Renate MOTZER, Augsburg

"Gerechtigkeit" als fächerübergreifendes Thema - mathematische Modellierung der Vergabe von Spenderorganen

Kann die Mathematik helfen, ein Verteilungsproblem gerecht zu lösen? Dieser Frage gingen im Religionsunterricht Schülerinnen der 10. Klasse im Rahmen einer fächerübergreifenden Unterrichtseinheit zur Organspende nach. Es wurde erarbeitet, wie verschiedene Kriterien für die Vergabe eines Spenderorgans in mathematischen Modellen verarbeitet werden können und wie sich unterschiedliche Gewichtungen auf die Auswahl auswirken würden.
Anlass dieser 5 Schulstunden umfassenden Unterrichtsreihe war die Zulassungsarbeit der Studentin Nadine Lamnek. Sie studiert die Fächerkombination Mathematik und katholische Religionslehre für das Lehramt an Realschulen. In ihrer Zulassungsarbeit beschäftigte sie sich mit dem fächerübergreifenden Arbeiten in Mathematik und Religion zum Thema „Gerechtigkeit“. Die Unterrichtsreihe wurde im Rahmen des Religionsunterrichts abgehalten. Das Thema Organspende findet sich dort im Lehrplan der 10. Klasse als ein Aspekt des Themas „Dürfen wir alles, was wir können? – Chancen und Gefahren für ein menschenwürdiges Leben“.

Der mathematische Aspekt dieses Themas wurde eingeleitet durch ein Glücksrad, auf dem 6 Namen standen, die auf eine Spenderniere warten. Die Lehrerin schlug vor, am Glücksrad zu drehen, um den Empfänger zu ermitteln. Der Klasse war schnell klar, dass dieses Verfahren nicht sonderlich geeignet ist. Nun wurde diskutiert, welche Kriterien es geben könne. Dabei wurde herausgestellt, dass es zunächst Kriterien gibt, die darüber entscheiden, ob jemand überhaupt auf eine Warteliste kommt, dazu gehören z.B. medizinische Kontraindikationen (z.B. Tumore und Infektionen) und nichtmedizinische (z.B. die mangelnde Bereitschaft eines Patienten, sich an die Anweisungen des Arztes zu halten).

Für diejenigen, die in eine Warteliste für ein bestimmtes Organ aufgenommen werden, werden dann weitere Kriterien der Allokation (Verteilung) betrachtet. Zunächst muss die Blutgruppe passen. Dann wird das sog. HLA-Match (Histokompatibilitätsantigen) ermittelt: Es gibt die Anzahl der Übereinstimmungen der Gewebetypen zwischen Spender und Empfänger an. Es gibt 6 mögliche Übereinstimmungen. Als nächstes wird die Wahrscheinlichkeit angegeben, dass der Patient jemals wieder ein gutes HLA-Muster erreicht. Hier kann im Unterricht mit der Klasse darüber geredet werden, wie man wohl so eine Wahrscheinlichkeit bestimmt. Wird eine relative Häufigkeit verwendet, die man ermittelt, wenn man mit den Werten von früheren Spenderorganen vergleicht? (Das Material, das die Studentin von Eurotransplant (vgl. [3]) bekam, sagt nichts darüber aus, wie diese Wahrscheinlichkeit ermittelt wird.)

Außerdem werden die Dringlichkeit (Code 4: medizinisch notwendig, Code 2: psychischer Leistungsdruck, Code 1: soziale Indikation) und die Wartezeit (in Jahren) beachtet.

Eurotransplant ermittelt außerdem: Die Entfernung zwischen Spenderregion und Empfängerzentrum und eine Import-/ Export-Bilanz der beteiligten Nationen. Diese beiden Kriterien wurden in der Unterrichtssequenz nicht weiter berücksichtigt.

Der Klasse wurden nun Daten von 6 Personen gegeben, die auf eine Spenderniere warten. Zunächst sollten die Schülerinnen (es handelte sich um eine reine Mädchenklasse) entscheiden, wer in die Warteliste aufgenommen wird. Nach durchaus kontroversen Diskussionen wurden 5 aufgenommen. Für diese 5 Personen stand nun die Frage im Raum, wie die 4 genannten Kriterien gewichtet werden sollten.

Dazu wurden 3 mögliche Modelle vorgestellt:

Die Werte werden **linear** verrechnet und unterschiedlich gewichtet: der Wert für das HLA-Match wird mit 100 multipliziert, bei der Wahrscheinlichkeit wird 100 – 2*Prozentzahl gerechnet, der Code der Dringlichkeit wird mit 50 multipliziert, ebenso die Jahre der Wartezeit. Die Summe der 4 Einzelwerte wird ermittelt. Wer die höchste Summe hat, soll das Organ erhalten. Diese Gewichtungen entsprechen den bei Eurotransplant üblichen.

Später rechneten die Schülerinnen mit anderen Gewichtungen, um die Ergebnisse zu vergleichen. Auffällig war zunächst, dass eine hohe Wahrscheinlichkeit das Punkteergebnis verschlechtert, bei einer Prozentzahl von über 50 würde sogar abgezogen statt addiert werden. Man könnte das Modell auch dahin abändern, dass ab 50 % diese Komponente auf 0 gesetzt wird (ist in der Praxis eher üblich). Inhaltlich wurde diskutiert, warum eine hohe Prozentzahl das Ergebnis verschlechtert: dann hat der Patient eine bessere Chance, jemals wieder ein geeignetes Organ zu bekommen, wenn er dieses nicht bekommt.

Im 2.Modell werden die Werte **potenziert**. Das HLA-Match scheint besonders wichtig: es wird hoch 5 genommen. Bei der Wahrscheinlichkeit soll wieder 100 – 2* Prozentzahl verwendet werden, diesmal wird dieser Wert aber noch hoch 3 genommen (beim Durchrechnen zeigte sich, dass diese Festlegung zu einer zu starken Gewichtung dieses Kriterium führte; auch dies ist eine Erkenntnis, zu der die Schülerinnen selbst kommen sollten). Der Dringlichkeitscode wird hoch 4 gerechnet, die Wartezeit hoch 2.

Man könnte auch noch die potenzierten Werte gewichten. Darauf wird aber zunächst verzichtet, um den Unterschied zwischen den beiden Zugängen: linear gewichtet bzw. potenziert deutlich zu machen.

Später können auch hier die Schülerinnen die Potenzen ändern bzw. sie gewichten.

Aus mathematischer Sicht können Eigenschaften von Potenzfunktionen wiederholt werden, vor allem kann verglichen werden, wie schnell Potenzfunktionen steigen und welchen großen Unterschied es machen kann, wenn die Potenz nur ein bisschen höher gewählt wird.

Als drittes Modell wird ein **Vergleichsmodell** gewählt: bzgl. jeden Kriteriums wird ein Sieger festgestellt. Wer bei mehreren Kriterien Sieger ist, erhält das Organ. Auch hier könnte variiert werden, indem der 2./3. Rang auch noch eine Rolle spielt, entweder nur dann, wenn sonst kein eindeutiger Sieger zu ermitteln ist, oder man gewichtet wiederum nach den Rängen.

Dieses Modell hat den Schülerinnen jedoch nicht so gut gefallen, da es nicht berücksichtigt, wie groß die Abstände zwischen den Patienten sind. Modell 1 oder 2 wurde als gerechter empfunden.

Als die Schülerinnen diese 3 Modelle auf die Daten der 5 Personen anwandten, stellten sie fest, dass nicht immer die gleiche Person die Spenderniere bekommen würde.

In einer weiteren Unterrichtseinheit wurde ihnen nun ein Excel-Datenblatt zur Verfügung gestellt, in das sie die Patientendaten und die Gewichtungen eintragen konnten. Sie konnten nun selbstständig die Gewichtungen verändern und die Auswirkungen auf die Reihenfolge innerhalb der Warteliste untersuchen. Ihre Beobachtungen hielten sie schriftlich fest und diskutierten sie anschließend in der Klasse.

In der anschließenden Stunde wurde Rückblick gehalten. Die Hauptfrage war: ist es sinnvoll, ein mathematisches Modell einzusetzen, wenn doch verschiedene mathematische Modelle zu unterschiedlichen Ergebnissen führen?

Die meisten Mädchen bejahten diese Aussage mit folgenden Argumenten:

Eine Entscheidung zu treffen geht schneller und leichter, wenn man sich im Vorfeld auf ein Modell geeinigt hat und dann im aktuellen Fall nur noch den Listenersten errechnen muss. Man hat konkrete Kriterien, also kaum persönliche Einflüsse und damit eine objektivere Entscheidung. Es ist gerechter als ein persönliches Auswahlverfahren und alle Patienten werden gleich behandelt. Aufgefallen ist den Schülerinnen auch noch, dass beim Vergleichsmodell alle Kriterien gleich gewichtet sind, was als Vorteil, aber auch als Nachteil dieses Modells gewertet werden kann.

Als Nachteile wurden genannt: Je nach Modell ergibt sich ein anderes Ergebnis. In den Modellen kann die Gewichtung verändert werden: wer darf sie im Ernstfall festlegen? Sind die Gewichtungen und die Formel zur Punkteberechnung fest, so entscheidet die Gesamtpunktzahl und nicht mehr die Wichtigkeit eines bestimmten Kriteriums (was im Einzelfall vielleicht doch vordringlich sein könnte). Das Vergleichsmodell wurde als zu einseitig angesehen, ebenso bestimmte Gewichtungen in den vorgegebenen Modellen.

Aufgefallen in dieser Unterrichtsstunde ist, dass viele Schülerinnen nicht von den gegebenen Modellen abstrahieren konnten auf die allgemeine Frage, ob eine mathematische Modellbildung sinnvoll ist. Ihre Antworten bezogen sind häufig auf Details der behandelten Modelle.

Schließlich wurde bei einem Gesamtrückblick auf die Unterrichtseinheit festgestellt, dass die Rolle der Mathematik darin besteht, eine entscheidende Hilfestellung zu geben, denn ohne sie wäre die Verteilung noch ungerechter. Die Rolle der Religion wurde darin gesehen, dass es sich hier um eine Entscheidung über Leben und Tod handelt, dass das Gebot der Nächstenliebe verlangt, dass man denen hilft, die auf ein Spenderorgan angewiesen sind, und dass die Ebenbildlichkeit Gottes, die für jeden Menschen gilt, fordert, dass alle den gleichen Anspruch auf Hilfe haben und die Verteilung gerecht sein muss.

Weiterhin wurde von den Schülerinnen eingebracht: Je mehr Menschen Organe spenden, desto weniger Probleme gibt es bei der Verteilung und desto geringer ist auch das Risiko von Organhandel.

Dass die Mathematik Helferin sein kann bei der Frage nach einer gerechten Verteilung kann auch im Zusammenhang mit Wahlsystemen erörtert werden. Der Unmöglichkeitssatz von Arrow kann hier die Grenzen dessen, was die Mathematik für die Gerechtigkeit beitragen kann, sehr gut aufzeigen. (vgl. [1]). Eine Hinführung zum Baumdiagramm in der Stochastik kann Frage sein, wie der Gewinn bei einem „abgebrochenen Spiel" gerecht verteilt werden kann (vgl. [2]).

Literatur:

[1]: Meyer, J.: Paradoxien bei direkten Wahlen, Math. Lehren, No. 88, 50-54 (1998)

[2]:http://www.learn-line.nrw.de/angebote/selma/foyer/projekte/hennproj/henn2/ Stochastische_Modellbildung_07.htm

[3]: http://www.eurotransplant.nl/