

"Wird das auch noch bewiesen?" – Inhaltsbezogene Einblicke in das Aufgabenangebot von Schulbüchern zum mathematischen Argumentieren

In den Bildungsstandards Mathematik wird die Forderung erhoben, die Kompetenz mathematisch Argumentieren [mA] im Mathematikunterricht bei allen Lernenden durchgängig zu fördern (z. B. KMK, 2022). Entsprechende Lehr- und Lernprozesse sind in der Praxis allerdings mit verschiedenen Herausforderungen verbunden (etwa Jahnke & Ufer, 2015), wobei dem Schulbuch als (Strukturierungs-)Grundlage von Unterrichts- und Erkenntnisprozessen sowie als Aufgabensammlung eine prominente Rolle zukommt (van den Ham & Heinze, 2018). In diesem Beitrag wird daher das Aufgabenangebot von Schulbüchern zum mA am Beispiel des Themenbereichs "quadratische Funktionen" [QF] genauer betrachtet.

Die Kompetenz mathematisch Argumentieren

Im Rahmen des Mathematikunterrichts sollen Schüler:innen u. a. dazu befähigt werden, eigenständig mathematische Argumentationen zu entwickeln (KMK, 2022). Dabei umfasst die Kompetenz 'Mathematisch Argumentieren' ein breites Spektrum von (kognitiven) Aktivitäten, wie etwa das Erläutern, Prüfen und Begründen von Lösungswegen und das begründete Äußern von Vermutungen (KMK, 2022, S. 9). Diese Kompetenz intendiert demnach die Aneignung spezifischer Tätigkeiten, die sich in einem Spektrum zwischen Alltagsargumentationen und Beweisen ansiedeln lassen. Allerdings gibt es verschiedene Befunde in der Literatur, die darauf hinweisen, dass Aktivitäten zum mA im täglichen Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielen (Kempen, 2019). Bei der Frage nach adäquaten Begründungsanlässen und allgemein Aufgaben zum mA kommt dabei dem jeweilig verwendeten Schulbuch eine zentrale Rolle zu (z. B. Tarr et al., 2006).

Erkenntnisse aus Schulbuchanalysen

International liegen Forschungsbefunde vor, dass Aufgaben zum mA in Mathematikschulbüchern eher wenig vertreten sind. So lag in der Untersuchung von Bieda et al. (2014) der Anteil von Aufgaben zum mA in Schulbüchern der fünften Klasse bei 3,7 %. Brunner et al. (2019) untersuchten je zwei Schulbücher der fünften und der achten Klasse bzgl. des Vorkommens sogenannter genuiner Begründungsaufgaben, womit solche Begründungsaufgaben gemeint sind, die "beispielhafte Einsichten ermöglichen und sich mit der Erklärung und Begründung von mathematischen Zusammenhängen oder Be-

ziehungen befassen" (ebd., S. 654). Dabei lag der Anteil entsprechender Aufgaben zwischen 0,7 % und 3,0 %. Unklar ist allerdings, wie sich der Aufgabenanteil zum Kompetenzbereich mA insgesamt in aktuell in Deutschland verwendeten Schulbüchern zeigt, mit welchen innermathematischen Gegenständen sich diese befassen und wie entsprechende Aufgaben in die Erarbeitungs- und Erkenntnisprozesse der jeweiligen Schulbuchkapitel eingegliedert sind.

Forschungsinteresse

Neben globaleren Ergebnissen bzgl. der Aufgaben zur Kompetenz mA sollen hier auch fachinhaltliche Einsichten in das Aufgabenangebot der Schulbücher erlangt werden. Dazu wurde das Themengebiet "quadratische Funktionen" [QF] ausgewählt, um einen Inhalt zu betrachten, der explizit nicht zu den 'klassischen' Domänen des mathematischen Argumentierens im Schulunterricht (wie Geometrie oder elementare Arithmetik) zählt.

Das Forschungsinteresse dieses Beitrages umfasst somit folgende Fragestellungen: (1) Welche kognitiven Aktivitäten zum mathematischen Argumentieren werden in Schulbuchaufgaben zum Thema QF angesprochen? (2) Wie hoch ist der Anteil von genuinen Begründungsaufgaben in Schulbüchern zum Thema QF? (3) Welche innermathematischen Inhalte werden als Gegenstände der Aktivitäten zum mA genutzt? (4) Wie sind die entsprechenden Aufgaben zum mA in die Erkenntnis- und Erarbeitungsprozesse der Schulbuchkapitel zum QF eingegliedert? (5) Inwiefern lassen sich Unterschiede bzgl. der Fragestellungen (1) - (4) zwischen den Schulbüchern ausmachen?

Die vorliegende Schulbuchanalyse

Im Rahmen einer Schulbuchanalyse wurden Aufgaben aus den Kapiteln zu "quadratischen Funktionen" in Anlehnung an Brunner et al. (2019) analysiert und kategorisiert. In diesem Beitrag fokussieren wir die Ergebnisse bzgl. der Auswertungskategorien 'kognitive Aktivitäten', Vorkommen 'genuiner Begründungsaufgaben', 'innermathematische Gegenstände' und 'Verortung im Lernpfad' des Kapitels. Für die Analyse wurden vier Gymnasial-lehrbücher ausgewählt, die zwischen 2008 und 2017 erschienen sind. Als Analyseeinheit wurden – analog zu Brunner et al. (2019) – Handlungsaufforderungen betrachtet. Alle Handlungsaufforderungen, die der Kompetenz mA zugeordnet werden konnten, wurden entsprechend den obigen Fragenstellungen nach dem Vorgehen einer qualitativen Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2012) kategorisiert. Für die Analyse wurden entsprechende Kategoriensysteme entwickelt (s. u.); zugehörige Kodierregeln wurden in einem Kodiermanual festgelegt. In den Kategorien der 'kognitiven Aktivitäten' werden die jeweils intendierten Tätigkeiten aus dem Spektrum vom mA unterschieden (Vermu-

ten, Widerlegen, Existenz klären, Beschreiben von Änderungen, Verallgemeinern, Bewerten-Prüfen-Beurteilen, Erklären-Begründen-Beweisen, Zuordnen von Darstellungen und Lösungsweg überprüfen). Bzgl. des Vorkommens 'genuiner Begründungsaufgaben' wurde eine dichotome Unterscheidung verwendet. Die jeweils adressierten innermathematischen Gegenstände wurde induktiv kategorisiert und für die Verortung im Lernpfad wurde im Dreischritt 'Erarbeiten', 'Ordnen' und 'Üben' unterschieden. Die Güte der Kategorisierungssysteme wurde anhand von zwei Schulbüchern durch Zweitkodierungen überprüft. Die Interrater-Reliabilität (Cohens Kappa) war dabei in allen Kategorien gut bis sehr gut.

Ergebnisse

Die Analyse der Schulbuchkapitel zeigt deutliche Unterschiede zwischen den Schulbüchern. Beginnend mit einer recht unterschiedlichen Gesamtanzahl an Handlungsaufforderungen in den Kapiteln zum QF (447 - 1058), wobei der Anteil derer zum mA zwischen 4,25 % und 11,41 % liegt. Ähnlich den Befunden von Brunner et al. (2019) liegt auch in dieser Studie der Anteil von genuinen Begründungsaufgaben in einem Bereich von 0,67 % bis 2,12 %. Auch, wenn die prozentualen Anteile von Handlungsaufforderungen zum mA in den Schulbüchern durchaus unterschiedlich ausfallen, so wird doch in jedem Schulbuch ein Spektrum von Aufgaben angeboten, das die Kompetenz mA in ihrer Breite abzudecken vermag. Das 'Erklären, Begründen bzw. Beweisen' (etwa "Begründen Sie, warum der Graph einen solchen Verlauf annimmt.") ist dabei mit Anteilen von 28,89 % bis 59,26 % fast immer die am häufigsten fokussierte Aktivität. Auch die Aktivität des Vermutens fällt besonders ins Gewicht, da sie in jedem Schulbuch zu den drei am häufigsten kategorisierten Aktivitäten zählt. Bzgl. der jeweils adressierten innermathematischen Gegenstände zeigt sich ein hoher Anteil von Aufgaben zum charakteristischen Änderungsverhalten von QF und Aufgaben, in denen die Passung einer Funktionsgleichung zu Graphen, Sachsituationen o. ä. begründet werden soll. Dagegen ist das charakteristische Moment der Symmetrie der Parabel bzw. entsprechender Funktionswerte mit einer Ausnahme nie Untersuchungs- oder Begründungsgegenstand. Bzgl. der Verortung im Lernpfad zeigt sich, dass in allen betrachteten Schulbüchern die meisten Aufgaben zum mA in den (nachträglichen) Abschnitten zum Üben verortet sind, entsprechende Erkundungs- oder Begründungsaufgaben also weniger in die (Haupt-)Erkenntnisprozesse der jeweiligen Kapitelinhalte eingebunden sind.

Fazit

In dieser Studie wurden vorherige Befunde zum Vorkommen von Aufgaben zum mA und expliziter 'genuiner Begründungsaufgaben' auch für deutsche

Mathematikbücher (Gymnasium) für den Bereich der QF bestätigt. Unterschiede zwischen den Schulbüchern zeigten sich auch bzgl. der jeweils fokussierten (kognitiven) Aktivitäten und den dabei adressierten innermathematischen Gegenständen. Auffallend war schließlich auch das relativ hohe Auftreten von Aufgaben zum Vermuten.

Es deutet sich an, dass die Wahl eines Schulbuchs einen Einfluss darauf haben könnte, welche Lerngelegenheiten Lernenden zum mA überhaupt geboten werden, wie diese in die mathematischen Erkenntnisprozesse eingebunden sind und welches Bild sich somit insgesamt den Lernenden als Summe der Lerngelegenheiten von der Kompetenz mA zeigt. Dabei verlangt gerade auch die verstärkte Einbindung von Vermutungsaufgaben nach weiterer fachdidaktischer Forschung bzgl. der Umsetzung entsprechender Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht.

Literatur

- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.4.0351>
- Brunner, E., Jullier, R. & Lampart, J. (2019). Aufgabenangebot zum mathematischen Begründen in je zwei aktuellen Mathematikbüchern. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 41(3), 647-664.
- Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Springer.
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer Spektrum.
- KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und mittlerer Schulabschluss (MSA)*.
- Kuckartz, U. (2012). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz Juventa.
- Tarr, J. E., Chávez, Ó., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2006). From the written to the enacted curricula: The intermediary role of middle school mathematics teachers in shaping students' opportunity to learn. *School Science and Mathematics*, 106(4), 191–201.
- van den Ham, A.-K. & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 59, 133-140.