Untere Schranken für die Immersionsdimension homogener Räume

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Mathematik
der Universität Dortmund
vorgelegt im Juni 1998
von Markus Walgenbach

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es ist ein altes Problem der Differentialtopologie, die Immersionsdimension einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit X zu bestimmen. Die Immersionsdimension ist die kleinste ganze Zahl j, so daß X in einen euklidischen Raum der Dimension j immersiert werden kann.

Über die projektiven Räume gibt es eine Vielzahl an Ergebnissen ([Ati62], [San64], [AGM65], [Fed66], [MM67], [Mil67], [Jam71], [Ste71], [SS78], [DM77], [DM79], [Cra91], [Dav93]).

Eine für alle kompakten glatten Mannigfaltigkeiten gültige, nur von der Dimension der Mannigfaltigkeit abhängige obere Schranke für die Immersionsdimension hat Cohen in [Coh85] angegeben. Diese obere Schranke ist insofern scharf, als es zu jeder natürlichen Zahl $d > 1$ eine kompakte glatte d-dimensionale Mannigfaltigkeit gibt, deren Immersionsdimension gleich der in [Coh85] angegebenen oberen Schranke ist.

Für spezielle homogene Räume haben mehrere Autoren weitere obere Schranken angegeben.

Tornehave berechnet in [Tor68] eine obere Schranke für die Immersionsdimensionen von Nebenklassenräumen bezüglich eines Zentralisators eines Torus. Für viele Fahnenmannigfaltigkeiten hat Lam in [Lam75] kleinere obere Schranken bestimmt (vgl. auch [Hil82b]). Als wesentliches Hilfsmittel benutzen alle Autoren den Immersionssatz von Hirsch ([Hir59]).

Zur Ermittlung von unteren Schranken für die Immersionsdimension liefern unter anderem die Ganzzahligkeitssätze von Atiyah und Hirzebruch

([AH59]) und Mayer ([May65]) geeignete Mittel. Durch ihre Anwendung haben Sugawara ([Sug79]), Paryjas ([Par88]) und Mayer ([May97], [May98]) untere Schranken für die Immersionsdimension von Graßmann-Mannigfaltigkeiten bestimmt. Durch andere Methoden haben Hoggar ([Hog71]), Oproiu ([Opr76], [Opr81]), Ilori ([Ilo79]), Hiller und Stong ([HS81]), Markl ([Mar88]) und Tang ([Tan93a], [Tan93b], [Tan95]) sowie Connell ([Con74]) Nicht–Immersionssätze für Graßmann-Mannigfaltigkeiten beziehungsweise für niedrig–dimensionale komplexe Fahnenmannigfaltigkeiten bewiesen.

Für eine kompakte Lie-Gruppe G und eine abgeschlossene Untergruppe U von G lassen sich viele topologische Invarianten des homogenen Raums G/U durch die Strukturdaten der Lie-Gruppen G und U ausdrücken. Beispiele für solche Räume sind die projektiven Räume und allgemeiner die Fahnenmannigfaltigkeiten.
Bereits 1958 waren wesentliche Zusammenhänge zwischen den topologischen Invarianten und diesen Strukturdaten bekannt und in der grundlegenden Artikelreihe „Characteristic classes and homogenous spaces“ von Borel und Hirzebruch ([BH58], [BH59], [BH60]) veröffentlicht worden. In ihr werden insbesondere das getwistete Todd-Geschlecht und das ungetwistete $\hat{A}$-Geschlecht berechnet und die Frage nach der Existenz von komplexen, fast komplexen und Spin-Strukturen auf G/U beantwortet.
Seitdem sind eine Vielzahl von weiteren Ergebnissen, etwa über die Signatur ([Sha79], [HS90], [BMP90], [Slo92]), gewonnen worden.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, mit Hilfe der Lie-Gruppen-Invarianten von G und U Aussagen über charakteristische Zahlen zu machen, die im Zusammenhang mit der Immersionsdimension von G/U stehen.
Im ersten Kapitel werden bekannte Immersions- und Nicht-Immersionssätze zusammengestellt und die zu ihrer Formulierung nötigen Objekte wie das Hilbert–Polynom eingeführt. Anschließend werden (virtuelle) Differentialope-

ratoren definiert, deren Indizes in speziellen Fällen gleich dem Wert eines Hilbert–Polynoms an einer ganzzahligen Stelle sind.
Im zweiten Kapitel werden Ergebnisse aus der Struktur- und Darstellungstheorie kompakter Lie–Gruppen sowie einige Beziehungen zwischen der topologischen Struktur eines homogenen Raumes und der algebraischen Struktur der Lie–Gruppen vorgestellt.
Das dritte Kapitel dient dazu, für homogene Räume die Indizes der im ersten Kapitel eingeführten Differentialoperatoren zu berechnen. Das Ergebnis drückt den Index durch algebraische Invarianten von Lie–Gruppen aus.
Im ersten Abschnitt des vierten Kapitels werden Identitäten und Abschätzungen zusammengetragen, die bei den Anwendungen der bisherigen Ergebnisse nützlich sind.
In den weiteren fünf Abschnitten des vierten Kapitels werden untere Schranken für die Immersionsdimensionen von (komplexen, quaternionalen bzw. orientierten reellen) Fahnenmannigfaltigkeiten sowie der Mannigfaltigkeiten $Sp(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ bzw. $SO(2n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ bestimmt.
Im Anhang findet man einige Tabellen, in denen für konkrete homogene Räume die ermittelten unteren Schranken den bekannten oberen Schranken gegenübergestellt werden.

Herrn Professor Dr. Karl Heinz Mayer danke ich für zahlreiche nützliche Hinweise und viele anregende Diskussionen, mit denen er die vorliegende Arbeit unterstützte und förderte.

Kapitel 1

Das Hilbert–Polynom

1.1 Die $\hat{A}$–Klasse und das Hilbert–Polynom

In diesem Kapitel sei X eine kompakte zusammenhängende differenzierbare orientierte Mannigfaltigkeit von gerader Dimension $2n$ mit Pontrjaginschen Klassen $p_i(X) \in H^{4i}(X;\mathbb{Z})$ und Fundamentalklasse $[X]$.

$K(X)$ sei der K–Ring von X.

Ist A ein kommutativer Ring mit 1, so sei $H^*(X;A)$ der singuläre Kohomologiering von X mit Koeffizienten in A.

Ferner seien $ch : K(X) \to H^*(X;\mathbb{Q})$ der Chern–Charakter
und $ch(X) \subset H^*(X;\mathbb{Q})$ das Bild von $K(X)$ unter ch.

Für ein Element $z = \sum_{j=0}^{\infty} z_{2j} \in H^*(X;\mathbb{Q})$ mit $z_{2j} \in H^{2j}(X;\mathbb{Q})$ sowie eine rationale Zahl $t \in \mathbb{Q}$ sei $z^{(t)} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z_{2j} t^j$.

Satz 1.1
Ist $t \in \mathbb{Z}$ und $z \in ch(X)$, so ist $z^{(t)} \in ch(X)$.

Beweis: vgl. [AH59], p.387. $\square$

Definition 1.2
Wir setzen

$$\hat{\mathcal{A}}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{A}_j \left(p_1(X), \ldots, p_j(X)\right),$$

wobei $\left\{\hat{A}_j\right\}$ *die multiplikative Sequenz zur Potenzreihe* $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{z}}{\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{z}\right)}$ *ist.*

$\hat{\mathcal{A}}(X)$ heißt die $\hat{A}$–Klasse von X.
Für alle $d \in H^2(X;\mathbb{Q})$ und $z \in H^*(X;\mathbb{Q})$ sei

$$\hat{A}\left(X, d, z\right) = \left(z \cdot e^d \hat{\mathcal{A}}(X)\right)[X]. \quad \square$$

Satz und Definition 1.3
Für $d \in H^2(X;\mathbb{Q})$ und $z \in ch(X)$ ist

$$H(t) = \hat{A}\left(X, \frac{d}{2}, z^{(t)}\right)$$

ein Polynom in t vom Grad kleiner oder gleich n mit rationalen Koeffizienten.
H wird das zu d und z assoziierte Hilbert–Polynom von X genannt. $\square$

Bemerkung 1.4
Ist $t \in \mathbb{Z}$, $d \in H^2(X;\mathbb{Z})$ und $d \equiv w_2(X)$ mod 2, so ist $H(t)$ ganzzahlig.

Beweis: vgl. [AH59], p.388. $\square$

1.2 Immersions- und Nicht-Immersionssätze

Die Bedeutung des Hilbert-Polynoms für das Immersionsproblem liegt in dem folgenden Ganzzahligkeitssatz (vgl. [May65]):

Satz 1.5 (Mayer)
Es sei X eine $2n$–dimensionale kompakte differenzierbare orientierte Mannigfaltigkeit.
H sei das zu $d \in H^2(X;\mathbb{Z})$ und $z \in ch(X)$ assoziierte Hilbert–Polynom.
Falls X in $\mathbb{R}^{2n+k}$ mit $k \in \{2s, 2s+1\}$ immersiert werden kann, so ist $2^{n+s}H(\frac{1}{2})$ ganzzahlig.
Insbesondere kann unter diesen Voraussetzungen X nicht in einen euklidischen Raum der Dimension $-2\nu_2(\big(H(\frac{1}{2})\big) - 1$ immersiert werden.

Dabei verwenden wir die folgende Bezeichnung:

Bezeichnungen 1.6
Für $q \in \mathbb{Q}$ sei $\nu_2(q)$ der Exponent des Primfaktors 2 in der Primfaktordarstellung von q.

Bemerkung 1.7
Der Ganzzahligkeitssatz in [May65] umfaßt zudem die folgende Nicht–Einbettungsaussage: Falls X in $\mathbb{R}^{2n+k}$ mit $k \in \{2s, 2s+1\}$ eingebettet werden kann, so ist $2^{n+s-1}H(\frac{1}{2})$ ganzzahlig. Er beinhaltet außerdem Verschärfungen für den Fall, daß $z \in chO(X)$ oder $z \in chSp(X)$ gilt. $\square$

★

Obere Schranken für die Immersionsdimension liefern die folgenden Theoreme:

Theorem 1.8 (Cohen)
Es sei X eine d–dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit $d > 1$. Dann ist X immersierbar in einen euklidischen Raum der Dimension $2d - \alpha(d)$. Dabei ist $\alpha(d)$ gleich der Anzahl der Ziffer 1 in der Binärdarstellung von d.

Beweis: [Coh85].

Bemerkung 1.9
Dieses Ergebnis ist scharf in dem Sinn, daß es zu jeder natürlichen Zahl $d > 1$ eine d–dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit X gibt, deren Immersionsdimension gleich $2d - \alpha(d)$ ist. (vgl. [Coh85]. p.238) □

Für homogene Räume hat Tornehave ([Tor68]) zum Teil kleinere obere Schranken für die Immersionsdimension gefunden:

Satz 1.10
Es sei G eine kompakte Lie–Gruppe und Ad die adjungierte Darstellung von G auf der reellen Lie–Algebra $\mathfrak{g}_0$ von G. Wenn U der Zentralisator $Z(S)$ einer toralen Unterguppe S von G und die Dimension des Zentrums von U gleich s ist, dann ist G/U immersierbar in einen euklidischen Raum der Dimension $dim(\mathfrak{g}_0) - s$.

Beweis: vgl. [Sch86], Prop.4.

Bemerkung 1.11

(i) Für die Bezeichnungen vgl. Kapitel 2.

(ii) Lam hat in [Lam75] weitere Ergebnisse für reelle und quaternionale Fahnenmannigfaltigkeiten erzielt. Für die genauen Aussagen vgl. die Bemerkungen 4.26 und 4.34. □

Die Beweise der obigen Sätze basieren auf den folgenden Ergebnissen von Hirsch ([Hir59]):

Theorem 1.12 (Hirsch)
Es sei X eine d–dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Falls ein reelles k–dimensionales Vektorraumbündel η über X existiert, so daß $k \geq 1$ gilt und $T(X) \oplus \eta$ trivial ist, so kann X in einen euklidischen Raum der Dimension $d + k$ immersiert werden.

Beweis: vgl. [Tor68], p.24. $\square$

Theorem 1.13 (Hirsch)
Es sei X eine d–dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit. Falls X in einen euklidischen Raum der Dimension $d + k + r$ immersiert werden kann, so daß das Normalenbündel ein triviales r–dimensionales Unterbündel enthält, so kann X in einen euklidischen Raum der Dimension $d+k$ immersiert werden.

Beweis: vgl. [Hir59], p.269. $\square$

1.3 Die Beschreibung des Hilbert–Polynoms mit Differentialoperatoren

In diesem Abschnitt wollen wir Ergebnisse aus [May65] und [MS73] vorstellen. Sie werden es uns erlauben, Hilbert-Polynome an der Stelle $\frac{1}{2}$ auszuwerten.

Bezeichnungen 1.14
Für natürliche Zahlen k, n sei $G(2n, 2, k) \subset Spin(2n + 2 + k)$ das Urbild von $SO(2n) \times SO(2) \times SO(k) \subset SO(2n + 2 + k)$ unter der kanonischen zweiblättrigen Überlagerungsabbildung $\lambda : Spin(2n+2+k) \to SO(2n+2+k)$.

Satz 1.15
Es sei X eine $2n$–dimensionale kompakte orientierte differenzierbare S^1–Mannigfaltigkeit. Die Fixpunktmenge Y der S^1-Operation sei endlich.
Zusätzlich seien ein äquivariantes komplexes eindimensionales Geradenbündel E über X, ein äquivariantes r-dimensionales komplexes Vektorraumbündel D und ein äquivariantes k-dimensionales reelles Vektorraumbündel F über X gegeben.
Ferner seien $c_1(E) \equiv w_2(F) + w_2(X) \mod 2$ und F als orientiert vorausgesetzt. Dann gilt:
$T(X) \oplus E \oplus F \oplus D$ ist ein Vektorraumbündel mit Strukturgruppe $SO(2n) \times SO(2) \times SO(k) \times U(r)$. $\mathcal{P}$ sei das zugehörige Prinzipalbündel. Auf $\mathcal{P}$ existiert eine S^1-Aktion, die die S^1-Aktion auf $T(X) \oplus E \oplus F \oplus D$ induziert.
Ferner existiert ein Prinzipalbündel $\mathcal{Q}$ über X mit Gruppe $G(2n, 2, k)$ und eine zweiblättrige Überlagerungsabbildung $\kappa : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$, so daß für alle $(q, g_1, g_2) \in \mathcal{Q} \times G(2n, 2, k) \times U(m)$ die Identität $\kappa\,(q \cdot (g_1, g_2)) = \kappa(q) \cdot (\lambda(g_1), g_2)$ gilt.
Wenn zusätzlich die Voraussetzung $(*)$ erfüllt ist, daß es auf $\mathcal{Q}$ eine S^1–Aktion gibt, die die S^1–Aktion auf $\mathcal{P}$ induziert, so existiert ein äquivari-

anter elliptischer Differentialoperator erster Ordnung auf X*, dessen Index* $\Gamma(X,E,F,D) \in R(S^1)$ *die folgenden Eigenschaften hat:*

(i) $\Gamma(X,E,F,D)(1)$

$$= (-1)^n 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(e^{\frac{1}{2}c_1(E)} ch(D) \left(\prod_i \cosh\left(\frac{y_i}{2}\right)\right) \hat{\mathcal{A}}(X)\right) \Big[X\Big].$$

Dabei ist $p(F) = \prod_i (1+y_i^2)$ *die totale Pontrjaginsche Klasse von* F*.*

(ii) Für alle Elemente g *einer geeigneten dichten Teilmenge von* S^1 *gilt:*

$$\begin{aligned} &\Gamma(X,E,F,D)(g) \\ &= \sum_{y\in Y} \Bigg(2^{l(y)} g^{\frac{1}{2}\gamma(y)} \cdot \sum_{\rho=1}^{r} g^{\mu_\rho(y)} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \left(g^{-\frac{1}{2}m_\nu(y)} - g^{\frac{1}{2}m_\nu(y)}\right)^{-1} \\ &\qquad \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \left(g^{\frac{1}{2}\beta_\sigma(y)} + g^{-\frac{1}{2}\beta_\sigma(y)}\right) \hat{\mathcal{A}}(\{y\})\Bigg) \Big[\{y\}\Big]. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir für einen Fixpunkt $y \in Y$ *die Drehzahl der komplexen Darstellung* E_y *von* S^1 *mit* $\gamma(y)$*, die Drehzahlen der komplexen Darstellung* D_y *von* S^1 *mit* $\mu_1(y),\dots,\mu_r(y)$*, die positiven Drehzahlen der reellen Darstellung* $T_y(X)$ *von* S^1 *mit* $m_1(y),\dots,m_n(y)$ *und die positiven Drehzahlen der reellen Darstellung* F_y *von* S^1 *mit* $\beta_1(y),\dots,\beta_s(y)$*. Ferner trete die triviale eindimensionale reelle Darstellung mit der Vielfachheit* $2l(y)$ *oder* $2l(y)+1$ *als Unterdarstellung in* F_y *auf. Alle Drehzahlen mögen entsprechend ihren jeweiligen Vielfachheiten gezählt werden. Stimmt die Orientierung von* $T_y(X)$*, bezüglich der alle Drehzahlen von* $T_y(X)$ *positiv sind, mit der von der orientierten Mannigfaltigkeit* X *induzierten Orientierung von* $T_y(X)$ *überein, so sei der Punkt* $\{y\}$ *positiv orientiert, anderenfalls negativ.*

Es ist zu beachten, daß wegen der vorausgesetzten Endlichkeit der Fixpunktmenge die Darstellungen $T_y(X)$ *keine trivialen Unterdarstellungen besitzen. Also besitzt* $T_y(X)$ *eine komplexe Struktur, so daß alle*

Drehzahlen bezüglich dieser komplexen Struktur positiv sind. Die Orientierung von $\{y\}$ sei durch diese komplexe Struktur induziert.

Bemerkung 1.16

(i) *Die Zusatzannahme $(*)$ garantiert, daß die rechte Seite der Formel in (ii) eine meromorphe Abbildung in g beschreibt. Wegen der Stetigkeit der linken Seite in 1 ist 1 eine hebbare Singularität dieser meromorphen Abbildung, und der uns interessierende Ausdruck $\Gamma(X, E, F, D)(1)$ ist durch eine entsprechende Grenzwertbildung bestimmbar.*

(ii) *Ist die Zusatzannahme $(*)$ nicht erfüllt, so existieren auf X und den Bündeln E, F, G S^1–Aktionen, so daß diese die Zusatzannahme $(*)$ erfüllen und alle Drehzahlen gegenüber den ursprünglichen verdoppelt werden. (vgl. [AH70], Prop.2.1 oder [Sch72], Satz (2.6)).*

Insbesondere läßt sich auch in diesem Fall $\Gamma(X, E, F, D)(1)$ als Grenzwert des Terms in (ii) (mit den Daten der ursprünglichen S^1–Aktion) berechnen.

Bemerkung 1.17

(i) *Sind E, F, D virtuelle äquivariante Bündel, d.h. beliebige Elemente aus $K_{S^1}(X)$ bzw. $KO_{S^1}(X)$, die die entsprechenden Voraussetzungen des Satzes erfüllen, so liefert der obige Satz einen äquivarianten „virtuellen“ Differentialoperator, für dessen formalen Index die Aussagen des Satzes gelten.*

(ii) *Ist $F = 0$ und ersetzen wir D durch $\psi_t(D)$, wobei t eine ganze Zahl und ψ_t die Adams-Operation ist, so gilt*

$$\begin{aligned}\Gamma(X, E, F, \psi_t(D))(1) &= (-1)^n \left(e^{\frac{1}{2}c_1(E)} ch(\psi_t(D)) \hat{\mathcal{A}}(X)\right) \Big[X\Big] \\ &= (-1)^n \left(e^{\frac{1}{2}c_1(E)} ch(D)^{(t)} \hat{\mathcal{A}}(X)\right) \Big[X\Big] \\ &= (-1)^n \hat{A}\left(X, \frac{c_1(E)}{2}, ch(D)^{(t)}\right) \\ &= (-1)^n H(t).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet H das zu $c_1(E)$ und $ch(D)$ assoziierte Hilbert-Polynom. $\square$

Kapitel 2

Homogene Räume

2.1 Grundlagen

Satz und Definition 2.1

Es sei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe und U eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von G.
Die Menge der Linksnebenklassen von G modulo U bezeichnen wir mit $G/U = \{gU \mid g \in G\}$.
Wir versehen G/U mit der Quotiententopologie und der eindeutig bestimmten $\mathcal{C}^\infty$–differenzierbaren Struktur, so daß die kanonische Projektion $\pi : G \to G/U$ eine glatte Abbildung und G/U eine Quotientenmannigfaltigkeit bezüglich π ist.
Eine auf diese Weise konstruierte Mannigfaltigkeit heißt ein homogener Raum. (vgl. [BD85], I(4.3)) $\square$

Satz 2.2

$(G, G/U, \pi)$ ist ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe U. (vgl. [BD85], I(4.3)) $\square$

2.2 Lie-Gruppen

Die topologische Struktur von homogenen Räumen hängt eng mit den algebraischen Eigenschaften der beteiligten Lie–Gruppen zusammen. Deshalb werden wir in diesem Abschnitt wichtige Resultate aus der Darstellungstheorie kompakter Lie–Gruppen präsentieren. Die Ergebnisse sind in den meisten Lehrbüchern über Darstellungstheorie, etwa in [Ada69], [BD85], [FH96] oder [Kna96], nachzuschlagen.

In diesem Abschnitt sei G als eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe mit Neutralelement e vorausgesetzt.

Satz und Definition 2.3
$T_e(G)$ trägt die Struktur einer reellen Lie–Algebra und heißt die Lie–Algebra $\mathfrak{g}_0$ von G (vgl. [Kna96], p.3). Ihre Komplexifizierung $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}$.
Es existiert eine natürliche $\mathcal{C}^\infty$–Abbildung $\exp : \mathfrak{g}_0 \to G$ mit $\exp(0) = e$ und $T_0(\exp) = id : T_0(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$. $\exp$ heißt die Exponentialabbildung von G. (vgl. [Kna96], p.49) $\square$

Satz 2.4
Ist H eine weitere (nicht notwendig zusammenhängende) Lie–Gruppe und $\theta : G \to H$ ein Lie–Gruppen–Homomorphismus, so ist $T_e(\theta)$ ein Lie–Algebren–Homorphismus.
Ist $\theta' : G \to H$ ein weiterer Lie–Gruppenhomorphismus mit $T_e(\theta) = T_e(\theta')$, so ist $\theta = \theta'$.

Beweis: vgl. [Ada69], 1.7 und 2.17.

Definition 2.5
Eine endlich–dimensionale komplexe Darstellung von G ist ein Paar (V, Φ), bestehend aus einem endlich–dimensionalen komplexen Vektorraum V und

einem stetigen Homomorphismus $\Phi : G \to Aut(V)$. V heißt der Darstellungsraum dieser Darstellung.

Wenn wir Mißverständnisse ausschließen können, bezeichnen wir die Darstellung einfach mit V und das Element $\Phi(g)(v)$ mit $g(v)$ oder gv.

Entsprechend ist der Begriff einer reellen oder quaternionalen Darstellung von G definiert. $\square$

Definition 2.6

Eine endlich–dimensionale komplexe Darstellung einer komplexen Lie–Algebra $\mathfrak{a}$ ist ein Paar (V, φ), bestehend aus einem endlich–dimensionalen komplexen Vektorraum V und einem Lie–Algebra–Homomomorphismus $\varphi : \mathfrak{a} \to End(V)$. V heißt der Darstellungsraum dieser Darstellung.

Wenn wir Mißverständnisse ausschließen können, bezeichnen wir die Darstellung einfach mit V.

Entsprechend ist der Begriff einer reellen oder quaternionalen Darstellung von $\mathfrak{a}$ definiert. $\square$

Bemerkung 2.7

Auf natürliche Art und Weise sind Begriffe wie „unitäre Darstellung“, „Irreduzibilität von Darstellungen“ und „Invarianz von Unterräumen“ sowie funktorielle Konstruktionen von Darstellungen definiert. $\square$

Beispiel 2.8

Die Konjugationsabbildung $A : G \to Aut(G)$ mit $A(g)(h) = g^{-1}hg$ induziert reelle Darstellungen Ad von G und ad von $\mathfrak{g}_0$ auf $\mathfrak{g}_0$ sowie eine komplexe Darstellung ad von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{g}$. Diese heißen die adjungierten Darstellungen von G. (vgl. [Ada69], 1.10) $\square$

Wegen der Kompaktheit von G gilt der folgende Satz:

Satz 2.9

(i) *Ist (V, Φ) eine endlich–dimensionale komplexe oder reelle Darstellung von G, so existiert auf V eine euklidische Struktur, so daß (V, Φ) unitär ist.*

(ii) *Ist V eine endlich–dimensionale komplexe Darstellung von G, so existieren invariante Unterräume $V_1, \dots, V_s$ von V, so daß $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ gilt und die Darstellungen $V_1, \dots, V_s$ irreduzibel sind.*

Beweis: vgl. [Ada69], 3.20. □

Definition 2.10

Auf der durch die Menge der irreduziblen Darstellungen von G erzeugten frei abelschen Gruppe läßt sich mit Hilfe des Tensorprodukts eine Ringstruktur definieren. Dieser Ring heißt der (reelle beziehungsweise komplexe) Darstellungsring von G und wird mit $R_{\mathbb{R}}(G)$ beziehungsweise $R(G) = R_{\mathbb{C}}(G)$ bezeichnet. □

Satz und Definition 2.11

Für eine endlich–dimensionale komplexe Darstellung (V, Φ) von G defininieren wir eine Abbildung $\chi_V = \chi_\Phi : G \to \mathbb{C}$ durch $\chi_V(g) = spur(\Phi(g))$. χ_V heißt der Charakter von (V, Φ) und hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\chi_V(e) = dim_{\mathbb{C}} V$.

(ii) *χ_V ist stetig und konstant auf den Konjugationsklassen von G. Eine solche Abbildung heißt Klassenfunktion.*

(iii) $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ *für alle* $g \in G$.

(iv) χ_V *definiert einen injektiven Ringhomomorphismus*

$$\chi : R(G) \to \mathcal{CL}(G) = \{f \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C}) \mid f \text{ ist Klassenfunktion}\}.$$

Das Bild von χ *heißt der Charakter-Ring von* G*. Auch dieser wird mit* $R(G)$ *bezeichnet.*

Beweis: vgl. [Ada69], 3.32. □

★

Die Darstellungstheorie toraler Gruppen ist besonders einfach:

Satz 2.12
Es sei $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ *der* k*–dimensionale Standard–Torus. Dann gilt:*

(i) T^k *ist monogenisch, d.h.* T^k *besitzt ein erzeugendes Element.*

(ii) Ist V *eine irreduzible komplexe Darstellung von* T^k*, so ist* V *eindimensional.*

(iii) Ist $(\mathbb{C}, \Phi)$ *eine komplexe Darstellung von* T^k*, so ist* Φ *von der Form* $\Phi([x_1, \ldots, x_k])(z) = e^{2\pi i(n_1x_1+\ldots+n_kx_k)}z$*, wobei* $n_1, \ldots n_k$ *ganze Zahlen sind.*

(iv) Es sei ρ_j *die durch* $\rho_j([x_1, \ldots, x_k])(z) = e^{2\pi i(x_j)}z$ *gegebene eindimensionale komplexe Darstellung von* T^k*. Dann ist* $R(T^k)$ *der Ring der endlichen Laurent–Reihen in* $\rho_1, \ldots, \rho_k$*.*

(v) Ist V *eine irreduzible reelle Darstellung von* T^k*, so ist* V *entweder eindimensional und trivial oder die Reellifizierung einer nicht–trivialen komplexen irreduziblen Darstellung.*

Beweis: vgl. [Ada69], 4.3, 3.71, 3.76, 3.77, 3.78. □

★

Zur Klassifikation der Darstellungen von kompakten Lie–Gruppen benutzt man die Kenntnisse über die Darstellungen der maximalen abelschen Untergruppen von G. Diese sind toral wegen des folgenden Satzes:

Satz 2.13

Eine kompakte, zusammenhängende, abelsche Lie–Gruppe ist ein Torus.

Beweis: vgl. [Ada69], 2.32. $\square$

Definition 2.14

Ein maximaler Torus in G ist eine torale Untergruppe T, so daß für jede torale Untergruppe S von G mit $T \subset S$ die Gleichheit $T = S$ gilt. $\square$

Der folgende Satz liefert einen Überblick über die Eigenschaften maximaler Tori:

Satz und Definition 2.15

(i) *Es existiert ein maximaler Torus in G. Jede torale Untergruppe ist in einem maximalen Torus enthalten.*

(ii) *Je zwei maximale Tori von G sind als Untergruppen von G konjugiert. Insbesondere haben zwei maximale Tori von G dieselbe Dimension. Diese Dimension heißt der Rang von G.*

(iii) *Ist T ein maximaler Torus in G und ist $N_G(T)$ der Normalisator von T in G, so ist $N_G(T)/T$ eine endliche Gruppe und heißt die (analytische) Weyl–Gruppe von G (bezüglich T).*

(iv) *Der kanonische Homomorphismus $i^* : R(G) \to R(T)$ ist ein Isomorphismus auf den Unterring $R(T)^{W(G)}$ der $W(G)$–invarianten Elemente.*

Beweis: vgl. [Ada69], 4.8, 2.23 sowie [BD85], IV(1.4), VI(2.1) $\square$

★

In den weiteren Sätzen sei T ein fest gewählter maximaler Torus in G. $\mathfrak{t}_0$ sei die Lie–Algebra von T, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C}$ die komplexifizierte Lie–Algebra von T.

Bemerkung 2.16
Wir können die Elemente von $W(G)$ auch im algebraischen Sinn, d.h. als Selbstabbildungen von $\mathfrak{t}$ oder $\mathfrak{t}_0$ auffassen. (vgl. [Kna96], 4.54) $\square$

Definition 2.17

(i) Ein multiplikativer Charakter von T ist eine stetiger Homomorphismus $\xi : T \to S^1$. (vgl. [Kna96], 4.32)

(ii) Ein Element $\mu \in \mathfrak{t}^*$ heißt analytisch integral, falls es einen multiplikativen Charakter ξ_μ von T gibt mit $\xi_\mu(\exp H) = e^{\mu(H)}$ für alle $H \in \mathfrak{t}_0$. (vgl. [Kna96], 4.58)

Bemerkung 2.18
Ein Element $\mu \in \mathfrak{t}^*$ ist genau dann analytisch integral, falls $\mu(H) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ für alle $H \in \mathfrak{t}_0$ mit $\exp H = 1$ gilt. (vgl. [Kna96], 4.58) $\square$

Satz 2.19
Es sei $\mu \in \mathfrak{t}^*$ ein analytisch integrales Element. Dann ist für alle $w \in W(G)$ das Element $\mu \circ w$ analytisch integral. Ferner existiert ein Element ρ im Darstellungsring von G mit

$$\chi_\rho(\exp H) = \sum_{\mu' \in \mu W(G)} e^{\mu'(H)} \text{ für alle } H \in \mathfrak{t}_0.$$

Beweis: Die rechte Seite ist $W(G)$-invariant. (vgl. Satz 2.15(iv)) $\square$

Satz und Definition 2.20

(i) Es sei V eine komplexe s–dimensionale Darstellung von G. Dann ist V eine komplexe Darstellung von T und zerfällt als solche in ein–dimensionale Unterdarstellungen $V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_s}$, wobei $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ eine

$W(G)$–invariante Menge analytisch integraler Elemente ist und die Darstellung von T auf V_{β_j} durch $g(v) = e^{\beta_j(g)} \cdot v$ für alle $g \in T$ und $v \in V_{\beta_j}$ gegeben ist. Die Elemente $\beta_1, \dots, \beta_s$ heißen die Gewichte der Darstellung V.

(ii) Es sei V eine reelle s–dimensionale Darstellung von G. Dann ist V eine reelle Darstellung von T und zerfällt als solche in eine r–dimensionale triviale Unterdarstellung V_0, wobei $s - r = 2d$ eine gerade natürliche Zahl ist, und zwei–dimensionale Unterdarstellungen $V_{\beta_1}, \dots, V_{\beta_d}$, wobei $\{\pm\beta_1, \dots, \pm\beta_d\}$ eine $W(G)$–invariante Menge analytisch integraler Elemente ist und die Darstellung von T auf V_{β_j} die Reellifizierung der durch $g(v) = e^{\beta_j(g)} \cdot v$ für alle $g \in T$ und $v \in V_{\beta_j}$ gegebenen komplexen Darstellung von T ist. Die Elemente $\pm\beta_1, \dots, \pm\beta_d$ heißen die Gewichte der Darstellung V.

(iii) Ist $V = \mathfrak{g}_0$ die adjungierte Darstellung von G, so ist $V_0 = \mathfrak{t}_0$. Die Gewichte der adjungierten Darstellung $\mathfrak{g}_0$ heißen die Wurzeln von G.

Alle Wurzeln sind auf $\mathfrak{t}_0$ rein imaginär. (vgl. [Kna96], 4.58) □

Definition 2.21

Es sei (L_i) eine Basis von $\mathfrak{t}_0^*$. Eine totale Ordnung auf $\mathfrak{t}_0^*$ ist gegeben durch

$$\sum \lambda_i L_i > \sum \mu_i L_i \iff \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_{r-1} = \mu_{r-1}, \lambda_r > \mu_r \text{ für ein } r \geq 1. \square$$

Definition 2.22

Eine positive Wurzel heißt einfach, wenn sie nicht als Summe zweier positiver Wurzeln darstellbar ist. □

Bezeichnungen 2.23

(i) $\Sigma(G)$ sei das Wurzel-System von G.

(ii) $\Sigma^+(G) = \{\alpha \in \Sigma(G) \mid \alpha > 0\}$ heißt das System positiver Wurzeln von G bezüglich der gewählten Ordnung. □

Die Struktur– und Darstellungstheorie von G ist eng verwoben mit der entsprechenden Theorie der Lie–Algebren $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}$ von G. Deshalb stellen wir im folgenden Unterabschnitt Ergebnisse der Theorie der Lie–Algebren zusammmen.
Zur Vereinfachung der Darstellung definieren wir sämtliche Begriffe nur für den komplexen Fall.
Da $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_0$ die Lie–Algebren der kompakten Lie–Gruppe G sind, benötigen wir nicht die allgemeine Theorie von Lie–Algebren.
Dies führt dazu, daß wir manche Objekte nicht durch die Standarddefinitionen einführen, sondern durch (technisch einfachere) Eigenschaften beschreiben, die in dem von uns betrachteten Fall äquivalent sind.

Definition 2.24

(i) *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *Teilmengen von* $\mathfrak{g}$*, so sei*

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \{[A, B] \mid A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{b}\}.$$

Entsprechend sei $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *definiert.*

(ii) *Ein Untervektorraum* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{g}$ *heißt Lie–Unteralgebra, falls* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ *gilt.*

(iii) *Eine Lie–Unteralgebra* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{g}$ *heißt Ideal in* $\mathfrak{g}$*, falls* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ *gilt.* □

Beispiel 2.25

(i) *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ *Ideale in* $\mathfrak{g}$*, so sind auch* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$*,* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *und* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ *Ideale in* $\mathfrak{g}$.

(ii) *Insbesondere ist* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ein Ideal in* $\mathfrak{g}$ *und heißt das Kommutatorideal von* $\mathfrak{g}$.

(iii) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = \{H_1 \in \mathfrak{g} \,|[H_1, H_2] = 0 \text{ für alle } H_2 \in \mathfrak{g}\}$

ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$ *und heißt das Zentrum von* $\mathfrak{g}$.

Beweis: vgl. [Kna96], 1.7. □

Satz und Definition 2.26

Es gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist halbeinfach im Sinne der Lie–Algebra–Theorie und heißt deswegen auch der halbeinfache Summand von* $\mathfrak{g}$.

G, $\mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{g}_0$ *heißen halbeinfach, wenn* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ *gilt. Dies ist äquivalent dazu, daß* $Z(G)$ *endlich ist, und dazu, daß* $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}} = 0$ *gilt. (vgl. [Kna96], 4.25, 4.29)*

□

Satz und Definition 2.27

(i) Durch $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ *mit*

$$B(H_1, H_2) = spur(ad(H_1) \circ ad(H_2))$$

wird auf $\mathfrak{g}$ *eine symmetrische Bilinearform definiert. Sie heißt die Killing–Form von* G.

(ii) Die Einschränkung von B *auf den halbeinfachen Summanden* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist nicht–ausgeartet. (vgl. [Kna96], 1.42)*

(iii) $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *ist eine Cartan-Algebra von* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *(vgl. [Kna96], 2.13)*

(iv) $\mathfrak{t}'^*$ *kann als Teilmenge von* $\mathfrak{t}^*$ *aufgefaßt werden. Dabei bilden Elemente von* $\mathfrak{t}'^*$ *Elemente aus* $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}$ *auf* 0 *ab. (vgl. [Kna96], p.200)* □

Satz und Definition 2.28

Es sei B *die Killing-Form von* G. *Die Einschränkung von* B *auf* $\mathfrak{t}'$ *ist nicht–ausgeartet. Die induzierte Bilinearform auf* $\mathfrak{t}'^*$ *bezeichnen wir mit* $\langle \, , \, \rangle$. *Die Einschränkung von* $\langle \, , \, \rangle$ *auf den reellen Untervektorraum* $\mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{t}'$ *ist negativ definit; die Einschränkung auf den reellen Untervektorraum* $i(\mathfrak{t}_0 \cap \mathfrak{t}')$ *ist positiv definit. (vgl. [Kna96], p.207)* □

Definition 2.29

(i) Ein Element $\mu \in \mathfrak{t}'^*$ heißt algebraisch integral bezüglich G, falls

$$\frac{2\langle \mu, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \alpha \in \Sigma(G)$$

gilt. (vgl. [Kna96], 4.59)

(ii) Ein Element $\mu \in \mathfrak{t}'^*$ heißt algebraisch halbintegral bezüglich G, falls 2μ algebraisch integral ist.

Bemerkung 2.30

(i) Analytisch integrale Elemente von $\mathfrak{t}'^*$ sind algebraisch integral. (vgl. [Kna96], 4.59)

(ii) Falls G halbeinfach ist und ein triviales Zentrum hat, so ist jedes analytisch integrale Element eine ganzzahlige Linearkombination der Wurzeln. (vgl. [Kna96], 4.68) $\square$

Satz und Definition 2.31

(i) $w \in W(G)$ permutiert die Wurzeln von G. (vgl. [Ada69], 4.37)

(ii) Für ein Element $w \in W(G)$ gilt $\det(w) = (-1)^{\left|\{\alpha\in\Sigma^+(G)\,|\,\alpha w<0\}\right|}$. Wir bezeichnen $\det(w)$ auch mit sign(w). sign: $W(G) \to \{\pm 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. (vgl. [Kna96], II.12.21–23 oder [Hil82a], (1.5) und Bem. vor (3.2))

(iii) Die Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathfrak{t}'^*$ ist invariant gegenüber der Operation von $W(G)$. (vgl. [Kna96], 2.62) $\square$

Satz und Definition 2.32

Wir definieren

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \alpha.$$

δ ist algebraisch integral bezüglich G.

Beweis: vgl. [Kna96], 2.69 und 4.62. □

Satz 2.33
Für alle $H \in \mathfrak{t}'^*$ gilt:

$$\sum_{w\in W(G)} sign(w)e^{\delta w(H)} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right)$$

(vgl. [Kna96], 5.111) □

Definition 2.34
Es sei $Q^+ = \{H \in \mathfrak{t}_0 \,|\, \alpha(H) > 0$ für alle $\alpha \in \Sigma^+(G)\}$. Q^+ ist eine maximale konvexe Teilmenge von $Q = \{H \in \mathfrak{t}_0 \,|\, \alpha(H) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Sigma^+(G)\}$ und heißt die positive Weyl–Kammer oder die Fundamentalkammer von G. □

Satz 2.35
Es sei μ ein algebraisch halbintegrales Element bezüglich G und $\langle\, ,\, \rangle$ die durch die Killing–Form induzierte Bilinearform auf $\mathfrak{t}'^*$. Dann gilt:

$$\lim_{\substack{H\to 0\\ H\in\mathfrak{t}'}} \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} sign(w)e^{\mu(w(H))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right)} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \frac{\langle\mu,\alpha\rangle}{\langle\delta,\alpha\rangle}. \qquad (*)$$

Bemerkung 2.36
Für eine einfache Wurzel α ist $2\,\langle\delta,\alpha\rangle = \langle\alpha,\alpha\rangle > 0$. Eine beliebige positive Wurzel ist eine Summe von einfachen Wurzeln. Daher ist der auf der rechten Seite von $(*)$ auftretende Nenner tatsächlich von 0 verschieden. (vgl. [Kna96], 2.69)

Beweis von Satz 2.35:
1.Fall: μ ist algebraisch integral und ein Element des Abschlusses der positiven Weyl–Kammer.
Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus der Weylschen Dimensionsformel, vgl. etwa [BH58], sect. 3.4.

2.Fall: μ ist algebraisch integral.

Nach [BH58], sect. 2.7, existiert $w_0 \in W(G)$, so daß μw_0 ein Element der abgeschlossenen positiven Weyl–Kammer ist. Nach dem 1.Fall gilt also:

$$\begin{aligned}
&\lim_{H\to 0} \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{\mu(w(H))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right)} \\
&\overset{2.31(ii)}{=} \quad \lim_{H\to 0} \operatorname{sign}(w_0) \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{\mu(w_0(w(H)))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right)} \\
&\overset{1.\text{Fall}}{=} \quad \operatorname{sign}(w_0) \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \frac{\langle \mu w_0, \alpha\rangle}{\langle \delta, \alpha\rangle} \\
&\overset{2.31(iii)}{=} \quad \operatorname{sign}(w_0) \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \frac{\left\langle \mu, \alpha w_0^{-1}\right\rangle}{\langle \delta, \alpha\rangle} \\
&\overset{2.31(ii)}{=} \quad \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \frac{\langle \mu, \alpha\rangle}{\langle \delta, \alpha\rangle}.
\end{aligned}$$

3.Fall: μ ist algebraisch halbintegral.

$$\begin{aligned}
&\lim_{H\to 0} \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{\mu(w(H))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right)} \\
&= \quad \lim_{H\to 0} \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{\mu(w(2H))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(2H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(2H)}\right)} \\
&= \quad \lim_{H\to 0} \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{2\mu(w(H))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\alpha(H)} - e^{-\alpha(H)}\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{H\to 0} \frac{\sum\limits_{w\in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{2\mu(w(H))}}{\prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} + e^{-\frac{1}{2}\alpha(H)}\right) \prod\limits_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}\alpha(H)} - e^{-\frac{1}{2}\alpha(2H)}\right)} \\
&\overset{\text{2.Fall}}{=} \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \frac{\langle 2\mu, \alpha\rangle}{2\langle \delta, \alpha\rangle} \\
&= \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \frac{\langle \mu, \alpha\rangle}{\langle \delta, \alpha\rangle}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2.3 Die topologische Struktur homogener Räume

Es sei G eine kompakte zusammenhängende Lie–Gruppe und U eine abgeschlossene Untergruppe von G gleichen Rangs. T sei ein maximaler Torus in U.

Bezeichnungen 2.37

(i) *Die Lie-Algebra von G bezeichnen wir mit $\mathfrak{g}_0$, ihre Komplexifizierung $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{g}$.*

Entsprechend sei $\mathfrak{t}_0$ die Lie-Algebra von T und $\mathfrak{t}$ ihre Komplexifizierung. Wir definieren $\mathfrak{t}'$ durch $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

(ii) *$\Sigma(G)$ sei das Wurzel-System von G, $\Sigma^+(G)$ ein System positiver Wurzeln von G.*

$\Sigma(U) \subset \Sigma(G)$ sei das Wurzel-System von U, $\Sigma^+(U) = \Sigma(U) \cap \Sigma^+(G)$.

(iii) *Die Elemente von $\Psi = \Sigma^+(G) \setminus \Sigma^+(U)$ heißen die positiven komplementären Wurzeln von G bzgl. U.*

(iv) *Es seien $W(G)$ die Weyl-Gruppe von G, $W(U)$ die Weyl-Gruppe von U.*

Bemerkung 2.38

(i) *$\Sigma^+(U)$ ist ein System positiver Wurzeln von U.*

(ii) *Es gilt $W(U) \subset W(G)$.* $\square$

Definition 2.39

U operiert mittels der adjungierten Darstellung auf dem Tangentialraum $T_U(G/U)$ mit Gewichten $\alpha \in \Sigma^+(G) \setminus \Sigma^+(U) = \Psi$. Diese Darstellung heißt die Isotropie-Darstellung $\iota : U \to Aut^+(T_U(G/U))$. $\square$

Satz 2.40
Das Tangentialbündel von G/U trägt über ι eine U-Struktur.

Beweis: vgl. [BH58] (Prop. 7.5) und die anschließende Bemerkung. □

★

Satz 2.41

(i) G/U ist eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension $2\,|\Psi|$. Eine Orientierung von G/U wird durch eine Orientierung von $T_U(G/U)$ definiert.

(ii) Die Abbildungen $\tilde{g} : G/U \to G/U$ mit $g \in G$ und $xU \mapsto gxU$ sind orientierungserhaltende Diffeomorphismen von G/U.

Beweis:

(i) Wir betrachten die Homotopiesequenz zum Prinzipalbündel $G \to G/U$:

$$\cdots \to \pi_1(U) \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/U) \to \pi_0(U) \to \pi_0(G) \to \cdots$$

Da G und U zusammenhängend sind, ist der einfache Zusammenhang von G/U äquivalent zur Surjektivität von $\pi_1(U) \to \pi_1(G)$. Da G/T einfach zusammenhängend ist (vgl. [Ada69], Lemma 5.54), ist $\pi_1(T) \to \pi_1(G)$ surjektiv, also auch $\pi_1(U) \to \pi_1(G)$.

(ii) Für einen Weg g_t von e nach g ist $\tilde{g}_t$ eine Isotopie von id nach $\tilde{g}$. □

Die Wurzelraum-Zerlegung von G ist

$$T_e(G) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \mathfrak{g}_{0,\alpha},$$

wobei die reelle Darstellung von T auf $\mathfrak{g}_{0,\alpha}$ mit der Reellifizierung der komplexen eindimensionalen Darstellung von T mittels der Wurzel α identifiziert werden kann.

Die Wurzelraum-Zerlegung von U ist

$$T_e(U) = \mathfrak{u}_0 = \mathfrak{t}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+(U)} \mathfrak{g}_{0,\alpha}. \quad \square$$

Definition 2.42

Wir orientieren $T_U(G/U)$ und damit G/U entsprechend der Identifizierung der Wurzelräume $\mathfrak{g}_{0,\alpha}$, $\alpha \in \Psi$, mit Kopien von $\mathbb{C}$. $\square$

★

Satz und Definition 2.43

Wir definieren

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \alpha,$$

$$\delta' = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+(U)} \alpha,$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha.$$

Ist G einfach zusammenhängend, so sind äquivalent:

(i) G/U trägt eine Spin-Struktur.

(ii) δ' ist integral bzgl. G.

(iii) $\tilde{\delta}$ ist integral bzgl. G.

Beweis: vgl. [HS90], p.327. $\square$

Kapitel 3

Hilbert–Polynome homogener Räume

Wir wollen die Resultate aus Abschnitt 1.3 auf homogene Räume anwenden und unter Verwendung von Satz 2.35 Hilbert–Polynome von homogenen Räumen berechnen.

3.1 Eine S^1-Aktion auf G/U

Wir wählen $\lambda : S^1 \to T$ als reguläre Ein-Parameter-Untergruppe von G innerhalb der Fundamentalkammer, d.h. das Differential von λ in 1 ist eine lineare Abbildung $d_1\lambda : \mathbb{R} = \mathfrak{s}^1 \to \mathfrak{t}_0$, so daß $d_1\lambda(1)$ ein Element der Fundamentalkammer ist.

Da Mißverständnisse auszuschließen sind, werden wir in Zukunft mit λ sowohl den Homomorphismus $S^1 \to T$ als auch das Differential $\mathbb{R} \to \mathfrak{t}_0$ bezeichnen.

λ schränkt jede T-Aktion auf einem Raum zu einer S^1-Aktion ein.

Insbesondere existiert via λ eine kanonische S^1-Aktion auf G/U.

Satz 3.1

Die Fixpunktmenge dieser S^1-Aktion auf G/U ist gegeben durch

$(G/U)^\lambda = \{gU \in G/U \mid g \in N_G(T)\}$.

Bemerkung 3.2

Für $g_1, g_2 \in N_G(T)$ gilt die Gleichheit $g_1U = g_2U$ genau dann, wenn $g_1 \in g_2N_U(T)$ gilt. Also steht $(G/U)^\lambda$ in Bijektion zu den Mengen $N_G(T)/N_U(T)$ und $(N_G(T)/T)/(N_U(T)/T) \cong W(G)/W(U)$ und ist damit endlich.
Ferner hängt für $g \in N_G(T)$ die Linksnebenklasse gU nur von der durch g repräsentierten Linksnebenklasse in $W(G)/W(U)$ ab.
Also sind die Ausdrücke wU und $[w]U$ für $w \in W(G)$ bzw. $[w] \in W(G)/W(U)$ sinnvoll.

Damit läßt sich der Satz 3.1 so formulieren:

Korollar 3.3

Die Fixpunkte der S^1-Aktion auf G/U sind genau die paarweise verschiedenen Punkte $[w]U \in G/U$ mit $[w] \in W(G)/W(U)$.

Beweis von 3.1 und 3.3: [HS90], sect. 2.5 $\square$

3.2 Äquivariante Vektorraumbündel über homogenen Räumen

Es sei eine (reelle oder komplexe) Darstellung ρ von U mit Darstellungsraum V gegeben. Diese induziert über das kanonische U-Prinzipalbündel $G \to G/U$ ein Vektorraumbündel $G \times_\rho V$. G operiert äquivariant auf dem kanonischen Prinzipalbündel und damit auch auf dem assoziierten Vektorraumbündel; dasselbe gilt für sämtliche abgeschlossenen Untergruppen von G.

Satz 3.4
Die T-Aktion in der Faser $(G \times_\rho V)_{wU}$ mit $w \in W(G)$ ist äquivalent zu $\rho \circ w^{-1}$ (vgl. [HS90]), dasselbe gilt für alle Untergruppen von T.
Insbesondere sind die Gewichte der T-Aktion auf dem Tangentialraum im Fixpunkt wU gegeben durch $\alpha \circ w^{-1}$ mit $\alpha \in \Psi$, wobei w^{-1} hier die Aktion der Weyl-Gruppe in der Lie-Algebra $\mathfrak{t}_0$ bezeichnet.

Beweis: Es sei $g \in N_G(T)$ ein Repräsentant von $w \in W(G)$. Jedes Element in $G \times_\rho V$, das in der Faser über dem Fixpunkt $[g] \in G/U$ liegt, besitzt eine eindeutige Darstellung $[g, v]$ mit $v \in V$. Für $t \in T$ und $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} t[g,v] &= [tg, v] \\ &= [g\,\underbrace{g^{-1}tg}_{\in T}, v] \\ &= [g, \rho(g^{-1}tg)v] \\ &= [g, \rho(w^{-1}(t))(v)] \quad \square \end{aligned}$$

★

Satz 3.5

Es seien $G \supset U$ zusammenhängende Lie-Gruppen gleichen Rangs. Ferner seien eine komplexe eindimensionale Darstellung η von U mit Gewicht γ und Darstellungsraum L sowie eine komplexe r-dimensionale Darstellung ζ von U mit Darstellungsraum K und Gewichten $\mu_1, \ldots, \mu_r$ gegeben.
Außerdem sei eine k-dimensionale reelle Darstellung φ von U mit Darstellungsraum V und positiven Gewichten $\beta_1, \ldots, \beta_s$ gegeben. Die triviale eindimensionale Darstellung von U trete als Summand in V mit der Vielfachheit $2l$ oder $2l+1$ auf.
Alle Gewichte mögen ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt werden.
Ferner gelte

$$c_1(G \times_\eta L) \equiv w_2(G \times_\varphi V) + w_2(G/U) \ mod\ 2 \qquad (*).$$

Dann gilt

$$2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(e^{\frac{1}{2}c_1(G \times_\eta L)} ch(G \times_\zeta K) \left(\prod_i \cosh\left(\frac{y_i}{2}\right)\right) \hat{\mathcal{A}}(G/U) \right) \left[G/U\right]$$
$$= \quad 2^l \cdot \sum_\rho \sum_{\varepsilon:\{1,\ldots,s\}\to\{\pm 1\}} \frac{\prod\limits_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta' + \frac{1}{2}\sum\limits_\sigma \varepsilon(\sigma)\beta_\sigma, \alpha \right\rangle}{\prod\limits_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle}.$$

Dabei benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:
$p(G \times_\varphi V) = \prod_i (1 + y_i^2)$ ist die totale Pontrjaginsche Klasse von $G \times_\varphi V$.
$\langle\, , \rangle$ ist die durch die Killing-Form von G induzierte Bilinearform auf $\mathfrak{t}'^*$.
δ ist die halbierte Summe der positiven Gewichte von G, und δ' ist die entsprechende Summe bezüglich U.
$\Sigma^+(G)$ ist die Menge der positiven Gewichte von G, Ψ die Menge der positiven komplementären Gewichte von G bezüglich U.

Bemerkung 3.6

(i) Die Gültigkeit der Bedingung $(*)$ *läßt sich unmittelbar an den Gewichten der Darstellungen ablesen. (vgl. [BH58], sect. 11). Zur Vereinfachung wollen wir lediglich für den Fall* $V = 0$ *das zu* $(*)$ *äquivalente Kriterium angeben:*

$$c_1(G \times_\eta L) \equiv w_2(G/U) \ mod\ 2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\gamma + \sum_{\alpha \in \Psi} \alpha\right) \text{ ist analytisch integral bezüglich } G.$$

(ii) Ist U *der Zentralisator einer toralen Untergruppe von* G*, so liefert ein Theorem von Wang, daß* G/U *eine homogene komplexe Struktur trägt. (vgl. [Wan54].)*

Für den Fall, daß $L = \Lambda^{|\Psi|}(T_U(G/U))$ *gilt,* K *eindimensional ist und* μ_1 *orthogonal zu den Wurzeln von* U *ist und positiv ist, stimmt die Formel in 3.5 mit der Formel in [Sug79], sect.2, überein. (vgl. auch [BH59], sect. 24.7.)*

Beweis von Satz 3.5:

Wir definieren $E = G \times_\eta L$ und $F = G \times_\varphi V$ und $D = G \times_\zeta K$. Ferner sei $T(G/U)$ das Tangentialbündel von G/U. S^1 operiert auf diesen Räumen wie in Abschnitt 3.1. $T(G/U)$ ist äquivariant isomorph zu $G \times_\iota T_U(G/U)$. F ist orientierbar, da U zusammenhängend ist.

Die positiven Gewichte von $T_U(G/U))$ sind die Komplementärwurzeln $\alpha \in \Psi$.

Zusammenstellung der Bezeichnungen

Darstellung	Körper	Dim.	Gewichte	ass.Bündel
(L, η)	$\mathbb{C}$	1	γ	E
(V, φ)	$\mathbb{R}$	$2s+2l$ oder $2s+2l+1$	$\pm\beta_1, \ldots, \pm\beta_s, 0, 0, \ldots, 0$	F
(K, ζ)	$\mathbb{C}$	r	$\mu_1, \ldots, \mu_r$	D
$T_U(G/U)$	$\mathbb{R}$	$2\,\lvert\Psi\rvert$	Komplementärgewichte	T(G/U)

Die Fasern dieser Bündel über dem Fixpunkt wU sind nach 3.4 wiederum Darstellungen von T mit Gewichten $\gamma w^{-1}, \pm\beta_j w^{-1}, \mu_j w^{-1}, \alpha w^{-1}$.
Die Ergebnisse aus Abschnitt 1.3 liefern, daß für alle Elemente x einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ die Gleichheit

$$\Gamma(G/U, E, F, D)(e^{2\pi i x}) \quad = \quad \frac{1}{|W(U)|} \sum_{w \in W(G)} \gamma(wU, E, F, K)(e^{2\pi i x}) \qquad (**)$$

mit

$$\begin{aligned} &\gamma(wU, E, F, D)\left(e^{2\pi i x}\right) \\ &\quad = \quad e^{\frac{1}{2}(\gamma w^{-1}\lambda(x))} \cdot \left(\sum_{\rho} e^{\mu_\rho w^{-1}\lambda(x)} \right) \\ &\qquad \cdot 2^l \prod_{\sigma} \left(e^{\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))} + e^{-\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))} \right) \\ &\qquad \cdot \prod_{\alpha \in \Psi} \left(e^{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))} - e^{\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))} \right)^{-1} \end{aligned}$$

gilt.

$(**)$ ist bei Beachtung der Ergebnisse in Abschnitt 3.2 genau die Formel aus Abschnitt 1.3. Zu betrachten ist nur die Vorzeichenfrage von $\gamma(wU, E, F, D)\left(e^{2\pi i x}\right)$. In Abschnitt 1.3 wird verlangt, daß jeder Fixpunkt so orientiert ist, daß alle Drehzahlen des Tangentialraums positiv sind. Jedes α mit negativem αw^{-1} liefert also einen Orientierungswechsel. Dieser wird dadurch berücksichtigt, daß für solche α der obige Nenner gegenüber der Formel in Abschnitt 1.3 ein anderes Vorzeichen hat.

Zur Vorbereitung der Grenzwertberechnung formen wir den Term um, so daß wir Satz 2.35 anwenden können:

$$
\begin{aligned}
&\Gamma(G/U,E,F,D)(e^{2\pi ix}) \\
&\quad= \frac{1}{|W(U)|}\sum_{w\in W(G)}\gamma(wU,E,F,K)(e^{2\pi ix}) \\
&\quad= \frac{1}{|W(U)|}\sum_{w\in W(G)} e^{\frac{1}{2}(\gamma w^{-1}\lambda(x))}\cdot\left(\sum_\rho e^{\mu_\rho w^{-1}\lambda(x)}\right) \\
&\qquad\cdot 2^l\prod_\sigma\left(e^{\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))}+e^{-\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))}\right) \\
&\qquad\cdot\prod_{\alpha\in\Psi}\left(e^{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}-e^{\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}\right)^{-1} \\
&\quad= (-1)^{|\Psi|}\frac{1}{|W(U)|}\sum_{w\in W(G)} e^{\frac{1}{2}(\gamma w^{-1}\lambda(x))}\cdot\left(\sum_\rho e^{\mu_\rho w^{-1}\lambda(x)}\right) \\
&\qquad\cdot 2^l\prod_\sigma\left(e^{\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))}+e^{-\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))}\right) \\
&\qquad\cdot\prod_{\alpha\in\Psi}\left(e^{\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}-e^{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}\right)^{-1} \\
&\quad= (-1)^{|\Psi|}\frac{1}{|W(U)|}\sum_{w\in W(G)} e^{\frac{1}{2}(\gamma w^{-1}\lambda(x))}\cdot\left(\sum_\rho e^{\mu_\rho w^{-1}\lambda(x)}\right) \\
&\qquad\cdot 2^l\prod_\sigma\left(e^{\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))}+e^{-\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))}\right) \\
&\qquad\cdot\prod_{\alpha\in\Sigma^+(U)}\left(e^{\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}-e^{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}\right) \\
&\qquad\cdot\prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)}\left(e^{\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}-e^{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))}\right)^{-1} \\
&\quad\overset{2.31(ii)}{=} (-1)^{|\Psi|}\frac{1}{|W(U)|}\sum_{w\in W(G)}\operatorname{sign}(w)e^{\frac{1}{2}(\gamma w^{-1}\lambda(x))}\cdot\left(\sum_\rho e^{(\mu_\rho w^{-1}\lambda(x))}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot 2^l \prod_{\sigma} \left(e^{\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))} + e^{-\frac{1}{2}(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))} \right) \\
& \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(U)} \left(e^{\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha w^{-1}\lambda(x))} \right) \\
& \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}(\alpha\lambda(x))} - e^{\frac{1}{2}(-\alpha\lambda(x))} \right)^{-1} \\
\stackrel{2.33}{=} \quad & (-1)^{|\Psi|} \frac{1}{|W(U)|} \sum_{w \in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{\frac{1}{2}(\gamma w^{-1}\lambda(x))} \cdot \left(\sum_{\rho} e^{\mu_\rho w^{-1}\lambda(x)} \right) \\
& \cdot 2^l \sum_{\varepsilon:\{1,\dots,s\} \to \{\pm 1\}} \left(\prod_{\sigma} e^{\frac{1}{2}\varepsilon(\sigma)(\beta_\sigma w^{-1}\lambda(x))} \right) \\
& \cdot \sum_{w' \in W(U)} \left(\operatorname{sign}(w') e^{\delta' w'^{-1} w^{-1} \lambda(x)} \right) \\
& \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}(\alpha\lambda(x))} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha\lambda(x))} \right)^{-1} \\
= \quad & (-1)^{|\Psi|} \frac{2^l}{|W(U)|} \sum_{w' \in W(U)} \operatorname{sign}(w') \sum_{\rho} \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left(e^{\frac{1}{2}(\alpha\lambda(x))} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha\lambda(x))} \right)^{-1} \\
& \cdot \sum_{\varepsilon} \sum_{w \in W(G)} \operatorname{sign}(w) e^{\left(\frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta' w'^{-1} + \frac{1}{2}\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\beta_\sigma\right) w^{-1}\lambda(x)}
\end{aligned}
$$

Da mit $x \to 0$ auch $\lambda(x) \to 0$ gilt, liefert Satz 2.35 nun:

$$
\begin{aligned}
& 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(e^{\frac{1}{2}c_1(G \times_\eta L)} ch(G \times_\zeta K) \left(\prod_i \cosh\left(\frac{y_i}{2}\right) \right) \hat{\mathcal{A}}(G/U) \right) \big[G/U \big] \\
= \quad & (-1)^{|\Psi|} \Gamma(G/U, E, F, D)(1) \\
= \quad & \frac{2^l}{|W(U)|} \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle^{-1} \\
& \cdot \sum_{w' \in W(U)} \operatorname{sign}(w') \sum_{\rho} \sum_{\varepsilon} \Bigg[\\
& \qquad \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta' w'^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\beta_\sigma, \alpha \right\rangle \Bigg] \\
\stackrel{2.31(ii)}{=} \quad & \frac{2^l}{|W(U)|} \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \sum_{w' \in W(U)} \sum_{\rho} \sum_{\varepsilon} \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta' w'^{-1} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \beta_\sigma, \alpha w'^{-1} \right\rangle \\
\overset{2.31(iii)}{=} \; & \frac{2^l}{|W(U)|} \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle^{-1} \\
&\cdot \sum_{w' \in W(U)} \sum_{\rho} \sum_{\varepsilon} \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma w' + \mu_\rho w' + \delta' + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \beta_\sigma w', \alpha \right\rangle \\
= \; & \frac{2^l}{|W(U)|} \cdot \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle^{-1} \\
&\cdot \sum_{w' \in W(U)} \sum_{\rho} \sum_{\varepsilon} \prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta' + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \beta_\sigma, \alpha \right\rangle \\
= \; & 2^l \cdot \sum_{\rho} \sum_{\varepsilon : \{1, \ldots, s\} \to \{\pm 1\}} \frac{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta' + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \beta_\sigma, \alpha \right\rangle}{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle}
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt ausgenutzt, daß die Mengen $\{\gamma\}$, $\{\pm\beta_1, \ldots, \pm\beta_s\}$ und $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ $W(U)$-invariant sind, da sie die Gewichte von Darstellungen von U sind. $\square$

3.3 Nicht-Immersionssätze für homogene Räume

Wir wenden die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts auf die folgende Situation an: Wir setzen $V = 0$ und ersetzen K durch $K(t) = \psi_t(K)$, wobei K eine virtuelle komplexe Darstellung von U und t eine ganze Zahl ist. Wir bezeichnen mit ψ_t die Adams-Operation.

Satz 3.7

Es seien $G \supset U$ zusammenhängende Lie-Gruppen gleichen Rangs. Ferner seien eine komplexe eindimensionale Darstellung η von U mit Gewicht γ und Darstellungsraum L sowie eine $W(U)$–invariante Familie $(\mu_1, \ldots, \mu_r)$ analytisch integraler Elemente gegeben.

Nach 2.15(iv) existieren komplexe Darstellungen $(K_1, \zeta_1), \ldots, (K_s, \zeta_s)$ und ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_s$ mit $\sum\limits_{\rho=1}^{r} e^{\mu_\rho} = \sum\limits_{\sigma=1}^{s} n_\sigma \chi_{K_\sigma}$.

$\frac{1}{2}\left(\gamma + \sum\limits_{\alpha \in \Psi} \alpha\right)$ sei analytisch integral bezüglich G. Dann gilt:

(i) $$\hat{A}\left(G/U, \frac{c_1(G \times_\eta L)}{2}, z\right) = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{r} \prod\limits_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod\limits_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle}.$$

(ii) $$H(t) = \frac{\sum\limits_{\rho=1}^{r} \prod\limits_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + t\mu_\rho + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod\limits_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle}.$$

Dabei benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

H ist das zu $c_1(G \times_\eta L)$ und $z = \sum\limits_{\sigma=1}^{s} n_\sigma ch\left(G \times_{\zeta_\sigma} K_\sigma\right)$ assoziierte Hilbert–Polynom von G/U.

$\langle\, , \rangle$ ist die durch die Killing-Form von G induzierte Bilinearform auf $\mathfrak{t}'^*$. δ ist die halbierte Summe der positiven Gewichte von G, und δ' ist die entsprechende Summe bezüglich U.
$\Sigma^+(G)$ ist die Menge der positiven Gewichte von G, Ψ die Menge der positiven komplementären Gewichte von G bezüglich U.

Bemerkung 3.8

(i) Für fast komplexe homogene Räume mit invarianter fast komplexer Struktur läßt sich L als höchste äußere Potenz von $T_U(G/U)$ (aufgefaßt als komplexer Vektorraum) wählen. Das Gewicht dieser äußeren Potenz ist die Summe der positiven komplementären Gewichte. Damit ergeben sich $\frac{1}{2}\left(\gamma + \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha\right) = \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha$ und $\frac{1}{2}\gamma + \delta' = \delta$.

(ii) Für homogene Spin-Räume läßt sich L trivial wählen. Damit ergeben sich $\frac{1}{2}\left(\gamma + \sum_{\alpha\in\Psi} \alpha\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Psi} \alpha$ und $\frac{1}{2}\gamma + \delta' = \delta'$.

(iii) In Verbindung mit Satz 1.5 liefert der obige Satz unmittelbar einen Nicht–Immersionssatz für homogene Räume. Im Fall, daß $r = 1$ gilt, liegt $H(t)$ bereits in faktorisierter Form vor, und der Wert $\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ist leicht zu bestimmen. Ist $r > 1$, so sind dazu größere Anstrengungen nötig. $\square$

Beweis von 3.7:

Für alle $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$ seien $\mu_1^{(\sigma)}, \ldots, \mu_{r(\sigma)}^{(\sigma)}$ die Menge der Gewichte von K_σ. Für jedes analytisch integrale Element μ gilt:

$$|\{\rho \in \{1, \ldots, r\} \mid \mu_\rho = \mu\}| = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\substack{\rho=1 \\ \mu_\rho^{(\sigma)}=\mu}}^{r(\sigma)} n_\sigma .$$

Nach Satz 3.5 gilt für alle $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$:

$$\hat{A}\left(G/U, \frac{c_1(G \times_\eta L)}{2}, ch\left(G \times_{\zeta_\sigma} K_\sigma\right)\right) = \frac{\sum_{\rho=1}^{r(\sigma)} \prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho^{(\sigma)} + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle} .$$

Es folgt mit $z = \sum_\sigma n_\sigma ch\,(G \times_{\zeta_\sigma} K_\sigma)$

$$
\begin{aligned}
&\hat{A}\left(G/U, \frac{c_1(G \times_\eta L)}{2}, z\right) \\
&= \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma \hat{A}\left(G/U, \frac{c_1(G \times_\eta L)}{2}, ch\,(G \times_{\zeta_\sigma} K_\sigma)\right) \\
&= \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma \sum_{\rho=1}^{r(\sigma)} \frac{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho^{(\sigma)} + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle} \\
&= \sum_{\mu\, analyt.int.} \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\substack{\rho=1 \\ \mu_\rho^{(\sigma)}=\mu}}^{r(\sigma)} n_\sigma \frac{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle} \\
&= \sum_{\mu\, analyt.int.} \sum_{\substack{\rho=1 \\ \mu_\rho=\mu}}^{r} \frac{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle} \\
&= \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \left\langle \frac{1}{2}\gamma + \mu_\rho + \delta', \alpha \right\rangle}{\prod_{\alpha \in \Sigma^+(G)} \langle \delta, \alpha \rangle}.
\end{aligned}
$$

Also gilt der Teil (i) der Behauptung. Teil (ii) der Behauptung folgt für ganze Zahlen t aus Teil (i) und der Additivität der Adams–Operation. $\square$

Kapitel 4

Anwendungen

4.1 Vorbereitende Formeln

Der wesentliche Schlüssel zur Berechnung der Zahlen $\nu_2(q)$ ist das folgende zahlentheoretische Lemma. Zur Formulierung benötigen wir zunächst folgende Bezeichnungen:

Bezeichnungen 4.1
Für $n \in \mathbb{N}$ seien:

$\alpha(n) =$ *Anzahl der Ziffer* 1 *in der Binärdarstellung von* n;

$$\alpha_1(n) = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \alpha(\kappa).$$

Lemma 4.2
$\nu_2(n!) = n - \alpha(n)$. $\square$

Zur Vorbereitung auf die Anwendung dieses Lemmas stellen wir die Gültigkeit der folgenden einfach zu beweisenden Identitäten fest:

Satz 4.3

$$\prod_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(2i) = 2^n \cdot n!$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}(j-i) = \prod_{j=1}^{n}(j-1)!$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}(j+i) = \prod_{j=1}^{n}\frac{(2j-1)!}{j!}$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}(j+i+1) = \prod_{j=1}^{n}\frac{(2j)!}{(j+1)!}$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}(j+i-1) = \prod_{j=1}^{n}\frac{(2j-2)!}{(j-1)!}$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}(j+i-2) = \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(2j-1)!}{(j-1)!}$$

$$\alpha(n) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{n}{2}\right), & n \textit{ gerade} \\ \alpha(n-1)+1, & n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

$$\alpha_1(n) = \begin{cases} 2\alpha_1\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{n}{2}, & n \textit{ gerade} \\ \alpha_1(n-1)+\alpha(n-1), & n \textit{ ungerade} \end{cases}$$

$$\nu_2\left(\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)\right) = \frac{n(n-1)}{2} - \alpha_1(n)$$

$$\nu_2\left(\prod_{1\le i<j\le n}(j+i)\right) = \frac{n(n-3)}{2} + \alpha(n)$$

$$\nu_2\left(\prod_{1\le i<j\le n}(j+i+1)\right) = \frac{(n-2)(n+1)}{2} + \alpha(n+1)$$

$$\nu_2\left(\prod_{1\le i<j\le n}(j+i-1)\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\nu_2\left(\prod_{1\le i<j\le n}(j+i-2)\right) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Bemerkung 4.4

Die obigen Formeln werden wir in den weiteren Rechnungen benutzen, ohne auf ihre Verwendung explizit hinzuweisen.

Bemerkung 4.5

(i) α_1 *ist streng monoton wachsend und nimmt für 2er-Potenzen* n *die Werte* $\alpha_1(n) = \frac{n}{2}\log_2(n)$ *an.*

(ii) Mit obigen Rekursionsgleichungen sind $\alpha(n)$ *und* $\alpha_1(n)$ *in einer Zeit von* $O(\log n)$ *beziehungsweise* $O((\log n)^2)$ *berechenbar.* $\square$

In den weiteren Sätzen werden Werte von α_1 nur in der Form $\alpha_1(n)-\alpha_1(k)-\alpha_1(n-k)$ mit $0 \leq k \leq n$ vorkommen. Deshalb sind die folgenden Sätze interessant:

Satz 4.6

Es sei n *eine natürliche Zahl und* $k \in \{0, \ldots, n\}$*. Dann gilt*

$$0 \leq \alpha_1(n) - \alpha_1(k) - \alpha_1(n-k) \leq \min\{2^\rho \mid \rho \in \mathbb{N} \textit{ und } 2^\rho \geq n\} - 1 < 2n - 1.$$

Beweis:

Für natürliche Zahlen p und ρ definieren wir

$$\alpha^{(\rho)}(p) = \text{ Ziffer mit Stellenwert } 2^\rho \text{ in der Binärdarstellung von } p;$$

$$\alpha_1^{(\rho)}(p) = \sum_{\kappa=0}^{p-1} \alpha^{(\rho)}(\kappa).$$

Zwischenbehauptung 1: Es sei $\rho \in \mathbb{N}$. Zu jeder natürlichen Zahl p existieren eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $s(p), r(p)$ mit $p = s(p) \cdot 2^{\rho+1} + r(p)$ und $0 \leq r(p) < 2^{\rho+1}$. Mit diesen Bezeichnungen ist

$$\alpha_1^{(\rho)}(p) = s(p) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p) - 2^\rho\}.$$

Beweis der Zwischenbehauptung 1:

Für $p = 0$ ist die Aussage trivial.

Es sei nun $p > 0$.

1.Fall: $0 \leq r(p-1) < 2^\rho$.
Dann ist $\alpha^{(\rho)}(p-1) = 0$, $s(p) = s(p-1)$ und $r(p) = r(p-1) + 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&s(p) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p) - 2^\rho\} \\
&\quad = \; s(p) \cdot 2^\rho \\
&\quad = \; s(p-1) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p-1) - 2^\rho\} \\
&\quad = \; \alpha_1^{(\rho)}(p-1) \\
&\quad = \; \alpha_1^{(\rho)}(p).
\end{aligned}$$

2.Fall: $2^\rho \leq r(p-1) < 2^{\rho+1} - 1$.
Dann ist $\alpha^{(\rho)}(p-1) = 1$, $s(p) = s(p-1)$ und $r(p) = r(p-1) + 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&s(p) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p) - 2^\rho\} \\
&\quad = \; s(p) \cdot 2^\rho + r(p) - 2^\rho \\
&\quad = \; s(p-1) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p-1) - 2^\rho\} + 1 \\
&\quad = \; \alpha_1^{(\rho)}(p-1) + 1 \\
&\quad = \; \alpha_1^{(\rho)}(p).
\end{aligned}$$

3.Fall: $r(p-1) = 2^{\rho+1} - 1$.
Dann ist $\alpha^{(\rho)}(p-1) = 1$, $s(p) = s(p-1) + 1$ und $r(p) = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
&s(p) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p) - 2^\rho\} \\
&\quad = \; s(p-1) \cdot 2^\rho + 2^\rho \\
&\quad = \; s(p-1) \cdot 2^\rho + \max\{0, r(p-1) - 2^\rho\} + 1 \\
&\quad = \; \alpha_1^{(\rho)}(p-1) + 1 \\
&\quad = \; \alpha_1^{(\rho)}(p).
\end{aligned}$$

Damit ist die Zwischenbehauptung 1 bewiesen.

Zwischenbehauptung 2: Es sei $\rho \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$0 \leq \alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \leq 2^\rho.$$

Beweis der Zwischenbehauptung 2:

Es gilt

$$n = (s(k) + s(n-k)) \cdot 2^{\rho+1} + r(k) + r(n-k).$$

1.Fall: $0 \leq r(k) < 2^\rho$ und $0 \leq r(n-k) < 2^\rho$.

Dann ist $0 \leq r(k) + r(n-k) < 2^{\rho+1}$, also $s(n) = s(k) + s(n-k)$ und $r(n) = r(k) + r(n-k)$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \\ &= \max\{r(n) - 2^\rho, 0\} \\ &\in \{0, \ldots, 2^\rho - 1\}. \end{aligned}$$

2.Fall: $2^\rho \leq r(k) < 2^{\rho+1}$ und $0 \leq r(n-k) < 2^\rho$.

Dann ist $2^\rho \leq r(k) + r(n-k) < 2^{\rho+1}$ oder $2^{\rho+1} \leq r(k) + r(n-k) < 3 \cdot 2^\rho$.

Im ersten dieser Unterfälle ist $s(n) = s(k) + s(n-k)$ und $r(n) = r(k) + r(n-k)$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \\ &= r(n) - r(k) \\ &= r(n-k) \\ &\in \{0, \ldots, 2^\rho - 1\}. \end{aligned}$$

Im zweiten Unterfall ist $s(n) = s(k) + s(n-k) + 1$ und $r(n) = r(k) + r(n-k) - 2^{\rho+1}$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \\ &= 2^\rho - (r(k) - 2^\rho) = 2^{\rho+1} - r(k) \\ &\in \{1, \ldots, 2^\rho\}. \end{aligned}$$

3.Fall: $2^\rho \leq r(n-k) < 2^{\rho+1}$ und $0 \leq r(k) < 2^\rho$.

Die Behauptung folgt durch Rollentausch unmittelbar aus dem 2.Fall.

4.Fall: $2^\rho \leq r(k) < 2^{\rho+1}$ und $2^\rho \leq r(n-k) < 2^{\rho+1}$.

Dann ist $2^{\rho+1} \leq r(k) + r(n-k) < 3 \cdot 2^\rho$ oder $3 \cdot 2^\rho \leq r(k) + r(n-k) < 2^{\rho+2}$.
Im beiden Unterfällen ist $s(n) = s(k) + s(n-k) + 1$
und $r(n) = r(k) + r(n-k) - 2^{\rho+1}$.
Im ersten Unterfall ist

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \\
&\quad = \quad 2^\rho - (r(k) - 2^\rho) - (r(n-k) - 2^\rho) \\
&\quad = \quad 3 \cdot 2^\rho - r(k) - r(n-k) \\
&\quad \in \quad \{1, \ldots, 2^\rho\}.
\end{aligned}$$

Im zweiten Unterfall ist

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \\
&\quad = \quad 2^\rho + (r(n) - 2^\rho) - (r(k) - 2^\rho) - (r(n-k) - 2^\rho) \\
&\quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Zwischenbehauptung 2 bewiesen.

<u>Zwischenbehauptung 3:</u> Ist $\rho \in \mathbb{N}$ und $\rho \geq \log_2(n)$, so ist $\alpha^{(\rho)}(\kappa) = 0$ für alle $\kappa \in \{0, \ldots, n-1\}$. Insbesondere verschwindet für alle $\rho \geq \log_2(n)$ der Term $\alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k)$.
<u>Beweis der Zwischenbehauptung 3:</u>
Anderenfalls wäre $n > \kappa \geq 2^\rho \geq 2^{\log_2(n)} = n$.
Damit ist auch die Zwischenbehauptung 3 bewiesen.

Mit $\rho_0 = \max\{\rho \in \mathbb{Z} \mid \rho < \log_2(n)\}$ ist $\rho_0 + 1 = \min\{\rho \in \mathbb{Z} \mid \rho \geq \log_2(n)\}$, und es folgt:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(n) - \alpha_1(k) - \alpha_1(n-k) \\
&\quad = \sum_{\rho=0}^{\rho_0} \alpha_1^{(\rho)}(n) - \alpha_1^{(\rho)}(k) - \alpha_1^{(\rho)}(n-k) \\
&\quad \leq \sum_{\rho=0}^{\rho_0} 2^\rho \\
&\quad = 2^{\rho_0+1} - 1 \\
&\quad = \min\{2^\rho \mid \rho \in \mathbb{Z} \text{ und } \rho \geq \log_2(n)\} - 1 \\
&\quad < 2n - 1 \quad \square
\end{aligned}$$

Lemma 4.7

Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$0 \leq \alpha(p) \leq \log_2(p) + 1.$

Beweis:

Es sei $p = \sum_{\rho=0}^{R} a_\rho 2^\rho$ mit $a_\rho \in \{0,1\}$ für alle $\rho \in \{0,\ldots,R-1\}$ und $a_R = 1$.
Dann gilt $\alpha(p) \leq R + 1 = \log_2(2^R) + 1 \leq \log_2(p) + 1.$ $\square$

Satz 4.8

Die Abbildungen $g, h : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}$ seien gegeben durch

$g(k) = 4k(n-k) + 2\alpha_1(k) + 2\alpha_1(n-k)$ *und*

$h(k) = 8k(n-k) - 2k + 2\alpha_1(k) + 2\alpha_1(n-k).$

Dann gilt:

(i) $g(k) = g(n-k)$, *falls* $k \leq \frac{n}{2}$;

(ii) $g(k) \geq g(k-1)$, *falls* $0 < k \leq \frac{n}{2} - \frac{\log_2(n) - 1}{4}$;

(iii) $h(k) \geq h(n-k)$, *falls* $k \leq \frac{n}{2}$;

(iv) $h(k) \geq h(k-1)$, *falls* $0 < k \leq \frac{n}{2} - \frac{\log_2(n) - 2}{8}$.

Beweis:

Wegen $\alpha(p) \leq \log_2(p) + 1$ für alle $p \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}
&g(k) - g(k-1) \\
&\quad = \quad -8k + 4n + 4 + 2\alpha(k-1) - 2\alpha(n-k) \\
&\quad \geq \quad -8k + 4n + 4 - 2\log_2(n) - 2 \\
&\quad = \quad -8k + 4n + 2 - 2\log_2(n)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&h(k) - h(k-1) \\
&\quad = \quad -16k + 8n + 6 + 2\alpha(k-1) - 2\alpha(n-k) \\
&\quad \geq \quad -16k + 8n + 6 - 2\log_2(n) - 2 \\
&\quad = \quad -16k + 8n + 4 - 2\log_2(n). \quad \square
\end{aligned}$$

★

Bei der Berechnung günstiger Parameter zur Behandlung des Immersionsproblems für die komplexen Fahnenmannigfaltigkeiten ist folgendes Minimierungsproblem zu lösen:

Lemma 4.9

Es sei $n \geq 2$ *eine ganze Zahl. Die Abbildung*

$$R_n : \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \,|\, x_\kappa \neq x_\lambda \textit{ für } \kappa \neq \lambda\} \to \mathbb{N}_0$$

sei gegeben durch $R_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{1 \leq \kappa < \lambda \leq n} \nu_2(x_\lambda - x_\kappa)$.

R_n *hat in* $(1, \ldots, n)$ *eine Minimalstelle.*

Beweis:

Zunächst bemerken wir, daß für eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ die Werte $R_n(x_1, \ldots, x_n)$, $R_n(x_1+1, x_2+1, \ldots, x_n+1)$ und $R_n(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ übereinstimmen.

Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für $n = 2$ ist die Behauptung klar.

Es sei also $n \geq 3$. $(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Minimalstelle von R_n. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $x_1, \ldots, x_m$ ungerade und $x_{m+1}, \ldots, x_n$ gerade sind. Ferner können wir annehmen, daß $m \geq \frac{n}{2}$ gilt. Ansonsten erhöhen wir jede Komponente um 1.

Es sei $x_\kappa = 2y_\kappa - 1$ für $\kappa \leq m$ und $x_\kappa = 2y_\kappa$ für $\kappa > m$.

Es ist $m \neq n$, da sich ansonsten der Widerspruch

$$\begin{aligned}
&R_n(x_1, \ldots, x_n)\\
&= \sum_{1 \leq \kappa < \lambda \leq n} \nu_2(2y_\lambda - 1 - 2y_\kappa + 1)\\
&= \binom{n}{2} + \sum_{1 \leq \kappa < \lambda \leq n} \nu_2(y_\lambda - y_\kappa)\\
&= \binom{n}{2} + R_n(y_1, \ldots, y_n)\\
&> R_n(y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}$$

ergeben würde.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&R_n(x_1, \ldots, x_n)\\
&= \sum_{1 \leq \kappa < \lambda \leq m} \nu_2(x_\lambda - x_\kappa) + \sum_{m+1 \leq \kappa < \lambda \leq n} \nu_2(x_\lambda - x_\kappa)\\
&= \sum_{1 \leq \kappa < \lambda \leq m} \nu_2(2y_\lambda - 2y_\kappa) + \sum_{m+1 \leq \kappa < \lambda \leq n} \nu_2(2y_\lambda - 2y_\kappa)\\
&= \binom{m}{2} + \sum_{1 \leq \kappa < \lambda \leq m} \nu_2(y_\lambda - y_\kappa) + \binom{n-m}{2} + \sum_{m+1 \leq \kappa < \lambda \leq n} \nu_2(y_\lambda - y_\kappa)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{m}{2} + R_m(y_1, \ldots, y_m) + \binom{n-m}{2} + R_{n-m}(y_{m+1}, \ldots, y_n) \\
&\geq \binom{m}{2} + R_m(1, \ldots, m) + \binom{n-m}{2} + R_{n-m}(1, \ldots, n-m) \\
&= R_n(1, 3, \ldots, 2m-1, 2, 4, \ldots, 2(n-m))
\end{aligned}$$

Also ist auch $(1, 3, \ldots, 2m-1, 2, 4, \ldots, 2(n-m))$ eine Minimalstelle.

Angenommen, es wäre $m \neq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, also $m > \frac{n+1}{2}$. Dies ist äquivalent zu $2m - 3 > n - 2$ und zu $n - m < m - 1$.

Im Widerspruch zur Minimalität von $R_n(1, 3, \ldots, 2m-1, 2, 4, \ldots, 2(n-m))$ stünde

$$\begin{aligned}
&R_n(1, 3, \ldots, 2m-3, 2m-1, 2, 4, \ldots, 2(n-m)) \\
-&R_n(1, 3, \ldots, 2m-3, 2(n-m+1), 2, 4, \ldots, 2(n-m)) \\
&= \sum_{1 \leq \kappa \leq m-1} \nu_2(2m-1-2\kappa+1) - \sum_{1 \leq \kappa \leq n-m} \nu_2(2(n-m+1)-2\kappa) \\
&= \sum_{1 \leq \kappa \leq m-1} \nu_2(2(m-\kappa)) - \sum_{1 \leq \kappa \leq n-m} \nu_2(2(n-m+1-\kappa)) \\
&= \sum_{1 \leq \kappa \leq m-1} \nu_2(2\kappa) - \sum_{1 \leq \kappa \leq n-m} \nu_2(2\kappa) \\
&= \sum_{n-m+1 \leq \kappa \leq m-1} \nu_2(2\kappa) \\
&= \sum_{n-m+1 \leq \kappa \leq m-1} (\nu_2(\kappa)+1) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Also ist $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, und es sind $(1, 3, \ldots, 2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1, 2, 4, \ldots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ und $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$ Minimalstellen. $\square$

★

Bei der Behandlung des Immersionsproblems für die quaternionalen Fahnenmannigfaltigkeiten ist die Determinante einer Matrix zu berechnen, die die folgende Gestalt hat:

Satz 4.10
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\det\left((1-x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1-y_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+y_\kappa)^{2\lambda-1}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n} \\ &= 2\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}\cdot\det\left(x_\kappa^{2\lambda-2}+y_\kappa^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen mit vollständiger Induktion nach $l \in \{1,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned} &\det\left((1-x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1-y_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+y_\kappa)^{2\lambda-1}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n} \\ &= 2^l\prod_{\nu=1}^{l}(2\nu-1) \\ &\cdot\det\begin{pmatrix} \overbrace{x_\kappa^{2\lambda-2}+y_\kappa^{2\lambda-2}}^{\lambda\in\{1,\dots,l\}} \\ \\ \underbrace{(1-x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1-y_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+y_\kappa)^{2\lambda-1}}_{\lambda\in\{l+1,\dots,n\}} \end{pmatrix}_{1\le\kappa\le n}. \end{aligned}$$

Für $l = 1$ ist die Gültigkeit der Gleichung trivial. Es gelte nun die Aussage für $l \in \{1,\dots,n-1\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\det\left((1-x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1-y_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+y_\kappa)^{2\lambda-1}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n} \\ &= 2^l\prod_{\nu=1}^{l}(2\nu-1) \\ &\cdot\det\begin{pmatrix} \overbrace{x_\kappa^{2\lambda-2}+y_\kappa^{2\lambda-2}}^{\lambda\in\{1,\dots,l\}} \\ \\ (1-x_\kappa)^{2l+1}+(1+x_\kappa)^{2l+1}+(1-y_\kappa)^{2l+1}+(1+y_\kappa)^{2l+1} \\ \\ \underbrace{(1-x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+x_\kappa)^{2\lambda-1}+(1-y_\kappa)^{2\lambda-1}+(1+y_\kappa)^{2\lambda-1}}_{\lambda\in\{l+2,\dots,n\}} \end{pmatrix}_{1\le\kappa\le n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(*)}{=} \quad 2^l \prod_{\nu=1}^{l} (2\nu - 1) \\
&\quad \cdot \det \left(\begin{array}{c} \overbrace{x_\kappa^{2\lambda-2} + y_\kappa^{2\lambda-2}}^{\lambda\in\{1,\ldots,l\}} \\ \sum_{j=0}^{2l+1} \binom{2l+1}{j} \left((-1)^j + 1\right) \left(x_\kappa^j + y_\kappa^j\right) \\ \underbrace{(1-x_\kappa)^{2\lambda-1} + (1+x_\kappa)^{2\lambda-1} + (1-y_\kappa)^{2\lambda-1} + (1+y_\kappa)^{2\lambda-1}}_{\lambda\in\{l+2,\ldots,n\}} \end{array} \right)_{1\le\kappa\le n} \\
&= \quad 2^l \prod_{\nu=1}^{l} (2\nu - 1) \\
&\quad \cdot \det \left(\begin{array}{c} \overbrace{x_\kappa^{2\lambda-2} + y_\kappa^{2\lambda-2}}^{\lambda\in\{1,\ldots,l\}} \\ \sum_{k=0}^{l} \binom{2l+1}{2k} 2 \left(x_\kappa^{2k} + y_\kappa^{2k}\right) \\ \underbrace{(1-x_\kappa)^{2\lambda-1} + (1+x_\kappa)^{2\lambda-1} + (1-y_\kappa)^{2\lambda-1} + (1+y_\kappa)^{2\lambda-1}}_{\lambda\in\{l+2,\ldots,n\}} \end{array} \right)_{1\le\kappa\le n} \\
&\overset{(**)}{=} \quad 2^{l+1} \prod_{\nu=1}^{l+1} (2\nu - 1) \\
&\quad \cdot \det \left(\begin{array}{c} \overbrace{x_\kappa^{2\lambda-2} + y_\kappa^{2\lambda-2}}^{\lambda\in\{1,\ldots,l+1\}} \\ \underbrace{(1-x_\kappa)^{2\lambda-1} + (1+x_\kappa)^{2\lambda-1} + (1-y_\kappa)^{2\lambda-1} + (1+y_\kappa)^{2\lambda-1}}_{\lambda\in\{l+2,\ldots,n\}} \end{array} \right)_{1\le\kappa\le n}
\end{aligned}
$$

Dabei gilt die Gleichheit $(*)$ aufgrund des binomischen Lehrsatzes und die Gleichheit $(**)$ aufgrund der Invarianz der Determinante unter elementaren Zeilenumformungen.

Die Aussage für $l = n$ liefert die Behauptung. $\square$

4.2 Nicht-Immersions-Sätze für komplexe Fahnenmannigfaltigkeiten

Bezeichnungen 4.11

(i) $n_1, \ldots, n_s$ *seien positive ganze Zahlen.*

(ii) $n = \sum\limits_{\sigma=1}^{s} n_\sigma,\ l_\sigma = 1 + \sum\limits_{j=1}^{\sigma-1} n_j,\ m_\sigma = \sum\limits_{j=1}^{\sigma} n_j.$

(iii) $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, s\}$ *sei gegeben durch*
$\tau(\lambda) = \sigma \iff l_\sigma \leq \lambda \leq m_\sigma.$

(iv) $G = U(n),\ U = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s).$

(v) $T = U(1) \times U(1) \times \cdots \times U(1).$

Beispiel 4.12

Für $s = 3$, $n_1 = 1$, $n_2 = 4$ *und* $n_3 = 3$ *liefern diese Bezeichnungen:*

σ	n_σ	l_σ	m_σ	$\tau^{-1}(\sigma)$
1	1	1	1	$\{1\}$
2	4	2	5	$\{2,3,4,5\}$
3	3	6	8	$\{6,7,8\}$

Satz 4.13

$U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ *ist der Zentralisator* $Z(S)$ *der toralen Untergruppe* $S = \left\{ diag\left(e^{ir_{\tau(1)}}, \ldots, e^{ir_{\tau(n)}}\right) \middle| r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{R} \right\}$ *in* $U(n)$.

Beweis: vgl. [Tor68], p.25 ff. $\square$

Satz 4.14

(i) *G und U erfüllen nach Bemerkung 3.6(ii) die Voraussetzungen der Bemerkung 3.8(i). T ist ein gemeinsamer maximaler Torus.*

(ii) *$\mathfrak{g}_0$ kann auf kanonische Weise mit der Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n)$ der schiefhermiteschen komplexen $n \times n$-Matrizen identifiziert werden. (vgl. [Ada69], 5.17(i).)*

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ kann nach [Kna96], I.15.4, auf kanonische Weise mit der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ der komplexen $n \times n$-Matrizen identifiziert werden.

Dies liefert $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

$\mathfrak{t}'^*$ ist der Spann der linearen Abbildungen L_λ ($\lambda = 1, \ldots, n$) mit $L_\lambda(D) = D_{\lambda\lambda}$ modulo der Relation $L_1 + \cdots + L_n = 0$.

(iii) *Die Weyl-Gruppe $W(G)$ ist auf kanonische Weise isomorph zu $\mathfrak{S}_n$. Die Weyl-Gruppe $W(U)$ ist auf kanonische Weise isomorph zu $\mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_s}$. (vgl. [Ada69], 5.17(i).)*

(iv) *Die Killing-Form von G induziert auf $\mathfrak{t}'^*$ die Bilinearform $\langle\, , \rangle$ mit*

$$\left\langle \sum_{1 \le \lambda \le n} a_\lambda L_\lambda, \sum_{1 \le \kappa \le n} b_\kappa L_\kappa \right\rangle$$
$$= \frac{1}{2n} \left(\sum_{1 \le \kappa \le n} a_\kappa b_\kappa - \frac{1}{n} \left(\sum_{1 \le \lambda \le n} a_\lambda \right) \left(\sum_{1 \le \kappa \le n} b_\kappa \right) \right).$$

(vgl. [FH96], p.213)

(v) *Ein System positiver Wurzeln von G ist gegeben durch*

$$\Sigma^+(G) = \{L_\lambda - L_\kappa \mid 1 \le \lambda < \kappa \le n\}.$$

(vgl. [Ada69], 5.28)

Die halbierte Summe der positiven Wurzeln ist gleich

$$\delta = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}(n-2\lambda+1)L_\lambda.$$

(vi) Für ganze Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ist $\sum\limits_{\lambda=1}^{n} \mu_{\tau(\lambda)} L_\lambda$ ein $W(U)$-invariantes und analytisch integrales Element aus $\mathfrak{t}'^*$. (vgl. [Kna96], IV,9.17) $\square$

Mit diesen Daten ist das entsprechende Hilbert-Polynom von G/U gleich

$$\begin{aligned}
H(t) & \\
&= \pm\frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}\left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(t\mu_{\tau(\nu)}+\frac{1}{2}(n-2\nu+1)\right)L_\nu, L_\kappa - L_\lambda\right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}\left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(n-2\nu+1)\right)L_\nu, L_\kappa - L_\lambda\right\rangle} \\
&= \pm\frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}\left(\left(t\mu_{\tau(\kappa)}+\frac{1}{2}(n-2\kappa+1)\right)-\left(t\mu_{\tau(\lambda)}+\frac{1}{2}(n-2\lambda+1)\right)\right)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}\left(\frac{1}{2}(n-2\kappa+1)-\frac{1}{2}(n-2\lambda+1)\right)} \\
&= \pm\frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}\left(\left(t\mu_{\tau(\kappa)}-\kappa\right)-\left(t\mu_{\tau(\lambda)}-\lambda\right)\right)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}(-\kappa+\lambda)}.
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 4.15

Sind $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ganze Zahlen, so existiert ein Element $z \in ch(G/U)$, so daß das zu $c_1(G/U)$ und z assozierte Hilbert-Polynom durch

$$H(t) = \pm\frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}\left(\left(t\mu_{\tau(\kappa)}-\kappa\right)-\left(t\mu_{\tau(\lambda)}-\lambda\right)\right)}{\prod\limits_{1\le\kappa\le n}(\kappa-1)!}$$

gegeben ist.

Um Nicht-Immersions-Ergebnisse zu erhalten, interessieren wir uns für die $\mu_1, \dots, \mu_s$, so daß $\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ minimal wird.
Dazu wählen wir eine Teilmenge $S \subset \{1, \dots, s\}$. k sei definiert durch $k = \sum_{\sigma \in S} n_\sigma$. Dann ist $n - k = \sum_{\sigma \notin S} n_\sigma$.
In dieser Situation bestimmen wir nun den minimalen Wert von $\nu_2(H(\frac{1}{2}))$ unter der Bedingung, daß μ_σ genau dann gerade ist, wenn $\sigma \in S$ gilt.
Es seien $\mu_1, \dots, \mu_s$ so gewählt, daß sie die obigen Bedingungen erfüllen. $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ seien durch $\mu_\sigma = 2\gamma_\sigma$ für $\sigma \in S$ und $\mu_\sigma = 2\gamma_\sigma - 1$ für $\sigma \notin S$ definiert.

$$
\begin{aligned}
&\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leq\kappa<\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left(\frac{1}{2}\left(\mu_{\tau(\kappa)} - \mu_{\tau(\lambda)}\right) + \lambda - \kappa\right)\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq\kappa<\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\notin S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\frac{1}{2}\left(\mu_{\tau(\kappa)} - \mu_{\tau(\lambda)}\right) + \lambda - \kappa\right)\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq\kappa,\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\frac{1}{2}\left(\mu_{\tau(\kappa)} - \mu_{\tau(\lambda)}\right) + \lambda - \kappa\right)\\
&\quad - \sum_{1\leq\kappa<\lambda\leq n} \nu_2\left(\lambda - \kappa\right)\\
&= \sum_{\substack{1\leq\kappa<\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left(\left(\gamma_{\tau(\kappa)} - \kappa\right) - \left(\gamma_{\tau(\lambda)} - \lambda\right)\right)\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq\kappa<\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\notin S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\gamma_{\tau(\kappa)} - \kappa\right) - \left(\gamma_{\tau(\lambda)} - \lambda\right)\right)\\
&\quad + \sum_{\substack{1\leq\kappa,\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(-\frac{1}{2} + \left(\gamma_{\tau(\kappa)} - \kappa\right) - \left(\gamma_{\tau(\lambda)} - \lambda\right)\right)\\
&\quad -\frac{n(n-1)}{2} + \alpha_1(n)\\
&= \sum_{\substack{1\leq\kappa<\lambda\leq n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left(\left(\gamma_{\tau(\kappa)} - \kappa\right) - \left(\gamma_{\tau(\lambda)} - \lambda\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$+ \sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\notin S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\gamma_{\tau(\kappa)}-\kappa\right)-\left(\gamma_{\tau(\lambda)}-\lambda\right)\right)$$
$$-k(n-k)-\frac{n(n-1)}{2}+\alpha_1(n)$$

Lemma 4.16

In der obigen Situation ist $\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *für*

$$\gamma_\sigma = 1+m_\sigma+\sum_{\substack{1\le\vartheta<\sigma\\ \vartheta\in S}} n_\vartheta,\ \textit{falls } \sigma\in S,\ \textit{und}$$

$$\gamma_\sigma = 1+m_\sigma+\sum_{\substack{1\le\vartheta<\sigma\\ \vartheta\notin S}} n_\vartheta,\ \textit{falls } \sigma\notin S,$$

minimal.

Beweis: Die erste Summe ist nach Lemma 4.9 minimal, wenn

$$\left\{\gamma_{\tau(\kappa)}-\kappa\,|\,1\le\kappa\le n,\tau(\kappa)\in S\right\}=\{1,2,\ldots,k\}$$

gilt. Durch die obige Festlegung von γ_σ für $\sigma\in S$ wird dies erreicht, wie wir durch vollständige Induktion über die Mächtigkeit von S zeigen. Ist $S=\emptyset$, so ist die Behauptung trivial. Ist $S\neq\emptyset$, so sei $\sigma=\max(S)$ und $S_1=S\setminus\{\sigma\}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\left\{\gamma_{\tau(\kappa)}-\kappa\,|\,1\le\kappa\le n,\tau(\kappa)\in S\right\}\\
&\quad= \left\{\gamma_{\tau(\kappa)}-\kappa\,|\,1\le\kappa\le n,\tau(\kappa)\in S_1\right\}\cup\left\{\gamma_\sigma-\kappa\,|\,l_\sigma\le\kappa\le m_\sigma,\right\}\\
&\quad= \{1,\ldots,k-n_\sigma\}\cup\{1+m_\sigma+(k-n_\sigma)-\kappa\,|\,l_\sigma\le\kappa\le m_\sigma,\}\\
&\quad= \{1,\ldots,k-n_\sigma\}\\
&\qquad\quad \cup\{1+m_\sigma+(k-n_\sigma)-m_\sigma,\ldots,1+m_\sigma+(k-n_\sigma)-l_\sigma\}\\
&\quad= \{1,\ldots,k-n_\sigma\}\cup\{1+k-n_\sigma,\ldots,k\}
\end{aligned}$$

Entsprechend verfahren wir für die zweite Summe. $\square$

Wir erhalten:

Lemma 4.17

Es seien $n_1, \ldots, n_s$ ganze Zahlen und S eine Teilmenge von $\{1, \ldots, s\}$. Mit den Bezeichnungen $n = \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma$ und $k = \sum_{\substack{1 \le \sigma \le s \\ \sigma \in S}} n_\sigma$ gilt:

Das Minimum aller mit geraden Zahlen $\{\mu_\sigma \,|\, \sigma \in S\}$ und mit ungeraden Zahlen $\{\mu_\sigma \,|\, \sigma \notin S\}$ konstruierbarer Werte $\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ ist der Wert

$$-2k(n-k) + \alpha_1(n) - \alpha_1(k) - \alpha_1(n-k).$$

Beweis: Mit den obigen Bezeichnungen ist der minimale Wert gleich

$$\begin{aligned}
& \sum_{1 \le \kappa < \lambda \le k} \nu_2(\lambda - \kappa) + \sum_{1 \le \kappa < \lambda \le n-k} \nu_2(\lambda - \kappa) \\
& -k(n-k) - \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_1(n) \\
= \; & \frac{k(k-1)}{2} - \alpha_1(k) + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} - \alpha_1(n-k) \\
& -\frac{n(n-1)}{2} + \alpha_1(n) - k(n-k) \\
= \; & \alpha_1(n) - \alpha_1(k) - \alpha_1(n-k) - 2k(n-k). \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 4.18

Die komplexe Fahnenmannigfaltigkeit $U(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ mit reeller Dimension $n^2 - \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma^2$ kann nicht in einen euklidischen Raum der Dimension $4k(n-k) - 2\alpha_1(n) + 2\alpha_1(k) + 2\alpha_1(n-k) - 1$ immersiert werden. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl, die als Summe $\sum_{\sigma \in S} n_\sigma$ mit $S \subset \{1, \ldots, s\}$ auftritt.

Bemerkung 4.19

(i) Für den Fall der komplexen Graßmann-Mannigfaltigkeiten ($s = 2$, $n_1 = k$, $n_2 = n - k$) stimmen die Ergebnisse mit denen in [Sug79] und [May97] überein.

(ii) *In [Lam75] ist das folgende positive Ergebnis bewiesen: Die komplexe Fahnenmannigfaltigkeit* $U(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ *ist eine* π*–Mannigfaltigkeit oder kann in einen euklidischen Raum der Dimension* $n^2 - s$ *immersiert werden.*

(iii) *Besonders gute Ergebnisse liefern diejenigen Werte für* k*, die „nahe“ bei* $\frac{n}{2}$ *liegen. (vgl. Satz 4.8)* □

4.3 Nicht-Immersions-Sätze für quaternionale Fahnenmannigfaltigkeiten

Bezeichnungen 4.20

(i) $n_1, \ldots, n_s$ *seien positive ganze Zahlen.*

(ii) $n = \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma$, $l_\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{\sigma-1} n_j$, $m_\sigma = \sum_{j=1}^{\sigma} n_j$.

(iii) $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, s\}$ *sei gegeben durch*

$\tau(\lambda) = \sigma \iff l_\sigma \leq \lambda \leq m_\sigma$.

(iv) $G = Sp(n)$, $U = Sp(n_1) \times \cdots \times Sp(n_s)$.

(v) $T = U(1) \times U(1) \times \cdots \times U(1)$.

Satz 4.21

(i) G *und* U *erfüllen die Voraussetzungen der Bemerkung 3.8(ii).* T *ist ein gemeinsamer maximaler Torus.*

(ii) $\mathfrak{g}_0$ *kann auf kanonische Weise mit der Lie-Algebra* $\mathfrak{sp}(n)$ *der schief-hermiteschen quaternionalen* $n \times n$*-Matrizen identifiziert werden. (vgl. [BD85], I.2.19) Nach den Ausführungen in [Kna96], pp.35-36, kann* $\mathfrak{g}_0$ *mit der Lie-Algebra* $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2n)$ *identifiziert werden.*

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ *kann mit der Lie-Algebra* $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ *identifiziert werden.*

Dies liefert, daß $\mathfrak{g}$ *einfach ist und*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' = \left\{ \left(\begin{array}{cc} D_1 & 0 \\ 0 & -D_1 \end{array} \right) \middle| \, D_1 \textit{ ist Diagonalmatrix in } \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \right\}$$

gilt.

$\mathfrak{t}^*$ *ist der Spann der linearen Abbildungen* L_λ $(\lambda = 1, \ldots, n)$ *mit* $L_\lambda(D) = D_{\lambda\lambda}$.

(iii) *Die Weyl-Gruppe $W(G)$ ist auf kanonische Weise isomorph zum semidirekten Produkt aus $\mathfrak{S}_n$ und $\{\pm 1\}^n$, wobei die Operation von $\mathfrak{S}_n$ auf $\{\pm 1\}^n$ durch die Standardoperation auf der Menge der Indizes gegeben ist.*

Die Weyl-Gruppe $W(U)$ ist auf kanonische Weise isomorph zum entsprechenden semidirekten Produkt aus $\mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_s}$ und $\{\pm 1\}^n$. (vgl. [BD85], IV.3.8)

(iv) *Die Killing-Form von G induziert auf $\mathfrak{t}'^*$ die Bilinearform $\langle\, , \rangle$ mit*

$$\left\langle \sum_{1 \leq \lambda \leq n} a_\lambda L_\lambda, \sum_{1 \leq \kappa \leq n} b_\kappa L_\kappa \right\rangle = \frac{1}{4n+4} \left(\sum_{1 \leq \kappa \leq n} a_\kappa b_\kappa \right).$$

(vgl. [FH96], p.241)

(v) *Ein System positiver Wurzeln von G ist gegeben durch*

$$\Sigma^+(G) = \{L_\lambda - L_\kappa,\ L_\lambda + L_\kappa,\ 2L_\lambda \,|\, 1 \leq \lambda < \kappa \leq n\}.$$

(vgl. [Ada69], 5.28) Die halbierte Summe ist gleich

$$\delta = \sum_{\lambda=1}^{n} (n - \lambda + 1) L_\lambda.$$

(vi) *Ein System positiver Wurzeln von U ist gegeben durch*

$$\Sigma^+(U) = \bigcup_{\sigma=1}^{s} \{L_\lambda - L_\kappa,\ L_\lambda + L_\kappa,\ 2L_\lambda \,|\, l_\sigma \leq \lambda < \kappa \leq m_\sigma\}.$$

Die halbierte Summe ist gleich

$$\delta' = \sum_{\lambda=1}^{n} (m_{\tau(\lambda)} - \lambda + 1) L_\lambda.$$

(vii) Für ganze Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ist

$$\left\{ \sum_{1 \le \lambda \le n} \varepsilon_\lambda \mu_{\tau(\lambda)} L_\lambda \,\middle|\, \varepsilon_\kappa \in \left\{ \begin{array}{ll} \{\pm 1\}, & \textit{falls } \mu_{\tau(\kappa)} \neq 0 \\ \{1\}, & \textit{falls } \mu_{\tau(\kappa)} = 0 \end{array} \right. \right\} (*)$$

eine $W(U)$-invariante Menge von analytisch integralen Elementen aus $\mathfrak{t}^*$. (vgl. [Kna96], IV.9.19)

Bemerkung 4.22

In der Familie

$$\left(\sum_{1 \le \lambda \le n} \varepsilon_\lambda \mu_{\tau(\lambda)} L_\lambda \,\middle|\, \varepsilon_\kappa \in \{\pm 1\}, \textit{ falls } 1 \le \kappa \le n \right)$$

kommt jedes Element aus $(*)$ genau $\left(2^{\sum\limits_{\substack{1 \le \sigma \le s \\ \mu_\sigma = 0}} n_\sigma} \right)$*-mal vor.* □

★

Mit diesen Daten ist das entsprechende Hilbert-Polynom von G/U gegeben durch

$$2^{\sum\limits_{\substack{1 \le \sigma \le s \\ \mu_\sigma = 0}} n_\sigma} H(t)$$

$$= \pm \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1} \left[\frac{\prod\limits_{1 \le \kappa \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (\varepsilon_\nu t \mu_{\tau(\nu)} + m_{\tau(\nu)} - \nu + 1) L_\nu, 2L_\kappa \right\rangle}{\prod\limits_{1 \le \kappa \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) L_\nu, 2L_\kappa \right\rangle} \right.$$

$$\cdot \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (\varepsilon_\nu t \mu_{\tau(\nu)} + m_{\tau(\nu)} - \nu + 1) L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle}$$

$$
\left. \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (\varepsilon_\nu t\mu_{\tau(\nu)} + m_{\tau(\nu)} - \nu + 1) L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n - \nu + 1) L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle} \right]
$$

$$
= \pm \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \left[\frac{\prod\limits_{1\le\kappa\le n} 2\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)}{\prod\limits_{1\le\kappa\le n} 2\,(n-\kappa+1)} \right.
$$

$$
\cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right) + \left(\varepsilon_\lambda t\mu_{\tau(\lambda)} + m_{\tau(\lambda)} - \lambda + 1\right)\right)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa+1) + (n-\lambda+1))}
$$

$$
\left. \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right) - \left(\varepsilon_\lambda t\mu_{\tau(\lambda)} + m_{\tau(\lambda)} - \lambda + 1\right)\right)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa+1) - (n-\lambda+1))} \right]
$$

$$
= \pm \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \left[\prod_{1\le\kappa\le n} \left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right) \right.
$$

$$
\left. \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^2 - \left(\varepsilon_\lambda t\mu_{\tau(\lambda)} + m_{\tau(\lambda)} - \lambda + 1\right)^2\right) \right]
$$

$$
\cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa+1) - (n-\lambda+1))^{-1}
$$

$$
\cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa+1) + (n-\lambda+1))^{-1}
$$

$$
\cdot \prod_{1\le\kappa\le n} (n-\kappa+1)^{-1}
$$

$$
= \pm \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \left[\det\left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n} \right.
$$

$$
\left. \cdot \prod_{1\le\kappa\le n} \left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right) \right]
$$

$$
\cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (\lambda-\kappa)^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (2n-\kappa-\lambda+2)^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n} (n-\kappa+1)^{-1}
$$

$$= \pm \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm 1} \left[\det\left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} \right)_{1\le\kappa,\lambda\le n} \right]$$

$$\cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (\lambda-\kappa)^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (\kappa+\lambda)^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n} \kappa^{-1}$$

$$= \pm \prod_{1\le\kappa\le n} (\kappa-1)!^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n} \kappa! \cdot \prod_{1\le\kappa\le n} (2\kappa-1)!^{-1} \cdot n!^{-1}$$

$$\cdot \det\left(\left(-t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} + \left(t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} \right)_{1\le\kappa,\lambda\le n}$$

$$= \pm \prod_{1\le\kappa\le n} (2\kappa-1)!^{-1}$$

$$\cdot \det\left(\left(-t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} + \left(t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} \right)_{1\le\kappa,\lambda\le n}$$

An dieser Stelle wollen wir für alle $\sigma \in \{1,\ldots,s\}$ innerhalb des „σ-ten Blocks“ (d.h. für $\kappa \in \{l_\sigma,\ldots,m_\sigma\}$) elementare Zeilenumformungen durchführen.

Bezeichnungen 4.23

Für alle $r \in \mathbb{Z}$ führen wir auf der Menge der $n_\sigma \times n$-Matrizen die Relationen $\sim_r$ ein:

$A_1 \sim_r A_2 \iff$

$$\textit{Für alle } (n-n_\sigma)\times n\textit{-Matrizen } B \textit{ gilt: } \det\begin{pmatrix} A_1 \\ \\ B \end{pmatrix} = \pm 2^r \det\begin{pmatrix} A_2 \\ \\ B \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\left(\left(-t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} + \left(t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa + 1\right)^{2\lambda-1} \right)_{\substack{l_\sigma\le\kappa\le m_\sigma \\ 1\le\lambda\le n}}$$

$$\sim_0 \left((-t\mu_\sigma + \kappa)^{2\lambda-1} + (t\mu_\sigma + \kappa)^{2\lambda-1} \right)_{\substack{1\le\kappa\le n_\sigma \\ 1\le\lambda\le n}}$$

$$\sim_0 \begin{pmatrix} (-t\mu_\sigma + 1)^{2\lambda-1} + (t\mu_\sigma + 1)^{2\lambda-1} \\ \\ (-t\mu_\sigma + 2)^{2\lambda-1} + (t\mu_\sigma + 2)^{2\lambda-1} \\ \\ \underbrace{(-t\mu_\sigma + \kappa)^{2\lambda-1} + (t\mu_\sigma + \kappa)^{2\lambda-1}}_{3\le\kappa\le n_\sigma} \end{pmatrix}_{1\le\lambda\le n}$$

$$\sim_{-1}\begin{pmatrix} (-t\mu_\sigma+1)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma+1)^{2\lambda-1}+(-t\mu_\sigma+1)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma+1)^{2\lambda-1} \\ (-t\mu_\sigma+2)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma)^{2\lambda-1}+(-t\mu_\sigma)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma+2)^{2\lambda-1} \\ \underbrace{(-t\mu_\sigma+\kappa)^{2\lambda-1}-(-t\mu_\sigma+\kappa-2)^{2\lambda-1}-(t\mu_\sigma+\kappa-2)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma+\kappa)^{2\lambda-1}}_{3\leq\kappa\leq n_\sigma} \end{pmatrix}_{1\leq\lambda\leq n}$$

$$\sim_0 \Big((-t\mu_\sigma+\kappa)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma-\kappa+2)^{2\lambda-1}$$

$$+(-t\mu_\sigma-\kappa+2)^{2\lambda-1}+(t\mu_\sigma+\kappa)^{2\lambda-1}\Big)_{\substack{1\leq\kappa\leq n_\sigma\\1\leq\lambda\leq n}}$$

$$\sim_0 \Big(\big(-t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}$$

$$+\big(t\mu_{\tau(\kappa)}-\kappa+l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}$$

$$+\big(-t\mu_{\tau(\kappa)}-\kappa+l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}$$

$$+\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}\Big)_{\substack{l_\sigma\leq\kappa\leq m_\sigma\\1\leq\lambda\leq n}}$$

Dabei wurde im Schritt mit $\sim_{-1}$ für $\kappa=n_\sigma,\ldots,3$ das (-1)-fache der $(\kappa-2)$-ten Zeile zur κ-ten Zeile addiert, die erste Zeile verdoppelt und zur zweiten Zeile die Nullzeile addiert. Wir beachten, daß die obigen Umformungen auch für die Fälle $n_\sigma\in\{1,2\}$ gültig sind.

Folglich ist das Hilbert-Polynom gegeben durch

$$\begin{aligned} &2^{\sum\limits_{\substack{1\leq\sigma\leq s\\ \mu_\sigma=0}} n_\sigma} H(t) \\ &= \pm 2^{-s}\prod_{1\leq\kappa\leq n}(2\kappa-1)!^{-1} \\ &\quad\cdot\det\Big(\big(-t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}+\big(t\mu_{\tau(\kappa)}-\kappa+l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1} \\ &\quad+\big(-t\mu_{\tau(\kappa)}-\kappa+l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}+\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}+1\big)^{2\lambda-1}\Big)_{1\leq\kappa,\lambda\leq n} \\ &\overset{4.10}{=} \pm 2^{1-s}\det\Big(\big(-t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\big)^{2\lambda-2}+\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\big)^{2\lambda-2}\Big)_{1\leq\kappa,\lambda\leq n} \\ &\quad\cdot(n-1)!^{-1}\cdot\prod_{1\leq\kappa\leq n-1}(2\kappa-1)!^{-1} \end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 4.24

Sind $\mu_1, \dots, \mu_s$ ganze Zahlen, so existiert ein Element $z \in ch(G/U)$, so daß das zu $0 \in H^2(G/U)$ und z assozierte Hilbert-Polynom durch

$$\begin{aligned} H(t) &= \pm \det\left(\left(-t\mu_{\tau(\kappa)} + \kappa - l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2} + \left(t\mu_{\tau(\kappa)} + \kappa - l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n} \\ &\qquad \cdot (n-1)!^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n-1} (2\kappa-1)!^{-1} \cdot 2^{1-s-\sum\limits_{\substack{1\le\sigma\le s \\ \mu_\sigma=0}} n_\sigma} \end{aligned}$$

gegeben ist. $\square$

★

Um Nicht-Immersions-Resultate zu erhalten, wählen wir $t = \frac{1}{2}$ und, motiviert durch die Ergebisse über die komplexen Fahnenmannigfaltigkeiten, die ganzen Zahlen $\mu_1, \dots, \mu_s$ wie folgt:
Es sei $S \subset \{1, \dots, s\}$, $k = \sum_{\sigma\in S} n_\sigma$, $l = \sum_{\sigma\notin S} n_\sigma = n - k$, und

$$\mu_\sigma = \begin{cases} 1 + 2\sum\limits_{\substack{\theta<\sigma \\ \sigma\in S}} n_\theta, & \text{falls } \sigma \in S \\ 2\sum\limits_{\substack{\theta<\sigma \\ \sigma\notin S}} n_\theta, & \text{falls } \sigma \notin S \end{cases}.$$

O.B.d.A. sei S von der Form $S = \{1, \dots, p\}$ mit $p \in \{0, \dots, s\}$. Dann ist $k = m_p$, $l = n - m_p$, und

$$\mu_\sigma = \begin{cases} 2l_\sigma - 1, & \text{falls } 1 \le \sigma \le p \\ 2(l_\sigma - k - 1), & \text{falls } p+1 \le \sigma \le s \end{cases}.$$

★

Wir führen elementare Zeilenumformungen in den ersten k Zeilen durch:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(-\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le k\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&= \quad \left(\left(\frac{1}{2}-2l_{\tau(\kappa)}+\kappa\right)^{2\lambda-2}+\left(-\frac{1}{2}+\kappa\right)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le k\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&= \quad \left(\left(-\frac{1}{2}+2l_{\tau(\kappa)}-\kappa\right)^{2\lambda-2}+\left(-\frac{1}{2}+\kappa\right)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le k\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&\sim_p \quad \left(\left(-\frac{1}{2}+\kappa\right)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le k\\ 1\le\lambda\le n}}.
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Relation aus der Tatsache, daß für alle $\sigma\in\{1,\dots,p\}$ und alle $\kappa\in\{l_\sigma,\dots,m_\sigma\}$ gilt:

- Falls $\kappa=l_\sigma$, so ist $-\frac{1}{2}+2l_{\tau(\kappa)}-\kappa=-\frac{1}{2}+\kappa$.
- Falls $l_\sigma+1\le\kappa\le 2l_\sigma-1$, so ist $\frac{1}{2}\le-\frac{1}{2}+2l_{\tau(\kappa)}-\kappa<-\frac{1}{2}+\kappa$.
- Falls $\kappa\ge 2l_\sigma$, so ist $\frac{1}{2}\le-\left(-\frac{1}{2}+2l_{\tau(\kappa)}-\kappa\right)<-\frac{1}{2}+\kappa$.

Also ist

$$\left(\left(-\frac{1}{2}+2l_{\tau(\kappa)}-\kappa\right)^{2\lambda-2}+\left(-\frac{1}{2}+\kappa\right)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le k\\ 1\le\lambda\le n}}$$

eine Matrix von der Form

$$\left(x_\kappa^{2\lambda-2}+y_\kappa^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le k\\ 1\le\lambda\le n}},$$

wobei für alle $\kappa\in\{1,\dots,k\}$ ein Element $\nu\in\{1,\dots,\kappa\}$ existiert, so daß $x_\kappa=y_\nu$ ist. Also läßt sich die Matrix mit elementaren Zeilenumformungen schrittweise von oben nach unten vereinfachen.

Wir führen elementare Zeilenumformungen in den letzten $n-k$ Zeilen durch:

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(-\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{k+1\le\kappa\le n\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&= \left(\left(k+1+\kappa-2l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}+(-k-1+\kappa)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{k+1\le\kappa\le n\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&= \left(\left(-k-1-\kappa+2l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}+(-k-1+\kappa)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{k+1\le\kappa\le n\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&\sim_{s-p-1+n_{p+1}} \left((-k-1+\kappa)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{k+1\le\kappa\le n\\ 1\le\lambda\le n}}\\
&= \left((-1+\kappa)^{2\lambda-2}\right)_{\substack{1\le\kappa\le n-k\\ 1\le\lambda\le n}}
\end{aligned}
$$

Dabei folgt die vorletzte Relation aus der Tatsache, daß für alle $\sigma\in\{p+1,\ldots,s\}$ und alle $\kappa\in\{l_\sigma,\ldots,m_\sigma\}$ gilt:

- Falls $\sigma=p+1$, so ist
  $k+1+\kappa-2l_{\tau(\kappa)}=-k-1+\kappa.$
- Falls $\sigma\in\{p+2,\ldots,s\}$ und $\kappa=l_\sigma$, so ist
  $-k-1-\kappa+2l_{\tau(\kappa)}=-k-1+\kappa.$
- Falls $\sigma\in\{p+2,\ldots,s\}$ und $l_\sigma+1\le\kappa\le 2l_\sigma-k-1$, so ist
  $0\le -k-1-\kappa+2l_{\tau(\kappa)}<-1-k+\kappa.$
- Falls $\sigma\in\{p+2,\ldots,s\}$ und $\kappa\ge 2l_\sigma-k$, so ist
  $1\le k+1+\kappa-2l_{\tau(\kappa)}<-1-k+\kappa.$

★

Mit diesen Daten ist das Hilbert-Polynom von G/U gegeben durch

$$
\begin{aligned}
&H\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \pm\det\begin{pmatrix}\left(\left(-\frac{1}{2}+\kappa\right)^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa\le k}\\ \left((-1+\kappa)^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa\le n-k}\end{pmatrix}_{1\le\lambda\le n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot (n-1)!^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n-1} (2\kappa-1)!^{-1} \\
= \;& \pm \prod_{1\le\kappa<\lambda\le k} (\lambda-\kappa) \prod_{1\le\kappa<\lambda\le k} (-1+\lambda+\kappa) \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n-k} (\lambda-\kappa) \\
&\cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n-k} (-2+\lambda+\kappa) \prod_{\substack{1\le\kappa\le k\\1\le\lambda\le n-k}} \left(-\frac{1}{2}+\lambda-\kappa\right) \prod_{\substack{1\le\kappa\le k\\1\le\lambda\le n-k}} \left(-\frac{3}{2}+\lambda+\kappa\right) \\
&\cdot (n-1)!^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n} (2\kappa-1)!^{-1} \\
= \;& \pm \prod_{1\le\kappa\le k} (\kappa-1)! \prod_{1\le\kappa\le k} \frac{(2\kappa-2)!}{(\kappa-1)!} \prod_{1\le\kappa\le n-k} (\kappa-1)! \\
&\cdot \prod_{1\le\kappa\le n-k-1} \frac{(2\kappa-1)!}{(\kappa-1)!} \prod_{\substack{1\le\kappa\le k\\1\le\lambda\le n-k}} \left(-\frac{1}{2}+\lambda-\kappa\right) \prod_{\substack{1\le\kappa\le k\\1\le\lambda\le n-k}} \left(-\frac{3}{2}+\lambda+\kappa\right) \\
&\cdot (n-1)!^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n-1} (2\kappa-1)!^{-1} \\
= \;& \pm \prod_{1\le\kappa\le k} (2\kappa-2)! \cdot \prod_{1\le\kappa\le n-k-1} (2\kappa-1)! \cdot (n-k-1)! \\
&\cdot \prod_{\substack{1\le\kappa\le k\\1\le\lambda\le n-k}} \left(-\frac{1}{2}+\lambda-\kappa\right) \prod_{\substack{1\le\kappa\le k\\1\le\lambda\le n-k}} \left(-\frac{3}{2}+\lambda+\kappa\right) \\
&\cdot (n-1)!^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa\le n-1} (2\kappa-1)!^{-1}
\end{aligned}
$$

★

Die für das Nicht-Immersions-Problem wichtige Größe $\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ berechnen wir als

$$
\begin{aligned}
&\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \sum_{1\le\kappa\le k} (2\kappa-2) - \sum_{1\le\kappa\le k} \alpha(2\kappa-2) \\
&\quad + \sum_{1\le\kappa\le n-k-1} (2\kappa-1) - \sum_{1\le\kappa\le n-k-1} \alpha(2\kappa-1) \\
&\quad + (n-k-1) - \alpha(n-k-1) \\
&\quad - 2k(n-k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{1\le\kappa\le n-1}(2\kappa-1)-(n-1)+\sum_{1\le\kappa\le n-1}\alpha(2\kappa-1)+\alpha(n-1)\\
= \; & k(k-1)-\sum_{1\le\kappa\le k}\alpha(\kappa-1)\\
& +(n-k-1)^2-(n-k-1)-\sum_{1\le\kappa\le n-k-1}\alpha(\kappa-1)\\
& +(n-k-1)-\alpha(n-k-1)\\
& -2k(n-k)\\
& -(n-1)^2-(n-1)+(n-1)+\sum_{1\le\kappa\le n-1}\alpha(\kappa-1)+\alpha(n-1)\\
= \; & k-4k(n-k)-\alpha_1(k)-\alpha_1(n-k)+\alpha_1(n)
\end{aligned}
$$

Satz 4.25

Die quaternionale Fahnenmannigfaltigkeit $Sp(n)/Sp(n_1)\times\cdots\times Sp(n_s)$ mit reeller Dimension $2\left(n^2-\sum_{\sigma=1}^{s}n_\sigma^2\right)$ kann nicht in einen euklidischen Raum der Dimension

$$8k(n-k)-2k+2\alpha_1(k)+2\alpha_1(n-k)-2\alpha_1(n)-1$$

immersiert werden. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl, die als Summe $\sum_{\sigma\in S}n_\sigma$ mit $S\subset\{1,\ldots,s\}$ auftritt.

Bemerkung 4.26

(i) *Für den Fall der quaternionalen Graßmann–Mannigfaltigkeiten ($s=2$, $n_1=k$, $n_2=n-k$) stimmen die Ergebnisse mit denen in [May97] überein.*

(ii) *In [Lam75] ist das folgende positive Ergebnis bewiesen: Die quaternionale Fahnenmannigfaltigkeit $Sp(n)/Sp(n_1)\times\cdots\times Sp(n_s)$ ist eine π–Mannigfaltigkeit oder kann in einen euklidischen Raum der Dimension $2n^2-n-s$ immersiert werden.* $\square$

4.4 Nicht-Immersions-Sätze für reelle Fahnenmannigfaltigkeiten

Bezeichnungen 4.27

(i) $n_1, \dots, n_s$ *seien positive ganze Zahlen.*

(ii) $n = \sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma$, $l_\sigma = 1 + \sum_{j=1}^{\sigma-1} n_j$, $m_\sigma = \sum_{j=1}^{\sigma} n_j$.

(iii) $\tau : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, s\}$ *sei gegeben durch*
$\tau(\lambda) = \sigma \iff l_\sigma \leq \lambda \leq m_\sigma$.

(iv) $G = SO(2n)$, $U = SO(2n_1) \times \cdots \times SO(2n_s)$.

(v) $T = SO(2) \times SO(2) \times \cdots \times SO(2)$.

Satz 4.28

(i) G *und* U *erfüllen die Voraussetzungen der Bemerkung 3.8(ii).* T *ist ein gemeinsamer maximaler Torus.*

(ii) $\mathfrak{g}_0$ *kann auf kanonische Weise mit der Lie-Algebra* $\mathfrak{so}(2n)$ *der schiefsymmetrischen reellen* $(2n) \times (2n)$*-Matrizen identifiziert werden. (vgl. [BD85], I.2.15)*

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ *kann mit der Lie-Algebra* $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ *der schiefsymmetrischen komplexen* $(2n) \times (2n)$*-Matrizen identifiziert werden. (vgl. [Kna96], I.15.4)*

Dies liefert, daß $\mathfrak{g}$ *einfach ist und*

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' = \left\{ diag \left(\left(\begin{array}{cc} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} 0 & z_n \\ -z_n & 0 \end{array} \right) \middle| \; z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right) \right\}$$

gilt.

$\mathfrak{t}^*$ ist der Spann der linearen Abbildungen L_λ ($\lambda = 1, \ldots, n$) mit

$$L_\lambda\left(diag\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & z_1 \\ -z_1 & 0 \end{array}\right), \ldots, \left(\begin{array}{cc} 0 & z_n \\ -z_n & 0 \end{array}\right)\right)\right) = z_\lambda.$$

(iii) *Die Weyl-Gruppe $W(G)$ ist auf kanonische Weise isomorph zum semidirekten Produkt aus $\mathfrak{S}_n$ und $\left\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n \,\middle|\, \prod_{\kappa=1}^{n} \varepsilon_\kappa = 1\right\}$, wobei die Operation von $\mathfrak{S}_n$ auf $\left\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n \,\middle|\, \prod_{\kappa=1}^{n} \varepsilon_\kappa = 1\right\}$ durch die Standardoperation auf der Menge der Indizes gegeben ist.*

Die Weyl-Gruppe $W(U)$ ist auf kanonische Weise isomorph zum direkten Produkt aus entsprechenden semidirekten Produkt aus $\mathfrak{S}_{n_\sigma}$ und $\left\{(\varepsilon_{l_\sigma}, \ldots, \varepsilon_{m_\sigma}) \in \{\pm 1\}^{n_\sigma} \,\middle|\, \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma} \varepsilon_\kappa = 1\right\}$. (vgl. [FH96], p.271) (vgl. [BD85], IV.3.6)

(iv) *Die Killing-Form von G induziert auf $\mathfrak{t}'^*$ die Bilinearform $\langle\, ,\, \rangle$ mit*

$$\left\langle \sum_{1 \leq \lambda \leq n} a_\lambda L_\lambda, \sum_{1 \leq \kappa \leq n} b_\kappa L_\kappa \right\rangle = \frac{1}{4n-4}\left(\sum_{1 \leq \kappa \leq n} a_\kappa b_\kappa\right).$$

(vgl. [FH96], p.272)

(v) *Ein System positiver Wurzeln von G ist gegeben durch*

$$\Sigma^+(G) = \{L_\lambda - L_\kappa,\, L_\lambda + L_\kappa \,|\, 1 \leq \lambda < \kappa \leq n\}.$$

(vgl. [Ada69], 5.28)

Die halbierte Summe ist gleich

$$\delta = \sum_{\lambda=1}^{n} (n - \lambda) L_\lambda.$$

(vi) *Ein System positiver Wurzeln von U ist gegeben durch*

$$\Sigma^+(U) = \bigcup_{\sigma=1}^{s} \{L_\lambda - L_\kappa,\ L_\lambda + L_\kappa,\ |\ l_\sigma \leq \lambda < \kappa \leq m_\sigma\}.$$

Die halbierte Summe ist gleich

$$\delta' = \sum_{\lambda=1}^{n} (m_{\tau(\lambda)} - \lambda) L_\lambda.$$

(vii) *Für ganze Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ist*

$$\left\{ \sum_{1 \leq \lambda \leq n} \varepsilon_\lambda \mu_{\tau(\lambda)} L_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon_\kappa \in \begin{cases} \{\pm 1\}, & \text{falls } \mu_{\tau(\kappa)} \neq 0 \\ \{1\}, & \text{falls } \mu_{\tau(\kappa)} = 0 \end{cases} \\ \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma} \varepsilon_\kappa = 1 \text{ für alle } \sigma \in \{1, \ldots, s\} \end{array} \right\} (*)$$

eine $W(U)$-invariante Menge von analytisch integralen Elementen aus $\mathfrak{t}^*$. *(vgl. [Kna96], IV.9.20)*

Bemerkung 4.29

In der Familie

$$\left(\sum_{1 \leq \lambda \leq n} \varepsilon_\lambda \mu_{\tau(\lambda)} L_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \varepsilon_\kappa \in \{\pm 1\}, \text{ falls } 1 \leq \kappa \leq n \\ \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma} \varepsilon_\kappa = 1 \text{ für alle } \sigma \in \{1, \ldots, s\} \end{array} \right)$$

kommt jedes Element aus $(*)$ genau $\left(2^{\sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq s \\ \mu_\sigma = 0}} (n_\sigma - 1)} \right)$*-mal vor.*

Bemerkung 4.30

G/U ist Spin–Mannigfaltigkeit, da $w_2(G/U) = 0$ gilt.

Beweis:

Das Tangentialbündel von G/U ist äquivariant isomorph zum Vektorraumbündel $\bigoplus_{1 \leq \sigma < \theta \leq s} \xi_\sigma \otimes \xi_\theta$, wobei $\xi_1, \ldots, \xi_s$ die kanonischen Bündel über G/U sind. Da $\xi_1, \ldots, \xi_s$ orientierbar sind, gilt $w_2(G/U) = \prod_{1\le\sigma<\theta\le s} (2n_\sigma w_2(\xi_\theta) + 2n_\theta w_2(\xi_\sigma)) = 0.$ □

★

Mit diesen Daten ist das entsprechende Hilbert-Polynom von G/U gegeben durch

$$
\begin{aligned}
2^{\sum\limits_{\substack{1\le\sigma\le s\\ \mu_\sigma=0}}(n_\sigma-1)} & H(t) \\
= \ \pm & \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1\\ \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma}\varepsilon_\kappa=1\ \forall\sigma}} \left[\frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^n (\varepsilon_\nu t\mu_{\tau(\nu)} + m_{\tau(\nu)} - \nu) L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^n (n-\nu) L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle} \right. \\
& \left. \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^n (\varepsilon_\nu t\mu_{\tau(\nu)} + m_{\tau(\nu)} - \nu) L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^n (n-\nu) L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle} \right] \\
= \ \pm & \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1\\ \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma}\varepsilon_\kappa=1\ \forall\sigma}} \left[\frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa\right) - \left(\varepsilon_\lambda t\mu_{\tau(\lambda)} + m_{\tau(\lambda)} - \lambda\right) \right)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa)-(n-\lambda))} \right. \\
& \left. \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa\right) + \left(\varepsilon_\lambda t\mu_{\tau(\lambda)} + m_{\tau(\lambda)} - \lambda\right) \right)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa)+(n-\lambda))} \right] \\
= \ \pm & \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa)-(n-\lambda))^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa)+(n-\lambda))^{-1} \\
& \cdot \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1\\ \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma}\varepsilon_\kappa=1\ \forall\sigma}} \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left(\left(\varepsilon_\kappa t\mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa\right)^2 - \left(\varepsilon_\lambda t\mu_{\tau(\lambda)} + m_{\tau(\lambda)} - \lambda\right)^2 \right) \\
= \ \pm & \sum_{\substack{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n=\pm1\\ \prod_{\kappa=l_\sigma}^{m_\sigma}\varepsilon_\kappa=1\ \forall\sigma}} \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (\lambda-\kappa)^{-1} \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (2n-\kappa-\lambda)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot \det \left(\left(\varepsilon_\kappa t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} \right)_{1 \le \kappa, \lambda \le n} \\
\overset{(**)}{=} \quad & \pm 2^{-s} \prod_{1 \le \kappa < \lambda \le n} (\lambda - \kappa)^{-1} \cdot \prod_{1 \le \kappa < \lambda \le n} (2n - \kappa - \lambda)^{-1} \\
& \cdot \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1} \det \left(\left(\varepsilon_\kappa t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} \right)_{1 \le \kappa, \lambda \le n} \\
= \quad & \pm 2^{-s} \prod_{1 \le \kappa < \lambda \le n} (\lambda - \kappa)^{-1} \cdot \prod_{1 \le \kappa < \lambda \le n} (\kappa + \lambda - 2)^{-1} \\
& \cdot \det \left(\left(-t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} + \left(t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} \right)_{1 \le \kappa, \lambda \le n} \\
= \quad & \pm 2^{-s} \prod_{1 \le \kappa \le n} (\kappa - 1)!^{-1} \cdot \prod_{1 \le \kappa \le n-1} (\kappa - 1)! \cdot \prod_{1 \le \kappa \le n-1} (2\kappa - 1)!^{-1} \\
& \det \left(\left(-t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} + \left(t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} \right)_{1 \le \kappa, \lambda \le n} \\
= \quad & \pm 2^{-s} (n-1)!^{-1} \prod_{1 \le \kappa \le n-1} (2\kappa - 1)!^{-1} \\
& \cdot \det \left(\left(-t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} + \left(t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} \right)_{1 \le \kappa, \lambda \le n}
\end{aligned}
$$

Der Schritt $(**)$ folgt daraus, daß für alle $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$ die m_σ-te Zeile unabhängig davon ist, ob wir für ε_{m_σ} den Wert $+1$ oder -1 einsetzen.

An dieser Stelle wollen wir für alle $\sigma \in \{1, \ldots, s\}$ innerhalb des „σ-ten Blocks“ (d.h. für $\kappa \in \{l_\sigma, \ldots, m_\sigma\}$) elementare Zeilenumformungen durchführen.

Mit den Bezeichnungen aus 4.23 gilt:

$$
\begin{aligned}
& \left(\left(-t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} + \left(t \mu_{\tau(\kappa)} + m_{\tau(\kappa)} - \kappa \right)^{2\lambda-2} \right)_{\substack{l_\sigma \le \kappa \le m_\sigma \\ 1 \le \lambda \le n}} \\
\sim_0 \quad & \left((-t\mu_\sigma + \kappa - 1)^{2\lambda-2} + (t\mu_\sigma + \kappa - 1)^{2\lambda-2} \right)_{\substack{1 \le \kappa \le n_\sigma \\ 1 \le \lambda \le n}} \\
\sim_0 \quad & \left(\left(-t \mu_{\tau(\kappa)} + \kappa - l_{\tau(\kappa)} \right)^{2\lambda-2} + \left(t \mu_{\tau(\kappa)} + \kappa - l_{\tau(\kappa)} \right)^{2\lambda-2} \right)_{\substack{l_\sigma \le \kappa \le m_\sigma \\ 1 \le \lambda \le n}}
\end{aligned}
$$

Mit diesen Daten ist das Hilbert-Polynom von G/U gegeben durch

$$\begin{aligned}
&2^{\sum\limits_{\substack{1\le\sigma\le s\\ \mu_\sigma=0}}(n_\sigma-1)} H(t)\\
&= \pm\det\left(\left(-t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}+\left(t\mu_{\tau(\kappa)}+\kappa-l_{\tau(\kappa)}\right)^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n}\\
&\quad\cdot\prod_{1\le\kappa\le n-1}(2\kappa-1)!^{-1}\cdot(n-1)!^{-1}
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 4.31

Sind $\mu_1,\dots,\mu_s$ ganze Zahlen, so existiert ein Element $z\in ch(G/U)$, so daß das zu $0\in H^2(G/U)$ und z assozierte Hilbert-Polynom durch

$$\begin{aligned}
H(t) &= \pm\det\left(\left(-t\mu_\sigma+\kappa-l_{\tau(\sigma)}\right)^{2\lambda-2}+\left(t\mu_\sigma+\kappa-l_{\tau(\sigma)}\right)^{2\lambda-2}\right)_{1\le\kappa,\lambda\le n}\\
&\quad\cdot 2^{-s-\sum\limits_{\substack{1\le\sigma\le s\\ \mu_\sigma=0}}(n_\sigma-1)}\cdot(n-1)!^{-1}\cdot\prod_{1\le\kappa\le n-1}(2\kappa-1)!^{-1}
\end{aligned}$$

gegeben ist. $\square$

★

Wenn wir das entsprechende Hilbert–Polynom für die quaternionale Fahnenmannigfaltigkeit $Sp(n)/Sp(n_1)\times\cdots\times Sp(n_s)$ mit $A(t)$ bezeichnen, so ergibt sich

$$H(t)=A(t)\cdot 2^{|\{\sigma\,|\,\mu_\sigma=0\}|-1}$$

und

$$\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\nu_2\left(A\left(\frac{1}{2}\right)\right)+|\{\sigma\,|\,\mu_\sigma=0\}|-1.$$

(vgl. Satz 4.24.)

Insbesondere erhalten wir mit den wie im Abschnitt 4.3 gewählten ganzen Zahlen $\mu_1,\dots,\mu_s$ das folgende Nicht-Immersionsergebnis:

Satz 4.32

Die Mannigfaltigkeit $SO(2n)/SO(2n_1)\times\cdots\times SO(2n_s)$ *von reellen orientierten Fahnen hat reelle Dimension* $2\left(n^2-\sum\limits_{\sigma=1}^{s}n_\sigma^2\right)$ *und kann nicht in einen euklidischen Raum der Dimension*

$$8k(n-k)-2k+2\alpha_1(k)+2\alpha_1(n-k)-2\alpha_1(n)-1$$

immersiert werden. Dabei ist k *eine beliebige natürliche Zahl, die als Summe* $\sum\limits_{\sigma\in S}n_\sigma$ *mit* $S\subset\{1,\dots,s\}$ *auftritt.*

Korollar 4.33

Die reelle Fahnenmannigfaltigkeit $O(2n)/O(2n_1)\times\cdots\times O(2n_s)$ *hat reelle Dimension* $2\left(n^2-\sum\limits_{\sigma=1}^{s}n_\sigma^2\right)$ *und kann nicht in einen euklidischen Raum der Dimension*

$$8k(n-k)-2k+2\alpha_1(k)+2\alpha_1(n-k)-2\alpha_1(n)-1$$

immersiert werden. Dabei ist k *eine beliebige natürliche Zahl, die als Summe* $\sum\limits_{\sigma\in S}n_\sigma$ *mit* $S\subset\{1,\dots,s\}$ *auftritt.*

Beweis: Die kanonische Projektion $SO(2n)/SO(2n_1)\times\cdots\times SO(2n_s)\to O(2n)/O(2n_1)\times\cdots\times O(2n_s)$ ist Überlagerungsabbildung und damit eine Immersion.

Bemerkung 4.34

(i) Für den Fall der reellen Graßmann–Mannigfaltigkeiten ($s=2$, $n_1=k$, $n_2=n-k$) *stimmen die Ergebnisse mit denen in [May97] überein.*

(ii) Wenn wir anstelle der Menge $(*)$ *die* $W(U)$*-invariante Menge von analytisch integralen Elementen*

$$\left\{\sum_{1\le\lambda\le n}\varepsilon_\lambda\mu_{\tau(\lambda)}L_\lambda \;\middle|\; \varepsilon_\kappa\in\left\{\begin{array}{ll}\{\pm1\}, & \textit{falls } \mu_{\tau(\kappa)}\neq 0\\ \{1\}, & \textit{falls } \mu_{\tau(\kappa)}=0\end{array}\right.\right\}\;(*')$$

benutzen, so erhalten wir als Verallgemeinerung der Ergebnisse in [May98] ein Hilbert-Polynom der Form

$$H(t) = A(t) \cdot 2^{s-1}.$$

(iii) *In [Lam75] ist das folgende positive Ergebnis bewiesen: Die reelle Fahnenmannigfaltigkeit* $O(2n)/O(2n_1) \times \cdots \times O(2n_s)$ *ist eine* $\pi-$*Mannigfaltigkeit oder kann in einen euklidischen Raum der Dimension* $2n^2 - n$ *immersiert werden.* $\square$

4.5 Nicht-Immersions-Sätze für die Mannigfaltigkeiten $Sp(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$

Bezeichnungen 4.35

(i) $n_1, \ldots, n_s$ *seien positive ganze Zahlen.*

(ii) $n = \sum\limits_{\sigma=1}^{s} n_\sigma,\ l_\sigma = 1 + \sum\limits_{j=1}^{\sigma-1} n_j,\ m_\sigma = \sum\limits_{j=1}^{\sigma} n_j.$

(iii) $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, s\}$ *sei gegeben durch*

$\tau(\lambda) = \sigma \iff l_\sigma \leq \lambda \leq m_\sigma.$

(iv) $G = Sp(n),\ U = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s).$

(v) $T = U(1) \times U(1) \times \cdots \times U(1).$

Satz 4.36

$U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ *ist der Zentralisator* $Z(S)$ *der toralen Untergruppe* $S = \left\{ \mathit{diag}\left(e^{ir_{\tau(1)}}, \ldots, e^{ir_{\tau(n)}}\right) \middle| \, r_1, \ldots, r_s \in \mathbb{R} \right\}$ *in* $Sp(n)$.

Beweis: Es sei $A \in Z(S)$. Da A mit der Matrix diag $(i, \ldots, i)$ vertauschbar ist, ist jeder Eintrag von A mit i vertauschbar, also komplex. Also ist der Zentralisator von S in $Sp(n)$ gleich dem Zentralisator von S in $U(n)$, und die Behauptung folgt aus Satz 4.13. $\Box$

Satz 4.37

(i) G *und* U *erfüllen nach Bemerkung 3.6(ii) die Voraussetzungen der Bemerkung 3.8(i).* T *ist ein gemeinsamer maximaler Torus.*

$\mathfrak{t}^*$, $W(G)$, $W(U)$, $\langle\, , \rangle$, $\Sigma^+(G)$ *und* δ *sind in den Sätzen 4.14 und 4.21 beschrieben.*

(ii) Für ganze Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ *ist* $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mu_{\tau(\nu)} L_\nu$ *ein* $W(U)$*-invariantes und analytisch integrales Element aus* $\mathfrak{t}^*$. $\Box$

Mit diesen Daten ist das entsprechende Hilbert-Polynom von G/U gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
&H(t)\\
&= \pm \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (t\mu_{\tau(\nu)} + (n-\nu+1))L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle}\\
&\quad \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (t\mu_{\tau(\nu)} + (n-\nu+1))L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle}\\
&\quad \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (t\mu_{\tau(\nu)} + (n-\nu+1))L_\nu, 2L_\kappa \right\rangle}{\prod\limits_{1\le\kappa\le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n-\nu+1)L_\nu, 2L_\kappa \right\rangle}\\
&= \pm \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n-\kappa+1) - (t\mu_{\tau(\lambda)} + n-\lambda+1)\big)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa+1) - (n-\lambda+1))}\\
&\quad \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n-\kappa+1) + (t\mu_{\tau(\lambda)} + n-\lambda+1)\big)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} ((n-\kappa+1) + (n-\lambda+1))}\\
&\quad \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa\le n} \big(t\mu_{\tau(\kappa)} + n-\kappa+1\big)}{\prod\limits_{1\le\kappa\le n} (n-\kappa+1)}\\
&= \pm \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n-\kappa+1) - (t\mu_{\tau(\lambda)} + n-\lambda+1)\big)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} (-\kappa+\lambda)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\frac{\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)}{\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}(2n-\kappa-\lambda+2)}\\
&\cdot\frac{\prod_{1\le\kappa\le n}\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\big)}{\prod_{1\le\kappa\le n}(n-\kappa+1)}\\
= \;&\pm\frac{\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)}{\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}(-\kappa+\lambda)}\\
&\cdot\frac{\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)}{\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}(\kappa+\lambda)}\\
&\cdot\frac{\prod_{1\le\kappa\le n}\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\big)}{\prod_{1\le\kappa\le n}\kappa}\\
= \;&\pm\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)\\
&\cdot\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)\\
&\cdot\prod_{1\le\kappa\le n}\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\big)\\
&\cdot n!^{-1}\prod_{1\le\kappa\le n}\kappa!\prod_{1\le\kappa\le n}(\kappa-1)!^{-1}\prod_{1\le\kappa\le n}(2\kappa-1)!^{-1}\\
= \;&\pm\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)\\
&\cdot\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n}\big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\big)\\
&\cdot\prod_{1\le\kappa\le n}\big(t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\big)\cdot\prod_{1\le\kappa\le n}(2\kappa-1)!^{-1}
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 4.38

Sind $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ganze Zahlen, so existiert ein Element $z \in ch(G/U)$, so daß das zu $c_1(G/U) \in H^2(G/U)$ und z assozierte Hilbert-Polynom durch

$$\begin{aligned} H(t) \quad = \quad & \pm\left(\prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} (t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa + 1) - (t\mu_{\tau(\lambda)} + n - \lambda + 1) \right) \\ & \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa + 1) + (t\mu_{\tau(\lambda)} + n - \lambda + 1)\big) \\ & \prod_{1\le\kappa\le n} \big(t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa + 1\big) \prod_{1\le\kappa\le n} (2\kappa - 1)!^{-1} \end{aligned}$$

gegeben ist . $\square$

★

Die Ergebnisse aus 4.2 motivieren dazu, die ganzen Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ wie folgt zu wählen, um gute Nicht-Immersionsergebnisse zu erhalten.
Wir wählen eine Teilmenge $S \subset \{1, \ldots, s\}$ und definieren

$$\gamma_\sigma = -n + m_\sigma + \sum_{\substack{1\le\vartheta<\sigma \\ \vartheta\in S}} n_\vartheta, \text{ falls } \sigma \in S,$$

$$\gamma_\sigma = -n + m_\sigma + \sum_{\substack{1\le\vartheta<\sigma \\ \vartheta\notin S}} n_\vartheta, \text{ falls } \sigma \notin S,$$

$$\mu_\sigma = 2\gamma_\sigma, \text{ falls } \sigma \in S,$$

$$\mu_\sigma = 2\gamma_\sigma - 1, \text{ falls } \sigma \notin S \text{ und}$$

$$k = \sum_{\sigma\in S} n_\sigma.$$

Damit ist die Menge $\{\gamma_{\tau(\kappa)} + n - \kappa + 1 \,|\, 1 \le \kappa \le n, \tau(\kappa) \in S\}$ gleich der Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$ und die Menge $\{\gamma_{\tau(\kappa)} + n - \kappa + 1 \,|\, 1 \le \kappa \le n, \tau(\kappa) \notin S\}$ gleich der Menge $\{1, 2, \ldots, n - k\}$.

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
= &\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)-\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1\right)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\notin S, \tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)-\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1\right)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa,\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)-\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1\right)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1\right)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\notin S, \tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1\right)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa,\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1\right)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa\le n \\ \tau(\kappa)\in S}} \nu_2\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\notin S}} \nu_2\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+(n-\kappa+1)\right) \\
&-\sum_{1\le\kappa\le n} \nu_2\left((2\kappa-1)!\right) \\
= &\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left((\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)-(\gamma_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\notin S, \tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left((\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)-(\gamma_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa,\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(-\frac{1}{2}+(\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)-(\gamma_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\right) \\
&+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S, \tau(\lambda)\in S}} \nu_2\left((\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(\gamma_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\notin S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(-1+(\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(\gamma_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\right)\\
& + \sum_{\substack{1\le\kappa,\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(-\frac{1}{2}+(\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1)+(\gamma_{\tau(\lambda)}+n-\lambda+1)\right)\\
& + \sum_{\substack{1\le\kappa\le n\\ \tau(\kappa)\in S}} \nu_2\left(\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)\\
& + \sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\notin S}} \nu_2\left(-\frac{1}{2}+\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa+1\right)\\
& - \sum_{1\le\kappa\le n} \nu_2\left((2\kappa-1)!\right)\\
= & \sum_{1\le\kappa<\lambda\le k} \nu_2\left(\kappa-\lambda\right)+\sum_{1\le\kappa<\lambda\le n-k} \nu_2\left(\kappa-\lambda\right)-k(n-k)\\
& + \sum_{1\le\kappa<\lambda\le k} \nu_2\left(\kappa+\lambda\right)+\sum_{1\le\kappa<\lambda\le n-k} \nu_2\left(-1+\kappa+\lambda\right)-k(n-k)\\
& + \sum_{1\le\kappa\le k} \nu_2\left(\kappa\right)-(n-k)\\
& - \sum_{1\le\kappa\le n} \nu_2\left((2\kappa-1)!)\right)\\
= & \frac{k(k-1)}{2}-\alpha_1(k)+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}-\alpha_1(n-k)-k(n-k)\\
& +\frac{k(k-3)}{2}+\alpha(k)+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}-k(n-k)\\
& +k-\alpha(k)-(n-k)-n^2+n+\alpha_1(n)\\
= & -(n-k)-4k(n-k)-\alpha_1(k)-\alpha_1(n-k)+\alpha_1(n)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

Satz 4.39

Die Mannigfaltigkeit $Sp(n)/U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)$ mit reeller Dimension $n(2n+1)-\sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma^2$ kann nicht in einen euklidischen Raum der Dimension

$8k(n-k)+2(n-k)-2\alpha_1(n)+2\alpha_1(k)+2\alpha_1(n-k)-1$

immersiert werden. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl, die als Summe $\sum\limits_{\sigma \in S} n_\sigma$ mit $S \subset \{1, \ldots, s\}$ auftritt. $\square$

Satz 4.40

$Sp(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ ist eine π–Mannigfaltigkeit oder läßt sich in einen euklidischen Raum der Dimension $2n^2 + n - s$ immersieren.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 1.10 und 4.36. $\square$

4.6 Nicht-Immersions-Sätze für die Mannigfaltigkeiten $SO(2n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$

Bezeichnungen 4.41

(i) $n_1, \dots, n_s$ *seien positive ganze Zahlen.*

(ii) $n = \sum\limits_{\sigma=1}^{s} n_\sigma$, $l_\sigma = 1 + \sum\limits_{j=1}^{\sigma-1} n_j$, $m_\sigma = \sum\limits_{j=1}^{\sigma} n_j$.

(iii) $\tau : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, s\}$ *sei gegeben durch*
$\tau(\lambda) = \sigma \iff l_\sigma \leq \lambda \leq m_\sigma$.

(iv) $G = SO(2n)$, $U = U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$.

(v) $T = U(1) \times U(1) \times \cdots \times U(1) = SO(2) \times \cdots \times SO(2)$.

Satz 4.42
$U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ *ist der Zentralisator* $Z(S)$ *der toralen Untergruppe*

$$S = \left\{ diag\Big(\begin{pmatrix} \cos r_{\tau(1)} & \sin r_{\tau(1)} \\ -\sin r_{\tau(1)} & \cos r_{\tau(1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \cos r_{\tau(n)} & \sin r_{\tau(n)} \\ -\sin r_{\tau(n)} & \cos r_{\tau(n)} \end{pmatrix} \Big) \,\Big|\, r_1, \dots, r_s \in \mathbb{R} \right\}.$$

in $SO(2n)$.

Beweis: Es sei $A \in Z(S)$. Wir fassen A als $\mathbb{R}$-linearen Endomorphismus von $\mathbb{C}^n$ auf. Da A mit der Matrix $\mathrm{diag}\Big(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Big)$ vertauschbar ist, ist A sogar $\mathbb{C}$–linear. Also ist der Zentralisator von S in $SO(2n)$ gleich dem Zentralisator von S in $U(n)$, und die Behauptung folgt aus Satz 4.13. □

Satz 4.43

(i) G *und* U *erfüllen nach Bemerkung 3.6(ii) die Voraussetzungen der Bemerkung 3.8(i).* T *ist ein gemeinsamer maximaler Torus.*

(ii) $\mathfrak{t}^*$, $W(G)$, $W(U)$, $\langle\, ,\, \rangle$, $\Sigma^+(G)$ *und* δ *sind in den Sätzen 4.28 und 4.14 beschrieben.*

(iii) Für ganze Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ist $\sum_{\nu=1}^{n} \mu_{\tau(\nu)} L_\nu$ ein $W(U)$-invariantes und analytisch integrales Element aus $\mathfrak{t}^*$. $\square$

★

Mit diesen Daten ist das entsprechende Hilbert-Polynom von G/U gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
H(t) & \\
= \;& \pm \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (t\mu_{\tau(\nu)} + (n-\nu)) L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n-\nu) L_\nu, L_\kappa - L_\lambda \right\rangle} \\
& \cdot \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (t\mu_{\tau(\nu)} + (n-\nu)) L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \left\langle \sum\limits_{\nu=1}^{n} (n-\nu) L_\nu, L_\kappa + L_\lambda \right\rangle} \\
= \;& \pm \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa) - (t\mu_{\tau(\lambda)} + n - \lambda) \big)}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} ((n-\kappa) - (n-\lambda))} \\
& \cdot \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa) + (t\mu_{\tau(\lambda)} + n - \lambda) \big)}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} ((n-\kappa) + (n-\lambda))} \\
= \;& \pm \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa) - (t\mu_{\tau(\lambda)} + n - \lambda) \big)}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} (-\kappa + \lambda)} \\
& \cdot \frac{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)} + n - \kappa) + (t\mu_{\tau(\lambda)} + n - \lambda) \big)}{\prod\limits_{1 \le \kappa < \lambda \le n} (2n - \kappa - \lambda)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \pm \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}(-\kappa+\lambda)} \\
&\quad \cdot \frac{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big)}{\prod\limits_{1\le\kappa<\lambda\le n}(\kappa+\lambda-2)} \\
&= \pm \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big) \\
&\quad \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big) \\
&\quad \cdot \prod_{1\le\kappa\le n-1}(\kappa-1)! \prod_{1\le\kappa\le n-1}(2\kappa-1)!^{-1} \prod_{1\le\kappa\le n}(\kappa-1)!^{-1} \\
&= \pm \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big) \\
&\quad \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big) \\
&\quad \cdot (n-1)!^{-1} \prod_{1\le\kappa\le n-1}(2\kappa-1)!^{-1}
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

Satz 4.44

Sind $\mu_1, \ldots, \mu_s$ ganze Zahlen, so existiert ein Element $z \in ch(G/U)$, so daß das zu $c_1(G/U) \in H^2(G/U)$ und z assozierte Hilbert-Polynom durch

$$
\begin{aligned}
H(t) &= \pm \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)-(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big) \\
&\quad \cdot \prod_{1\le\kappa<\lambda\le n} \big((t\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa)+(t\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda)\big) \\
&\quad (n-1)!^{-1} \prod_{1\le\kappa\le n-1}(2\kappa-1)!^{-1}
\end{aligned}
$$

gegeben ist. □

★

Ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt wählen wir die ganzen Zahlen $\mu_1,\ldots,\mu_s$:
Wir wählen eine Teilmenge $S\subset\{1,\ldots,s\}$ und definieren

$$\gamma_\sigma=-n+m_\sigma+\sum_{\substack{1\le\vartheta<\sigma\\ \vartheta\in S}}n_\vartheta,\ \text{falls } \sigma\in S,$$

$$\gamma_\sigma=-n+1+m_\sigma+\sum_{\substack{1\le\vartheta<\sigma\\ \vartheta\notin S}}n_\vartheta,\ \text{falls } \sigma\notin S,$$

$$\mu_\sigma=2\gamma_\sigma,\ \text{falls } \sigma\in S,$$

$$\mu_\sigma=2\gamma_\sigma-1,\ \text{falls } \sigma\notin S \text{ und}$$

$$k=\sum_{\sigma\in S}n_\sigma.$$

Damit ist die Menge $\{\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\,|\,1\le\kappa\le n,\tau(\kappa)\in S\}$ gleich der Menge $\{0,1,\ldots,k-1\}$ und die Menge $\{\gamma_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\,|\,1\le\kappa\le n,\tau(\kappa)\notin S\}$ gleich der Menge $\{1,2,\ldots,n-k\}$.

$$\begin{aligned}
&\nu_2\left(H\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&\quad=\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\in S}}\nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\right)-\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda\right)\right)\\
&\qquad+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\notin S,\tau(\lambda)\notin S}}\nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\right)-\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda\right)\right)\\
&\qquad+\sum_{\substack{1\le\kappa,\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\notin S}}\nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\right)-\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda\right)\right)\\
&\qquad+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\in S}}\nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\right)+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda\right)\right)\\
&\qquad+\sum_{\substack{1\le\kappa<\lambda\le n\\ \tau(\kappa)\notin S,\tau(\lambda)\notin S}}\nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\right)+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{1\le\kappa,\lambda\le n \\ \tau(\kappa)\in S,\tau(\lambda)\notin S}} \nu_2\left(\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\kappa)}+n-\kappa\right)+\left(\frac{1}{2}\mu_{\tau(\lambda)}+n-\lambda\right)\right) \\
& - \sum_{1\le\kappa\le n-1} \nu_2\left((2\kappa-1)!\right)-\nu_2((n-1)!) \\
= & \sum_{1\le\kappa<\lambda\le k} \nu_2\left(\kappa-\lambda\right)+\sum_{1\le\kappa<\lambda\le n-k} \nu_2\left(\kappa-\lambda\right)-k(n-k) \\
& + \sum_{1\le\kappa<\lambda\le k} \nu_2\left(\kappa+\lambda-2\right)+\sum_{1\le\kappa<\lambda\le n-k} \nu_2\left(-1+\kappa+\lambda\right)-k(n-k) \\
& - \sum_{1\le\kappa\le n-1} \nu_2\left((2\kappa-1)!\right)-\nu_2((n-1)!) \\
= & \frac{k(k-1)}{2}-\alpha_1(k)+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}-\alpha_1(n-k)-k(n-k) \\
& +\frac{(k-2)(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}-k(n-k) \\
& -(n-1)^2+(n-1)+\alpha_1(n-1)-(n-1)+\alpha(n-1) \\
= & (n-k)-4k(n-k)-\alpha_1(k)-\alpha_1(n-k)+\alpha_1(n)
\end{aligned}
$$

Mit dem Rollentausch $k \leftrightarrow n-k$ folgt :

Satz 4.45

Die Mannigfaltigkeit $SO(2n)/U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)$ mit reeller Dimension $n(2n-1)-\sum_{\sigma=1}^{s} n_\sigma^2$ kann nicht in einen euklidischen Raum der Dimension

$$8k(n-k)-2k-2\alpha_1(n)+2\alpha_1(n-k)+2\alpha_1(k)-1$$

immersiert werden. Dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl, die als Summe $\sum_{\sigma\in S} n_\sigma$ mit $S\subset\{1,\ldots,s\}$ auftritt. □

Satz 4.46

$SO(2n)/U(n_1)\times\cdots\times U(n_s)$ ist eine π–Mannigfaltigkeit oder läßt sich in einen euklidischen Raum der Dimension $2n^2-n-s$ immersieren.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 1.10 und 4.42. □

Anhang

In diesem Anhang sind für jeden der betrachteten fünf Typen die Dimensionen und die Schranken der Immersionsdimensionen von jeweils 25 zufällig ausgewählten homogenen Räumen tabellarisch zusammengestellt.
Dabei sind die „Fahnenzahlen“ Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 10\}$ und die „Fahnendimensionen“ Zahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 25\}$.

Zur besseren Übersicht bezeichnen wir Gruppen wie $U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$ in den Tabellen mit $U(n_1, \ldots, n_s)$.

Komplexe Fahnenmannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeit	Dim	u.S.	o.S.
U(128)/U(14,16,7,9,25,5,24,21,7)	14086	16256	16375
U(99)/U(13,2,7,9,6,21,20,21)	8180	9702	9793
U(46)/U(16,10,3,17)	1462	2036	2112
U(51)/U(4,20,4,23)	1640	2544	2597
U(33)/U(4,19,8,2)	644	1026	1085
U(32)/U(25,7)	350	666	694
U(15)/U(3,4,8)	136	210	222
U(66)/U(3,6,9,17,12,16,1,2)	3536	4290	4348
U(127)/U(10,24,8,9,16,23,13,16,8)	14034	16002	16120
U(91)/U(23,24,17,4,23)	6342	8190	8276
U(89)/U(24,25,24,16)	5888	7790	7917
U(45)/U(23,2,18,2)	1164	1980	2021
U(30)/U(21,5,4)	418	724	832
U(53)/U(10,18,14,11)	2068	2750	2805
U(154)/U(23,25,10,20,21,23,4,22,2,4)	20572	23562	23706
U(71)/U(15,24,18,11,3)	3786	4970	5036
U(145)/U(16,24,19,9,25,14,21,14,3)	18284	20880	21016
U(59)/U(8,9,15,1,4,22)	2610	3422	3475
U(56)/U(6,11,14,6,19)	2386	3064	3131
U(65)/U(22,7,3,13,15,5)	3264	4160	4219
U(67)/U(25,16,12,14)	3268	4368	4485
U(52)/U(10,21,17,1,3)	1864	2648	2699
U(65)/U(3,10,6,21,1,11,13)	3348	4160	4218
U(128)/U(23,13,15,12,16,13,2,16,10,8)	14468	16256	16374
U(38)/U(23,15)	690	1346	1375

Quaternionale Fahnenmannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeit	Dim	u.S.	o.S.
Sp(85)/Sp(6,4,18,17,13,3,24)	11612	14280	14358
Sp(61)/Sp(9,22,7,20,3)	5396	7320	7376
Sp(121)/Sp(16,20,22,4,23,20,16)	24600	29040	29154
Sp(113)/Sp(5,9,1,22,6,23,25,1,21)	21092	25312	25416
Sp(74)/Sp(15,16,3,11,25,4)	8448	10800	10872
Sp(125)/Sp(6,24,25,21,22,21,6)	25972	30988	31118
Sp(121)/Sp(25,22,10,7,24,15,18)	24516	29040	29154
Sp(54)/Sp(15,14,15,10)	4340	5698	5774
Sp(63)/Sp(5,19,21,3,15)	5816	7758	7870
Sp(28)/Sp(2,21,5)	628	1136	1251
Sp(134)/Sp(9,25,9,23,20,17,5,1,25)	30600	35644	35769
Sp(105)/Sp(22,1,17,25,21,19)	17648	21696	21939
Sp(66)/Sp(11,19,8,15,13)	6832	8576	8641
Sp(97)/Sp(1,9,10,7,11,4,13,19,10,13)	16484	18624	18711
Sp(105)/Sp(22,18,11,25,13,14,2)	18204	21840	21938
Sp(35)/Sp(9,10,16)	1576	2368	2412
Sp(46)/Sp(7,18,21)	2604	4112	4183
Sp(109)/Sp(24,18,22,25,6,7,1,4,2)	19532	23544	23644
Sp(18)/Sp(3,15)	180	344	356
Sp(19)/Sp(1,18)	72	138	142
Sp(94)/Sp(18,22,21,3,8,8,14)	14508	17484	17571
Sp(58)/Sp(8,15,21,10,3,1)	5048	6612	6664
Sp(149)/Sp(23,9,9,3,23,7,9,24,24,18)	38732	44104	44243
Sp(93)/Sp(10,21,16,20,11,2,13)	14316	17112	17198
Sp(115)/Sp(1,5,14,24,18,1,15,24,13)	22264	26220	26326

Reelle orientierte Fahnenmannigfaltigkeiten

Mannigfaltigkeit	Dim	u.S.	o.S.
SO(206)/SO(36,50,32,16,16,24,24,8)	17944	21012	21115
SO(76)/SO(26,4,12,6,28)	2060	2812	2850
SO(90)/SO(36,38,16)	2552	3872	4005
SO(66)/SO(26,22,12,6)	1508	2112	2145
SO(312)/SO(48,20,20,12,46,34,44,38,6,44)	42736	48360	48516
SO(218)/SO(28,32,16,18,34,12,32,46)	20348	23544	23653
SO(70)/SO(12,28,30)	1536	2336	2415
SO(98)/SO(4,44,2,12,12,24)	3392	4704	4753
SO(260)/SO(28,22,46,34,46,42,20,22)	29148	33540	33670
SO(98)/SO(22,6,32,38)	3308	4658	4753
SO(108)/SO(18,8,26,16,8,16,16)	4884	5720	5778
SO(82)/SO(46,32,4)	1784	3238	3321
SO(42)/SO(18,16,8)	560	828	861
SO(256)/SO(10,20,42,20,18,36,28,38,2,42)	28628	32512	32640
SO(268)/SO(38,32,30,48,30,50,4,36)	30720	35644	35778
SO(62)/SO(50,12)	600	1160	1196
SO(30)/SO(22,8)	176	330	349
SO(232)/SO(28,12,34,50,36,22,50)	22480	26674	26796
SO(54)/SO(20,34)	680	1316	1356
SO(176)/SO(38,22,16,20,46,32,2)	12624	15312	15400
SO(178)/SO(24,16,10,30,24,50,24)	13100	15664	15753
SO(192)/SO(26,50,34,10,14,32,4,22)	15356	18240	18336
SO(302)/SO(50,18,48,48,48,30,32,28)	39380	45286	45451
SO(278)/SO(38,8,36,6,48,34,18,50,40)	33280	38364	38503
SO(230)/SO(12,34,30,44,20,48,30,12)	22508	26220	26335

Die Mannigfaltigkeiten

$Sp(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$

Mannigfaltigkeit	Dim	u.S.	o.S.
Sp(45)/U(7,1,13,6,18)	3516	4038	4090
Sp(64)/U(11,10,23,20)	7106	8178	8252
Sp(68)/U(11,19,21,8,9)	8248	9224	9311
Sp(110)/U(16,16,8,4,11,25,8,17,5)	22594	24200	24301
Sp(47)/U(13,12,22)	3668	4402	4462
Sp(129)/U(13,20,14,20,18,6,9,15,6,8)	31480	33282	33401
Sp(61)/U(16,24,19,2)	6306	7282	7499
Sp(70)/U(8,21,18,23)	8512	9682	9866
Sp(86)/U(6,7,11,5,10,22,6,17,2)	13734	14792	14869
Sp(112)/U(6,1,22,16,3,17,19,14,14)	23372	25088	25191
Sp(51)/U(22,2,9,18)	4360	5190	5249
Sp(47)/U(4,21,1,21)	3566	4402	4461
Sp(114)/U(19,25,10,16,13,23,2,6)	24026	25992	26098
Sp(43)/U(2,16,10,9,6)	3264	3698	3736
Sp(50)/U(9,11,18,2,4,6)	4468	4996	5044
Sp(59)/U(23,2,17,16,1)	5942	6872	7016
Sp(79)/U(12,19,9,4,6,10,19)	11462	12482	12554
Sp(73)/U(7,19,24,15,8)	9456	10616	10726
Sp(84)/U(24,11,11,15,9,14)	12876	14088	14190
Sp(56)/U(25,9,22)	5138	6208	6325
Sp(85)/U(4,10,11,14,21,15,7,3)	13378	14450	14527
Sp(118)/U(12,19,12,3,10,8,22,22,10)	26076	27848	27957
Sp(23)/U(22,1)	596	597	1079
Sp(53)/U(16,24,13)	4670	5578	5668
Sp(114)/U(2,6,24,13,19,2,13,16,19)	24170	25992	26097

Die Mannigfaltigkeiten

$SO(2n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_s)$

Mannigfaltigkeit	Dim	u.S.	o.S.
SO(282)/U(24,18,23,2,21,18,10,15,10)	36998	39480	39612
SO(130)/U(5,14,20,15,5,6)	7478	8300	8379
SO(136)/U(22,13,11,9,13)	8156	9106	9175
SO(166)/U(18,10,6,5,15,2,19,8)	12556	13612	13687
SO(248)/U(4,8,19,21,10,25,2,16,15,4)	28520	30504	30618
SO(66)/U(24,6,3)	1524	1678	2142
SO(86)/U(3,25,14,1)	2824	3526	3651
SO(160)/U(20,16,22,4,4,14)	11352	12640	12714
SO(96)/U(12,5,8,21,2)	3882	4502	4555
SO(88)/U(13,23,8)	3066	3778	3825
SO(104)/U(24,22,6)	4260	5280	5353
SO(104)/U(9,1,14,19,9)	4636	5280	5351
SO(270)/U(15,9,24,17,24,25,10,11)	33722	36180	36307
SO(90)/U(20,25)	2980	3918	4003
SO(198)/U(14,14,17,18,16,9,10,1)	18060	19404	19495
SO(92)/U(4,19,5,1,17)	3494	4140	4181
SO(124)/U(6,14,11,4,15,10,2)	6928	7564	7619
SO(194)/U(17,7,2,18,6,25,22)	16910	18624	18714
SO(106)/U(18,1,8,20,3,3)	4758	5512	5559
SO(30)/U(3,3,5,4)	376	420	431
SO(38)/U(3,7,2,7)	592	684	699
SO(186)/U(13,6,8,7,20,2,18,12,7)	15966	17112	17196
SO(24)/U(2,10)	172	173	274
SO(274)/U(11,22,21,19,2,23,4,16,19)	34828	37264	37392
SO(56)/U(3,25)	906	907	1538

Literaturverzeichnis

[AB67] Atiyah, M. F. ; Bott, R.: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes I. In: *Ann. Math., II. Ser.* 86 (1967), S. 374–407

[AB68] Atiyah, M. F. ; Bott, R.: A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II: Applications. In: *Ann. Math., II. Ser.* 88 (1968), S. 415–491

[Ada69] Adams, J. F.: *Lectures on Lie groups*. New York : Benjamin, Inc., 1969

[AGM65] Adem, J. ; Gitler, S. ; Mahowald, M.: Embedding and immersion of projective spaces. In: *Bol. Soc. Mat. Mexicana, II. Ser.* 10 (1965), S. 84–88

[AH59] Atiyah, M. F. ; Hirzebruch, F.: Quelques theoremes de non-plongement pour les varietes differentiables. In: *Bull. Soc. Math. France* 87 (1959), S. 383–396

[AH70] Atiyah, M. F. ; Hirzebruch, F.: Spin manifolds and group actions. In: *Essays on topology and related topics, Springer-Verlag* (1970), S. 18–28

[AS68a] Atiyah, M. F. ; Segal, G.B.: A Lefschetz fixed points formula for elliptic complexes: II. In: *Ann. Math., II. Ser.* 87 (1968), S. 531–545

[AS68b] Atiyah, M. F. ; Singer, I. M.: The index of elliptic operators: I. In: *Ann. Math., II. Ser.* 87 (1968), S. 484–530

[AS68c] Atiyah, M. F. ; Singer, I. M.: The index of elliptic operators: III. In: *Ann. Math., II. Ser.* 87 (1968), S. 546–604

[Ati62] Atiyah, M. F.: Immersions and embeddings of manifolds. In: *Topology* 1 (1962), S. 125–132

[Ati67] Atiyah, M. F.: *K-Theory*. New York : Benjamin, 1967

[Bär93] Bär, Christian: Elliptische Operatoren und Darstellungstheorie kompakter Gruppen. In: *Bonner Mathematische Schriften* (1993). – Habilitationsschrift

[BD85] Bröcker, T. ; Dieck, T. tom: *Representations of Compact Lie Groups*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1985

[BFG76] Berrick, A. J. ; Feder, S. ; Gitler, S.: Symmetric axial maps and embeddings of projective spaces. In: *Bol. Soc. Mat. Mexicana, II. Ser.* 21 (1976), S. 39–41

[BH58] Borel, A. ; Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces I. In: *Amer. J. Math.* 80 (1958), S. 458–538

[BH59] Borel, A. ; Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces II. In: *Amer. J. Math.* 81 (1959), S. 315–382

[BH60] Borel, A. ; Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces III. In: *Amer. J. Math.* 82 (1960), S. 491–504

[BMP90] Bliss, J. G. ; Moody, R. v. ; Pianzola, A.: Appendix to Elliptic genera, involutions, and spin manifolds by Friedrich Hirzebruch and Peter Slodowy. In: *Geom. Dedicata* 35 (1990), S. 345–351

[Bor53] BOREL, A.: Sur la cohomologie des espaces fibres principaux et des espaces homogenes de groupes de Lie compacts. In: *Ann. of Math.* 57 (1953), S. 115–207

[Bot65] BOTT, R.: The Index Theorem for homogenous differential operators. In: *Differential and combinatorial topology, Princeton University Press* (1965), S. 167–186

[Che46] CHEVALLEY, C.: *Theory of Lie Groups I*. Princeton University Press, 1946

[Coh85] COHEN, R. L.: The immersion conjecture for differentiable manifolds. In: *Ann. Math., II. Ser.* 122 (1985), S. 237–328

[Con74] CONNELL, F. J.: Nonimmersions of low dimensional flag manifolds. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 44 (1974), S. 474–478

[Cra91] CRABB, M. C.: Immersing projective spaces in Euclidean space. In: *Proc. Royal Soc. Edinb., Sect. A* 117 (1991), Nr. 1/2, S. 155–170

[Dav93] DAVIS, D. M.: Immersions of projective spaces: a historical survey. In: *Algebraic topology, Oaxtepec 1991, Proc., Contemp. Math. Vol. 146* (1993), S. 31–37

[DM77] DAVIS, D. M. ; MAHOWALD, M.: Immersions of complex projective spaces and the generalized vector field problem. In: *Proc. London Math. Soc., III. Ser.* 35 (1977), S. 333–344

[DM79] DAVIS, D. M. ; MAHOWALD, M.: The Euler class for connective ko-theory and an application to immersions of quaternionic projective space. In: *Indiana Univ. Math. J.* 28 (1979), S. 1025–1034

[Fed66] FEDER, S.: Non-immersion theorems for complex and quaternionic projective spaces. In: *Bol. Soc. Mat. Mexicana, II. Ser.* 11 (1966), S. 62–67

[FH96] Fulton, W. ; Harris, J.: *Representation Theory*. New York, Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 1996

[FS72] Feder, S. ; Segal, D. M.: Immersions and embeddings of projective spaces. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 35 (1972), S. 590–592

[GHV73] Greub, W. ; Halpern, St. ; Vanstone, R.: *Connections, Curvature and Cohomology, Vol.II*. New York and London : Academic Press, 1973

[Hil82a] Hiller, H.: *Research Notes in Mathematics*. Bd. 54 : Geometry of Coxeter Groups. Pitman Books Ltd, 1982

[Hil82b] Hiller, H.: Immersing homogeneous spaces in Euclidean space. In: *Publ., Secc. Mat., Univ. Auton. Barc.* 26 (1982), Nr. 3, S. 43–45

[Hir59] Hirsch, M. W.: Immersion of manifolds. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 93 (1959), S. 242–276

[Hog71] Hoggar, S. G.: A nonembedding result for complex Grassmann manifolds. In: *Proc. Edinburgh Math. Soc., II.Ser.* 17 (1970/71), S. 149–153

[HS81] Hiller, H. ; Stong, R. E.: Immersion dimension for real Grassmannians. In: *Math. Ann.* 255 (1981), S. 361–367

[HS90] Hirzebruch, F. ; Slodowy, P.: Elliptic genera, involutions, and homogeneous spin manifolds. In: *Geom. Dedicata* 35 (1990), S. 309–343

[Hus66] Husemoller, D.: *Fibre bundles*. New York : McGraw-Hill, 1966

[Ilo79] Ilori, S. A.: Nonimmersions of complex Grassmann manifolds. In: *Proc. Edinburgh Math. Soc., II.Ser.* 24 (1979), S. 1–3

[Jam71] James, I. M.: Euclidean models of projective spaces. In: *Bull. Lond. Math. Soc.* 3 (1971), S. 257–276

[Kna96] Knapp, A. W.: *Lie Groups Beyond an Introduction.* Boston, Basel, Berlin : Birkhäuser, 1996

[Lam75] Lam, K. Y.: A formula for the tangent bundle of flag manifolds and related manifolds. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 213 (1975), S. 305–314

[LM80] Lawson, H. B. ; Michelson, M. L.: Clifford bundles, immersions of manifolds and the vector field problem. In: *J. Differential Geometry* 15 (1980), S. 237–267

[Mar88] Markl, M.: Lower bounds for the embedding of real oriented and nonoriented Grassmannians. In: *Glasnik Matematicki* 23 (1988), S. 213–219

[May65] Mayer, K. H.: Elliptische Differentialoperatoren und Ganzzahligkeitssätze für charakteristische Zahlen. In: *Topology* 4 (1965), S. 295–313

[May97] Mayer, K. H.: Nonimmersion theorems for Grassmann manifolds. In: *Preprint, Universität Dortmund* (1997). – Veröffentlichung in *Topology and its applications* steht an.

[May98] Mayer, K. H.: Lower bounds for the immersion dimension of real Grassmann manifolds. In: *Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik, Fernuniversität Hagen* 63 (1998), Nr. 4, S. 483–488

[Mil67] Milgram, R. J.: Immersing projective spaces. In: *Ann. Math., II. Ser.* 85 (1967), S. 473–482

[MM67] Mahowald, M. ; Milgram, R. J.: Embedding projective spaces. In: *Bull. Am. Math. Soc.* 73 (1967), S. 644–646

[Mon75] Mong, S.: The index of complex and quaternionic Grassmannians via Lefschetz formula. In: *Advances in Math.* 15 (1975), S. 169–174

[MS73] Mayer, K. H. ; Schwarzenberger, R. L. E.: Lefschetz formulae for modest vector bundles. In: *Proc. Camb. Phil. Soc.* 73 (1973), S. 439–453

[Opr76] Oproiu, V.: Some non–embedding theorems for the Grassmann manifolds $G_{2,n}$ and $G_{3,n}$. In: *Proc. Edinburgh Math. Soc., II.Ser.* 20 (1976), S. 177–185

[Opr81] Oproiu, V.: Some results concerning the non–embedding codimension of Grassmann manifolds in Euclidean spaces. In: *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 26 (1981), S. 275–286

[Par88] Paryjas, N. Nichtimmersionssätze für quaternionale Graßmannsche Mannigfaltigkeiten. Dissertation, Universität Dortmund. 1988

[Ree71] Rees, E.: Some embeddings of Lie groups in Euclidean space. In: *Mathematika, London* 18 (1971), S. 152–156

[Ree90] Rees, E.: Problems concerning embeddings of manifolds. In: *Adv. Math., Beijing* (1990), S. 72–79

[San64] Sanderson, B. J.: Immersions and embeddings of projective spaces. In: *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.* 14 (1964), S. 137–153

[Sch72] Schwarz, W.: Spezielle G-äquivariante elliptische Differentialoperatoren, ein Charaktersatz und Anwendungen. In: *Bonner Mathematische Schriften* 59 (1972)

[Sch86] SCHEERER, H.: Embeddings of Stiefel manifolds and related homogenous spaces into euclidean space. In: *Expo. Math.* 4 (1986), S. 67–73

[Sha79] SHANAHAN, P.: On the signature of Grassmannians. In: *Pac. J. Math.* 84 (1979), S. 483–490

[Slo92] SLODOWY, P.: On the signature of homogenous spaces. In: *Geom. Dedicata* 43 (1992), Nr. 1, S. 109–123

[SS78] SIGRIST, F. ; SUTER, U.: On immersions $\mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)}$. In: *Algebr. Topol., Proc. Vancouver 1977, Lect. Notes Math. 673* (1978), S. 106–115

[Ste71] STEER, B.: On immersing complex projective (4k + 3)-space in Euclidean space. In: *Quaterly Journal. Math., Oxford, II. Ser.* 22 (1971), S. 339–345

[Sug78] SUGAWARA, T.: Immersion and embedding problems for complex flag manifolds. In: *Osaka J. Math.* 15 (1978), S. 117–135

[Sug79] SUGAWARA, T.: Non-immersion and non-embedding theorems for complex Grassmann manifolds. In: *Proc. Japan Acad., Ser.A* 55 (1979), S. 59–64

[Tan93a] TANG, Z.-Z.: Codimension One and Two Immersions of Grassmann Manifolds in Euclidean Spaces. In: *Chinese Science Bulletin* 38 (1993), S. 100–102

[Tan93b] TANG, Z.-Z.: Non-immersion Theorems for the Grassmann Manifolds $\tilde{G}_{2,n}$ and $G_{2,n}$. In: *Chinese Science Bulletin* 15 (1993), S. 353–355

[Tan95] TANG, Z.-Z.: Codimension Two Immersions of Oriented Grassmann Manifolds. In: *Manuscripta math.* 88 (1995), S. 165–170

[Tor68] TORNEHAVE, J.: Immersions of complex flagmanifolds. In: *Math. Scand.* 23 (1968), S. 22–26

[Wan54] WANG, H. C.: Closed manifolds with homogenous complex structure. In: *American Journal of Math.* 76 (1954), S. 1–32

[WW84] WALKER, G. ; WOOD, R. M. W.: Low codimensional embeddings of $Sp(n)$ and $SU(n)$. In: *Proc. Edinb. Math. Soc.* II. Ser. 27 (1984), S. 25–29