HAVERKAMP, Michael & KEMPEN, Leander
Universität Greifswald

Die Bernoulli-Formel verstehen? Rekonstruktion von Verstehensprozessen bei Lernenden der Oberstufe

Der Umgang mit mathematischen Formeln stellt für viele Lernende bekanntlich eine Herausforderung dar (z. B. Schou & Bikner-Ahsbahs, 2022). Für einen *verständigen* Umgang mit mathematischen Formeln gilt der Aufbau eines konzeptuellen Verständnisses von entscheidender Bedeutung (Prediger et al., 2022). In diesem Beitrag stellen wir einen Rahmen vor, in dem wir das konzeptuelle Verständnis für *die Bernoulli-Formel* beschreiben und für die empirische Forschung zugänglich machen. Darauf aufbauend wird exemplarisch rekonstruiert, welche Verstehensprozesse bei Lernenden der Oberstufe in einer Lernumgebung zur Erarbeitung der Bernoulli-Formel nachverfolgt werden können.

Konzeptuelles Verständnis auf drei Ebenen

In Anlehnung an Hiebert und Carpenter (1992) verstehen wir mit konzeptuellem Verständnis ein tiefes Verstehen der Verbindungen und Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Ideen und Konzepten. Im Kontext mathematischer Sätze wird dabei das Erkennen der mathematischen Struktur, also jenen Verbindungen zwischen den Voraussetzungen und der Behauptung eines Satzes, als relevant angesehen (z. B. Leong et al., 2021). Für die Bernoulli-Formel unterteilen wir die mathematische Struktur in drei Ebenen (s. Abb. 1; vgl. u. a. Schupp, 1985).

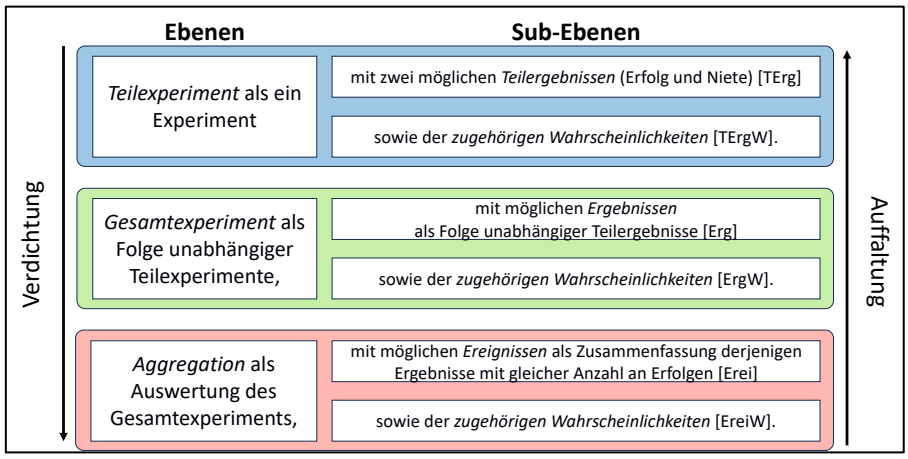

Abb. 1: Modell des konzeptuellen Verständnisses zur Bernoulli-Formel

Nach Drollinger-Vetter (2011) lassen sich mathematisch hoch *verdichtete* Konzepte in einzelne Verstehenselemente zerlegen („*auffalten*"). Der theoretische Rahmen der drei Ebenen (s. Abb. 1) ist mit dieser Auffassung konform, da sich die Bernoulli-Formel (mit der die Wahrscheinlichkeit für ein

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Ereignis bestimmt werden kann) über die Struktur des Ereignisses und die anderen Ebenen erklären bzw. auffalten lässt.

Das Galton-Brett als verstehensförderliche Darstellung?

In verschiedenen Praxisbeiträgen wird das Potenzial des Galton-Bretts, das zugleich als Kontext und Darstellung angesehen werden kann, zur Erarbeitung der Bernoulli-Formel herausgestellt (z. B. Hußmann, 2003). In empirischen Forschungsbeiträgen zur Bernoulli-Formel wird jedoch eher das Baumdiagramm als Darstellung aufgegriffen (z. B. Sánchez & Landín, 2014). Für die Auseinandersetzung mit dem Galton-Brett stellt sich die Frage: Welche Verstehensprozesse können bei Lernenden der Oberstufe während der Erarbeitung der Bernoulli-Formel nachverfolgt werden?

Methodik

Im Rahmen eines übergeordneten Design-Research-Projekts wurde eine vierteilige Lernumgebung (jeweils 45 Minuten) zur Erarbeitung der Bernoulli-Formel entwickelt (Haverkamp & Kempen, 2024). Dabei wird im zweiten Teil die Systematisierung der Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis anvisiert. Zu diesem Zweck wird anhand eines schräg aufgestellten Galton-Bretts (vierstufig, $p=1/4$, Nummerierung der Eimer von 0 bis 4) zunächst auf die Entwicklung einer informellen Strategie abgezielt. Die Analyse dieses Beitrags wird dabei anhand der folgenden Fokusaufgabe vollzogen: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel in Eimer 1 fällt.

Im zweiten Zyklus des Design-Research-Projekts wurden Designexperimente in vier Lerngruppen der Oberstufe (NRW, 1 Leistungskurs, 3 Grundkurse, je 8 bis 16 Lernende, Alter: 17 bis 19 Jahre) durchgeführt. Die Bearbeitung der Fokusaufgabe erfolgte in Zweiergruppen, sodass die Bearbeitung von 19 Gruppen zur Verfügung stehen, wobei die bearbeiteten Aufgabenzettel und transkribierte Audioaufnahmen der Gruppendiskussion als Datengrundlage dienen. Die qualitative Datenanalyse erfolgte in einem dreischrittigem Kodierungsverfahren: (1) Relevante Äußerungen wurden mit den drei Ebenen und (2) mit den sechs Sub-Ebenen kodiert (s.o.), um die Adressierung der mathematischen Struktur und dazwischenliegenden Verbindungen nachzeichnen zu können. (3) Äußerungen einer Sub-Ebene wurden induktiv kodiert, um unterschiedliche Verstehenselemente der Sub-Ebenen zu generieren, wobei diese mit deduktiven Vorüberlegungen abgeglichen wurden.

Ausgewählte Analyseergebnisse

Bei der Bearbeitung der Fokusaufgabe kommt es zu folgendem Gespräch zwischen den Lernenden Leo und Emma, das an dieser Stelle auf die inhaltlich relevanten Aussagen gekürzt wurde.

Turn	Person	Transkriptauszug	Kodierung
1	Leo	(…) Ja, dann müssten wir jetzt ja die Wege durchgehen, oder? (Emma: Hm)	EreiW
2	Leo	(…) Das ist 3 Viertel mal 3 Viertel mal 3 Viertel mal 1 Viertel. Sind die alle, oder? Die alle.	ErgeW
3a	Leo	Ja, also 3 Viertel hoch 3 mal 1 Viertel. Das ist die Wahrscheinlichkeit. (Emma: Ja)	ErgeW
3b		Und das Ergebnis noch mal 3... (Emma: Hä?)	EreiW
4a	Leo	Weil es fällt bei jedem Weg einmal nach rechts und die Wahrscheinlichkeit ist 1 Viertel. Und es fällt 3 mal nach links, das ist 3 Viertel.	Erge TErgW
4b		Also 3 Viertel hoch 3 mal 1 Viertel. Da ist die Wahrscheinlichkeit, einmal da reinzukommen.	ErgeW
4c		Aber es gibt, ah ne mal 4, weil es gibt 4 Wege. Deswegen das mal 4.	Erei; EreiW

Tab. 1: Transkriptauszug von Leo und Emma mit Kategorisierung entlang der drei Ebenen (für die Bedeutung der Abkürzungen siehe Abb. 1)

In diesem Auszug werden zwei wünschenswerte Phänomene deutlich. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis (ErgeW) wird ausgehend von einer Multiplikation von vier Brüchen (Turn 2) in eine Potenzschreibweise überführt (Turn 3a, 4b). Wiederum wird die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis (EreiW) ausgehend von einer Idee der additiven Bestimmung (Turn 1) durch eine Idee der multiplikativen Bestimmung (Turn 3b, 4c) ersetzt. In beiden Fällen zeigt sich eine zunehmende Schematisierung des Vorgehens und damit jeweils ein **Prozess der Verdichtung**, an dessen Ende sich eine entwickelte informelle Strategie erkennen lässt, die mit der Bernoulli-Formel bereits in weiten Teilen konform ist. Ein weiteres Phänomen erwächst aus der situativen Deutung der Bestandteile der selbstentwickelten Strategie: Einerseits wird die Anzahl der jeweiligen Teilergebnisse (Erge) und die Wahrscheinlichkeit für die Teilergebnisse (TErgW) zur Deutung der Potenzschreibweise aufgegriffen (Turn 4a). Andererseits wird genau dieser Term als Wahrscheinlichkeit für jeden günstigen Weg (ErgeW) interpretiert (Turn 4b, 2) und die Multiplikation mit der Anzahl der zu Eimer 1 führenden Wege (Turn 4c; Erei) als weiterer Bestandteil zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis erkannt (EreiW). Das schematisierte Vorgehen wird damit in einzelne Verstehenselemente zerlegt, womit sich ein **Prozess der Auffaltung** zeigt, an dem sich das Erkennen mathematischer Strukturen festmachen lässt.

Diskussion

Am Einzelfall Leo und Emma wurde exemplarisch ein Verstehensprozess mithilfe des Rahmens der mathematischen Struktur auf den drei Ebenen rekonstruiert. Für die weitere Entwicklung des Projekts ist eine Anreicherung um konsolidierte Verstehenselemente über eine Analyse aller Lerngruppen angedacht, um (1) die Verstehensprozesse tiefgreifender nachvollziehen und (2) *typische* Verstehensprozesse (und Hürden) herausstellen zu können, die im Sinne einer lokalen Theorie bei der Weiterentwicklung der Lernumgebung berücksichtigt werden. Dieses Ziel könnte durch eine zunehmende Systematisierung der Bernoulli-Formel erreicht werden, die entlang von Aufgaben erfolgt, die die *relevanten* Verstehensprozesse fokussieren. Für dieses Vorhaben wird der hier vorgestellte, theoretisch fundierte und gegenstandsspezifisch konkretisierte (vorläufige) Rahmen als vielversprechendes Instrument angesehen.

Literatur

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit.* Waxmann Verlag.

Haverkamp, M. & Kempen, L. (2024, in press). Individuelle Vorstellungen beim Einstieg in die Binomialverteilung im Kontext eines Wahr-Falsch-Tests. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.*

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (S. 65-97). Macmillan.

Hußmann, S. (2003). *Mathematik entdecken und erforschen: Theorie und Praxis des Selbstlernens in der Sekundarstufe II.* Cornelsen.

Leong, Y. H., Cheng, L. P., Toh, W. Y. K., Kaur, B. & Toh, T. L. (2021). Teaching students to apply formula using instructional materials: a case of a Singapore teacher's practice. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 89-111. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00290-1

Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B. & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education,* 7. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.969212

Sánchez, E. & Landín, P. R. (2014). Levels of Probabilistic Reasoning of High School Students About Binomial Problems. In E. J. Chernoff & B. Sriraman (Hrsg.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (S. 581-597). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-7155-0_31

Schou, M. H. & Bikner-Ahsbahs, A. (2022). Unpacking hidden views: seven ways to treat your formula. *Educational studies in Mathematics, 109*(3), 639-659. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10092-7

Schupp, H. (1985). Kugeln, Zapfen, Kästchen: Das Galton-Brett. *Mathematik lehren, 4*(12), 4-7.