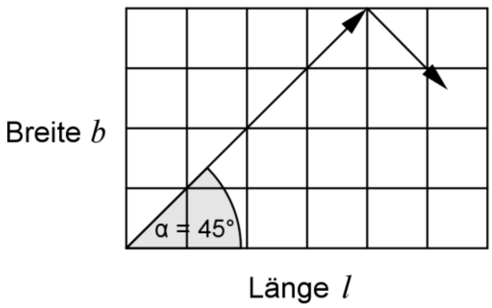
Christoph ABLEITINGER, Wien

Eine selbstdifferenzierende Problemlöseaufgabe zum Thema Billard

1. Modellannahmen

Auch wenn es der Titel suggerieren mag, es handelt sich bei diesem Beitrag nicht um eine realitätsnahe Anwendungsaufgabe. Vielmehr steht eine innermathematische Problemlöseaufgabe im Zentrum der Betrachtungen (siehe auch Jacobs 1994). Der vorliegende Beitrag kann − nicht zuletzt wegen des eingeschränkten Platzangebotes − nur einen kleinen Ausschnitt aus dem Gesamtpotenzial der Aufgabe präsentieren, selbst didaktische und unterrichtspraktische Bemerkungen können nur ansatzweise angeführt werden. Eine umfassende Behandlung des Unterrichtsvorschlags ist allerdings in Ableitinger (2011) nachzulesen. Wir gehen von den untenstehenden Modellannahmen aus, die im Folgenden uneingeschränkt gelten sollen (wobei das Bild ohnehin schon fast alles sagt):



- Es geht um eine einzige, punktförmige Billardkugel.
- Der Tisch habe vier Ecktaschen, aber keine Mitteltaschen.
- Der Tisch ist rechteckig, Länge und Breite sind jeweils natürliche Zahlen.
- Der Billardstoß beginnt links unten im Winkel von 45°.
- Das Reflexionsgesetz gilt: Einfallswinkel = Ausfallswinkel.
- Die Kugel rollt mit gleichmäßiger Geschwindigkeit.

2. Die zentrale Frage

Die Problemlöseaufgabe ist in wenigen Worten formuliert: „In welche der Ecktaschen fällt die Billardkugel bei einem Tisch der Länge l und der Breite b?“ Die Frage lässt sich natürlich auch konkreter stellen: „In welche Tasche fällt die Kugel bei einem Tisch der Länge 2803 und der Breite 2001?“

(So könnte die Frage zum Beispiel einem Schüler mit dem Geburtsdatum 28.03.2001 gestellt werden.)

Auf dem Weg zur Beantwortung dieser Frage stößt man unweigerlich auf viele andere spannende Entdeckungen. Will man diese möglichen Entdeckungen in den Fokus des Unterrichtsgeschehens stellen, so bietet sich auch ein offener Arbeitsauftrag an, der selbstdifferenzierenden Charakter hat: „Zeichne die folgenden Tische auf kariertes Papier und verfolge den Weg der Billardkugel! Was fällt dir auf? Formuliere entsprechende Vermutungen!“

Länge	*Breite*
9	3
5	5
8	6
7	5
8	4
10	2
9	6
10	4
etc.	etc.

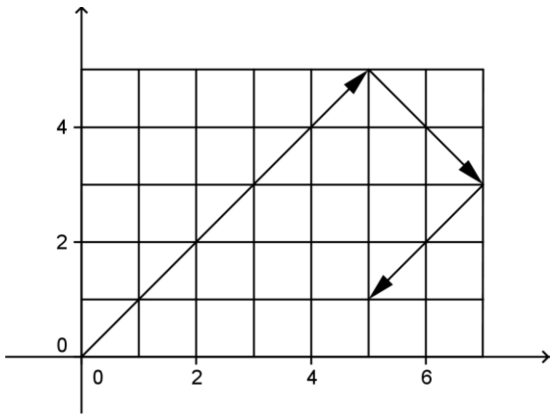
Viele der üblicherweise durch die Schüler/innen generierten Vermutungen lassen sich auf dem Niveau der Sekundarstufe I begründen. So z. B. folgende Aussagen, die auch zur Beantwortung der zentralen Frage von entscheidender Bedeutung sind (Begründungen finden Sie in Ableitinger 2011):

- Die Kugel fällt immer in eine der Taschen.
- Es gibt keinen Tisch, bei dem die Kugel in die linke untere Tasche fällt.
- „Ähnliche“ Tische (also solche mit gleichem Seitenverhältnis $l : b$) zeigen auch „ähnliche“ Kugelverläufe (also solche, die durch Zoomen auseinander hervorgehen).

3. Die entscheidende Lösungsidee - ein Koordinatensystem

Der Antwort auf „In welche Tasche fällt die Kugel bei einem Tisch der Länge l und der Breite b?“ lässt sich auf die Spur kommen, wenn man ein

Koordinatensystem so „unter“ den Tisch legt, dass der linke untere Eckpunkt des Tisches im Koordinatenursprung liegt:



Dabei kann nämlich die zielführende Beobachtung gemacht werden, dass die Kugel nur solche ganzzahligen Punkte des Koordinatensystems durchläuft, deren Koordinaten dieselbe Parität aufweisen (d.h. beide gerade bzw. beide ungerade). In obiger Grafik sind dies: (0|0), (1|1), (2|2), (3|3), (4|4), (5|5), (6|4), (7|3), (6|2), (5|1) usw. Eine Begründung könnte so lauten: In jedem Schritt ändert sich die horizontale und die vertikale Position der Kugel jeweils um 1. Nachdem die Kugel in (0|0) startet, müssen alle durchlaufenen Punkte Koordinaten mit derselben Parität haben.

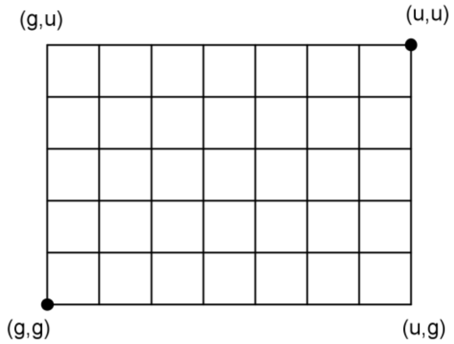
Je nach Länge und Breite des Tisches kommen also nur gewisse Ecktaschen überhaupt als Endstation für die Kugel in Frage.

4. Eine Kategorisierung der Tische und die Beantwortung der Frage

Die Tische können nun danach eingeteilt werden, ob sie gerade bzw. ungerade Länge und Breite haben:

Kategorie	*Länge*	*Breite*
I	ungerade	ungerade
II	ungerade	gerade
III	gerade	ungerade
IV	gerade	gerade

Exemplarisch untersuchen wir Kategorie I − nicht zuletzt, um die Frage beantworten zu können, in welche Tasche die Kugel beim oben erwähnten „Geburtstagstisch“ mit der Länge 2803 und der Breite 2001 fällt. Die Situation sieht für einen Tisch der Kategorie I folgendermaßen aus:



In die rechte untere bzw. in die linke obere Tasche kann die Kugel gar nicht fallen – die entsprechenden Punkte im Koordinatensystem haben Koordinaten mit unterschiedlicher Parität. Es kommen also nur noch die linke untere Tasche (in die die Kugel allerdings nie fällt) und die rechte obere Tasche in Frage. Und schon ist die Frage geklärt, in welcher Tasche die Kugel beim Geburtstagstisch landet! Die Kategorien II und III lassen sich ähnlich schnell abhandeln. Bei einem Tisch der Kategorie IV lohnt sich die Betrachtung des kleinsten, zum gegebenen Tisch ähnlichen Tisch (der dann wieder in einer der Kategorien I bis III liegen muss).

5. Bemerkungen zum Einsatz im Unterricht

Auch wenn im Rahmen dieses Kurzbeitrages nur einige Teilaspekte eines möglichen Unterrichtsprojektes skizziert werden konnten, so wurde schon das Potenzial sichtbar, das die Problemaufgabe im Unterricht entfalten kann. Inhaltlich passt die Bearbeitung gut in die elementare Zahlentheorie, die durch die Vernetzung mit ebener Koordinatengeometrie unterstützt wird. Auf der Handlungsebene wird vor allem der Einsatz heuristischer Problemlösestrategien gefordert, um einerseits Vermutungen generieren und diese andererseits auch begründen bzw. beweisen zu können. Was die Komplexität der Aufgabe betrifft, soll noch einmal betont werden, dass der Arbeitsauftrag prinzipiell so offen formuliert werden kann, dass die Aufgabenstellung selbstdifferenzierend wirkt. Jeder Lernende kann auf einem für ihn passenden Niveau arbeiten, Vermutungen selbst aufstellen und die ihn interessierenden genauer unter die Lupe nehmen.

Literatur

Ableitinger, Ch. (2011): Problemlösen am Billardtisch. In: Mathe vernetzt - Anregungen und Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht. Schriftenreihe des Arbeitskreises "Vernetzungen im Mathematikunterricht" der GDM, Band 1, S. 70-81.

Jacobs, H. R. (1994): Mathematics. A human endeavor. Third edition. New York: W. H. Freeman and Company.