

Conceptual Change und APOS-Theorie – Perspektiven auf Lernprozesse zum Funktionsbegriff

Lernprozesse bzgl. des Funktionsbegriffs werden in zahlreichen international verorteten Studien durch die Aktion-Prozess-Objekt-System-Theorie (kurz: APOS-Theorie) beschrieben (z. B. Breidenbach et al., 1992; Dubinsky & Wilson, 2013). Zum einen präsentiert diese Theorie mögliche Stufen, die beim Erlernen des Funktionsbegriffs und anderen Begriffen aus fachlicher Perspektive durchlaufen werden können; zum anderen stellt sie ein „analytical evaluative tool“ (Arnon et al., 2014, S. 1) bereit, um Lernverläufe und Lernschwierigkeiten zu erklären (s. a. Dubinsky & McDonald, 2001).

In der APOS-Theorie werden vier Stufen bzw. vier mentale Konstruktionen („mental constructions“, Dubinsky & McDonald 2001, S. 2) beschrieben, die einen Lernprozess charakterisieren können: Aktion, Prozess, Objekt und Schema. Diese vier Stufen bzw. Konstruktionen werden in verschiedenen Arbeiten bzgl. diverser mathematischer Begriffe diskutiert und werden im Folgenden für den Funktionsbegriff näher erläutert (s. a. Arnon et al., 2014; Dubinsky et al., 2005). Die Stufe der „Aktion“ wird häufig durch das Einsetzen einzelner Werte in einen Funktionsterm und eine entsprechende Auswertung beschrieben. Wird diese Aktion von Lernenden wiederholt ausgeführt, reflektiert und verinnerlicht, können sich Vorstellungen und Wissensbestände zum Funktionsbegriff insofern verändern, als dass eine Funktion als ein „Prozess“ der Zuordnung aufgefasst werden, bei dem unbestimmte „Inputs“ (Werte aus dem Definitionsbereich) in „Outputs“ umgewandelt werden (Dubinsky et al., 2005, S. 339). Aus diesem Prozess kann sich durch „Einkapselung“ („encapsulation“, Dubinsky et al., 2005, S. 339) ein „Objekt“ ergeben, sodass sich entsprechende Vorstellungen erneut verändern. Auf dieser Stufe können Funktionen bspw. als solche addiert, multipliziert oder verkettet werden. Durch eine Verknüpfung der drei genannten mentalen Konstruktionen (Aktion, Prozess, Objekt) wird ein „Schema“ charakterisiert.

APOS-Theorie und Conceptual Change-Theorie

Die Stufen Aktion, Prozess, Objekt und Schema ermöglichen Beschreibungen, inwiefern beim Lernen des Funktionsbegriffs Veränderungen vorhandener Vorstellungen und Wissensbestände erforderlich sind. Mit Veränderungen bereits vorhandener Vorstellungen und Wissensbestände beschäftigen sich viele weitere Lerntheorien wie auch die Conceptual Change-Theorie. Eine Grundannahme dieser Theorie ist, dass Lernen nicht allein aus einer Wissenserweiterung, sondern auch aus Veränderungen und insbesondere

Umbrüchen vorhandener Vorstellungen und Wissensbestände besteht (Posner et al., 1982; Vosniadou & Verschaffel, 2004). Im Rahmen mathematikdidaktischer Arbeiten werden mit der Conceptual Change-Theorie vor allem Lernprozesse beschrieben, die fachlich begründete, inhaltliche Umbrüche erfordern, wie sie z. B. beim Übergang von den natürlichen zu den rationalen Zahlen auftreten: So kann zwar die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen, aber nicht mehr die Multiplikation zweier Bruchzahlen im Allgemeinen als wiederholte Addition aufgefasst werden. Auch gilt die Vorstellung, dass Multiplizieren vergrößert, im Allgemeinen nicht mehr für Bruchzahlen (Heck Ribeiros et al., 2022).

Anders als bei vielen in der Conceptual Change-Theorie dokumentierten Lernprozessen, erfordert der durch die Stufen der APOS-Theorie beschriebene Lernprozess zum Funktionsbegriff und zu anderen Begriffen nicht zwingend einen inhaltlichen Vorstellungsumbruch, sondern lässt sich eher durch eine Vorstellungserweiterung charakterisieren. Dass kein inhaltlicher Umbruch fokussiert wird, wird insbesondere auch dadurch deutlich, dass die genannten Stufen aufeinander aufbauen und im Zuge des Lernprozesses auch ohne Weiteres auf vorherige Stufen zurückgegriffen werden kann (Arnon et al., 2014; Dubinsky & McDonald, 2001). Auch, dass in den Betrachtungen zur APOS-Theorie der Gültigkeitsbereich der betrachteten Begriffe nicht zwingend erweitert wird, legt Umbrüche als solche zunächst nicht nahe.

Inwiefern Lernprozesse, die durch die APOS-Theorie gerahmt werden können, jedoch auch Charakteristika von Umbrüchen im Sinne der Conceptual Change-Theorie aufweisen können, ist eine offene Frage. Wir nähern uns dieser Frage exemplarisch am Funktionsbegriff und diskutieren im Folgenden ein illustrierendes Fallbeispiel, das erste Hinweise bzgl. der aufgeworfenen Fragen liefert. Insgesamt soll der Beitrag eine tiefgehende Diskussion zur vergleichenden Betrachtung der beiden genannten Theorien eröffnen.

Illustrierendes Fallbeispiel aus einer Längsschnittstudie

Das folgende Fallbeispiel stammt aus einer Längsschnittstudie zum Übergang von der Schule zur Hochschule und hat für den vorliegenden Theoriebeitrag illustrierenden Charakter. Im Rahmen dieser Studie wurden 15 Lernende jeweils zweimal interviewt: einmal am Ende der Oberstufe und einmal am Ende des ersten Semesters ihres jeweiligen mathematiknahen Studiengangs (z. B. Mathematik, Wirtschaftswissenschaften, Informatik). Es wird ein Ausschnitt aus dem Interview mit Tom (Pseudonym) dargestellt, das am Ende seines erstens Semesters geführt wurde. In diesem belegte Tom eine Vorlesung zur diskreten Mathematik:

I.: Erzähl mir bitte erstmal, was dir alles zu dem Begriff Funktion einfällt.

Tom: [Nachfrage von Tom zur Interviewführung] Für mich ist eine Funktion erstmal irgendwie immer der Zusammenhang, dass gewisse Werte auf gewisse andere Werte abbilden. Also wie man das in der Schule kennt irgendwie mit dem x -Wert, der durch eine Funktion irgendwie dann einen y -Wert zugewiesen bekommt. Was eben entweder, so kenne ich es eher aus der Schule, durch einen mathematischen Term irgendwie ausgedrückt wird. Irgendwie x^2 sowas. Während das dann bei diskrete Strukturen bei mir immer eher konkrete Mengen waren, wo das dann irgendwie angegeben wurde, welche Werte auf welche abbilden. Man kann Funktionen immer graphisch darstellen, entweder eben in so einem Koordinatensystem, also mit dann irgendwie einer Linie oder also wie das halt da läuft. Oder wiederrum eher wie wir es bei der Uni hatten, dass einzelne Punkte/ also irgendwie man hat die Menge mit den Zahlen 1 bis 5, die auf eine gewisse andere Menge abbilden und, dass man dann eben die zwei Mengen hat mit den einzelnen Werten. Wir hatten das immer so mit Pfeilen, die dann aufeinander abgebildet haben. Man kann Funktionen gewisse Eigenschaften zuweisen. Da hatten wir aus der Schule sowas wie Symmetrie, Steigung, also dieses monoton steigend, monoton fallend. Und dann hatten wir in der Uni die drei Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv.

Im weiteren Verlauf des Interviews wird Tom explizit danach gefragt, ob er die Inhalte aus dem ersten Semester mit den in der Schule thematisierten Inhalten in Verbindung setzen kann:

I.: Kannst du das, was ihr an der Universität gemacht habt mit dem, was ihr in der Schule gemacht habt, in Verbindung setzen?

Tom: Meine grundlegende Vorstellung von dem Begriff Funktion hat sich geändert. Dass ich das jetzt so verstehe, dass eben ein Wert auf einen gewissen anderen Wert abbildet und damit in Verbindung steht. Und in der Schule hat man immer dieses x, y . Was sicherlich unterschiedlich war, ist einfach, wie Funktionen definiert wurden. In der Schule macht man das ja oft eher allgemein durch einen mathematischen Ausdruck. Das hatten wir eigentlich in der Uni quasi nie, sondern wir hatten dann immer, dass wirklich konkrete Werte auf konkrete andere Werte abgebildet haben. Aber die Vorstellung, dass so gewissen Werte auf andere Werte abbilden, dieses Verständnis kann man auch bei den Funktionen aus der Schule haben.

Tom beschreibt in diesem zweiten Interviewausschnitt, wie sich seine „Vorstellung“ des Funktionsbegriffs im ersten Semester „geändert“ habe. Für Tom steht bzgl. der Thematisierung des Funktionsbegriffs an der Schule vor allem ein Funktionsterm im Vordergrund, der in seiner Vorlesung zur diskreten Mathematik an der Universität laut ihm nicht mehr betrachtet wurde. Dass Schüler*innen den Funktionsbegriff zum Ende der Schullaufbahn in erster Linie mit einem Funktionsterm und der Manipulation algebraischer Ausdrücke assoziieren, bestätigen zahlreiche empirische Studien (z. B. Oehrtman et al., 2008). Werden an der Hochschule dann allerdings wie bei Tom Funktionen betrachtet, für die kein Funktionsterm vorliegt oder aufgestellt wird (was auch sein vorliegendes Vorlesungsskript bestätigt), kann dies wie im Fallbeispiel aufgezeigt dazu führen, dass Lernende Veränderungen und insbesondere Umbrüche im Lernprozess wahrnehmen.

Zusammenfassend können diese Umbrüche wie folgt charakterisiert werden: In der Veranstaltung zur diskreten Mathematik wird der Definitionsbereich nicht mehr als stetiges Intervall aufgefasst, sondern als diskrete Menge. Damit geht einher, dass Funktionen in der Veranstaltung z. B. nicht mehr als Funktionsterm oder als eine „Linie“ (Tom) im Koordinatensystem dargestellt werden. Stattdessen werden bipartite Graphen genutzt. Hieraus resultiert ein Umbruch im Sinne der Conceptual Change-Theorie (und zwar auf der Ebene der betrachteten Darstellungen), der nicht zwischen zwei, sondern innerhalb einer Stufe der APOS-Theorie zu verorten ist. Das heißt, dass z. B. innerhalb der zweiten Stufe der „Prozess“ der Zuordnung an der Schule an den Funktionsterm oder eine „Linie“ (Tom) im Koordinatensystem geknüpft wird, in späteren Vorlesungen zur diskreten Mathematik jedoch nicht mehr und somit können innerhalb dieser Stufe Umbrüche im Lernprozess identifiziert werden.

Literatur

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247–285.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In: D. Holton (Hrsg.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (Bd. 7, S. 275–282.) Springer.
- Dubinsky, E., & Wilson, R. (2013). High school students' understanding of the function concept. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 83–101.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359.
- Heck Ribeiros, P., Obersteiner, A., & Wittmann, G. (2022). In welcher Weise unterstützen Schulbücher Vorstellungsumbrüche beim Lernen von Bruchzahlen? – Eine Schulbuchanalyse. *mathematica didactica*, 45. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1595>
- Oehrtman, M. C., Carlson, M. P., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understandings of function. In: M. P. Carlson & C. Rasmussen (Hrsg.), *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (S. 27–42). Mathematical Association of America.
- Posner, G. J., Strike K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education* 66(2), 211–227.
- Vosniadou, S., & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction*, 14(5), 445–451. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014>