	3576	3	T		3	T			T	
→		5	H	oder	0	H	oder	30	H	oder ...
		7	Z		57	Z		54	Z	
		6	E		6	E		36	E	

Abb. 3. *Große Zahlen als Größen mit kleiner Maßzahl*

3.4 Einsatz der Taschenrechner

Der Taschenrechner ist im Unterricht stets griffbereit, wie im Alltag. Im wesentlichen gibt es drei Einsatzmöglichkeiten. (Details s. Meissner 2006 und http://wwwmath1.uni-muenster.de/didaktik/u/meissne/WWW/TR.htm)

- *Operator-Aspekt* (Operatoren im Taschenrechner verstecken, raten, anwenden, ... oder Operator-Tabellen analysieren, ergänzen, korrigieren),
- Entwicklung von *number sense* (siehe oben),
- Training von Kopfrechnen durch Wettkämpfe der Form "Taschenrechner gegen Kopfrechner".[2]

Literatur

Leron, U.; Hazzan, O. (2006): The Rationality Debate: Application of Cognitive Psychology to Mathematics Education. Educational Studies 62/2, p. 105-126

Meissner, H. (2003): Constructing Mathematical Concepts with Calculators or Computers. In: Proceedings of CERME 3. Bellaria Italy

Meissner, H. (2006): Taschenrechner in der Grundschule. mathematica didactica, p. 5-25. Franzbecker Verlag, Hildesheim Germany

Meissner, H. (2007): Primary School: Calculators or Paper & Pencil Techniques? In: Proceedings of SEMT 07, Praha Czech Republic

Reys, B. J. (1991): Developing Number Sense in the Middle Grades: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. NCTM, Reston VA, USA

Schipper, W. (1998): Schriftliches Rechnen - ein Fossil mit Zukunft. In: Grundschulzeitschrift, H. 119, p. 10-16

[2] ... mit dem Taschenrechner, "das dauert ja viel zu lange, im Kopf bin ich doch schneller" (Zitat aus Meissner 2006, S. 18).