

**Entwicklung und Anwendung eines nicht-lokalen  
Materialmodells  
zur Simulation duktiler Schädigung  
in metallischen Werkstoffen**

von der Fakultät Maschinenbau  
der Universität Dortmund  
zur Erlangung des Grades  
Doktor-Ingenieur  
(Dr.-Ing.)

von  
Dipl.-Ing. Frederik Reusch  
aus Berlin

Dortmund 2003



Diese Arbeit wurde an der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung in der Projektgruppe „V.3901 Komponentensicherheit in der Energietechnik“ in Zusammenarbeit mit der Fakultät Maschinenbau der Universität Dortmund erstellt.



1	Einleitung	
1.1	Stand der Forschung .....	1-4
1.2	Numerische Simulation duktiler Schädigung.....	1-7
1.3	Zielsetzung und Inhalte.....	1-9
<b>2</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	
2.1	Bewegung.....	2-2
2.2	Deformation .....	2-3
2.3	Verzerrung.....	2-4
2.4	Mechanische Bilanzgleichungen.....	2-8
2.5	Spannungsmaße .....	2-8
2.6	Objektivität und objektive Zeitableitungen von Spannungstensoren.....	2-9
2.7	Spannungsgeschwindigkeiten .....	2-11
2.8	Energieerhaltungssatz und Entropieungleichung.....	2-11
2.9	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen.....	2-12
<b>3</b>	<b>Lokale Elastoplastizität</b>	
3.1	Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten .....	3-2
3.2	Spannung und Plastische Dissipationsleistung.....	3-5
3.3	Hyperelastisches Stoffgesetz.....	3-7
3.4	Plastisches Stoffgesetz.....	3-8
3.5	Verfestigungsmodellierung .....	3-9
3.6	Zusammenfassung .....	3-10
<b>4</b>	<b>Lokale Schädigungsmodellierung</b>	
4.1	Duktile Schädigung .....	4-1
4.2	Das Gurson-Modell.....	4-4
4.3	Entfestigung und Lokalisierung.....	4-8
4.4	Tafeln.....	4-13
<b>5</b>	<b>Nicht-lokale Schädigungsmodelle</b>	
5.1	Motivation .....	5-1
5.2	Nicht-lokale Integralansätze.....	5-3
5.3	Gradientenabhängige Formulierungen des Gurson-Modells .....	5-5
5.3.1	Diffusionsmodell .....	5-5

5.3.2	Herleitung aus der Integralbeziehung.....	5-9
5.4	Einführen einer neuen Schädigungsfeldgröße .....	5-11
5.5	Ratenabhängige Schädigungsentwicklung.....	5-13
5.6	Schwache Form und P.d.v.V.....	5-15
5.7	Tafeln .....	5-15
6	Finite Elemente Methode .....	6-1
6.1	Einleitung .....	6-1
6.2	Elementformulierung .....	6-3
6.3	Ebenes Element mit bilinearen Ansatzfunktionen .....	6-4
6.4	Axialsymmetrische Formulierung .....	6-9
6.5	Diskretisierung .....	6-12
6.6	Elementsteifigkeitsmatrix.....	6-14
6.7	Berücksichtigung großer Deformationen bei der Elementformulierung .....	6-15
6.8	Inkrementelle Form der Gleichgewichtsbedingung .....	6-19
6.9	Element-Integrationstechnik.....	6-20
6.10	Spannungsalgorithmus.....	6-22
6.11	Integration der Materialgleichungen .....	6-24
6.12	Newton-Raphson-Verfahren.....	6-26
6.13	Ermittlung der Tangente der Stoffgesetziteration .....	6-28
6.13.1	Lokales Gurson-Modell .....	6-28
6.13.2	Nicht-lokales Gurson-Modell .....	6-31
6.14	Konvergenzkriterien .....	6-35
6.15	Elementverifikation .....	6-37
6.15.1	Elementverifikation für große Deformationen bei reiner Schubbeanspruchung .....	6-37
6.15.2	Elementverifikation für die Schädigungssimulation .....	6-38
6.16	Verifikation des Gradientenmodells.....	6-39
6.17	Tabellen .....	6-42
6.18	Bilder .....	6-42
6.19	Tafeln .....	6-48
<b>7</b>	<b>Untersuchung des Elliptizitätsverlustes</b>	
7.1	Kriterien bei kleinen Deformationen .....	7-2
7.1.1	Kriterium für das lokale Gurson-Modell .....	7-4

7.1.2	Kriterium für das nicht-lokale Gurson-Modell .....	7-7
7.1.3	Anwendung .....	7-12
7.2	Kriterien bei großen Deformationen .....	7-14
7.2.1	Hyperelastisch-plastische Formulierung .....	7-14
7.2.2	Hypoelastisch-plastische Formulierung .....	7-18
7.3	Ergebnisse .....	7-20
7.3.1	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell an einfachen Lastfällen .....	7-20
7.3.2	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes und der Lokalisierung für das lokale Gurson-Modell an Bruchmechanikproben aus einem realen Werkstoff .....	7-21
7.3.3	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell bei großen Deformationen für einfache Lastfälle an 1-Elementrechnungen und verschiedenen Implementierungen .....	7-22
7.3.4	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das nicht-lokale Gurson-Modell bei kleinen Deformationen .....	7-23
7.4	Tabellen .....	7-26
7.5	Bilder .....	7-27
7.6	Tafeln .....	7-31
<b>8</b>	<b>Anwendungen</b>	
8.1	Anwendung des gradientenabhängigen Gurson-Modells an einfachen Teststrukturen bei idealisiertem Materialverhalten .....	8-2
8.1.1	Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung .....	8-2
8.1.2	Lokale Schädigungsentwicklung in einer Probe .....	8-6
8.2	Anwendung an Bruchmechanikproben au einem realen Werkstoff .....	8-7
8.2.1	Werkstoffes 10MnMoNi5-5 .....	8-8
8.2.2	Bestimmung der Materialparameter .....	8-8
8.2.3	Simulation duktilen Rissfortschritts an Bruchmechanikproben .....	8-8
8.3	Tabellen .....	8-12
8.4	Bilder .....	8-13
<b>9</b>	<b>Schlussbetrachtungen</b>	
9.1	Zusammenfassung .....	9-1
9.2	Ausblick .....	9-4

## **10 Notation**

10.1 Operatoren .....	10-2
10.2 Indizes .....	10-3
10.3 Formelzeichen .....	10-3

## **11 Anhang**

11.1 Gleichungen zur Lösung des lokalen Gurson-Modells .....	11-1
11.2 Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens (lokales Gurson-Modell) .....	11-3
11.3 Ableitung der Schädigungsentwicklung .....	11-5
11.4 Gleichungen zur Lösung des nicht-lokalen Gurson-Modells .....	11-9
11.5 Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens (nicht-lokales Gurson-Modell) .....	11-10
11.6 Ableitung für den linearisierten Materialoperator .....	11-12
11.7 Ableitungen zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix: .....	11-12

## **12 Verzeichnisse**

12.1 Bilder .....	12-1
12.2 Tafeln .....	12-5
12.3 Tabellen .....	12-6

## **13 Literatur**





1	Einleitung.....	1-1
1.1	Stand der Forschung.....	1-4
1.2	Numerische Simulation duktiler Schädigung .....	1-7
1.3	Zielsetzung und Inhalte .....	1-9

## 1 Einleitung

Eine verlässliche Beurteilung hochbeanspruchter Bauteile erfordert eine mechanische Analyse, die eine Beschreibung der Schädigungs- und Versagensmechanismen des Materials beinhaltet. Hierbei unterstützen numerische Verfahren wie die Finite Elemente Methode die Anwendung kontinuumsmechanischer Modelle, die das Verhalten des Werkstoffes auf makroskopischer Ebene beschreiben und den Schädigungsprozess auf der Grundlage einer phänomenologischen Beschreibung abbilden.

Zur Simulation duktiler Schädigungsvorgänge in metallischen Werkstoffen kommt seit vielen Jahren u.a. das Gurson-Modell [Gur1977] in der erweiterten, semi-phänomenologischen Form von Needleman und Tvergaard [Nee1984] zur Anwendung. In diesem Modell wird der mikromechanische Vorgang des duktilen Bruchs mit der Entwicklung von Hohlräumen in Verbindung gebracht. Dazu gehört die Entstehung oder Nukleation von neuen Hohlräumen durch Ablösung spröder Einschlüsse von der umgebenden duktilen Matrix, das Wachsen der entstandenen

Hohlräume sowie die sich anschließende Vereinigung der Hohlräume zum makroskopisch erkennbaren Riss. Der relative Volumenteil der Poren wird dabei über eine Schädigungsvariable beschrieben. Das Auftreten des makroskopischen Risses wird durch das Erreichen eines endgültigen Wertes des Hohlraumvolumenanteils definiert.

Duktile Schädigungsvorgänge sind oftmals von der Ausbildung einer Prozesszone begleitet, in der sich die Schädigung und andere inelastische Effekte akkumulieren und in denen hohe Dehnungsgradienten zu beobachten sind. Dieses Phänomen wird als "Dehnungslokalisierung" oder einfache "Lokalisierung" bezeichnet und kann in metallischen Materialien z.B. in Form von Scherbändern beobachtet werden.

Zu den offenen Problemen bei der Anwendung von lokalen inelastischen Schädigungsmodellen im Rahmen der FE-Methode gehört u.a. die Abhängigkeit der gewonnenen Ergebnisse von der Größe und Orientierung der zur Strukturdiskretisierung eingesetzten Finiten Elemente. Diese Netzabhängigkeit tritt insbesondere bei der Verwendung lokaler Stoffgesetze und der Simulation entfestigenden Materialverhaltens auf.

Unter lokalen inelastischen Stoffgesetzen versteht man die Beschreibung des Materialverhaltens eines materiellen Punktes, bei der nur der inelastische Zustand des Punktes selbst und nicht der seiner Umgebung berücksichtigt wird.

Als materielle Entfestigung bezeichnet man den Prozess, bei dem der Schädigungszuwachs aufgrund voranschreitender Belastung zu einer Beeinträchtigung der Belastungstragfähigkeit des Materials führt. Dabei ergibt sich nach anfänglicher Spannungszunahme bis zu einem Maximum eine anschließende Abnahme der Spannung im Werkstoff bei weiter zunehmender Dehnung. Im Rahmen der lokalen Materialmodellierung bedingt dieses Verhalten einen Typwechsel des durch die FE-Methode gestellten Anfangsrandwertproblems, der zu einem Verlust seines anfänglichen elliptischen Charakters (Elliptizitätsverlust) bzw. zu einer Nichteindeutigkeit seiner Lösungen führt. Physikalisch gesehen wird dabei das anfänglich homogene Deformationsfeld, d.h. die Lösung des anfänglich elliptischen Anfangsrandwertproblems instabil gegenüber einem lokalisierten, inhomogenen Feld, z.B. in der Form von Scherbändern. Welche Lösung sich bei diesem Übergang ergibt, ist z.B. von den Randbedingungen abhängig. Bei der diskreten Approximation des Anfangsrandwertproblems mittels der Finiten Elemente Methode spielt dabei auch die Netztopologie eine Rolle, was zu einer starken Netzabhängigkeit der numerischen Lösung im Übergangsbereich führen kann.

Bei der numerischen Schädigungsmodellierung führt dies zum Verschwinden des Volumens der Schädigungs- und Entfestigungsprozesszone mit zunehmender Netzverfeinerung, was sich mit dem Verschwinden z.B. der abgebildeten Scherbandbreite bei zunehmender Netzverfeinerung in Korrelation bringen lässt. Dieses Verhalten führt dazu, dass Versagen aufgrund duktiler Schädigung nicht kontinuierlich über mehreren Elementen sondern in, durch die Elementgröße vorgegebenen Bereichen abgebildet, wird, was zu der erwähnten pathologischen Netzabhängigkeit der Ergebnisse führt.

Experimentelle Beobachtungen zeigen, dass duktile Schädigung nicht punktuell, sondern in einer endlichen Prozesszone stattfindet, wobei die Größe und Orientierung dieser Zone u.a. von der Werkstoffbeschaffenheit abhängt. Stark idealisiert lässt sich die Endlichkeit bzw. die Größe solcher Zonen mit Hilfe einer sogenannten charakteristischen Länge modellieren. Eine sich daraus ergebene Konsequenz ist die Erweiterung klassischer lokaler Werkstoffmodelle, die keine solchen Längen enthalten, zu den sogenannten nicht-lokalen Modellen. Diese berücksichtigen den Einfluss des Zustandes einer räumlichen Umgebung eines materiellen Punktes auf sein Materialverhalten, deren Größe durch eine charakteristische Länge bestimmt ist. Durch die Anwendung dieser Modelle können Lokalisierungsphänomene regularisiert und der Eindeigkeitsverlust der Lösung vermieden und so die Netzabhängigkeit der Ergebnisse einer FE-Simulation reduziert werden. Nicht-lokale Werkstoffmodelle berücksichtigen bei der Beschreibung des konstitutiven Verhalten des Materials somit die unmittelbare räumliche Umgebung des betrachteten materiellen Punktes. Hierzu wurde bisher in der Literatur eine Reihe von Ansätzen vorgeschlagen, diskutiert und umgesetzt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung und Anwendung einer erweiterten Schädigungsmodellierung für metallische Werkstoffe auf Grundlage des lokalen Gurson-Modells, die den nicht-lokalen Charakter der Schädigungsentwicklung bei großen Spannungs- und Verformungsinhomogenitäten berücksichtigt. Hierdurch soll die realistische Simulation duktilen Rissfortschritts in Bruchmechanikproben und Bauteilen unterschiedlicher Geometrien ermöglicht werden. Die Überlegungen zur Implementierung eines solchen Materialmodells mittels der Finite Elemente Methode werden präsentiert und ausführlich diskutiert. Hierzu gehört die entsprechende Elementformulierung zur Implementierung eines nicht-lokalen Materialmodells mit einem neuen, zusätzlichen Freiheitsgrad.

Weiterhin werden in dieser Arbeit Kriterien entwickelt und zur Anwendung gebracht, die das Lösungsverhalten der konstitutiven Gleichungen des lokalen und des erweiterten nicht-lokalen Gurson-Modells bzgl. des möglichen Elliptizitätsverlustes und des damit verbundenen Einsetzens von Lokalisierungsphänomenen darstellen können, um so eine Abgrenzung bzgl. der Anwendbarkeit lokaler Materialmodelle in Abhängigkeit von der Belastungssituation und der Materialbeschaffenheit zu ermöglichen und den Nachweis der regularisierenden Wirkung nicht-lokaler Modelle zu erbringen.

## 1.1 Stand der Forschung

Klassische inelastische Kontinuums- und Materialmodelle bauen auf der Annahme auf, dass das Materialverhalten eines materiellen Punktes nur vom thermo-mechanischen Zustand einer infinitesimalen räumlichen Umgebung jenes Punktes beeinflusst wird. Üblicherweise wird dabei der inelastische Zustand im materiellen Punkt durch sogenannte „interne“ Zustandsgrößen oder Variablen idealisiert bzw. modelliert. Danach sind Konstitutivgrößen wie z. B. die Spannung in einem solchen Punkt zunächst von der Deformation und der Temperatur, von deren ersten räumlichen Gradienten sowie von den internen Variablen abhängig. Trotz dieser vereinfachenden Annahmen sind solche Kontinuumsmodelle seit gut 200 Jahren erfolgreich.

Abweichungen bzw. Erweiterungen dieser klassischen Vorgehensweise wurden bereits 1909 von Cosserat und Cosserat [Cos1909] eingeführt, um Kontinua mit zusätzlichen rotationsartigen mechanischen Freiheitsgraden zu modellieren; diese Arbeiten wurden erst wieder 1960 von Truesdell und Toupin aufgegriffen [Tru1960]. Basierend auf „nicht-lokalen“ Integral- bzw. Volumenmittlungsansätzen der klassischen „lokalen“ Kontinuumsmodellierung wurde eine andere Art Erweiterung von Kröner [Kro1966] sowie Eringen (siehe z.B. [Eri1965]) vorgeschlagen, um u.a. den Effekt der Mikrostruktur auf das Makroverhalten zu berücksichtigen.

Seit den 80er Jahren des 20. Jahrhunderts ist das Interesse an nicht-lokalen Modellen aufgrund ihrer Eigenschaft als Lokalisierungsbegrenzer wieder stark gewachsen, um die im vorangegangenen Abschnitt bereits erläuterten Anwendungsgrenzen lokaler Modelle zu überwinden.

Bezüglich der Aufstellung nicht-lokaler Schädigungsmodelle können einige grundlegende Ansätze voneinander unterschieden werden. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Beschränkung auf solche Modelle, die die nicht-lokale

Materialbeschreibung auf kontinuumsmechanischer Grundlage unter der Voraussetzung eines homogenen Materials betrachten und nicht die reale Makrostruktur (Partikel, Poren, Korngrenzen, Versetzungslinien etc.) berücksichtigen. Grundlage der konstitutiven Beschreibung ist das homogene Ersatzmedium, das die Heterogenitäten des realen Materials über ein geeignetes Volumen repräsentativ (RVE: Repräsentatives Volumenelement) abbildet.

Zum einen existieren die **nicht-lokalen Integralansätze**, die auf dem Gedanken basieren, dass bestimmte Zustandsgrößen der Materialbeschreibung einen nicht-lokalen Charakter haben und von der räumlichen Umgebung beeinflusst werden. Statt der lokalen Zustandsgröße, gehen über ein begrenztes Gebietsintegral gemittelte und mit einer Gewichtungsfunktion bewertete Größen in die konstitutive Formulierung des Stoffgesetzes ein. Hierbei ist die Berücksichtigung mikrostruktureller Größen, der plastischen Vergleichsdehnung oder aber auch der Schädigungsverteilung möglich. Die Schädigungsentwicklung in Form des Hohlraumvolumenanteils wird z.B. bei [Pij1987], [Baž1988], [Pij1992a], [Pij1992b], [Hoe1994] und [Tve1995] in einer endlich begrenzten Umgebung eines materiellen Punktes von den maßgebenden Zustandsvariablen (z.B. der plastischen Verzerrung, der Mehrachsigkeit des Spannungszustandes oder einem Schädigungsparameter) abhängig gemacht. Der Einfluss der Umgebung wird dabei über eine Verteilungsfunktion in Abhängigkeit vom Abstand zum betrachteten materiellen Punkt mit einer Normalverteilung [Per1992], [Hoe1994] und [Kli1998b] oder auch mit Potenzfunktionen [Tve1995] gewichtet.

Eine alternative nicht-lokale Erweiterung entsteht, wenn man neben den internen inelastischen Zustandsgrößen auch deren räumliche Gradienten als unabhängige Konstitutivgrößen betrachtet. Solche Formulierungen werden in der Literatur als **Gradienten-Modelle** bezeichnet. Modelle unter Berücksichtigung des Gradienten der plastischen Vergleichsdehnung wurden erstmals von Aifantis (z.B. in [Aif1984] und [Aif1992] aufgrund mikromechanischer Überlegungen) vorgeschlagen und in [DeB1992], [Pam1994], [Pee1996] and [Gee1998] weiterentwickelt. Parallel dazu wurden solche Erweiterungen von Maugin [Mau1990] im Rahmen der Thermodynamik formuliert. Anwendungen im Bereich Schädigungsmodellierung findet man u.a. in [Ram1998b] und [Feu1998]. Einige von diesen Gradienten-Modellen lassen sich aus einem nicht-lokalen Integralansatz herleiten ([Feu1998, Gee1998]).

Die hier betrachtete Gruppe von Schädigungsmodellen zur Simulation duktiler Schädigung auf Grundlage des Gurson-Modells bildet die mikromechanischen Vorgänge der duktilen Schädigung durch eine Evolutionsgleichung ab, in der die Änderung des relativen Hohlraumvolumenanteils durch die Entstehung neuer Hohlräume und das Zusammenwachsen benachbarter Hohlräume durch eine skalare Schädigungsvariable beschrieben wird. Die in einem materiellen Punkt auftretende Schädigung verringert so kontinuierlich die Tragfähigkeit des Materials.

Auch hier gehört zu den offenen Problemen bei der Anwendung dieser Modelle die Netzabhängigkeit der FE-Modellierung von Schädigungsentwicklung, Rissentstehung und -wachstum [Sun1991, Fri1994, Tve1995, Kli1998b]. Des Weiteren ist ungeklärt, ob großer, duktiler Rissfortschritt durch die konstitutiven Annahmen der bestehenden lokalen Materialmodellierung nach [Gur1977] richtig erfasst werden kann [Kli1998b]. Zur Reduktion der Netzabhängigkeit und der Vermeidung von netzabhängigen Lokalisierungsphänomenen bei Modellen zur Simulation duktiler Schädigung wurden bisher eine Reihe von Lösungsansätzen vorgeschlagen und diskutiert. Deren grundsätzliche Idee besteht darin, eine charakteristische Länge einzuführen, die als „Materialparameter“ unabhängig von der Elementierung der untersuchten Probe bei der FE-Rechnung ist [Pij1987, Baž1989, Sun1991, Hue1992, Sei1992, Pij1995, Tve1995]. Im Falle der Anwendung einer nicht-lokalen Erweiterung in Form eines Integralansatzes [Tve1995, Kli1998b] ließ sich eine Reduzierung der Netzabhängigkeit jedoch nur eingeschränkt beobachten. Im Rahmen der Simulation bruchmechanischer Experimente [Kli1998b] konnte nachgewiesen werden, dass das auf Tvergaard [Tve1995] und Bažant [Baž1988] basierende nicht-lokale Integralmodell nach Gurson bei der Modellierung duktilen Rissfortschritts in zugbelasteten Proben völlig versagt.

Auf andere Art und Weise wurde von Ramaswamy und Aravas [Ram1998a] und von Feucht [Feu1998] die Modellierung der duktilen Schädigungsentwicklung nach Gurson um einen Gradiententerm des Schädigungsfeldes erweitert. Die entsprechend erweiterte Evolutionsgleichung des Hohlraumvolumenanteils nimmt die Gestalt der instationären Wärmeleitungsgleichung mit Quelltermen an. Mit Hilfe dieser Übereinstimmung erkennt man, dass – analog zum Effekt der Wärmediffusion auf das Temperaturfeld – der Gradiententerm der Schädigungskonzentration entgegenwirkt.

Die Untersuchung des Lösungsverhaltens des Gleichungssystems der konstitutiven Gleichungen lokaler Stoffgesetze führt auf Kriterien zur Bestimmung des möglichen

Elliptizitätsverlustes und des damit verbundenen Einsetzens von Verzweigungsphänomenen und erlaubt so Aussagen bzgl. der Eindeutigkeit der gewonnenen Lösung. In frühen Arbeiten [Hil1958, Hil1962, Rud1975, Ric1975, Ric1980] wird der Elliptizitätsverlust des konstitutiven Gleichungssystems im inelastischen Fall als eine materielle Instabilität, die sich durch räumliche Singularitäten im Geschwindigkeitsgradienten ausdrückt, interpretiert. In diesen Arbeiten wurden die für den materiellen Tangentenmodul notwendigen Bedingungen zur Lokalisierung bei kleinen Deformationen formuliert. Dass jene Bedingungen auch hinreichend sind, wurde u.a. in [Bor1989] gezeigt. Für ratenunabhängige Schädigungsmodellierung bei kleinen Deformationen wurden Lokalisierungsbedingungen in [Dog1995, Ben1996] formuliert und untersucht. In [Dog1995, Ben1996, Sza2000] wurden weiter allgemeingültige Kriterien für die Untersuchung der Lokalisierung und des Elliptizitätsverlustes bzw. des starken Elliptizitätsverlustes elastisch-plastischer ratenabhängiger Stoffgleichungen aufgestellt. In [Ste1997] werden große Deformationen für hypoelastische sowie hyperelastische Materialgleichungen bei der Lokalisierungsanalyse zusätzlich berücksichtigt. Schließlich werden u.a. in [Ben1995] und [Lie2001] Lokalisierungskriterien für nicht-lokale Stoffgesetze der Gradientenplastizität beschrieben.

## **1.2 Numerische Simulation duktiler Schädigung**

Ein zentrales Problem bei der Simulation duktilen Rissfortschritts mit Schädigungsmodellen besteht in der Bestimmung eines Satzes von Materialparametern, mit dem es möglich ist, experimentell ermittelten duktilen Rissfortschritt für zug- oder biegebelastete Proben richtig zu simulieren. Um duktilen Rissfortschritt in bruchmechanischen Proben zu modellieren wird das Gurson-Modell [Gur1977] bei Berücksichtigung isotroper Verfestigung erfolgreich angewendet. In der Form von Needleman & Tvergaard [Nee1984] wurde dieses Modell in das FE-Programm ABAQUS implementiert [Kli1993], um Rissfortschritt an Bauteilen aus dem Stahl StE460 zu untersuchen. Die entsprechenden Materialparameter wurden mit Hilfe von Zugversuchen an gekerbten Rundproben mit 4 mm und 10 mm Kerbradius bestimmt. Mit diesem Satz von Materialparametern wurde Rissfortschritt in seitengekerbten C(T)-Proben, M(T)-Proben und gekerbten, quasistatisch-belasteten Charpy-Proben simuliert und mit entsprechenden Versuchsergebnissen verifiziert. Für kurzen Rissfortschritt bis etwa 1,5 mm wurde eine gute Übereinstimmung erzielt [Kli1994].

Bei großem Rissfortschritt wurden zum Teil erhebliche Unterschiede zwischen simulierten und experimentellen Risswiderstandskurven [Kli1995a] festgestellt. Im Rahmen eines Vergleichs der Ergebnisse von Berechnungen an Einheitszellen mit den Resultaten aus Berechnungen der gesamten Struktur mit dem Gurson-Modell in der Form von Needleman & Tvergaard [Nee1984] wurde in [Kli1995a,b,c] beobachtet, dass der Zeitpunkt des Versagens bei großem Rissfortschritt in M(T)-Proben übereinstimmt, während in C(T)-Proben erhebliche Unterschiede zu den experimentellen Beobachtungen auftreten. Letztere äußern sich in einer Überschätzung der Risswiderstandskurve, was auch durch eine Anpassung von Materialparametern nicht vermeidbar ist. Dieser Vergleich weist darauf hin, dass die Gurson-Fließbedingung in der Form von Needleman & Tvergaard [Nee1984] bei großem, duktilen Rissfortschritt zu modifizieren ist.

Um festzustellen, wie gut das Materialmodell von Gurson in der Form von Needleman & Tvergaard [Nee1984] Rissfortschritt ohne Seitenkerbung bzw. Dehnungsbehinderung simulieren kann, wurde in [Kli1995a] duktiler Rissfortschritt bei gekrümmten Rissfronten in nicht-seitengekerbten C(T)-Proben untersucht. Dabei wurden an C(T)-Proben aus dem Stahl StE460 Versuche mit der Mehrprobenmethode durchgeführt, um den genauen Verlauf der Rissfronten in Dickenrichtung zu ermitteln. Diese experimentell ermittelten Rissfrontverläufe wurden mit dem Gurson-Modell bis zu einem Rissfortschritt von ca. 4 mm dreidimensional simuliert, und zwar mit den aus den ebenen Modellrechnungen [Kli1993] ermittelten Materialparametern. Ein Vergleich der Rissfrontverläufe zeigte eine gute Übereinstimmung bis zu einem mittleren Rissfortschritt von 2 mm, während darüber hinaus der Rissfortschritt durch die Simulation überschätzt wird, da die Form der Rissfront aufgrund der zu großen Elementkantenlänge in Dickenrichtung nicht mehr richtig abgebildet wurde. Deshalb werden globale Ergebnisse, wie Kraft-Verschiebungs-Kurven oder Risswiderstandskurven, auch für kleinen Rissfortschritt richtig berechnet, während die experimentellen Resultate für größeren Rissfortschritt unterschätzt werden.

Um die Übertragbarkeit der Materialparameter des Gurson-Schädigungsmodells bei unterschiedlichen Spannungsmehrachsigkeiten, dem Verhältnis von hydrostatischer Spannung zur von-Mises-Vergleichsspannung, zu untersuchen, wurden in [Ebe1996] zahlreiche Zellmodellrechnungen mit Hilfe des FE-Programms ABAQUS bei unterschiedlichen Mehrachsigkeiten durchgeführt. Dabei bestand die Zellenstruktur aus einer periodischen Anordnung zylindrischer Einheitszellen mit sphärischen

Hohlräumen oder Einschlüssen. Zur Lösung des begleitenden Stabilitätsproblems wurde die modifizierte Riks-Methode verwendet [Rik1979]. Die Parameter der Gurson-Modellierung wurden so angepasst, dass das globale Verhalten des Zellmodells möglichst genau wiedergegeben wurde.

In [Kli1998b] wurde die Netzabhängigkeit der FE-Schädigungsmodellierung mit dem Gurson-Modell in Abhängigkeit von der minimalen Elementkantenlänge und der Elementformulierung an Modellen verschiedener Bruchmechanikproben aus den Werkstoffen Ste460 und StE690 untersucht und nachgewiesen. Zur Reduzierung der Netzabhängigkeit wurde eine nicht-lokale Erweiterung in Form eines Integralansatzes des Gurson-Modells in dem FE-Programm ABAQUS entwickelt und implementiert. Die dort durchgeführten Berechnungen zeigen, dass im Gegensatz zur lokalen Modellformulierung, eine mäßige Reduzierung der Netzabhängigkeit erzielt werden kann. Für bestimmte Bruchmechanikproben und Werkstoffe erwies sich die Anwendungsmöglichkeit des Modells jedoch als sehr beschränkt und die Simulation duktilen Rissfortschritts war nicht möglich.

### 1.3 Zielsetzung und Inhalte

Maßgebliches Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung, Implementierung und Anwendung einer nicht-lokalen, gradientenabhängigen Erweiterung des lokalen Gurson-Modells zur Simulation duktiler Schädigung. Hierbei soll die Evolutionsgleichung der Schädigungsentwicklung um einen nicht-lokalen, vom Gradienten des Schädigungsfelds abhängigen Term, erweitert werden. Die Formulierung des Materialmodells von Gurson in der lokalen wie in der nicht-lokalen Form erfolgt dabei auf Grundlage eines hyperelastisch-plastischen Materialmodells zur Beschreibung großer Deformationen.

Im Kapitel 2 "**Kontinuumsmechanische Grundgleichungen**" werden die erforderlichen theoretischen Grundlagen der Kinematik, der Bilanzgleichungen und Grundbegriffe der Plastizität großer Deformationen umrissen und definiert.

Im Kapitel 3 "**Lokale Elastoplastizität**" erfolgt die Erläuterung des theoretischen Hintergrundes der einzusetzenden Materialgleichungen. Die Gurson-Schädigungsmodellierung in der lokalen wie in der nicht-lokalen Form basiert dabei auf einem thermodynamisch motivierten hyperelastisch-plastischen Modell für große Deformationen. Hierbei wird auf die in [Arn2000] und [Sve1998a] diskutierten theoretischen Grundlagen zurückgegriffen, so dass eine hyperelastisch-plastische

Implementierung des Gurson-Modells unter Berücksichtigung isotroper Verfestigung und großer Deformationen zur Anwendung kommt.

Im Kapitel 4 "**Lokale Schädigungsmodellierung**" wird mit Hilfe der Vorarbeiten [Sve1998a] und [Arn2000] zunächst der Begriff „duktiler Schädigung“ aus experimenteller und phänomenologischer Sicht diskutiert und das lokale Gurson-Modell und seine Erweiterungen formuliert. Über die Beschreibung der möglichen Ansätze der Verfestigung wird im selben Zusammenhang das Phänomen der lokalen Entfestigung und der daraus resultierenden Lokalisierungs- und Bifurkationsphänomene bei der Anwendung im Zusammenhang mit der FE-Methode erklärt.

Im folgenden Kapitel 5 "**Nicht-lokale Schädigungsmodellierung**" werden mögliche Erweiterungen des Gurson-Modells aus der Literatur vorgestellt und diskutiert. Die Diskussion einer gradientenabhängigen Erweiterung des Gurson-Modells als theoretische Herleitung aus dem Integralansatz stellt den Ausgangspunkt für die Auswahl und Entwicklung einer neuen nicht-lokalen Erweiterung dar. Die Einführung einer Änderungsgleichung einer neuen Schädigungsfeldgröße stellt hierbei die Abgrenzungen und Erweiterungen gegenüber den bekannten Gradientenmodellen dar. Nach der Herleitung eines gemischten Variationsprinzips für die Verschiebungs- und Schädigungsfelder wird Kapitel 5 mit einer Zusammenfassung der Gleichungen des Materialmodells abgeschlossen.

Das sich anschließende Kapitel 6 "**Finite Elemente Methode**" umreißt die Grundlagen der FE-Methode, woraus sich die Forderung nach der Diskretisierung der Stoffgleichungen für die Implementierung in ein FE-Programm ergibt. Als Elementformulierungen wird ein 4-Knotenelement mit bilinearen Ansatzfunktionen zur Darstellung ebener Verzerrungszustände (EVZ) sowie ein 4-Knotenelement mit bilinearen Ansatzfunktionen zur Darstellung axialsymmetrischer Strukturen vorgestellt, die beide die im FE-Programm ABAQUS verwendete Methode der „selectively-reduced-integration“-Technik verwenden. Die sich aus der diskretisierten Form des Variationsprinzips ergebende Elementsteifigkeitsmatrix wird hergeleitet und vorgestellt. Anschließend werden die Besonderheiten bei der Berücksichtigung großer Deformationen bei der Elementformulierung skizziert. Die Implementierung und die hierfür erforderliche inkrementelle Form der Gleichgewichtsbedingung und die sich daraus ergebende Integration der Materialgleichungen führt auf die Verifikation der Implementierung der Modellimplementierung anhand der Simulation

einfacher Belastungsfälle für das lokale und das nicht-lokale Gurson-Modell sowie die entwickelten Elementtypen.

Im Kapitel 7 "**Untersuchung des Elliptizitätsverlustes**" wird die Untersuchung des Lösungsverhaltens der konstitutiven Gleichungen des lokalen Gurson-Modells und der im Kapitel 5 eingeführten nicht-lokalen Erweiterung vorgenommen, die auf Kriterien zur Bestimmung des möglichen Elliptizitätsverlustes bzw. des damit verbundenen Einsetzens von Lokalisierungsphänomenen führt. Die Entwicklung dieser Kriterien erfolgt für die Formulierung kleiner Deformationen sowie für die Behandlung großer Deformationen unter Berücksichtigung einer hypoelastisch-plastischen und einer hyperelastisch-plastischen Formulierung. Die Anwendung dieser Kriterien auf die Ergebnisse von Beispielrechnungen mit Strukturen aus verschiedenen Materialien zeigt abschließend die Grenzen der Anwendbarkeit des lokalen Gurson-Modells auf und weist die regularisierende Wirkung des nicht-lokalen Modells nach.

Das Kapitel 8 "**Ergebnisse**" widmet sich der Anwendung des gradientenabhängigen Gurson-Modells an einfachen Teststrukturen bei idealisiertem Materialverhalten sowie der Untersuchung von Bruchmechanikproben aus realen Materialien. Die Ergebnisse werden im Vergleich zum lokalen Gurson-Modell vorgestellt und bzgl. Netzabhängigkeit, Konvergenzverhalten etc. diskutiert.

Kapitel 9 "**Zusammenfassung und Ausblick**" schließt diese Arbeit ab.



2	Kontinuumsmechanische Grundlagen.....	2-1
2.1	Bewegung .....	2-2
2.2	Deformation.....	2-3
2.3	Verzerrung.....	2-4
2.4	Mechanische Bilanzgleichungen .....	2-8
2.5	Spannungsmaße .....	2-8
2.6	Objektivität und objektive Zeitableitungen von Spannungstensoren .....	2-9
2.7	Spannungsgeschwindigkeiten .....	2-10
2.8	Energieerhaltungssatz und Entropieungleichung .....	2-11
2.9	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen .....	2-12

## 2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen vorgestellt, die die Voraussetzungen für die später zu erläuternde Entwicklung eines nicht-lokalen Schädigungsmodells und die zum Einsatz kommende Finite-Elemente-Formulierung sind. Die kinematischen Grundlagen betreffen die Beschreibung der Deformation eines Körpers, die Angabe von Verzerrungs- und Spannungsmaßen und die zeitlichen Ableitungen kinematischer Größen. Vollständige Darstellungen der kontinuumsmechanischen Grundlagen der Kinematik deformierbarer Körper finden sich u.a. in [Tru1992], [Bat1996] und [Chr1991a,b].

## 2.1 Bewegung

Ein materieller Körper  $\mathcal{B}$ , definiert als Menge materieller Punkte, nehme ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $B$  im euklidischen Raum ein. Die zeitliche Änderung des Gebietes, die der Körper  $\mathcal{B}$  im Raum einnimmt, wird als Bewegung bezeichnet. Jedem materiellen Punkt  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  wird eineindeutig, d.h. umkehrbar eindeutig, ein Vektor  $\xi^{(\mathcal{P})}$  zugeordnet. Die damit definierte Abbildung

$$\chi_R : \mathcal{B} \rightarrow B_R \quad | \quad \mathcal{P} \mapsto \xi = \chi_R(\mathcal{P}) \quad (2-1)$$

bildet  $\mathcal{B}$  in die Referenzkonfiguration  $B_R$  ab. Die zu einer ausgewählten Zeit  $t = 0$  eingenommene Konfiguration sei als Ausgangskonfiguration  $B_0$  definiert und die im Laufe der Bewegung vom Körper eingenommene Konfiguration zur Zeit  $t$  als Momentankonfiguration  $B_t$  (s. Bild 2.1) .

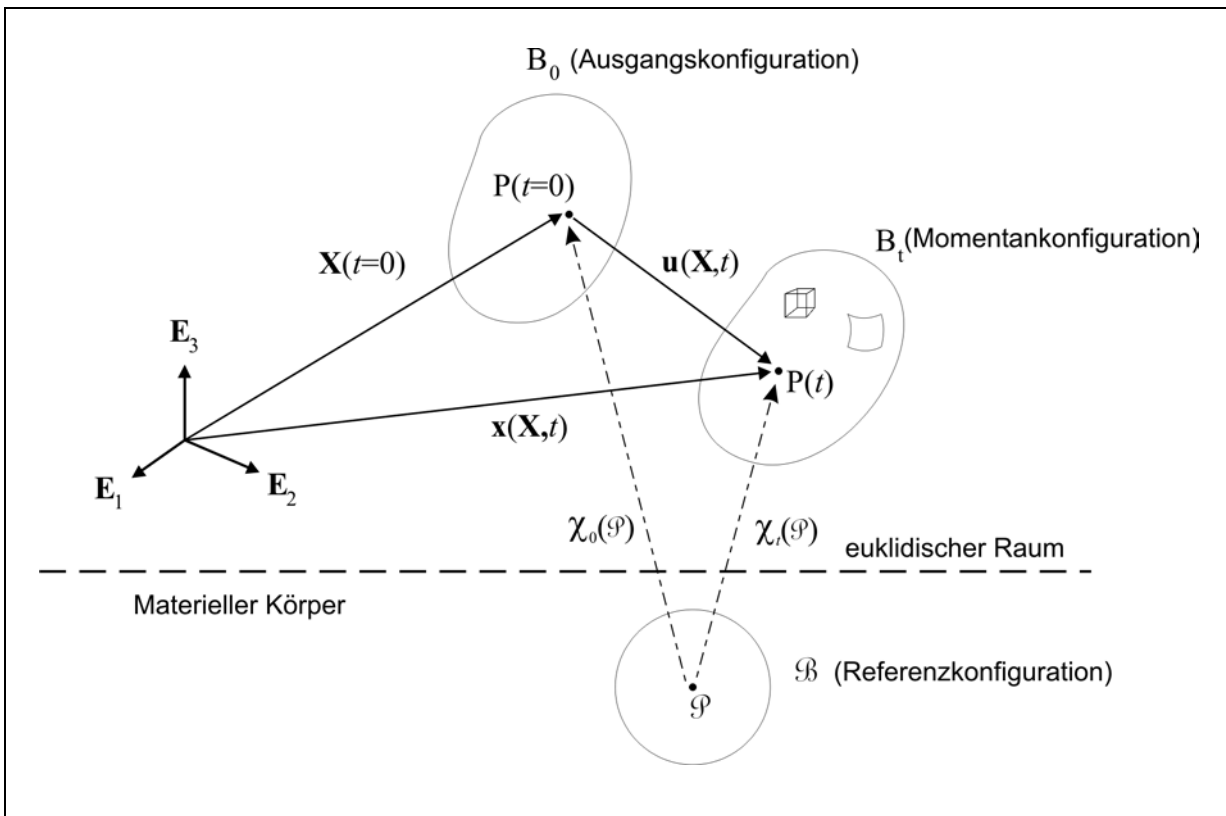


Bild 2.1: Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration

Die Forderung, zu jeder Zeit einem materiellen Punkt eineindeutig einen Punkt bzw. Ortsvektor im Raum zuordnen zu können, bedingt die Invertierbarkeit der oben definierten Abbildungen. Die Ortsvektoren  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t = 0$  und  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  zur Zeit  $t$  für einen materiellen Punkt  $\mathcal{P}$  ergeben sich aus den Abbildungen:

$$\mathbf{X} = \chi_0(\mathcal{P}) = \chi_0(\chi_R^{-1}(\xi)) \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \chi_t(\mathcal{P}) = \chi_t(\chi_R^{-1}(\xi)) \quad (2-2)$$

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  zwischen der Ausgangs- und der Momentankonfiguration eines materiellen Punktes ergibt sich aus der Differenz

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} . \quad (2-3)$$

Die Abbildungen aus Gl.(2.1–2.3) sind in Bild 2.1 dargestellt.

Die Abbildung  $\phi_t$  eines materiellen Punktes  $\mathcal{P}$  von der Bezugs- in die Momentankonfiguration wird durch

$$\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}, t) \quad (2-4)$$

bzw. deren Umkehrung mit

$$\mathbf{X} = \phi_t^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2-5)$$

geleistet, wobei die Abbildung  $\phi_t$  als Deformation bezeichnet wird. Größen, die auf die Bezugsconfiguration bezogen werden, heißen materielle oder Lagrange-Größen, während auf die Momentankonfiguration bezogene Größen als räumliche oder Euler-Größen bezeichnet werden. Größen in materieller Darstellung werden häufig mit Großbuchstaben und räumliche Größen mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Diese Unterscheidung wird in den nachfolgenden Kapiteln i.d.R. nicht aufgegriffen. Die Darstellung von Euler- bzw. Lagrange-Größen ergibt sich aus dem jeweiligen Kontext. Als Ausnahmen werden die Ortsvektoren der Ausgangskonfiguration als  $\mathbf{x}$  und der Momentankonfiguration als  $\mathbf{X}$  bezeichnet sowie die entsprechend zugeordneten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  und  $\mathbf{E}_i$ .

## 2.2 Deformation

Mit der linearen Approximation der Abbildung eines infinitesimalen Linienelementes  $d\mathbf{X}$  der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration lässt sich die materielle Änderung der Bewegung in der Umgebung eines Punktes

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} , \quad (2-6)$$

als Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  definieren:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{x} = \text{Grad } \mathbf{x} . \quad (2-7)$$

Die Transformation eines infinitesimalen Flächenelementes  $d\mathbf{A}$  bzw. eines Volumenelements  $dV$  ist durch die Nanson-Formel [Bat1996]

$$d\mathbf{a} = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad \text{und} \quad dv = \det(\mathbf{F}) dV \quad (2-8)$$

gegeben. Die Invertierbarkeit von Gl.(2-7) und die Forderung nach positivem Volumen bedingt

$$\det(\mathbf{F}) > 0 \quad (2-9)$$

Mit Gl. (2-3) und Gl. (2-7) lässt sich der Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}$  definieren:

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{u} = \text{grad } \mathbf{u} \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2-10)$$

### 2.3 Verzerrung

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  lässt sich entsprechend eines Satzes aus der linearen Algebra eindeutig multiplikativ zerlegen

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2-11)$$

mit einem rechten und linken Strecktensor,  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} \quad (2-12)$$

und dem Drehtensor  $\mathbf{R}$ , der wegen

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad (2-13)$$

orthogonal ist. Symmetrische Tensoren, wie  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$ , besitzen eine Spektraldarstellung mit den reellen Eigenwerten  $\Lambda_J, J = I, II, III$  und den Eigenvektoren  $\mathbf{E}_J, \mathbf{e}_J, J = I, II, III$ :

$$\mathbf{U} = \Lambda_I \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_I + \Lambda_{II} \mathbf{E}_{II} \otimes \mathbf{E}_{II} + \Lambda_{III} \mathbf{E}_{III} \otimes \mathbf{E}_{III} \quad (2-14)$$

$$\mathbf{V} = \Lambda_I \mathbf{e}_I \otimes \mathbf{e}_I + \Lambda_{II} \mathbf{e}_{II} \otimes \mathbf{e}_{II} + \Lambda_{III} \mathbf{e}_{III} \otimes \mathbf{e}_{III} \quad (2-15)$$

Hierbei stellt die Basis  $\mathbf{E}_J$  das Hauptachsensystem von  $\mathbf{U}$  in der Bezugskonfiguration dar, während  $\mathbf{e}_J$  das Hauptachsensystem von  $\mathbf{V}$  in der Momentankonfiguration darstellt. Unter Beachtung von Gl.(2-11) und Gl.(2-13) erfolgt die Umrechnung durch

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2-16)$$

Die Deformation in Gl.(2-6) lässt sich so als Hintereinanderschaltung von Rotation und Streckung, bzw. Streckung und Rotation interpretieren:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{U} d\mathbf{X}) = \mathbf{V}(\mathbf{R} d\mathbf{X}) . \quad (2-17)$$

Eine graphische Interpretation der Zusammenhänge entsprechend Gl.(2-17) ist mit der Beobachtung eines materiellen Linienelements  $d\mathbf{X}$  entsprechend Bild 2.2 möglich.

Ausgehend von identischen Längen  $dX_I$  und  $dX_{II}$  im Hauptachsensystem  $\mathbf{E}_J$  werden die Achsen bei Anwendung von  $\mathbf{U}$  zunächst um die Eigenwerte  $\Lambda_I, \Lambda_{II}$  gestreckt und anschließend um  $\mathbf{R}$  gedreht. Eine Drehung um  $\mathbf{R}$  und anschließende Streckung um  $\mathbf{V}$  führt auf das selbe Ergebnis.

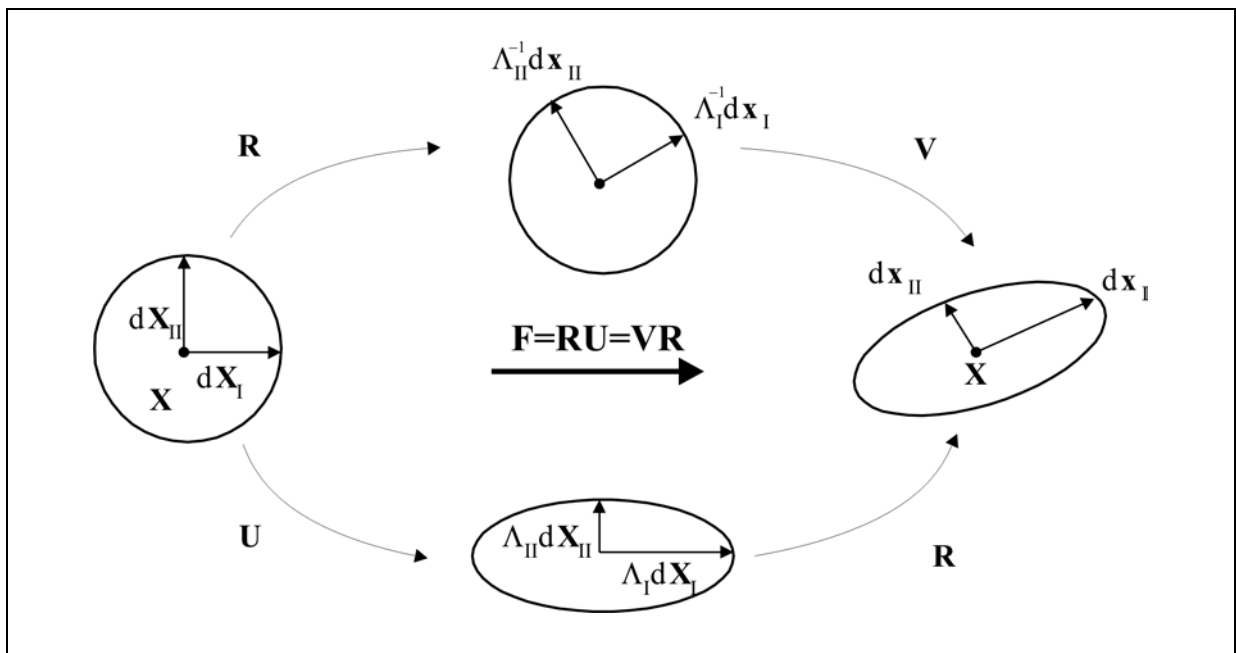


Bild 2.2: Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

Die Berechnung des rechten Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C}$  erfolgt über

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 . \quad (2-18)$$

mit der Spektraldarstellung mit den Eigenwerten  $\Lambda_J$  und den Eigenvektoren  $\mathbf{E}_J$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \Lambda_J^2 \mathbf{E}_J \otimes \mathbf{E}_J , \\ \mathbf{U} &= \Lambda_J \mathbf{E}_J \otimes \mathbf{E}_J . \end{aligned} \quad (2-19)$$

In gleicher Weise wird  $\mathbf{V}$  mit dem linken Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} := \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 . \quad (2-20)$$

sowie die zugehörigen Spektralzerlegungen

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \Lambda_J^2 \mathbf{e}_J \otimes \mathbf{e}_J \quad , \\ \mathbf{V} &= \Lambda_J \mathbf{e}_J \otimes \mathbf{e}_J \quad .\end{aligned}\tag{2-21}$$

berechnet. Somit ergibt sich für den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  und den Rotationstensor  $\mathbf{R}$  die Spektraldarstellung zu:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{e}_J \otimes \mathbf{E}_J \quad , \\ \mathbf{F} &= \Lambda_J \mathbf{e}_J \otimes \mathbf{E}_J \quad .\end{aligned}\tag{2-22}$$

Die Geschwindigkeit des materiellen Punktes eines Körpers ist  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ . Aus der materiellen Zeitableitung von Gl.(2-17),

$$d\mathbf{v} = (d\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x} \quad ,\tag{2-23}$$

ergibt sich die Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$ , der die Geschwindigkeit der Längenänderung eines räumlichen Linienelementes wiedergibt. Die additive Zerlegung in einen räumlichen Deformationsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{D}$  und einen antimetrischen Anteil, den Wirbeltensor  $\mathbf{W}$ , führt auf die Beziehung :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \text{sym}(\mathbf{L}) + \text{skw}(\mathbf{L}) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad .\tag{2-24}$$

Zur Einführung geeigneter Verzerrungsmaße betrachtet man die Differenz der Linienelementquadrate in der Momentan- und der Ausgangskonfiguration, womit sich ein Verzerrungstensor definieren lässt, der die Forderung nach der Unabhängigkeit von Starrkörperbewegungen erfüllt und bei nicht auftretender Verzerrung gleich dem Nulltensor  $\mathbf{0}$  ist. Die Differenz in materieller Darstellung ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}(d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) = \frac{1}{2} d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}_G d\mathbf{X} \quad .\tag{2-25}$$

Der Tensor

$$\mathbf{E}_G = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})\tag{2-26}$$

wird als Green-Lagrange-Verzerrungstensor bezeichnet. Die Verwendung des in Gl. (2-10) eingeführten Verschiebungsgradienten erlaubt die Formulierung

$$\mathbf{E}_G = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad } \mathbf{u}^T + \mathbf{O}(\zeta^2)) \quad (2-27)$$

und zeigt so den Zusammenhang zur geometrisch linearisierten Theorie und dem Verzerrungstensor bei kleinen Verzerrungen  $\varepsilon$  auf, bei dem die Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + \text{Grad } \mathbf{u}^T) . \quad (2-28)$$

Über die Differenz der Linienelementquadrate aus Gl.(2-25) in räumlicher Darstellung

$$\frac{1}{2}(\text{d}\mathbf{x} \cdot \text{d}\mathbf{x} - \text{d}\mathbf{X} \cdot \text{d}\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \text{d}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \text{d}\mathbf{x} = \text{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_A \text{d}\mathbf{X} \quad (2-29)$$

lässt sich der Almansi-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_A$  definieren:

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - (\mathbf{F} \mathbf{F}^T)^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) . \quad (2-30)$$

Ein weiterer Verzerrungstensor ist der logarithmische Verzerrungstensor

$$\ln \mathbf{U} = \ln(\Lambda_J) \mathbf{E}_J \otimes \mathbf{E}_J , \quad (2-31)$$

der über die Spektralzerlegung des rechten Strecktensors  $\mathbf{U}$  aus Gl. (2-12) gewonnen wird.

Die Transformation  $\phi_*(\mathbf{A})$  eines Tensors  $\mathbf{A}$  zweiter Stufe der Ausgangskonfiguration in einen Tensor der Momentankonfiguration  $\bar{\mathbf{A}}$  (Push-Forward),

$$\bar{\mathbf{A}} = \phi_*(\mathbf{A}) = \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{A}) \mathbf{F}^{-1} , \quad (2-32)$$

erlaubt den Übergang zwischen beiden Konfiguration. Die inverse Operation  $\phi^*(\bar{\mathbf{A}})$  (Pull-Back) ergibt sich aus:

$$\mathbf{A} = \phi^*(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{F}^T (\bar{\mathbf{A}}) \mathbf{F} . \quad (2-33)$$

So erfolgt die Abbildung des Green-Verzerrungstensors bzw. dessen zeitlicher Ableitung in den Almansi-Verzerrungstensor und die zugehörige Verzerrungsgeschwindigkeit der Momentankonfiguration über die Vorschrift :

$$\mathbf{E}_A = \phi^*(\mathbf{E}_G) = \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{E}_G) \mathbf{F}^{-1} \quad (2-34)$$

und umgekehrt durch

$$\mathbf{E}_G = \phi_*(\mathbf{E}_A) = \mathbf{F}^T (\mathbf{E}_A) \mathbf{F} \quad (2-35)$$

Die Push-Forward und Pull-Back Operationen zwischen anderen Konfigurationen (so z.B. der später eingeführten Zwischenkonfiguration) ergeben sich aus der Verwendung des jeweiligen Deformationsgradienten.

## 2.4 Mechanische Bilanzgleichungen

Die Forderung nach der Erhaltung der Masse  $m$  des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  mit der Anfangsdichte  $\rho_0$  während der Bewegung zwischen der Ausgangskonfiguration und der Momentankonfiguration führt auf die Gleichung

$$m = \int_{B_0} \rho_0 \, dV = \int_{B_t} \rho \, dv. \quad (2-36)$$

Ein Fluss der Masse durch die Oberfläche  $\partial B$  des Körpers sei ausgeschlossen. Mit  $dv = \det(\mathbf{F}) \, dV$  ergibt sich daraus die lokale Form

$$\det(\mathbf{F}) \rho = \rho_0. \quad (2-37)$$

Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Summe der von außen einwirkenden Volumen- und Oberflächenkräfte, hier dem auf ein Flächenelement  $da$  wirkenden Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  und der auf ein Volumenelement  $dv$  wirkenden Kraftdichte  $\mathbf{f}$ . In der Momentankonfiguration ist dies gegeben durch

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial B_t} \mathbf{t} \, da + \int_{B_t} \mathbf{f} \, dv. \quad (2-38)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem resultierenden Moment der von außen einwirkenden Kräfte. Mit der Wahl eines Ortsvektors  $\mathbf{x}_0$  für den Bezugspunkt des Momentengleichgewichtes ist die Drehimpulsbilanz

$$\frac{d}{dt} \int_{B_t} \rho (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}) \, dv = \int_{\partial B_t} (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{t}) \, da + \int_{B_t} (\mathbf{x}_0 \times \mathbf{f}) \, dv. \quad (2-39)$$

## 2.5 Spannungsmaße

Der auf ein Flächenelement  $da$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  in der Momentankonfiguration wirkende Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  definiert durch das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (2-40)$$

den räumlichen (wahren) Cauchy-Spannungstensor  $\mathbf{T}$ . Mit dem Cauchy-Theorem und dem Gauß-Integralsatz lässt sich die lokale Impulsbilanz aus Gl. (2-38) ableiten

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (2-41)$$

die auch als räumliche Form der 1. Cauchy-Bewegungsgleichung bezeichnet wird.

Die Drehimpulsbilanz aus Gl.(2-39) führt auf die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (2-42)$$

Wird Gl.(2-40) unter Verwendung von Gl. (2-6) bezüglich der Ausgangskonfiguration geschrieben, ergibt sich mit

$$\mathbf{t}_0 = \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 \quad (2-43)$$

der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{P}$ , der im Allgemeinen nicht symmetrisch ist.

Als weitere Definitionen werden der räumliche gewichtete Cauchy-Spannungstensor (Kirchhoff-Spannungstensor)  $\mathbf{K}$  und der materielle 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  eingeführt, die durch entsprechende Push-Forward und Pull-Back Transformationen ineinander überführt werden können :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{T} = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \\ \mathbf{S} &= \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{F}^{-T} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{F} \mathbf{S} \\ \mathbf{T} &= \det(\mathbf{F})^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (2-44)$$

## 2.6 Objektivität und objektive Zeitableitungen von Spannungstensoren

Bei der Formulierung von Stoffgesetzen ist es erforderlich, deren Unabhängigkeit vom gewählten Bezugssystem zu gewährleisten, was durch die Verwendung von objektiven Tensoren bzw. objektiven tensorwertigen Beziehungen erreicht wird.

Ein beliebiger zweistufiger räumlicher oder Euler-Tensor  $\mathbf{A}$  ist objektiv wenn die Beziehung

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q}^T \quad (2-45)$$

gilt. Diese Transformation liegt der Transformation des Ortsvektors zugrunde. Dabei wird der Ortsvektor  $\mathbf{x}(t)$  bezüglich des ersten Beobachters durch die Relativedrehung  $\mathbf{Q}(t)$  der Bezugssysteme zueinander und die Relativverschiebung  $\mathbf{c}(t)$  des Ursprungs in den Ortsvektor

$$\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}(t) \text{ mit } \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \det \mathbf{Q} = 1 \quad (2-46)$$

bezüglich eines zweiten Beobachters überführt.

Die Forderung nach Objektivität trifft ebenso auf die Zeitableitung beliebiger Tensoren zu. Da die materielle Zeitableitung Euler-Tensoren nicht objektiv ist, müssen in der Momentankonfiguration spezielle Zeitableitungen definiert werden.

Zur Entwicklung eines Stoffgesetzes gehört die Formulierung von Ansätzen für abhängige Konstitutivgrößen (z.B. für die freie Energie oder die Spannung) als skalar- oder tensorwertige Funktionen der unabhängigen Konstitutivgrößen (z.B. des Deformationsgradienten, der Temperatur oder der inelastischen Zustandsgrößen). Solche Ansätze müssen auch der Forderung nach der Objektivität genügen. Für die hier in der Arbeit vorgenommene Beschränkung auf isotropes Materialverhalten gilt:

Hängt die skalare Funktion  $f$  von verschiedenen Sätzen zweistufiger Tensoren  $\mathbf{A}_i$  und Vektoren  $\mathbf{a}_i$  ab, erfüllt sie die Forderung nach Objektivität wenn die Bedingung

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{a}_i) = f(\mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i) \quad (2-47)$$

erfüllt ist. Weiter ist eine zweistufige Tensorfunktion  $g$  bei Erfüllung der folgenden Bedingung objektiv:

$$g(\mathbf{Q}\mathbf{A}_i\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{a}_i) = \mathbf{Q}g(\mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i)\mathbf{Q}^T. \quad (2-48)$$

## 2.7 Spannungsgeschwindigkeiten

Die Wahrnehmung von Spannungsänderungen eines Beobachters in einem rotierenden Koordinatensystem beschränkt sich auf den Anteil, der aufgrund der Spannungsänderungen im mitdrehenden Koordinatensystem zustande kommt, während Spannungsänderungen, die von einer Translation oder Rotation herrühren, von einem Beobachter in einem mitrotierenden Koordinatensystem nicht wahrgenommen werden.

Das Prinzip der materiellen Objektivität fordert, dass das Materialverhalten nicht vom Standort des Beobachters abhängen darf. Bei einem Beobachterwechsel,

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \mathbf{F} , \quad (2-49)$$

dargestellt durch einen orthogonalen Tensor  $\mathbf{Q}$  (Rotation), bedingen die Transformationseigenschaften für die Spannungen

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T . \quad (2-50)$$

Für eine mit dem Tensor  $\Theta$  gebildete objektive Spannungsrate

$$\overset{*}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \Theta \mathbf{T} + \mathbf{T} \Theta \quad (2-51)$$

muss die folgende Transformationseigenschaft gelten:

$$\Theta^* = \mathbf{Q} \Theta \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T . \quad (2-52)$$

Einige objektive Ableitungen, die diese Transformationseigenschaften erfüllen, sind durch die Wahl von  $\Theta$  durch die in Gl.(2-24) und Gl.(2-22) definierten Größen  $\mathbf{W}$ ,  $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$  bzw.  $\mathbf{L}$  gegeben:

Zaremba-Jaumann [Zar1903, Jau1911]	$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W}$	
Green-Naghdi [Gre1965]	$\overset{\diamond}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \mathbf{T} + \mathbf{T} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$	(2-53)
Oldroyd [Old1950]	$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{L}$	

Umfangreiche neuere Arbeiten zu diesem Thema finden sich bei Xiao, Bruhns und Meyers [Xia1999].

## 2.8 Energieerhaltungssatz und Entropiegleichung

Die lokale räumliche reduzierte Formulierung des Energieerhaltungssatzes

$$\rho \dot{e} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \text{div} \mathbf{q} + \rho h \quad (2-54)$$

ist Bestandteil der zu betrachtenden Bilanzgleichungen. Die spezifischen Größen  $e$  und  $s$  beschreiben die innere Energie und die Entropie je Masseinheit,  $\mathbf{q}$  den Wärmefluss je Flächeneinheit und  $h$  die Wärmequellendichte je Masse- und Zeiteinheit. Der Term  $\mathbf{T} : \mathbf{D}$  wird als spezifische Spannungsleistung bezeichnet.

Die reduzierte Form der Entropiegleichung

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \rho \frac{\dot{h}}{T} \geq 0 \quad (2-55)$$

bildet die Grundlage einer physikalisch konsistenten Formulierung des Stoffgesetzes. Die Variable  $T$  steht für die absolute Temperatur.

Durch Kombination von Gl.(2-54) und Gl.(2-55) ergibt sich mit Gl.(2-44) die Form

$$\delta = -\dot{\psi} + \mathbf{K} : \mathbf{D} \geq 0 \quad (2-56)$$

für die Dissipationsratendichte (Clausius-Duhem-Ungleichung für isotherme Prozesse), wobei

$$\psi = \rho_0 (e - sT) \quad (2-57)$$

die freie Energiedichte darstellt. Danach ist die dem System zugeführte Spannungsleistung  $\mathbf{K} : \mathbf{D}$  gleich der Energieabspeicherungsrate plus der Dissipationsratendichte.

## 2.9 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen ist eine der Impuls und Drallbilanz äquivalente Formulierung, die in der mathematischen Formulierung auch als schwache Form der durch die Impulsbilanz gegebenen Differentialgleichungen bezeichnet wird. Die Skalarmultiplikation der aus Gl. (2-38) folgenden Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2-58)$$

mit einem Vektorfeld (virtuelles Verschiebungsfeld)  $\delta \mathbf{u}$  und die anschließende Integration über das Gebiet  $B_t$  führt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in räumlicher Darstellung:

$$\int_{B_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u}) \, dv = \int_{B_t} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial B_t} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da \quad (2-59)$$

Das beliebige Vektorfeld  $\delta \mathbf{u}$  muss hierbei stetig differenzierbar sein und die gegebenen, geometrischen Randbedingungen erfüllen. Das Prinzip formuliert so die Gleichheit zwischen der virtuellen inneren Arbeit und der Summe aus virtueller Arbeit der äußeren Belastungen und dem Trägheitsterm.

3	Lokale Elastoplastizität.....	3-1
3.1	Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten.....	3-2
3.2	Spannung und Plastische Dissipationsleistung.....	3-5
3.3	Hyperelastisches Stoffgesetz.....	3-7
3.4	Plastisches Stoffgesetz.....	3-8
3.5	Verfestigungsmodellierung.....	3-9
3.6	Zusammenfassung.....	3-10

### 3 Lokale Elastoplastizität

Zur vollständigen Formulierung eines Randwertproblems ist neben den in Kapitel 2 aufgeführten kinematischen Beziehungen und den Bilanzgleichungen auch ein Modell für das Werkstoffverhalten erforderlich. Die hier behandelte Klasse von Materialmodellen wird auf technisch eingesetzte polykristalline Metalle eingegrenzt und folgt im Einzelnen den in [Arn2000] aufgeführten Einschränkungen:

1. Es existiert ein elastischer Bereich als einfach zusammenhängendes konvexes Gebiet im Spannungsraum. Prozesse in diesem Gebiet sind reversibel. Damit existiert ein Potential spezifischer freier elastischer Energie  $\psi_e$ , aus dessen Ableitung nach einem geeigneten elastischen Verzerrungsmaß die Spannung ermittelt werden kann.
2. Die Form des elastischen Stoffgesetzes ist unabhängig vom inelastischen Zustand bzw. von den inelastischen inneren Variablen.
3. Das geschwindigkeitsunabhängige plastische Stoffgesetz wird definiert durch eine Fließfläche im Spannungsraum und eine assoziierte Fließregel. Es tritt

Verfestigung ausschließlich durch eine Aufweitung (isotrope Verfestigung) der Fließfläche auf. Kinematische Verfestigungsvorgänge bleiben in dieser Arbeit unberücksichtigt.

Die Anwendung eines hyperelastisch-plastischen Materialmodells zur Beschreibung großer Deformationen motiviert sich aus den, bei der Verwendung von hypoelastischen Stoffgesetzen auftretenden Widersprüchen. Die in Kapitel 2.6 geforderte materielle Objektivität der Spannungsrate ist bei **hypoelastisch-plastischen** Stoffgesetzen nur dann gewährleistet, wenn durch Verwendung geeigneter objektiver Ableitungen eine Bewegung des Beobachters außer der Transformation keinen Einfluss auf die im Material berechneten Spannungen hat. Bei der Verwendung der damit gebildeten hypoelastisch-plastischen Stoffgesetze in Ratenform tritt abhängig von der Wahl des Ableitungstyps, zum Teil ein physikalisch widersprüchlicher, da elastische Energie speichernder Prozess auf, der zur Oszillation der Spannungen führt ([Leh1972,Nag1982]), oder es ergibt sich bei inkompressiblem Material und assoziierter Fließregel eine Spur im Rückspannungstensor ([Hau1985]). Des Weiteren werden irreversible Prozesse in geschlossenen elastischen Belastungspfaden [Koj1987] als Kritik genannt. Bei einem **hyperelastisch-plastischen** Stoffgesetz treten diese Probleme jedoch grundsätzlich nicht auf [Sve1998b,Arn2000]. Detaillierte Ausführungen zur Herleitung im Rahmen der Anwendung des Gurson-Modells finden sich in [Arn2000]. Mit den folgenden Erläuterungen wird ein, unabhängig von der Definition einer speziellen Fließfläche und internen Zustandsvariablen des Materials, allgemein anwendbares hyperelastisch-plastisches Modell vorgestellt.

### 3.1 Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

Die Grundlage hyperelastisch-plastischer Stoffgesetze kann auf das bei [Lee1969] vorgeschlagene Konzept der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen Anteil  $\mathbf{F}_e$  und einen plastischen Anteil  $\mathbf{F}_p$  zurückgeführt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad . \quad (3-1)$$

Eine solche Zerlegung setzt die Existenz einer plastischen Zwischenkonfiguration für jeden materiellen Punkt voraus, die durch Entlasten eines Punktes in einen spannungsfreien Zustand erreicht wird und daher im Allgemeinen geometrisch inkompatibel mit einem Nachbarpunkt ist. Durch diese multiplikative Aufspaltung wird zunächst das Linienelement der Referenzkonfiguration auf ein plastisches

Linielement der Zwischenkonfiguration transformiert (plastischer Push-Forward) und anschließend auf ein elasto-plastisches Linielement der Momentankonfiguration abgebildet (s. Bild 3.1). Die multiplikative Zerlegung der Gl.(3-1) betrifft dabei nicht die globale Referenz-Konfiguration, sondern bezieht sich nur auf eine unmittelbare oder infinitesimale Umgebung eines materiellen Punktes, was durch die unterbrochene Linie der Zwischenkonfiguration verdeutlicht worden ist.

Die polare Zerlegung des Deformationsgradienten wird auch auf den elastischen und plastischen Anteil angewendet, so dass gilt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e \mathbf{V}_p \mathbf{R}_p . \quad (3-2)$$

Hieraus leitet sich eine additive Zerlegung in einen elastischen und plastischen Verzerrungszustand ab, die auf der Referenzkonfiguration wirksam ist, so dass für die Zerlegung des Verzerrungszustandes die Beziehungen

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p) \quad (3-3)$$

gelten. Entsprechend der Definition des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$  kann dieser auch in einen plastischen und einen elastischen Anteil aufgeteilt werden:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}_e + \mathbf{L}_p = \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \dot{\mathbf{F}}_p \dot{\mathbf{F}}_p^{-1} \mathbf{F}_e^{-1} , \quad (3-4)$$

so dass für den plastischen bzw. elastischen Anteil Deformationsgeschwindigkeits-Tensor der Momentankonfiguration gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_e &= \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} \\ \mathbf{L}_p &= \mathbf{F}_e \tilde{\mathbf{L}}_p \mathbf{F}_e^{-1} , \\ \tilde{\mathbf{L}}_p &= \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \end{aligned} \quad (3-5)$$

Der plastische Geschwindigkeitsgradient der Momentankonfiguration  $\mathbf{L}_p$  kann dabei in einen symmetrischen ( $\mathbf{D}_p$ , plastischer Deformationsgeschwindigkeitstensor) und antimetrischen Anteil ( $\mathbf{W}_p$ , Plastic Spin) aufgespalten werden.

$$\mathbf{L}_p = \mathbf{D}_p + \mathbf{W}_p . \quad (3-6)$$

Die Möglichkeit der Einführung eines orthogonalen Tensor  $\mathbf{Q}$  in die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten nach Gl. (3-1) einzufügen,

$$\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p = \mathbf{F}_e \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{F}_p = \tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p, \tag{3-7}$$

zeigt die Nichteindeutigkeit der Zerlegung des Deformationsgradienten auf. Da die Lösung dieser Problemstellung nicht von der Wahl der kinematischen Dekomposition abhängig ist (wie u.a. in [Bor1989] gezeigt wird), stellt sich die Formulierung einer eindeutigen Zerlegung von  $\mathbf{F}$  zunächst als beliebig dar. Durch die Formulierung einer Evolutionsgleichung für den Plastic-Spin  $\mathbf{W}_p$  ([Daf1985,Gie1991,Pau1992]) wird durch die Integration des plastischen Deformationsanteils eine eindeutige Zerlegung definiert. Einen Sonderfall bildet die Annahme  $\mathbf{W}_p = \mathbf{0}$ , wie sie bei [Ete1990, Ari2000] und [Web1990] gewählt wurde. Basierend auf Überlegungen in [Sve1998a,b] und [Arn2000] wird hier unter der Annahme  $\mathbf{R}_p = \mathbf{I}$  die Größe  $\mathbf{W}_p$  unter der Berücksichtigung elastischer Isotropie bei der Zerlegung  $\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p$  mit der Reduktion des Modells auf die Beschreibung kleiner elastischer Deformationen eindeutig bestimmt [Sve1998a,b]. Formal gesehen stellt dies eine Vereinfachung der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \tag{3-8}$$

dar, die den Deformationsgradienten jetzt in drei Größen aufteilen,

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}_e \mathbf{R} \mathbf{U}_p. \tag{3-9}$$

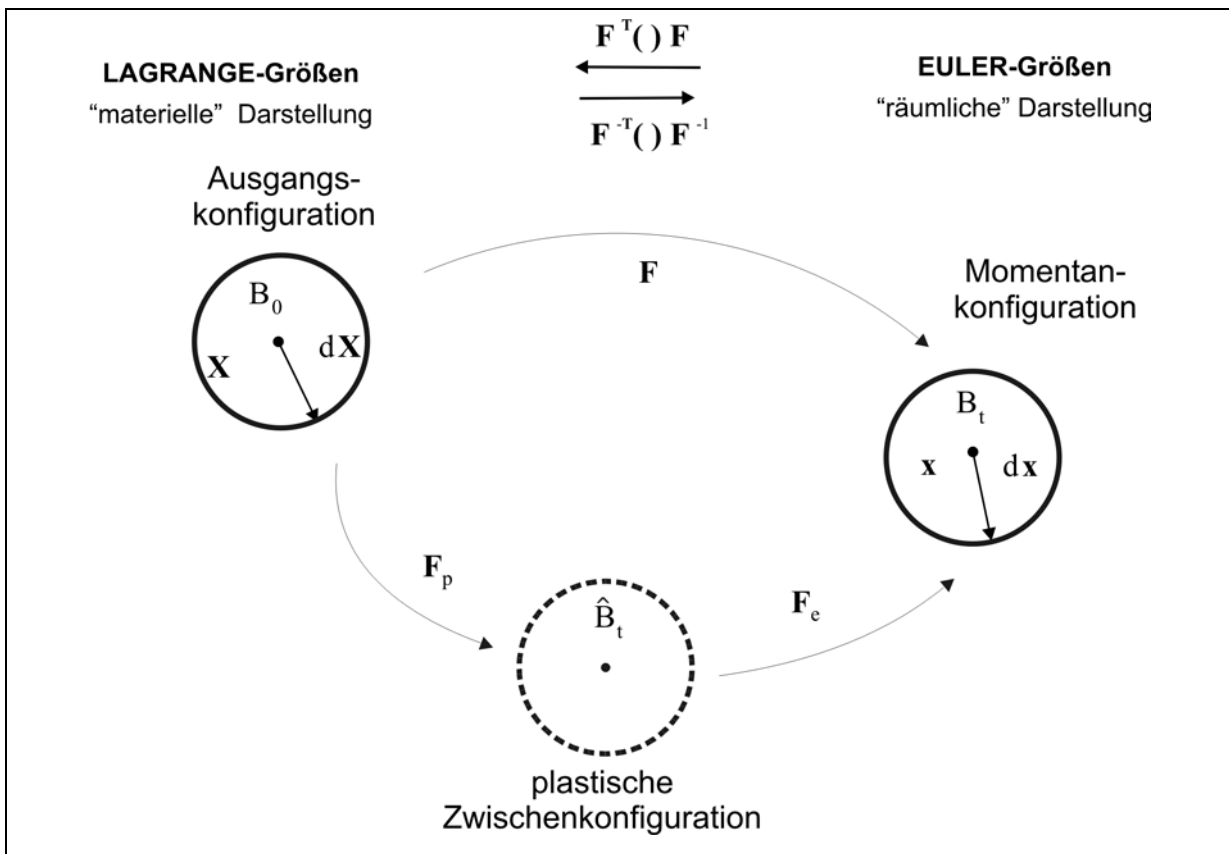


Bild 3.1: Plastische Zwischenkonfiguration

### 3.2 Spannung und Plastische Dissipationsleistung

Die in Kapitel 2, Gl.(2-56) eingeführte freie Energiedichte  $\psi$  kann als eine Funktion des rechten Cauchy-Green-Tensors<sup>1</sup>  $\mathbf{C}$ , dessen Rate  $\dot{\mathbf{C}}$ , der lokalen plastischen Deformation  $\mathbf{F}_p$  und eines Vektors  $\boldsymbol{\alpha}$  von skalaren und tensoriellen inneren Variablen dargestellt werden.

$$\psi = \psi(\mathbf{C}, \mathbf{F}_p, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\mathbf{C}}) \quad (3-10)$$

Gleiches gilt für die 2.Piola-Kirchhoff-Spannung  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{C}, \mathbf{F}_p, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\mathbf{C}}) . \quad (3-11)$$

Mit der Beschränkung auf ein von der Deformationsgeschwindigkeit unabhängiges Materialverhalten entfällt die Abhängigkeit von der Deformationsrate  $\dot{\mathbf{C}}$ . Durch Einsetzen eines hyperelastischen Stoffgesetzes ist die Form der Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\mathbf{C}, \mathbf{F}_p, \boldsymbol{\alpha}) \\ \mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad , \end{aligned} \quad (3-12)$$

wobei die konstitutive Form des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors aus einem Potential hergeleitet wird, das die im Körper gespeicherte Verzerrungsenergie beschreibt.

Über die Definition des Cauchy-Green-Tensors

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3-13)$$

wird der Zusammenhang zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor sichtbar:

$$\mathbf{E}_G = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (3-14)$$

Die Beschränkung der Betrachtung auf isotherme Prozesse vereinfacht die Clausius-Duhem-Ungleichung wie in Kapitel 2 ausgeführt zur lokalen Dissipationsleistung

$$\delta := \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} - \dot{\psi} \geq 0 . \quad (3-15)$$

Mit Gl.(3-12) wird  $\delta$  auf die plastische Dissipationsleistung

---

<sup>1</sup> Bei Beobachterwechsel  $\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}$  gilt:  $\mathbf{C}^* = \mathbf{F}^{*T} \mathbf{F}^* = \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} = \mathbf{C}$

$$\delta_p = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_p} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (3-16)$$

reduziert.

Es wird angenommen, dass  $\psi$  in einen elastischen Anteil  $\psi_e$  und einen plastischen Anteil  $\psi_p$  unterteilt werden kann ([Hau1995, Sve1998a,b]). Mit der Beschränkung auf ein von den inneren Variablen unabhängiges elastisches Materialverhalten und einer von der elastischen Deformation unabhängig angenommenen plastischen freien Energie kann für  $\psi$  die folgende Form gefunden werden:

$$\psi = \psi_e(\mathbf{C}, \mathbf{F}_p) + \psi_p(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}) . \quad (3-17)$$

Hierbei ist der inelastische Anteil  $\psi_p$  nur noch eine Funktion einer Rückverformung  $\mathbf{Y}$  und den verbleibenden skalaren internen Variablen im Vektor  $\boldsymbol{\xi}$ , so dass der allgemeine Vektor  $\boldsymbol{\alpha}$  aus Gl.(3-10) durch die Unbekannten  $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi})$  ersetzt wird . Auf die weitere Berücksichtigung der Rückspannungen wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet, so dass die weiterführenden Erläuterungen sich auf die Modellierung isotroper Verfestigungsmechanismen reduzieren. Eine ausführliche Beschreibung der Modellierung kinematischer Verfestigungsmechanismen findet sich u.a. in [Arn2000].

Motiviert aus der Kristallplastizität, in der die elastische Deformation als Gitterverzerrung und die plastische Deformation dem Abgleiten von Versetzungen zugeordnet wird, kann die Form des elastischen Stoffgesetzes in Gl.(3-12)<sub>2</sub> als von der plastischen Deformation unabhängig betrachtet werden (elastischer Isomorphismus [Bert1993, Sve1998a, Sve1998b]). Für  $\psi_e$  ergibt sich damit die spezielle Form des Ansatzes  $\varphi_e$  durch eine „pull back“ Transformation auf die plastischen Zwischenkonfiguration:

$$\psi_e(\mathbf{C}, \mathbf{F}_p) = \varphi_e(\mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_p^{-1}) . \quad (3-18)$$

Mit

$$\mathbf{C}_e := \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_p^{-1} = (\mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1})^T (\mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}) = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \quad (3-19)$$

werden die Spannungen direkt mit dem aus der Zerlegung  $\mathbf{F}_e = \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}$  gewonnenen elastischen Deformationsanteil (Cauchy-Green-Tensors) verknüpft:

$$\mathbf{F}_p \mathbf{S} \mathbf{F}_p^T = 2 \frac{\partial \varphi_e}{\partial \mathbf{C}_e} . \quad (3-20)$$

Damit wird der erste Term in Gl.(3-16) angegeben:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_p} = 2 \mathbf{C}_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial \mathbf{C}_e} \mathbf{F}_p^{-T} - \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{F}_p} = \mathbf{M} \mathbf{F}_p^{-T} - \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{F}_p} . \quad (3-21)$$

Der Spannungstensor  $\mathbf{M}$ , definiert durch

$$\mathbf{M} := 2 \mathbf{C}_e \frac{\partial \varphi_e}{\partial \mathbf{C}_e} \quad (3-22)$$

wurde von [Man1972] eingeführt und wird im weiteren als Mandel-Spannung bezeichnet.

Durch Einsetzen von Gl.(3-22) in Gl.(3-16) und unter Berücksichtigung der Definition  $\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$  ergibt sich die plastische Dissipationsleistung zu

$$\delta_p = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}_p} \cdot \dot{\mathbf{F}}_p - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\alpha}} \cdot \dot{\bar{\alpha}} = \left( \mathbf{M} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p^T \right) \cdot \mathbf{L}_p + \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\xi}} \cdot \dot{\bar{\xi}} . \quad (3-23)$$

Im Kontext der hier gemachten Annahme ausschließlich isotroper Verfestigungsmechanismen wird der hier auftretende Term

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{F}_p} \mathbf{F}_p^T \quad (3-24)$$

als das Zentrum des elastischen Bereichs (Rückspannungstensor) interpretiert und zu null gesetzt. Wird bezüglich der Zwischenkonfiguration Isotropie angenommen, folgt nach [Sve1998b] daraus elastische Isotropie, wodurch in das Produkt mit dem Mandel-Spannungstensor aus Gl.(3-23) nur der symmetrische Anteil von  $\mathbf{L}_p$  eingeht:

$$\delta_p = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_p - \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\xi}} \cdot \dot{\bar{\xi}} . \quad (3-25)$$

### 3.3 Hyperelastisches Stoffgesetz

Mit der polaren Zerlegung des elastischen Deformationsanteils in eine elastische Rotation  $\mathbf{R}_e$  und einen elastischen rechten Strecktensor  $\mathbf{U}_e$ ,

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \lambda_{e,J} (\mathbf{e}_J \otimes \zeta_J) = (\mathbf{e}_J \otimes \zeta_J) \cdot \lambda_{e,J} (\zeta_J \otimes \zeta_J), \quad (3-26)$$

erfolgt die Definition des elastischen logarithmischen Verzerrungstensors (elastischer Hencky-Tensor):

$$\mathbf{E}_e = \ln \mathbf{U}_e . \quad (3-27)$$

Mit diesem Verzerrungsmaß wird der Mandel-Spannungstensor  $\mathbf{M}$  unter Verwendung eines isotropen elastischen Stoffgesetzes, dargestellt durch den Elastizitätstensor 4. Stufe,  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e$ , berechnet.

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial \mathbf{E}_e} = 2\mu \mathbf{E}_e + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}_e) \mathbf{I} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e [\mathbf{E}_e] . \quad (3-28)$$

Damit sind die Tensoren  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{U}_e$  bzw.  $\mathbf{E}_e$  aufgrund des isotropen Stoffgesetzes koaxial und die Transformation zwischen dem Mandel-Spannungstensor  $\mathbf{M}$  und dem Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{K}$  bzw. den Cauchy-Spannungen  $\mathbf{T}$  kann mit der elastischen Rotation  $\mathbf{R}_e$  formuliert werden:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_e \mathbf{M} \mathbf{R}_e^T , \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{K} . \quad (3-29)$$

Die Materialparameter sind die der klassischen Elastizität: Die Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , die sich aus dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  berechnen:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad \lambda = 2\mu \frac{\nu}{(1-2\nu)} . \quad (3-30)$$

### 3.4 Plastisches Stoffgesetz

Der Bereich elastischer Deformationen ist ein zusammenhängendes Gebiet im Hauptspannungsraum, das durch die Fließfläche begrenzt wird, die durch die Bedingung

$$\Phi(\mathbf{M}, \xi) = 0 \quad (3-31)$$

gegeben ist. Hierbei stellt  $\Phi$  eine Potentialfunktion der Spannung  $\mathbf{M}$  und eines Vektors  $\xi$  mit internen skalaren Variablen dar. Im Fall der von-Mises-Plastizität wird Gl.(3-31) zu

$$\Phi(\mathbf{M}, \sigma_m) = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_m^2} - 1 , \quad (3-32)$$

mit der Vergleichsspannung  $\sigma_v^2 = J_2(\mathbf{M})$  und der isotropen Verfestigung  $\sigma_m$  als eine skalare Variable, die den Durchmesser der Fließfläche im Spannungsraum bestimmt.

Plastische Deformationen werden durch das Fließgesetz beschrieben, wobei der plastische Multiplikator  $\dot{\lambda}$  den Betrag plastischen Fließens angibt:

$$\mathbf{D}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} . \quad (3-33)$$

Hierin ist durch  $\partial \Phi / \partial \mathbf{M}$  die Richtung des plastischen Fließens senkrecht zur Fließfläche vorgegeben.

Über den plastischen Multiplikator kann die Unterscheidung zwischen elastischen und plastischen Vorgängen vorgenommen werden. In der Kuhn-Tucker-Form ausgedrückt bedeutet dies, dass für einen beliebigen Prozess zu jeder Zeit

$$\Phi \leq 0 \quad \wedge \quad \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{elastischer Prozess}) \quad (3-34)$$

oder

$$\Phi = 0 \quad \wedge \quad \dot{\lambda} > 0 \quad (\text{plastischer Prozess}) \quad (3-35)$$

gelten muss. Daraus folgt die Konsistenzbedingung zu

$$\Phi \dot{\lambda} = 0 \quad , \quad \dot{\Phi}(\mathbf{M}, \sigma_m) = 0 , \quad (3-36)$$

aus der sich der Wert von  $\dot{\lambda}$  und damit die Größe des plastischen Inkrements bestimmt.

### 3.5 Verfestigungsmodellierung

Die isotrope Verfestigung kann über eine Summe von  $n_i$  Exponentialansätzen beschrieben werden ([Lem1996]). Über die Definition der plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_m$

$$\dot{\varepsilon}_m = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{D}_p} \quad , \quad \varepsilon_m = \int_{\tau=0}^t \dot{\varepsilon}_m \, d\tau \quad , \quad (3-37)$$

wird der Skalar  $\sigma_m$  berechnet, der die Größe des elastischen Bereichs im Spannungsraum definiert [Cha1986, Cha1993]:

$$\sigma_m = \sigma_y + \sum_{j=1}^n R_j \left[ \exp(-k_j \varepsilon_m) - 1 \right] . \quad (3-38)$$

Neben der Fließspannung des Materials,  $\sigma_y$ , treten in der Summe die Amplituden  $R_j$  und Abklingfaktoren  $k_j$  in jedem Exponentialterm auf. Die Steigung von  $\sigma_m$  wird als Tangentenmodul  $H$  bezeichnet:

$$H(\varepsilon_m) = \frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon_m} . \quad (3-39)$$

Der Sonderfall eines linearen, isotropen Verfestigungsanteils wird durch einen konstanten Tangentenmodul

$$H = \text{const.} \quad (3-40)$$

beschrieben.

Die plastische Dissipationsleistung aus Gl.(3-25) und unter Berücksichtigung des gewählten Verfestigungsansatzes ergibt sich so zu

$$\delta_p = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_p - \frac{\partial \psi_p}{\partial \bar{\xi}} \cdot \dot{\bar{\xi}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_p - \sigma_m \dot{\varepsilon}_m . \quad (3-41)$$

### 3.6 Zusammenfassung

Die vollständigen konstitutiven Gleichungen der Hyperelastoplastizität mit isotroper Verfestigung werden in Tafel 3.1 dargestellt. An dieser Stelle werden weder eine spezielle Form der Fließfläche noch die Bedeutung der zusätzlichen internen Variablen festgelegt.

**Tafel 3.1:** Hyperelastisch-plastisches Modell mit isotroper Verfestigung

Rate des plastischen Deformationsanteils:

$$\dot{\mathbf{F}}_p = \mathbf{L}_p \mathbf{F}_p$$

Evolutionsgleichung des Vektors innerer Variablen zur Beschreibung von Verfestigung oder Schädigung:

$$\dot{\xi} = f(\mathbf{M}, \mathbf{F}_p, \mathbf{L}_p, \bar{\xi})$$

Fließbedingung:

$$\Phi(\mathbf{M}, \xi) = 0$$

Plastischer Geschwindigkeitsgradient:

$$\mathbf{L}_p = \dot{\lambda} \Phi_{, \mathbf{M}} + \mathbf{W}_p$$

Elastischer Deformationsanteil:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}$$

Elastischer logarithmischer Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E}_e = \ln(\mathbf{U}_e)$$

Elastizitätsgesetz (Hooke-Gesetz):

$$\mathbf{M} = 2\mu \mathbf{E}_e + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}_e) \mathbf{I}$$

Isotrope Verfestigungsfunktion:

$$\sigma_m = \sigma_y + \sum_{i=1}^n R_i [\exp(-k_i \varepsilon_m) - 1]$$



4	Lokale Schädigungsmodellierung.....	4-1
4.1	Duktile Schädigung.....	4-1
4.2	Das Gurson-Modell.....	4-4
4.3	Entfestigung und Lokalisierung .....	4-8
4.4	Tafeln .....	4-13

## **4 Lokale Schädigungsmodellierung**

In diesem Kapitel wird das duktile Schädigungsverhalten metallischer Materialien beschrieben und neben einer phänomenologischen Betrachtung die numerische Simulation des Schädigungsprozesses in Form des Gurson-Modells vorgestellt. Über die Erläuterung verschiedener Ansätze zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens wird abschließend das Phänomen der lokalen Entfestigung und der sich daraus ergebenden Lokalisierungsphänomene bei der Anwendung mit der FE-Methode erklärt.

### **4.1 Duktile Schädigung**

Reale Materialien enthalten mikroskopische Defekte, die die makroskopische Festigkeit eines Bauteils beeinflussen. Die aufgrund einer äußeren Belastung voranschreitende Schädigung durch das Wachstum von Mikrorissen oder das Entstehen und Wachsen von Poren (Hohlräumen) lässt sich in die Bereiche der

spröden Schädigung, der duktilen Schädigung, der Kriechschädigung und bei wechselnder Belastung der Ermüdungsschädigung unterteilen.

In der Bruchmechanik wird gewöhnlich die Beschreibung des Versagens einer Struktur auf makroskopischer Ebene vorgenommen, wobei Schädigungsmechanismen unberücksichtigt bleiben. Durch die Anwendung von Versagenshypothesen bruchmechanischer Bewertungskonzepte für bereits geschädigte Bauteile, wie zum Beispiel das  $K$ -Konzept oder das  $J$ -Integral-Konzept [Aur1987] wird das Versagensverhalten makroskopisch charakterisiert. Hierbei wird ein geeignetes Bruchkriterium aufgestellt, das das Versagen (den Rissfortschritt) des Materials durch Überschreiten eines bruchmechanischen Kennwertes kennzeichnet. Diese Kriterien setzen aber das Vorhandensein eines Risses schon voraus, sind also nicht in der Lage Rissentstehung zu beschreiben und können so auch nicht ein integraler Bestandteil der kontinuumsmechanischen Beschreibung sein.

Da die Materialeigenschaften eines Werkstoffes jedoch schon vor dem Versagen durch die Schädigung beeinflusst werden, müssen geeignete Methoden zur Anwendung gebracht werden, die diese Vorgänge zu simulieren vermögen. Im Rahmen der Schädigungsmechanik wird der mikrostrukturelle Zustand des Materials durch innere Zustandsvariablen beschrieben, die Bestandteil der

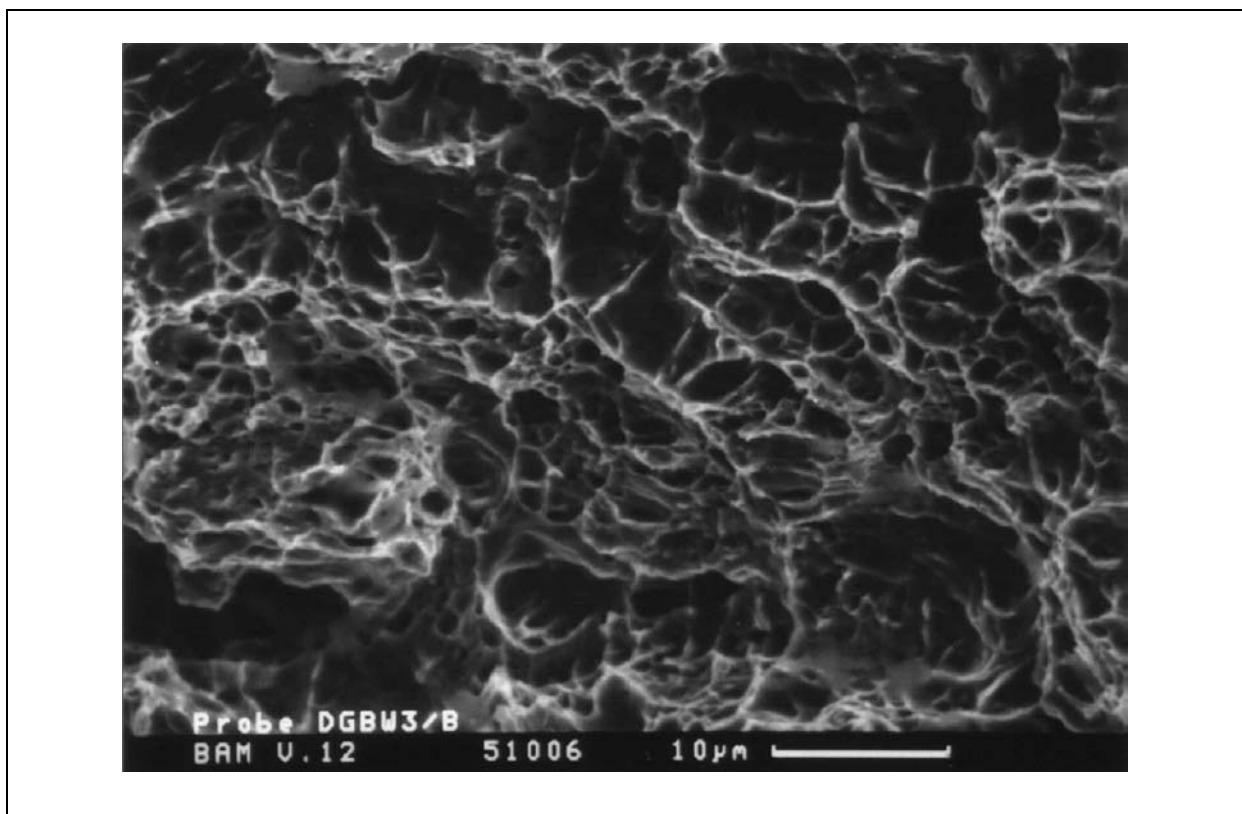


Bild 4.1: Bruchoberfläche nach duktiler Schädigung mit typischem Wabenbruch [Kli2000]

kontinuumsmechanischen Beschreibung sind. Somit kann das Verhalten des Materials vom ursprünglichen Zustand bis hin zum völligen Verlust der Steifigkeit charakterisiert werden, so dass der Verlust der Tragfähigkeit des Materials ohne globale Versagenskriterien beschrieben werden kann, was u.a. eine probengeometrie- und belastungsunabhängige Beschreibung des Versagens einer Struktur ermöglicht.

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachtete duktile Schädigung von metallischen Werkstoffen wird im Wesentlichen vom Wachstum und der Vereinigung von im Material bereits befindlichen oder neu entstehenden mikroskopischen Hohlräumen hervorgerufen. Im Versuch führt die voranschreitende duktile Schädigung zum bekannten Wabenbruch. Bei Bruchmechanikproben und Rissen in Bauteilen tritt zumeist stabiles Risswachstum vor dem endgültigen Versagen einer Struktur auf. In der Bruchfläche sind die Scherkämme der Stege zwischen den Hohlräumen unter dem Rasterelektronenmikroskop zu erkennen [Bild 4.1].

Die Vorgänge der Schädigung und des Versagens in Form eines makroskopisch beobachtbaren Risses sind schematisch in [Bild 4.2] dargestellt: Die Hohlräume können bereits im Herstellungszustand im Material vorhanden sein. Bei den meisten Werkstoffen überwiegt die Hohlraumbildung (Nukleation) durch Ablösen (Dekohäsion) des Matrixmaterials (1) oder Bruch von harten, meist nichtmetallischen Einschlüssen (2), vgl. [Goo1979]. Mit zunehmender plastischer Deformation tritt eine Lokalisierung der Deformation durch Bildung von Scherbändern zwischen den Hohlräumen ein (3), deren Bruch zur makroskopischen Bruchfläche führt. Die Lokalisierung kann durch eine zweite Population von Partikeln geringerer Größe erheblich verstärkt werden. Das Wachstum kleiner Hohlräume wird im Umfeld eines großen Hohlraums beschleunigt, deren Zusammenschluss auf eine verstärkte Schädigung bis zum Bruch führt (4).

Erste mathematische Modelle zur Beschreibung dieser Vorgänge beschränkten sich zunächst auf die Beschreibung des Porenwachstums, wobei die Schädigung durch den Porenvolumenanteil charakterisiert wurde [McC1968]. So wurde z.B. bei [Ric1969] eine einzelne Probe zylindrischer bzw. kugelförmiger Gestalt eingebettet in einem starr-ideal plastischen Material betrachtet, die durch eine konstante einachsige Verzerrungsgeschwindigkeit belastet wird. Kontinuumsmechanische Beschreibungen der duktilen Schädigung, bei der die Materialsteifigkeit durch eine innere Variable beeinflusst wird, wurden u.a. von [Gur1977], [Lem1986] und [Rou1987] vorgestellt.

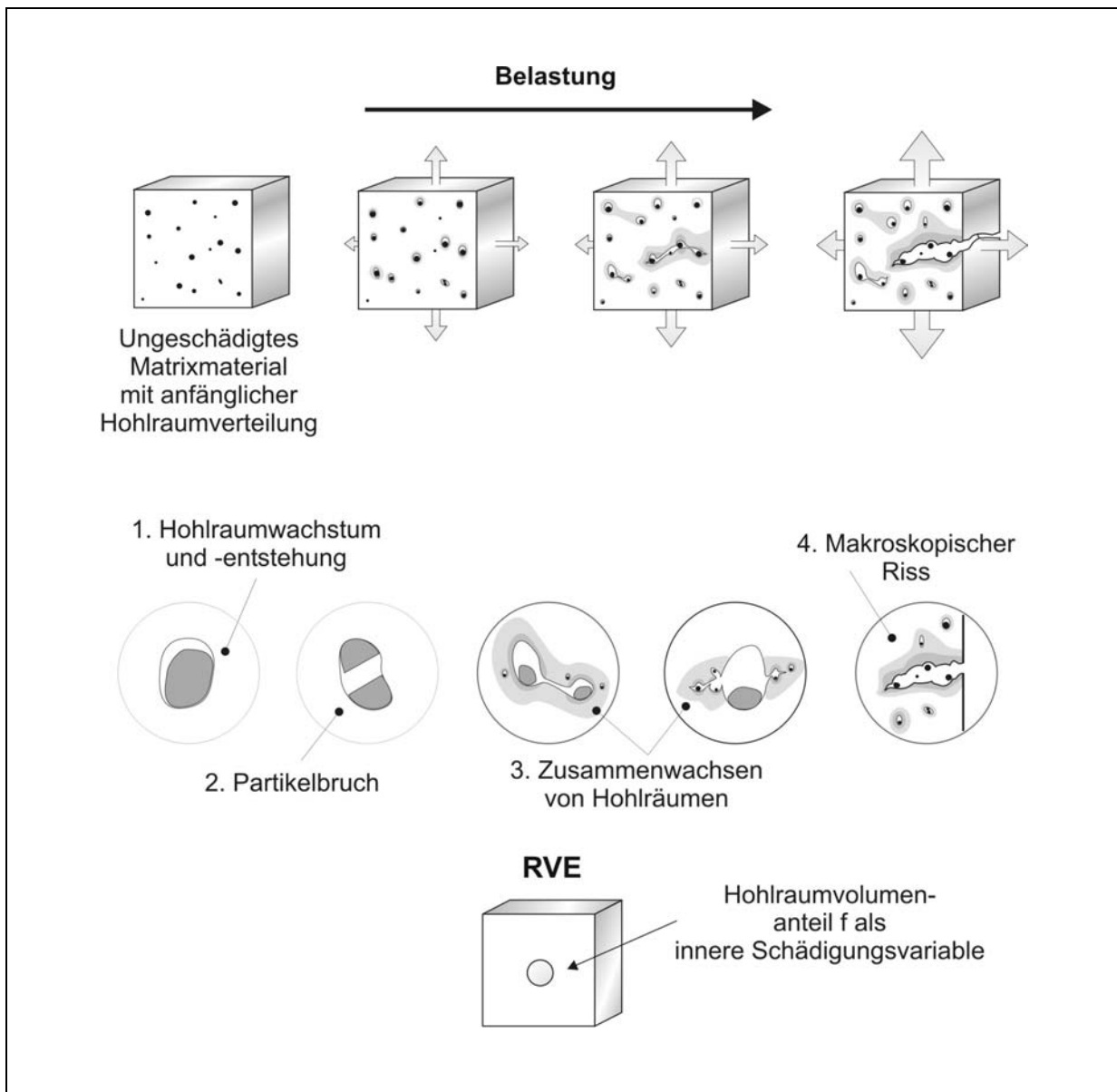


Bild 4.2: Phänomenologische Beschreibung duktiler Schädigung

Ausgangspunkt für das hier vorgestellte Materialmodell ist die Beschreibung von Gurson, bei der im Rahmen eines Zellmodells, dem repräsentativen Volumenelement (RVE), das Verhalten einer sphärischen Pore in einer kugelförmigen Zelle aus starr-ideal plastischem Matrixmaterial beschrieben wird.

## 4.2 Das Gurson-Modell

Das Gurson-Modell beschreibt die Schädigung in metallischen Werkstoffen, in dem harte, nichtmetallische Einschlüsse durch Dekohäsion oder Bruch zur Hohlräumentstehung beitragen. Weitere Belastung führt zum Wachstum und Zusammenschluss dieser Hohlräume und schließlich zur duktiler Rissinitiation und Rissausbreitung bis zum endgültigen Versagen. Zur Modellierung des

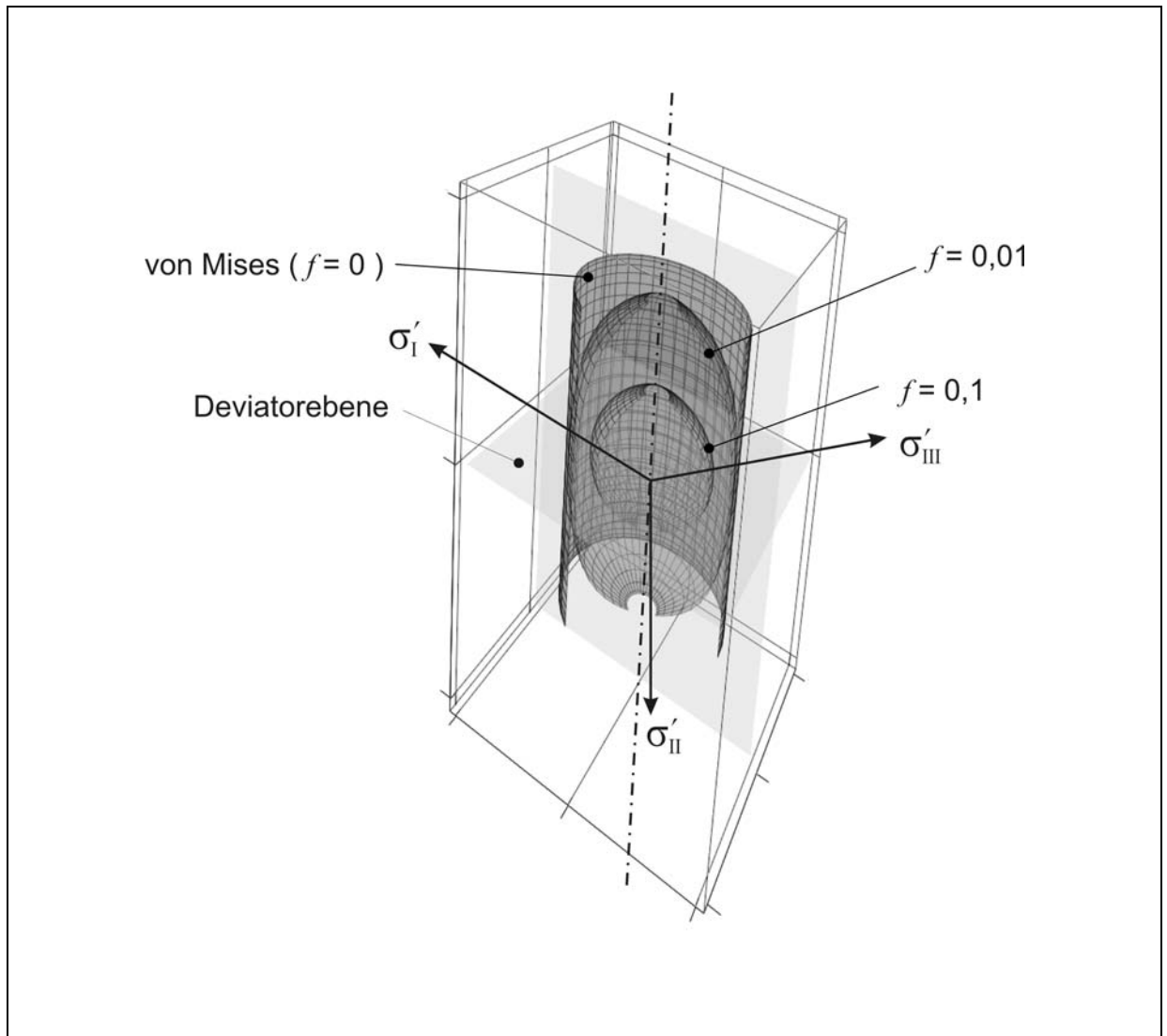


Bild 4.3: Fließfläche des Gurson-Modells im Hauptspannungsraum

Werkstoffverhaltens wird ein repräsentatives Volumenelement (RVE) herangezogen. Hierbei wird ein idealisierter mikroskopischer Ausschnitt untersucht, der die wesentlichen Eigenschaften des Materials repräsentiert, zugleich aber eine anwendbare mathematische Beschreibung zulässt. Dieses Modell beschreibt somit ein äquivalentes, homogenes Ersatzmedium, das die effektiven Materialeigenschaften auf makroskopischer Ebene wiedergibt.

In der Arbeit von [Gur1977] wird für das plastische Fließen eines elastoplastischen Materials mit eingebettetem kugelförmigen Hohlraum eine Fließbedingung

$$\Phi_G(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0, f) = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{2\sigma_0}\right) - (1-f)^2 = 0 \quad (4-1)$$

mit  $\sigma_v^2 = J_2(\boldsymbol{\sigma})$  hergeleitet. Das Matrixmaterial wird als starr-idealplastisch mit der Fließspannung  $\sigma_0$  angenommen. Der Volumenanteil  $f$  der Hohlräume im Material

bestimmt die druckabhängige Eigenschaft der Fließfläche. Die homogene makroskopische Spannung  $\sigma$  ist die gemittelte Spannung im repräsentativen Volumenelement.

Im Gegensatz zur klassischen Plastizitätstheorie (z. B. von-Mises- oder  $J_2$ -Theorie) geht der hydrostatische Druck

$$\sigma_h = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4-2)$$

in die Fließbedingung ein. In Verbindung mit einer assoziierten Fließregel ist das Material damit nicht länger plastisch inkompressibel. Für den Sonderfall, dass das Material keine Hohlräume enthält,  $f = 0$ , reduziert sich Gl. (4-1) auf die von-Mises-Fließbedingung. Die Darstellung der Fließfläche im Hauptspannungsraum in Bild 4.3 zeigt die von-Mises-Fließfläche als Zylinder und die Gurson-Fließfläche als ovale rotationssymmetrische Form, die mit zunehmendem Hohlraumvolumenanteil kleiner wird.

Experimentelle Untersuchungen (u.a. [Goo1979]) zeigen, dass der zum endgültigen Materialversagen gehörende Hohlraumvolumenanteil erheblich niedriger ist als der Wert von  $f = 1$  im Gurson-Modell. Weiterhin wird die fortgeschrittene Schädigung in der Phase der Lokalisierung der Deformation zwischen benachbarten Hohlräumen und dem nachfolgenden Zusammenwachsen nicht korrekt erfasst. Von Tvergaard und Needleman [Tve1984] wurde eine Erweiterung des Gurson-Modells vorgenommen, bei der in der Fließbedingung die zusätzlichen Konstanten  $q_1$  und  $q_2$  eingeführt wurden [Tve1981,1982b], die eine bessere Anpassung an experimentelle Daten ermöglichen. Somit ergibt sich eine erweiterte Form der Fließbedingung zu:

$$\begin{aligned} \Phi_{GTN}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_m, f) &= \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\sigma_m^2} + 2 q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \sigma_m}\right) - (q_1 f^*)^2 - 1 \\ &= \frac{3 \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'}{2 \sigma_m^2} + 2 q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \sigma_m}\right) - (q_1 f^*)^2 - 1 . \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4-3)$$

Die Ergebnisse von Finite-Elemente-Analysen des Versagens von ungekerbten Zugproben im ebenen Verzerrungszustand und axialsymmetrische Rundzugproben stimmen hierbei mit experimentellen Beobachtungen gut überein. Die von [Tve1981] vorgeschlagenen Werte von  $q_1 = 1.5$  und  $q_2 = 1.0$  wurden von den bei [Per1990] mittels einer analytischen Betrachtung gefundenen Werten  $q_1 = 4/e \approx 1.47$  und  $q_2 = 1.0$  belegt.

In der erweiterten Form der Fließbedingung geht der Hohlraumvolumenanteil  $f$  als effektiver Hohlraumvolumenanteil  $f^*$  in die Fließfläche ein und erfasst die beschleunigte Schädigung durch Wechselwirkung und Zusammenschluss von Hohlräumen [Tve1982a]. Bis zu einem kritischen Wert  $f_c$  sind  $f$  und  $f^*$  identisch, oberhalb von  $f_c$  wird durch einen beschleunigten Zuwachs von  $f^*$  durch den Faktor  $k_f$  eine Verringerung der Fließfläche simuliert:

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{für } f \leq f_c \\ f_c + k_f (f - f_c) & \text{für } f > f_c \end{cases} \quad (4-4)$$

Der Materialparameter  $f_f$  stellt den Wert des Hohlraumvolumenanteils dar, bei dem vollständiges Versagen des Materials, also ein makroskopischer Riss, auftritt. Daraus bestimmt sich der Faktor  $k_f$ :

$$k_f = \frac{(f_u^* - f_c)}{(f_f - f_c)} \quad (4-5)$$

Aus Gl.(4-5) wird deutlich, dass die Funktion  $f^*$  den Wert  $f_u^*$  erreicht. Für  $f = f_u^*$  kann vom Material keine Spannungen mehr aufgenommen werden, so dass sich aus der Fließbedingung Gl.(4-3) der Wert

$$f_u^* = \frac{1}{q_1} \quad (4-6)$$

ergibt. Im Rahmen der numerischen Auswertung kann die sich so auf einen Punkt verkleinernde Fließfläche auf erhebliche numerische Schwierigkeiten führen, so dass häufig ein kleinerer Wert für  $f_u^*$  gewählt wird. Erreicht der Hohlraumvolumenanteil den finalen Wert  $f = f_f$ , werden die Spannungen des betrachteten Punktes auf null gesetzt (s.Bild 4.4).

In [Chu1980] wurde eine erweiterte Evolutionsgleichung für den Hohlraumvolumenanteil vorgeschlagen, die sich aus dem Wachstum vorhandener Hohlräume und der Nukleation neuer Hohlräume, beschrieben durch die Funktion  $A$ , zusammensetzt. Die Evolutionsgleichung für den Hohlraumvolumenanteil  $f$  lautet dann:

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{Wachstum}} + \dot{f}_{\text{Nukleation}} = (1-f) \text{tr}(\dot{\epsilon}_p) + A(\epsilon_m) \dot{\epsilon}_m \quad (4-7)$$

Die Entstehung neuer Hohlräume, die durch Dekohäsion und Bruch von Partikeln stattfindet, wird durch eine Gauß-Verteilung (s. Bild 4.5) über der plastischen Vergleichsdehnung des Matrixmaterials  $\epsilon_m$  statistisch erfasst:

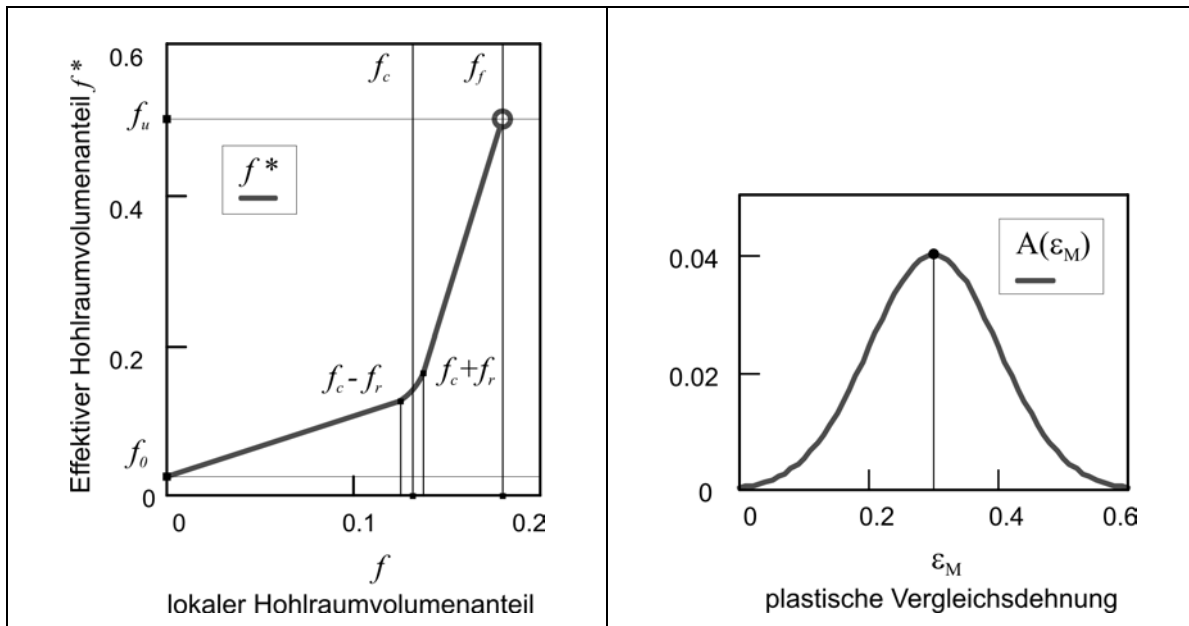


Bild 4.4: Effektiver Hohlraumvolumenanteil

Bild 4.5: Einfluss der plastischen Vergleichsdehnung des Matrixmaterials

$$A(\varepsilon_m) = \frac{f_n}{\sqrt{2\pi s_n^2}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)^2}{2s_n^2}\right). \quad (4-8)$$

Der gesamte Volumenanteil von hohlraumbildenden Partikeln ist  $f_n$ . Der Parameter  $\varepsilon_n$  stellt den Mittelwert der plastischen Vergleichsdehnung dar, bei dem Partikel zur Hohlraumbildung beitragen mit der Standardabweichung  $s_n$ .

Die Berücksichtigung isotroper Verfestigung im Matrixmaterial erfolgt im porösen Material über die Äquivalenz der plastischen Dissipationsleistung von homogenem Ersatzmedium und Matrixmaterial, vgl. Gl. (2.56):

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = (1-f) \sigma_m \dot{\varepsilon}_m. \quad (4-9)$$

### 4.3 Entfestigung und Lokalisierung

Durch die Beschreibung des Schädigungsprozesses ist mit voranschreitender Belastung ein zunehmender Verlust der Materialsteifigkeit möglich, d.h. die Spannungen nehmen mit wachsenden Dehnungen nach Erreichen eines Maximalwertes wieder ab. Dieses Verhalten bezeichnet man als „materielle Dehnungsentfestigung“ oder einfach als „Entfestigung“.

Die Modellierung von Entfestigungsvorgängen stellt sich im Rahmen der Implementierung von Finite Elemente Programmen in zweierlei Hinsicht als problematisch dar:

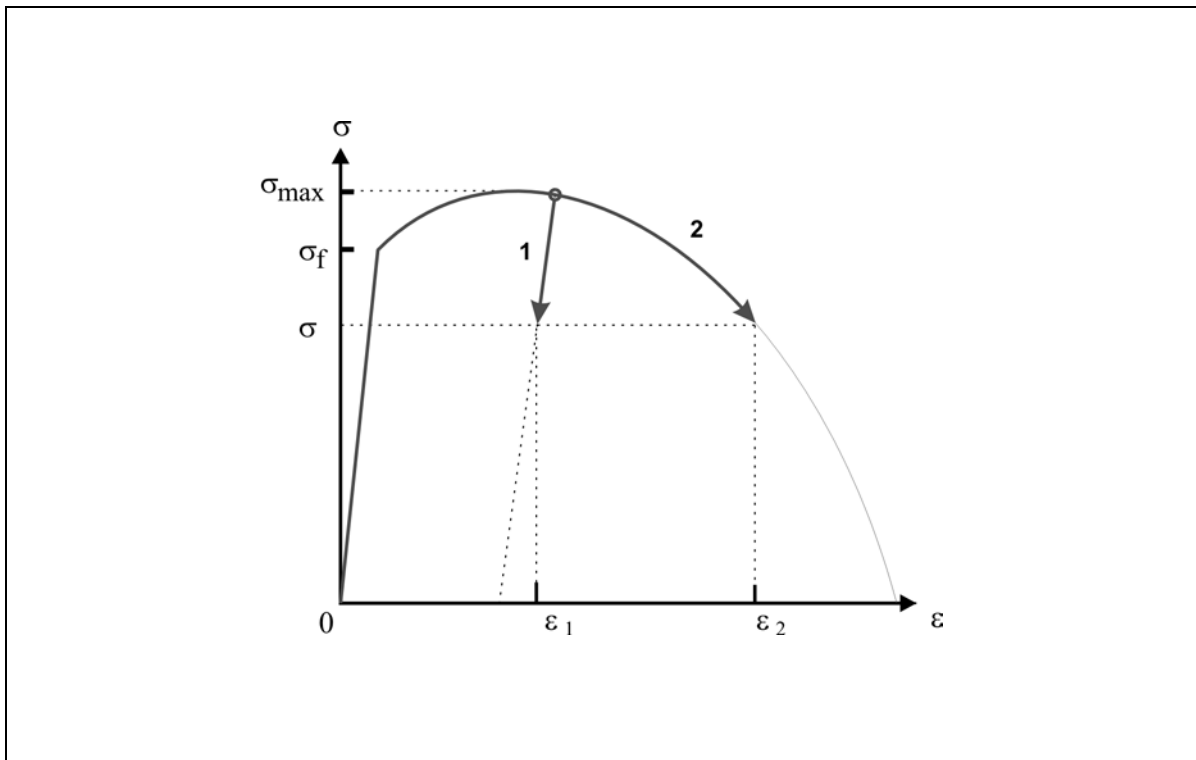


Bild 4.6: Verzweigungsproblem bei entfestigendem Materialverhalten

Mit dem Auftreten von Entfestigungsvorgängen kann es nach dem Überschreiten des Maximalpunktes der Kraft-Verschiebungs-Kurve einer Struktur bzw. des Spannungs-Dehnungs-Verlaufes eines materiellen Punktes der Struktur zu Verzweigungsproblemen kommen, da einem Spannungszustand  $\sigma$  nunmehr zwei mögliche Dehnungszustände  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  zugeordnet werden können (s. Bild 4.6). Durch die Diskretisierung einer betrachteten Struktur in endliche Volumina (Finite Elemente) kann es so zu diskretisierungsabhängigen Lösungen kommen.

Eine anschauliche Interpretation des Verzweigungsproblems ergibt sich aus der Betrachtung eines einachsig auf Zug beanspruchten Stabes. Am Beginn steht ein Bereich linear-elastischen Materialverhaltens

$$\sigma(\epsilon) = E\epsilon, \quad (4-10)$$

bis zum Erreichen einer Maximalspannung  $\sigma_t$  und der entsprechenden Dehnung

$$\epsilon_0 = \sigma_t / E. \quad (4-11)$$

Darauf folgt ein Bereich mit linearem Entfestigungsverhalten

$$\sigma(\epsilon) = \sigma_t + h(\epsilon - \epsilon_0), \quad (4-12)$$

woraus sich der Entfestigungsmodulus zu

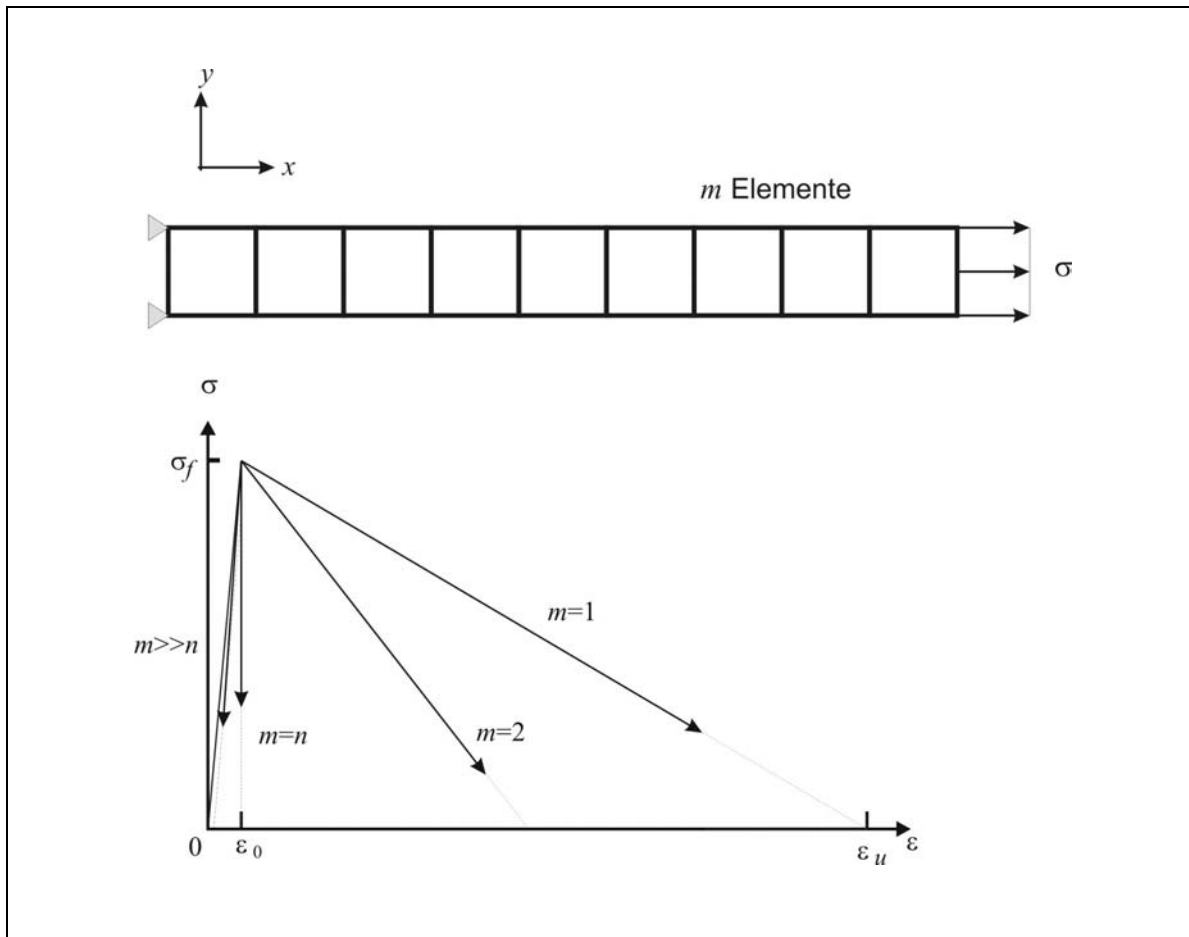


Bild 4.7: Verzweigungsproblem durch Strukturdiskretisierung

$$h = -\frac{\sigma_t}{\epsilon_u - \epsilon_0}. \quad (4-13)$$

ergibt, womit bei einer Dehnung  $\epsilon_u$  die Tragfähigkeit des Materials erschöpft ist, d.h.

$$\sigma(\epsilon_0) = 0. \quad (4-14)$$

Nach Erreichen des Lastmaximums können dann einem Spannungszustand verschiedene Dehnungszustände zugeordnet werden. Für die Diskretisierung des Problems in  $m$  Elemente ergibt sich, dass bei einem Element mit einer geringfügig niedrigeren Maximalspannung  $\sigma_t$  in diesem Element Schädigung/ Entfestigung auftritt, wobei die anderen Elemente während der weiteren Belastungsgeschichte elastisch entlasten.

Nach dem Erreichen des Lastmaximums ergibt sich für die gemittelte Dehnung

$$\bar{\epsilon}(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + \frac{E - h}{Eh} \frac{\sigma - \sigma_t}{m}, \quad (4-15)$$

was nach Einsetzen des Entfestigungsmodulus und der Einführung der Abkürzung  $n = \varepsilon_u / \varepsilon_0$  auf die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}(\sigma) = \frac{\sigma}{E} + \frac{n(\sigma_t - \sigma)}{mE} \quad (4-16)$$

führt. Für verschiedene  $n:m$ -Verhältnisse (also verschiedene Diskretisierungen) ergibt sich so ein uneindeutiges Entlastungsverhalten, was für den Fall  $m \rightarrow \infty$  auf eine elastische Entlastungskurve führt, da hier das Volumen des entfestigenden Bereichs unendlich klein wird (s. Bild 4.7). Dieses Verhalten ist natürlich auch in komplexeren Strukturen für andere Belastungsmodi und Entfestigungsmechanismen zu beobachten.

Die zweite hier betrachtete Problematik in Zusammenhang mit der Simulation von entfestigendem Materialverhalten ergibt sich dadurch, dass es durch die Beschreibung des Schädigungsvorgangs zu einem Tragfähigkeitsverlust des Materials kommen kann. Dieser Verlust bedingt, dass sich mit dem Voranschreiten der Entfestigung der Charakter des Anfangsrandwertproblems ändert und die Elliptizität des Systems nicht mehr sichergestellt werden kann. Für das nun irreguläre Differentialgleichungssystem existiert somit keine eindeutige Lösung mehr. Der so bezeichnete Elliptizitätsverlust des Gleichungssystems führt dazu, dass das ursprünglich sachgemäß gestellte Anfangsrandwertproblem nun schlecht gestellt ist. Ein Anfangsrandwertproblem ist dann sachgemäß gestellt, wenn eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Lösungen dazu existiert, die von den Anfangsbedingungen stetig abhängen.

Im Rahmen einer phänomenologischen Interpretation entsteht so das Problem, dass für einen Spannungszustand zwei mögliche oder beliebige Lösungen existieren können. Durch die uneindeutige Lösung des Differentialgleichungssystem kommt es bei verschiedenen Strukturdiskretisierungen so zu netzabhängigen Lösungen des Problems. Hierbei stellen sich diese netzabhängigen Ergebnisse durch lokale Dehnungsentfestigung (z.B. an der Rissspitze) ein, obgleich das gesamte System durch ein verfestigendes Verhalten der Gesamtstruktur noch stabil ist.

Die Netzabhängigkeit folgt dabei der Tendenz, dass das Volumen der Lokalisationszone mit zunehmender Netzverfeinerung abnimmt. Die Schädigung lokalisiert schließlich in einer Zone mit verschwindendem Volumen. Der irreversible, also dissipative Schädigungsprozess, findet ausschließlich in der Lokalisierungszone statt, so dass der Anteil der totalen dissipierten Arbeit zu null werden muss, was auf

die physikalisch sinnlose Aussage führt, dass der Schädigungsprozess dissipationsfrei verlaufen ist.

Für die Beurteilung des möglichen Lokalisierungsverhaltens einer FE-Simulation ist es somit erforderlich, Kriterien zu entwickeln und zur Anwendung zu bringen, die den Zeitpunkt des Elliptizitätsverlustes des gestellten Anfangsrandwertproblems im Verlaufe der Belastungsgeschichte für beliebige Bereiche einer Struktur vorhersagen können. Diese Aufgabe wird ausführlich und gesondert für die in den nachfolgenden Kapiteln vorgestellten Stoffgesetze in Kapitel 7 behandelt.

#### 4.4 Tafeln

**Tafel 4.1:** Gleichungen des lokalen Gurson-Modell

Fließbedingung:

$$\Phi = \frac{J_2(\boldsymbol{\sigma})}{\sigma_m^2} + 2 q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})}{2 \sigma_m}\right) - (q_1 f^*)^2 - 1 = 0$$

Beschleunigtes Hohlraumwachstum:

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{für } f \leq f_c \\ f_c + k_f (f - f_c) & \text{für } f > f_c \end{cases} \text{ mit } k_f = \frac{(f_u^* - f_c)}{(f_f - f_c)}$$

Wachstum und Entstehung von Hohlräumen:

$$\dot{f} = \dot{f}_{\text{Wachstum}} + \dot{f}_{\text{Nukleation}} = (1-f) \text{tr}(\mathbf{D}_p) + A(\varepsilon_m) \dot{\varepsilon}_m$$

Nukleation von Hohlräumen:

$$A(\varepsilon_m) = \frac{f_n}{\sqrt{2\pi} s_n^2} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)^2}{2s_n^2}\right)$$

Äquivalenz der plastischen Dissipationsleistung von homogenem Ersatzmedium und Matrixmaterial

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = (1-f) \sigma_m \dot{\varepsilon}_m$$

Schädigungsparameter:

$f_0$  Hohlraumvolumenanteil des Materials im Ausgangszustand

$f_c$  Kritischer Hohlraumvolumenanteil

$f_f$  Endgültiger Hohlraumvolumenanteil

$f_n$  Volumenanteil hohlraumbildender Partikel

$\varepsilon_n$  Dehnungsmittelwert der Gauß-Verteilung der Nukleation

$s_n$  Standardabweichung der Gauß-Verteilung der Nukleation



5	Nicht-lokale Schädigungsmodelle .....	5-1
5.1	Motivation .....	5-1
5.2	Nicht-lokale Integralansätze .....	5-3
5.3	Gradientenabhängige Formulierungen des Gurson-Modells .....	5-5
5.3.1	Diffusionsmodell .....	5-5
5.3.2	Herleitung aus der Integralbeziehung .....	5-9
5.4	Einführen einer neuen Schädigungsfeldgröße .....	5-12
5.5	Ratenabhängige Schädigungsentwicklung .....	5-14
5.6	Schwache Form und P.d.v.V. ....	5-15
5.7	Tafeln .....	5-18

## 5 Nicht-lokale Schädigungsmodelle

In diesem Kapitel werden, ausgehend von dem lokal formulierten Gurson-Modell, nicht-lokale Erweiterungen des Schädigungsmodells vorgestellt.

### 5.1 Motivation

Die Motivation für die Entwicklung und Anwendung nicht-lokaler Schädigungsmodelle ist nicht nur die in Kapitel 1 und 4 bereits erläuterte Netzabhängigkeit der Ergebnisse bei der Anwendung lokaler Stoffgesetze im Rahmen von Diskretisierungsmethoden.

Die Netzabhängigkeit einer FE-Rechnung lässt sich im strengen Sinne aufgrund der Diskretisierung des kontinuumsmechanischen Problems nie vollständig eliminieren und muss so als immanenter Bestandteil des numerischen Näherungsverfahrens bei der Lösungsfindung grundsätzlich berücksichtigt werden. Auch der bereits diskutierte Eindeigkeitsverlust der Lösung des zugrundeliegenden Gleichungssystems führt nicht zwingend auf einen Widerspruch bei der Simulation des Materialverhaltens, da nicht ausgeschlossen werden kann, dass beispielsweise mehrere Lösungen für das zugrunde liegende physikalische Problem existieren können. Entscheidend in diesem Zusammenhang ist vielmehr, ob die Wahl unterschiedlicher sich aber geometrisch und physikalisch entsprechender Rand- und Lastbedingungen die Ergebnisse der FE-Rechnung beeinflussen können.

Eine wesentliche Bedeutung kommt der Funktion nicht-lokaler Stoffgesetze als Lokalisierungsbegrenzer gegenüber der Anwendung lokaler Modelle im Zusammenhang mit den bereits erläuterten Lokalisierungsphänomenen zu. Wie bereits ausgeführt, ist Schädigung ein irreversibler Prozess und ist somit dissipativ. Die Dissipation infolge von Schädigung findet bei der Anwendung lokaler Modelle ausschließlich in der, durch die Diskretisierung vorgegebenen, Lokalisierungszone statt. Mit zunehmender Netzverfeinerung wird das Volumen der Lokalisierungszone kontinuierlich kleiner, so dass der Schädigungsprozess schließlich in einem verschwindenden Volumen ohne Dissipation ablaufen müsste, was auf eine physikalisch sinnlose Aussage führt. Entscheidend ist somit, dass durch die Formulierung schädigungsmechanischer Modelle auf Grundlage einer nicht-lokalen Theorie bzw. einer Gradiententheorie die Regularität der gestellten Anfangsrandwertprobleme gewährleistet werden kann. Nicht zuletzt wird erst mit nicht-lokalen Modellen durch das Einführen einer charakteristischen Länge auch der Beobachtung Rechnung getragen, dass Schädigungsprozesse in einer Struktur sich auf Gebiete charakteristischer Größenordnung begrenzen, die im Rahmen konventioneller FE-Analysen nur netzabhängig abgebildet werden können.

Die anwendungsorientierte Implementierung nicht-lokaler Stoffgesetze in eine FE-Umgebung erfordert gewisse Grundvoraussetzungen, die neben der werkstoffmechanischen und physikalischen Sinnhaftigkeit gegeben sein müssen:

Zunächst ist die physikalische Grundmotivation, die eine mathematisch korrekte Umsetzung in einer FE-Umgebung erlaubt, zu erwähnen: Es ist erforderlich für die konstitutiven Gleichungen des Stoffgesetzes Bilanzgleichungen zu entwickeln, die in ihrer linearisierten Form in eine geeignete Elementformulierung mit geeigneten

Freiheitsgraden umgesetzt werden können. Die so entstehende Gleichgewichtsforderung auf Strukturebene muss in den Rahmen einer konventionellen FE-Programmstruktur eingebettet werden können.

Die zu entwickelnden Algorithmen müssen numerisch robust und effektiv unter Berücksichtigung der aufzuwendenden CPU-Zeit sein.

Weiter ist eine Nähe zu bestehenden lokalen Modellformulierungen erstrebenswert, um das Modell phänomenologisch erklärbar zu halten und ggf. auf Erkenntnisse einer zugrundeliegenden lokalen Theorie zurückgreifen zu können, insbesondere sei hier das Problem der Materialparameterbestimmung erwähnt.

Dieser Zielsetzung folgend werden in diesem Kapitel nicht-lokale Erweiterungen des in Kapitel 4 diskutierten lokalen Materialmodells von Gurson vorgestellt, wobei die phänomenologische Beschreibung des Vorgangs der duktilen Schädigung beibehalten und um nicht-lokale Formulierungen ergänzt wird.

## 5.2 Nicht-lokale Integralansätze

Eine Möglichkeit der nicht-lokalen Schädigungsmodellierung mit dem Gurson-Modell basiert auf einem Integral-Ansatz für die Evolutionsgleichungen des Hohlraumvolumenanteils, wie er von Leblond [Leb1994] sowie Tveergard und Needleman [Tve1995] in einem elastisch-viskoplastischen duktilen porösen Material eingeführt wurde. Die Größen, die die Schädigungsentwicklung direkt beschreiben, werden über ein vorgegebenes Gebiet gemittelt. Die Mittelung bezieht sich bei Verwendung des Gurson-Modells auf die, durch Porenbildung und Porenwachstum bedingte Entwicklung des Hohlraumvolumenanteils  $f$ . Der nicht-lokale Ansatz wird nun in der Änderungsgleichung für das Hohlraumwachstum eingeführt. Die Evolutionsgleichung der inneren Variablen  $f$  besteht in der lokalen Form aus den Anteilen zum Entstehen neuer Hohlräume und zum Wachsen vorhandener Hohlräume :

$$\dot{f}_{\text{lokal}} = \dot{f}_{\text{Wachstum}} + \dot{f}_{\text{Nukleation}} = (1-f) \operatorname{tr}(\mathbf{D}_p) + A(\varepsilon_m) \dot{\varepsilon}_m . \quad (5-1)$$

Die Änderung des Hohlraumvolumenanteils in einem materiellen Punkt des Materials an der Stelle  $\mathbf{x}$  des betrachteten Volumens wird über die lokale Änderungen der Schädigungsverteilung der Umgebung des betrachteten Punktes ermittelt:

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{W(\mathbf{x})} \int_V \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\hat{V} . \quad (5-2)$$

Dabei ist  $V$  das Volumen des betrachteten Körpers in der Referenzkonfiguration und  $\mathbf{y}$  ein räumlicher Punkt in der Umgebung des Volumens  $dV$ . Mit der Gewichtungsfunktion

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( 1 + \left( \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{l_c} \right)^p \right)^{-q} \quad (5-3)$$

und deren Volumenintegral

$$W(\mathbf{x}) = \int_V w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\hat{V} \quad (5-4)$$

über den betrachteten Körper wird der Einfluss der benachbarten Gauß-Punkte in der FE-Struktur beschrieben. Die Parameter  $p$  und  $q$  bestimmen die Form der Gewichtungsfunktion und finden sich u.a. in [Kli1998b] mit Werten  $p = 8$  und  $q = 2$ . Für das Maß  $l_c = 0$  geht diese Formulierung in das lokale Modell über. Die Form der Gewichtungsfunktion ist dabei so gewählt, dass mit einer Begrenzungslänge  $z$  für  $w > 0$  für alle  $z < l$  gilt und die Gewichtung ungefähr zu null  $w \approx 0$  für  $z > l$  wird. In FE-Rechnungen wird für  $z > l_c$  mit  $l_c = 1,5 \cdot l$  der Wert der Gewichtungsfunktion direkt auf Null gesetzt, so dass die charakteristische Länge  $l_c$  die Größe des Gebietes angibt, in dem die Schädigungsentwicklung gemittelt wird. Somit wird der nicht-lokale Ansatz für das Gurson-Modell mit drei Parametern  $p$ ,  $q$  und  $l_c$  beschrieben.

Bei der Implementierung eines nicht-lokalen Integralansatzes ergibt sich die Schwierigkeit, dass zur Berechnung der nicht-lokalen Wachstumsrate des Hohlraumvolumenanteils die lokale Änderung der benachbarten Punkte im Einflussgebiet  $l_c$  bekannt sein muss. Da im Rahmen der Implementierung in ein konventionelles FE-Programm unter ausschließlicher Berücksichtigung von Verschiebungsfreiheitsgraden die lokale Änderung der Hohlraumrate für die benachbarten Gauß-Punkte zu einem Zeitpunkt nicht bekannt ist, wird auf die Werte des letzten Iterationsschrittes bzw. des letzten Gleichgewichtszustandes zurückgegriffen, d.h. die direkte Kopplung von Spannungs- und Schädigungsintegration kann nicht ausgeführt werden, was sehr kleine Schrittweiten bei der Gleichgewichtsiteration erfordert, um mögliche Fehler klein zu halten.

Weiterhin erfordert die exakte Bestimmung der Schädigungsverteilung in der Umgebung eines Punktes genaue Topologiekenntnisse von der Elementierung der zu berechnenden Struktur. So kann zwar z.B. die Symmetrie von Proben oder Bauteilen leicht berücksichtigt werden, jedoch sind freie Ränder, Löcher, Kerben,

Ecken etc. zu berücksichtigen (wie z.B. der Anriss an C(T)- oder M(T)-Proben). Weiterhin müssen ausgefallene Elemente aus der integralen Betrachtung eines Gebietes herausgenommen werden, genauso wie entstandene Rissoberflächen die Kontinuität des Materials aufheben und auch dort das Einflussgebiet eingeschränkt wird.

Beispiele für derartige Implementierungen finden sich u.a. in [Baz1988], [Tve1995] und [Kli1998b].

### 5.3 Gradientenabhängige Formulierungen des Gurson-Modells

Grundlegend gemeinsam ist den hier zur Klasse der gradientenabhängigen Formulierungen zusammengefassten Erweiterungen des Gurson-Modells die Erweiterung bzw. Modifizierung der Entwicklungsgleichung des Hohlraumvolumenanteils um einen Term, der den räumlichen Gradienten des Schädigungsfeldes berücksichtigt. Die Einführung dieser Gradiententerme wird über die Vorstellung motiviert, dass eine Änderung des Hohlraumvolumenanteils neben Wachstum und Entstehung von Hohlräumen auch durch Wechselwirkungen benachbarter Bereiche und die damit verbundene Änderung der Konzentration von Hohlräumen gesteuert wird.

#### 5.3.1 Diffusionsmodell

In der einfachsten Form wird bei einer gradientenabhängigen Evolutionsgleichung des Hohlraumvolumenanteils die Schädigungsentwicklung aus dem klassischen Modell übernommen, d.h. die Änderung des Hohlraumvolumenanteils erfolgt durch das Wachstum und die Entstehung von Hohlräumen:

$$\int_V \dot{f} dV = \int_V (\dot{f}_{\text{Wachstum}} + \dot{f}_{\text{Nukleation}}) dV. \quad (5-5)$$

Als zusätzlicher Effekt kann eine mögliche räumliche Änderung der Konzentration von Hohlräumen im betrachteten Volumen berücksichtigt werden. Bezeichnet man die Konzentrationsänderung als Fluss  $\mathbf{q}_f$  des Hohlraumvolumenanteils, so ergibt sich die Evolutionsgleichung für  $f$  zu:

$$\int_V \dot{f} dV = \int_V (\dot{f}_{\text{Wachstum}} + \dot{f}_{\text{Nukleation}}) dV - \int_{\partial V} \mathbf{q}_f \cdot \mathbf{n} dS, \quad (5-6)$$

wobei  $\mathbf{n}$  den nach außen gerichteten Normalenvektor auf der Oberfläche des betrachteten Volumens  $V$  darstellt. Bei Anwendung des Green-Satzes und der Annahme beliebiger Volumina ergibt sich die Gleichung

$$\dot{f} = \dot{f}_{Wachstum} + \dot{f}_{Nukleation} - \nabla \mathbf{q}_f, \quad (5-7)$$

für die Änderung des Hohlraumvolumenanteils in einem materiellen Punkt.

Die Beschreibung des Flusses  $\mathbf{q}_f$  erfolgt über das Aufstellen von Entwicklungsgleichungen für verschiedene Mechanismen, die als ursächlich verantwortlich für die Konzentrationsänderung des Hohlraumvolumenanteils angesehen werden. Für den auch als "void flux" bezeichneten gradientenabhängigen Änderungsterm werden von [Ram1998b] zwei Mechanismen vorgeschlagen:

Zum einen die Diffusion von Hohlräumen

$$\mathbf{q}_f = -c \nabla f, \quad (5-8)$$

wobei angenommen wird, dass der Fluss proportional zum Gradienten des Hohlraumvolumenanteils ist.  $c$  ist ein konstanter Materialparameter ( $c > 0$ ) mit der Dimension  $\text{Länge}^2 \text{Zeit}^{-1}$ . Das Vorzeichen wird so gewählt, dass die Diffusionswirkung zu einer Verringerung des Hohlraumvolumenanteils führt, also eine Attraktion von Bereichen höherer Hohlraumkonzentration auf solche mit niedrigerer Hohlraumkonzentration erfolgt.

Der Gradient  $\nabla$  des skalaren Schädigungsfeldes  $f$  ordnet jedem Punkt  $\mathbf{r}$  des Feldes  $f(\mathbf{r})$  einen Vektor

$$\mathbf{v} = \nabla f = \text{grad } f \quad (5-9)$$

zu, der in Richtung des stärksten Anstiegs von  $d$  zeigt und den Betrag der Ableitung des Feldes in diese Richtung besitzt. Für die „Diffusion“, d.h. den Austausch der Schädigungskonzentration gilt

$$\nabla \mathbf{q}_f = \nabla \cdot (-c \nabla f) = -c \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f = -c \Delta f, \quad (5-10)$$

mit  $\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  als dem Laplace-Operator und  $c$  als Konstante, die die Stärke dieses Einflusses beschreibt. Für die Änderungsgleichung des Hohlraumvolumenanteils ergibt sich so mit Gl.(5-1) der folgende Ausdruck:

$$\dot{f} = \dot{f}_{Wachstum} + \dot{f}_{Nukleation} - \nabla \mathbf{q}_f = (1-f) \text{tr}(\mathbf{D}_p) + A(\epsilon_m) \dot{\epsilon}_m + c \nabla^2 f. \quad (5-11)$$

Numerische Umsetzungen dieser nicht-lokalen Entwicklungsgleichung des Hohlraumvolumenanteils finden sich u.a. in [Ram1998b] und [Reu2000].

Als alternativer Mechanismus gegenüber Gl.(5-8) wird in [Ram1998b] vorgeschlagen, dass der Fluss  $\mathbf{q}_f$  durch den Ausdruck

$$\mathbf{q}_f = \lambda \frac{l^2}{\sigma_r} \nabla f \quad (5-12)$$

beschrieben werden kann, wobei  $l$  eine charakteristische Länge und  $\sigma_r$  eine Bezugsspannung darstellt. Dieser Ansatz geht davon aus, dass der Fluss  $\mathbf{q}_f$  proportional zur Entwicklung der Plastizität ist. Der plastische Multiplikator  $\lambda$  beschreibt die Größenordnung der Änderung der plastischen Verzerrung. Somit ist der Gradiententerm nur bei einer Entwicklung der Plastizität ( $\lambda > 0$ ) in der Evolutionsgleichung wirksam. Die zugrunde liegende Vorstellung ist hierbei, dass Volumina mit höherem Hohlraumvolumenanteil solche Volumina mit niedrigeren Hohlraumvolumenanteilen beeinflussen und es so zu einem beschleunigten, konzentrierten Hohlraumwachstum kommt, das durch die Vereinigung benachbarter Hohlräumen verursacht wird. Die Richtung des Flusses ist hier entgegengesetzt zum beschriebenen Diffusionsvorgang aus Gl.(5-8) und es ergibt sich die Änderung des Hohlraumvolumenanteils zu

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \dot{f}_{\text{Wachstum}} + \dot{f}_{\text{Nukleation}} - \nabla \mathbf{q}_f \\ &= (1-f) \operatorname{tr}(\mathbf{D}_p) + A(\varepsilon_m) \dot{\varepsilon}_m - \frac{l^2}{\sigma_0} \nabla \cdot (\lambda \nabla f) \\ &= (1-f) \operatorname{tr}(\mathbf{D}_p) + A(\varepsilon_m) \dot{\varepsilon}_m - \frac{l^2}{\sigma_0} (\lambda \nabla^2 f + \nabla \lambda \cdot \nabla f) . \end{aligned} \quad (5-13)$$

Die beiden Mechanismen aus Gl.(5-11) und Gl.(5-13) besitzen bezüglich ihrer Auswirkung auf die Beschreibung der räumlichen Schädigungsentwicklung sehr unterschiedliche Eigenschaften. Während der Diffusionsterm in Gl.(5-11) zu einem Ausgleich des Schädigungsfeldes und somit zu einem „gedämpften“ Wachstum führt, hat der Gradiententerm in Gl.(5-13) einen wachstumsbeschleunigenden Einfluss auf die Schädigungsentwicklung. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass in Gl.(5-13) der nicht-lokale Schädigungsterm nur bei plastischen Prozessen aktiv wird, Gl.(5-11) hingegen darauf führt, dass eine ratenabhängige Formulierung durch den Gradiententerm besteht, da eine Änderung des Hohlraumvolumenanteils durch den Gradiententerm auch ohne äußere Lasteinwirkung entstehen kann. Weiter ist die,

durch den Gradiententerm bedingte, Änderung unabhängig von der Größe der Schädigungsproduktion.

Bei der Formulierung nach Gl.(5-13) geht der plastische Multiplikator  $\lambda$  multiplikativ in die Formulierung des Gradiententerms mit ein, was auf die ratenunabhängige Formulierung der Schädigungsentwicklung führt, da der Gradiententerm nur bei einer Veränderung des Plastizität aktiv wird.

Durch die Berücksichtigung des Gradienten des Hohlraumvolumenanteils in der Evolutionsgleichung der Schädigung Gl.(5-11) und Gl.(5-13) wird die Definition zusätzlicher Randbedingungen erforderlich.

Am elastisch-plastischen Grenzübergang im Volumen ist der Wert von  $f$  als anfänglicher Hohlraumvolumenanteil  $f_0$  definiert, bzw. bei materiellen Punkten, die vormals plastifiziert waren, als der Wert des Hohlraumvolumenanteils bei der letzten Plastifizierung dieses Punktes. Da ein Zufluss bzw. Abfluss von Schädigung aus der

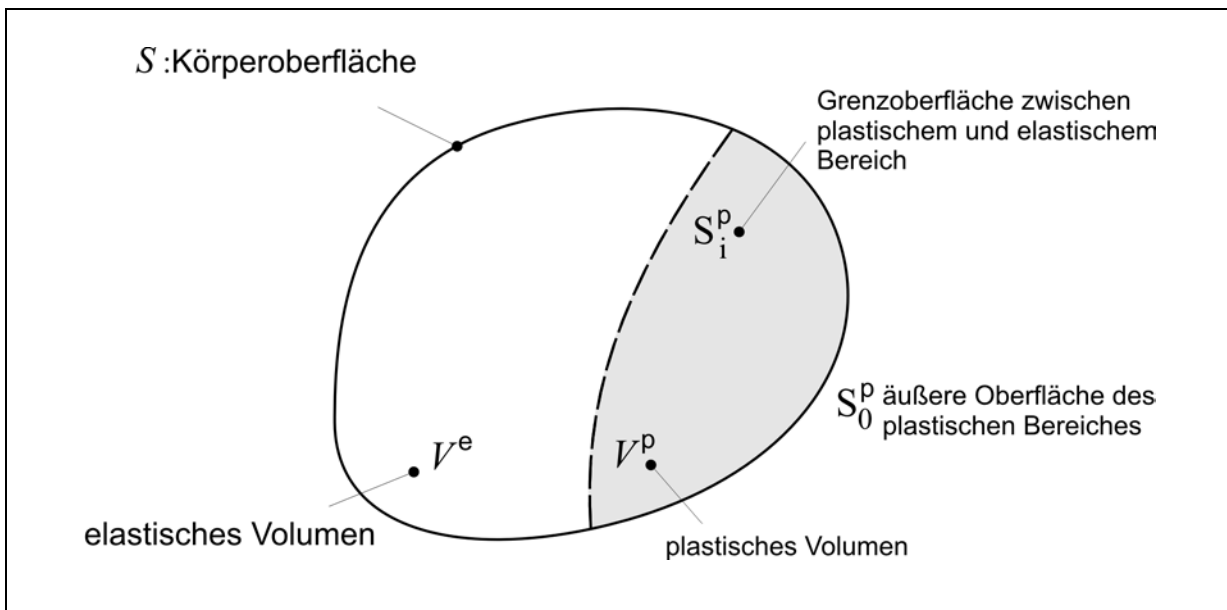


Bild 5.1: Elastisch-plastischer Grenzübergang

Oberfläche des betrachteten Volumens nicht möglich sein darf, gilt für die plastifizierten freien Ränder des Volumens die Randbedingung

$$\nabla f \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5-14)$$

bzw.

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ auf } S_0^p \text{ und } f = f_0 \text{ auf } S_i^p, \quad (5-15)$$

mit  $S_0^p$  als der äußeren Oberfläche des plastischen Bereichs des Volumens und  $S_i^p$  als der aktuellen Grenzoberfläche eines Belastungsschrittes  $i$  zwischen elastischen und plastischen Bereichen des Volumens (s. Bild 5.1).

Die in [Ram1998b] formulierte Randbedingung für  $f$  am plastisch-elastischen Übergang  $f = f_0$  aus Gl.(5-15) stellt eine erforderliche Konsequenz aus der strengen Unterteilung in elastische und plastische Bereiche dar und folgt dem Gedanken, dass duktile Schädigung nur bei plastischen Prozessen auftreten darf, ist aber aus physikalischer Sicht nicht zwingend erforderlich, da eine „Beeinflussung“ der Schädigung in einem elastischen Gebiet aufgrund angrenzender plastischer Bereiche plausibel erscheint und dem Gedanken eines nicht-lokalen Modells eher Rechnung trägt, da nicht-lokale Effekte auch bei elastischem Materialverhalten wirken können<sup>1</sup>.

Im Rahmen der numerischen Implementierung in ein FE-Programm ist weiterhin sicherzustellen, dass auf  $S_i^p$  der plastische Multiplikator  $\lambda$  gemäß der Forderung eines elastisch-plastischen Übergangs zu null wird. Als Konsequenz ergibt sich die Notwendigkeit,  $\lambda$  als Freiheitsgrad in das zugrundeliegende diskretisierte Variationsprinzip einzuführen. Somit können die in Kapitel 3 beschriebenen Kuhn-Tucker-Bedingungen nicht mehr über die lokale Integration der Materialgleichungen auf Gauß-Punkt-Ebene erfüllt werden, sondern müssen als Randbedingung in den Knoten, also als Randbedingung für den Freiheitsgrad  $\lambda$ , erfüllt werden. Dadurch ist die Gleichgewichtsiteration der FE-Rechnung auf Strukturebene um die Berücksichtigung der Kuhn-Tucker-Bedingung zu erweitern [Ram1998a], was nur mit erheblichem numerischen Aufwand zu bewerkstelligen ist und die Implementierung in konventionelle FE-Programme erschwert bzw. nicht ermöglicht.

### 5.3.2 Herleitung aus der Integralbeziehung

Eine weitere Modifikation der lokalen Entwicklungsgleichung des Hohlraumvolumenanteils in Form eines Gradientenansatzes ergibt sich aus der, im Abschnitt 5.2. vorgestellten integralen Betrachtung der Entwicklungsgleichung

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{W(\mathbf{x})} \int_V \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\hat{V} . \quad (5-16)$$

---

<sup>1</sup> Als Anmerkung sei hier darauf verwiesen, dass auch bei der Implementierung eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes die strenge Unterteilung in rein elastische und plastische Volumina nur auf Gauß-Punkt-Ebene eingehalten werden kann. Da der Gesamtbeitrag eines Elements aus den Einzelsteifigkeiten der repräsentativen Volumina der Gauß-Punkte ermittelt wurde, sind solche Elemente die elastische und plastische Gauß-Punkte repräsentieren im Sinne ihres Beitrages zum Strukturverhalten in einem gemischten Zustand.

Die Taylorentwicklung des Terms  $\dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}+\mathbf{s})$  um den Punkt  $\mathbf{s}=0$  führt auf die Beziehung:

$$\dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}+\mathbf{s}) = \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + (\mathbf{s} \cdot \nabla) \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{s} \cdot \nabla)^2 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{1}{3!} (\mathbf{s} \cdot \nabla)^3 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) \dots \quad (5-17)$$

Das Einsetzen dieser Beziehungen in die integrale Bilanz der lokalen Schädigungsentwicklung über das Volumen  $V$  führt nach analytischer Integration und unter Vernachlässigung ungerader Terme auf:

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{l_c^2}{4} \nabla^2 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{l_c^4}{32} \nabla^4 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{l_c^6}{384} \nabla^6 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \dots \quad (5-18)$$

Die Vernachlässigung von Termen vierter und höherer Ordnung führt so auf eine, um einen räumlichen Gradienten der Schädigungsrate, erweiterte Schädigungsevolution:

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{l_c^2}{4} \nabla^2 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}). \quad (5-19)$$

Hierbei ist die nicht-lokale Schädigungsentwicklung in direkter, expliziter Form von der lokalen Schädigungsentwicklung abhängig, da die lokale Änderungsgleichung und der Gradient der lokalen Änderung der Schädigungsentwicklung berücksichtigt werden.

Durch die geforderte Stetigkeit der globalen Schädigungsänderung  $\dot{f}(\mathbf{x})$  wird durch den Gradiententerm eine Nichtlokalität eingeführt. Jedoch ist die Wirkung dieses Effektes auf den unmittelbaren Bereich um  $\mathbf{x}$  eingeschränkt, da Ableitungen von  $\dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{s})$  in unmittelbarer Nähe von  $\mathbf{x}$  keinen Einfluss auf  $\dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x})$  und  $\nabla^2 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x})$  haben und damit auch nicht auf die globale Schädigungsentwicklung  $\dot{f}(\mathbf{x})$ . Im mathematischen Sinn handelt es sich hierbei also um eine lokale Formulierung, oder aber wie u.a. in [Gee1998], im Zusammenhang mit der Gradientenplastizität ausgeführt, um eine „schwache“ nicht-lokale Formulierung.

Weiterhin ergibt sich durch die Berücksichtigung des Terms  $\nabla^2 \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x})$  in Gl.(5-19) eine höhere Differenzierbarkeitsanforderung an die Beschreibung des Verschiebungsfeldes und die Forderung nach der Einführung entsprechender Randbedingungen höherer Ordnung, was auf eine zusätzliche Feldbeschreibung der plastischen Entwicklung führt, da die Beschreibung der räumlichen Änderung der Schädigungsrate eine räumliche Beschreibung der Plastizität erforderlich macht.

Durch eine erneute Anwendung des Laplace-Operators wird, wie in [Gee1998, Feu1998] gezeigt, die Gl.(5-19) nach Umstellung auf eine neue Formulierung der Schädigungsentwicklung überführt:

$$\dot{f}(\mathbf{x}) = \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) + \frac{l_c^2}{4} \nabla^2 \dot{f}(\mathbf{x}). \quad (5-20)$$

Die Schädigungsentwicklung hängt nun in einer impliziten Form von der lokalen Schädigungsentwicklung und dem zweiten Gradienten der Schädigungsentwicklung selbst ab. Als eine mögliche zusätzliche Randbedingung wird hier die Forderung

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \dot{f} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5-21)$$

eingeführt. Die Ableitung von  $\dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{s})$  in unmittelbarer Nähe des betrachteten Punkts hat nun indirekt über den Term  $\nabla^2 \dot{f}(\mathbf{x})$  einen Einfluss auf die Schädigungsentwicklung in  $\mathbf{x}$ , womit der nicht-lokale Charakter der Evolutionsgleichung geprägt wird und eine, wie in [Gee1998] ausgeführt, „starke“ nicht-lokale Beschreibung erzielt wird. Als weiterer Vorteil genügt bei dieser Formulierung die Hinzunahme des globalen Schädigungsfeldes  $f$  als einzige neue Feldvariable mit den entsprechenden Differenzierbarkeitsanforderungen, wie sie sich aus dem zu bildenden Variationsprinzip ergeben.

Eine solche Formulierung führt dazu, dass eine Änderung des Hohlraumvolumenanteils auch ohne plastisches Fließen möglich ist, was zunächst im Widerspruch mit den phänomenologischen Annahmen des Gurson-Modells steht. Aus der Formulierung der gradientenabhängigen Änderungsgleichung

$$\dot{f}(\mathbf{x}) - \frac{l_c^2}{4} \nabla^2 \dot{f}(\mathbf{x}) = \dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) \quad (5-22)$$

wird aber ersichtlich, dass in einem „elastischen“ Punkt wegen  $\dot{f}_{\text{lokal}}(\mathbf{x}) = 0$  eine Änderung des Hohlraumvolumenanteils nur durch den Term  $\nabla^2 \dot{f}(\mathbf{x})$  erfolgen kann, so dass das Phänomen nur in unmittelbarer Nähe zu einer plastischen Zone auftritt [Feu1998]. Ohne das Aufbringen einer äußeren Belastung kann es jedoch nicht zu einer Veränderung des Hohlraumvolumenanteils  $f$  kommen, da der Term  $\nabla^2 \dot{f}(\mathbf{x})$ , der die Änderung von  $f$  beschreibt nicht aktiv ist.

## 5.4 Einführen einer neuen Schädigungsfeldgröße

Ausgangspunkt für die im Rahmen dieser Arbeit formulierten nicht-lokalen Erweiterungen des Gurson-Modells stellt die Zielsetzung dar, die lokale Beschreibung der Schädigungsentwicklung durch die Evolutionsgleichung für den Hohlraumvolumenanteil  $f$  des lokalen Gurson-Modells aus Kapitel 4 unverändert beizubehalten. Durch die Berücksichtigung einer neuen skalaren Schädigungsfeldgröße  $d$  mit der Feldgleichung<sup>2</sup>

$$\dot{d}(\mathbf{x}) = \dot{f}(\mathbf{x}) - c \nabla^2 \dot{d}(\mathbf{x}), \quad (5-23)$$

wird durch den lokalen Quellterm der Schädigung  $\dot{f}(\mathbf{x})$  und den räumlichen Gradiententerm  $\nabla^2 \dot{d}(\mathbf{x})$  des nicht-lokalen Schädigungsfeldes die Schädigungsentwicklung als globale Feldgröße beschrieben (s.a. [Reu2003a]). Der eingeführte Materialparameter  $c$  beschreibt die Stärke der Wirkung des Gradiententerms. Die Feldgröße  $d$  stellt somit den Hohlraumvolumenanteil des Materials unter Berücksichtigung der nicht-lokalen Schädigungsentwicklung dar.

Durch eine gegenüber dem lokalen Gurson-Modell modifizierte Fließbedingung

$$\Phi_d(\mathbf{M}, \sigma_m, d) = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_m^2} + 2 q_1 d^*(d) \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) - (q_1 d^*(d))^2 - 1 = 0 \quad (5-24)$$

wirkt die globale Schädigungsfeldgröße  $d$  auf die lokale Entwicklung des Hohlraumvolumenanteils  $f$  und bestimmt so maßgeblich das Entfestigungsverhaltens des Materials. Mit  $c=0$  wird die Evolutionsgleichung des Modells auf die lokale Formulierung des Gurson-Modells zurückgeführt und  $d$  entwickelt sich analog zur lokalen Entwicklung des Hohlraumvolumenanteils  $f$ <sup>3</sup>.

Die Größe  $d$  beschreibt somit den Schädigungszustand des Materials mit Werten von null für das vollständig ungeschädigte Material bis hin zu einem Maximalwert von 1, für den die Fließfläche gemäß Gl.(5-24) verschwindet.

Durch das Ersetzen des effektiven Hohlraumvolumenanteils  $f^*$  aus Kapitel 4 durch eine analoge Gleichung für den globalen effektiven Hohlraumvolumenanteil  $d^*$  in Gl.(5-24) wird die beschleunigte Schädigung durch Wechselwirkung und

<sup>2</sup>  $d$  ist keine innere Variable im Sinne der kontinuumsmechanischen Beschreibung, wie z.B. die lokale Schädigung  $f$ , sondern eine Feldgröße.

<sup>3</sup> Vor dem Hintergrund der später im Detail erläuterten Diskretisierung einer Struktur im Rahmen der FE-Methode entspricht die Lösung des diskretisierten Gleichgewichtsproblems jedoch nicht mehr exakt der lokalen Implementierung, da hier die in den Knoten gespeicherten Schädigungswerte  $d$  über die (linearen) Formfunktionen des Elements auf die Gauß-Punkte abgebildet werden und die Gleichgewichtsaussagen nur im Mittel über das betrachtete Elementvolumen exakt erfüllt werden.

Zusammenschluss von Hohlräumen nun über das globale Schädigungsfeld beschrieben. Hierbei folgt die modifizierte Schädigungsvariable der Beziehung

$$d^*(d) = \begin{cases} d & \text{für } d \leq d_c \\ d_c + k_d (d - d_c) & \text{für } d > d_c \end{cases}, \quad (5-25)$$

mit den Entsprechungen  $d_c$ ,  $k_d$ , der in Kapitel 4 beschriebenen numerischen Parametern des Gurson-Modells. Der Faktor  $k_d$  berechnet sich in Analogie zu Kapitel 4 aus

$$k_d = \frac{d_u^* - d_c}{f_f - d_c}. \quad (5-26)$$

Aus Gl.(5-26) wird deutlich, dass die Funktion  $d^*$  den Wert  $d_u^*$  erreicht. Für  $d = d_u^*$  kann vom Material keine Spannung mehr aufgenommen werden, so dass sich aus der Gl.(5-24) der Wert

$$d_u^* = \frac{1}{q_1}. \quad (5-27)$$

ergibt. Auch hier ist wieder eine entsprechende Randbedingung für die Feldgröße  $d$  einzuführen, die als „natürliche“ bzw. Neumann-Randbedingung zu

$$\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5-28)$$

gesetzt wird.

Vorteil dieser Modellierung ist, dass die phänomenologische Beschreibung der Schädigung nach Gurson in einem Volumenelement nicht aufgegeben wird und dass es in elastischen Gebieten nicht zu einem Schädigungswachstum (im Sinne von  $f > f_0$ ) kommen kann. Benachbarte plastifizierte Gebiete beeinflussen „ausschließlich“ die Fließfunktion Gl.(5-24) über die neue Feldgröße  $d$  im Sinne einer möglichen Entfestigung des Materials. Somit ergibt sich bzgl. der Parameteranpassung für das Modell die Forderung, dass vornehmlich die Wirksamkeit der effektiven Schädigung  $d$  in der Fließbedingung berücksichtigt werden muss und so die Parameter der lokalen Schädigungsentwicklung nicht zwangsläufig mit angepasst werden müssen.

Diese Erweiterung erfordert ggf. eine Anpassung der Materialparameter der Fließfunktion  $q_1$  und  $q_2$  sowie der Parameter des effektiven Hohlraumvolumenanteils  $d_c$  und  $k_d$ . Die lokale Schädigungsentwicklung im Volumenelement wird somit weiterhin klassisch modelliert, der nicht-lokale Anteil des Schädigungsprozesses wird durch  $d$  beschrieben.

## 5.5 Ratenabhängige Schädigungsentwicklung

Dem zur Herleitung der konstitutiven Gleichungen des hyperelastisch-plastischen Stoffgesetzes aus Kapitel 3 verwendeten Ansatzes folgend, kann das Schädigungsfeld als skalarwertige kontinuumsmechanische Größe aufgefasst werden. Mit Hilfe der Vorgehensweise in [Sve1999] und [Sve2001] lässt sich  $d$  als zusätzlicher innerer Freiheitsgrad betrachten. So kann die Gl.(5-23) aus der dazu gehörenden verallgemeinerten Ginzburg-Landau Beziehung

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\nabla\dot{d}}\right) - \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{d}} = 0 \quad (5-29)$$

hergeleitet werden (siehe auch [Reu2003b]). Hierbei ist

$$\chi = \dot{\psi} + \pi \quad (5-30)$$

das Ratenpotential, das aus der Summe der Rate der Freienenergiedichte  $\dot{\psi}$  und dem Dissipationspotential  $\pi$  besteht. Vernachlässigt man eine mögliche direkte Koppelung zwischen elastischem Materialverhalten und der Schädigungsevolution, so erhält man die Konstitutivform

$$\pi = \frac{1}{2}\beta_D(\dot{d} - \dot{f})^2 + \frac{1}{2}\gamma_d l_d^2 |\nabla\dot{d}|^2 \quad (5-31)$$

für  $\pi$  sowie

$$\psi = \psi_E + \frac{1}{2}\alpha_d l_d^2 |\nabla d|^2 \quad (5-32)$$

für  $\psi$ , wobei  $\psi_E$  der elastische Anteil der Freienenergiedichte ist. Hierbei repräsentieren  $\beta_D$  bzw.  $\gamma_D$  charakteristische lokale bzw. nicht-lokale Dissipationsskalen für den delokalisierten Schädigungsprozess. Ferner sind  $\alpha_D$  bzw.  $l_D$  eine charakteristische Energieskala bzw. eine charakteristische Längenskala für diesen Prozess. Als Vereinfachung wird hier angenommen, dass diese charakteristischen Größen konstant sind. Einsetzen von Gl. (5-29), Gl. (5-31) und Gl. (5-32) liefert dann die Feldgleichung

$$\beta_D \dot{d} = l_D^2 \operatorname{div}(\alpha_D \nabla d + \gamma_D \nabla \dot{d}) + \beta_D \dot{f} \quad (5-33)$$

für  $d$ . Eine Beziehung äquivalent zu Gl.(5-23) ergibt sich hieraus im Grenzfall  $\alpha_D \rightarrow 0$ , d.h.

$$\beta_D \dot{d} = \gamma_D l_D^2 \operatorname{div}(\alpha_D \nabla d) + \beta_D \dot{f} \quad (5-34)$$

mit der der Identifikation

$$c \hat{=} \frac{\gamma_D l_D^2}{\beta_D} \quad (5-35)$$

Wie Gl.(5-23) stellt Gl.(5-34) eine ratenunabhängige Modellierung von  $d$  dar. Im Gegensatz entspricht der Grenzfall  $\gamma_D \rightarrow 0$ , d.h.

$$\beta_D \dot{d} = \gamma_D l_D^2 \nabla d^2 + \beta_D \dot{f}, \quad (5-36)$$

genau wie Gl.(5-33) selbst einer ratenabhängigen Modellierung von  $d$ . Skaliert man Gl.(5-33)–Gl.(5-36) mit einer charakteristischen Kontinuumsgrößenskala  $l_C$ , so wird ersichtlich, dass das Verhältnis  $l_D/l_C$  den Einfluss des nichtlokalen Terms auf die Entwicklung von  $d$  bestimmt. Im Rahmen einer numerischen Lösung dieser Feldgleichung mit Hilfe der FE-Methode kann  $l_C$  mit z.B. der Elementkantenlänge identifiziert werden.

In den weiteren Kapitel wird die geschwindigkeitsunabhängige Formulierung aus Kapitel 5.4 oder äquivalent basierend auf Gl.(5-23) oder auf Gl.(5-34) aufgegriffen, wobei ggf. auf Unterschiede bzgl. der Implementierung unter Berücksichtigung der Evolutionsgleichung (5-35), wo erforderlich, gesondert hingewiesen wird. Im Weiteren wird die Schreibweise aus Gl.(5-23) verwendet.

## 5.6 Schwache Form und P.d.v.V.

Zur Berechnung von Anfangsrandwertproblemen der Kontinuumsmechanik ist das gekoppelte System der partiellen Differentialgleichungen bestehend aus den kinematischen Beziehungen, der lokalen Impulsbilanz und den Materialgleichungen zu lösen. Nicht-lokale Abhängigkeiten in Form von Integralen oder Gradienten in den konstitutiven Gleichungen erschweren den Einsatz solcher Formulierungen.

Für die Anwendung der modifizierten Evolutionsgleichung des Hohlraumvolumenanteils im Rahmen der FE-Methode muss eine Formulierung gefunden werden, die trotz der Verwendung von Gradiententermen auf numerische Verfahren führt, die den Einsatz standardisierter numerischer Lösungsverfahren im Zusammenhang mit einer impliziten Spannungsintegration auf lokaler Ebene ermöglicht.

Mit der weiter in Gl.(5-23) gewählten Form der gradientenabhängigen Schädigungsevolution

$$\dot{d} - c\nabla^2 \dot{d} = \dot{f} \quad (5-37)$$

verliert im Rahmen einer raten-unabhängigen Formulierung die Konsistenzbedingung zur Bestimmung des Beitrages der plastischen Verzerrungen wegen  $\nabla^2$  ihren lokalen Charakter.

Wie u.a. in [DeB1992, Ram1998a, Ram1998b] gezeigt, kann durch das zusätzliche Einführen des plastischen Multiplikators oder der akkumulierten plastischen Vergleichsdehnung als Freiheitsgrad die Stoffgleichung im Rahmen einer FE-Implementierung gelöst werden, was jedoch auf sehr aufwendige numerische Formulierungen unter der Verwendung von  $C^2$ -stetigen Ansatzfunktion für die Elementformulierungen führt. Weiterhin müssen bei solchen Ansätzen, wie in Kapitel 5.3 bereits ausgeführt, die Kuhn-Tucker-Bedingungen in einer diskretisierten Form im Rahmen der FE-Gleichgewichtsiteration erfüllt werden, wobei neue zusätzliche Randbedingungen unter Berücksichtigung eines plastischen und nicht-plastischen Volumenbereichs der diskretisierten Struktur eingeführt und erfüllt werden müssen. Zusammen mit den Problemen bei der Verwendung von Ansatzfunktionen höherer Ordnung bei der Elementformulierung in FE-Rechnungen erweist sich diese Vorgehensweise unter der Zielsetzung einer anwendungsorientierten Implementierung eines „nicht-lokalen“ Gurson-Modells als problematisch und wird hier nicht weiter verfolgt.

Jedoch kann eine Formulierung der schwachen Form für die Schädigungsentwicklung gefunden werden (u.a. in [Feu1997, Feu1998]), die auf ein Variationsprinzip führt, das numerisch effizient in einem FE-Programm implementiert werden kann. Die Multiplikation der modifizierten Evolutionsgleichung

$$\dot{d} - c\nabla^2 \dot{d} = \dot{f} \text{ bzw. } \dot{d} - \dot{f} - c\nabla^2 \dot{d} = 0 \quad (5-38)$$

mit einer skalaren Testfunktion  $\eta_d$  und deren Integration über ein Volumen  $V$  führt auf die Bilanzgleichung

$$\int_V (\dot{d} - c\nabla^2 \dot{d} - \dot{f}) \eta_d \, dV = 0 \quad (5-39)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der starken nicht-lokalen Formulierung der Feldgleichung in Gl.(5-38), da bei beliebigen Werten für die Testfunktion der Ausdruck in den Klammern verschwinden muss, um das Integral zu null zu erfüllen.

Zusammen mit der schwachen Formulierung des Gleichgewichts

$$\int_V \mathbf{K} : \nabla \boldsymbol{\eta}_u \, dV - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta}_u \, d\Gamma = 0 \quad (5-40)$$

ergibt sich so eine „gemischte Formulierung“<sup>4</sup> des gekoppelten Feldproblems bestehend aus dem Verschiebungs- und dem Schädigungsfeld. Die Betrachtung der nunmehr „schwachen Form“<sup>5</sup> der Schädigungsevolution

$$\int_V (\dot{d} - \dot{f}) \eta_d + c \nabla \dot{d} \cdot \nabla \eta_d \, dV - c \int_{\Gamma} (\nabla \dot{d} \cdot \mathbf{n}) \eta_d \, d\Gamma = 0 \quad (5-41)$$

zeigt, dass, unter der in Gl.(5-28) postulierten Annahme, dass auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  die Bedingung

$$\nabla \dot{d} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (5-42)$$

erfüllt ist, eine schwache Formulierung der Schädigungsevolution in Form einer Bilanzgleichung

$$\int_V ((\dot{d} - \dot{f}) \eta_d + c \nabla \dot{d} \cdot \nabla \eta_d) \, dV = 0 \quad (5-43)$$

gefunden werden kann. Bei Verwendung der Schädigungsvariablen  $d$  als zusätzlichem Freiheitsgrad genügen  $C^0$ -stetige Ansatzfunktionen der Elementformulierung, da nun das Schädigungswachstum von der Beschreibung des plastischen Fließens entkoppelt ist und nur der erste räumliche Gradient des Schädigungsfeldes aus den Ansatzfunktionen ermittelt werden muss.

Für die in Kapitel 5.5 vorgestellte Form einer nicht-lokalen Erweiterung führen analoge Betrachtungen zu einer Variation der Schädigungsbilanz in der Form

$$\int_V (\dot{d} - \dot{f}) \eta_d + c \nabla \dot{d} \cdot \nabla \eta_d \, dV = 0. \quad (5-44)$$

---

<sup>4</sup> „Gemischte“ Formulierung, da hier Feldgrößen unterschiedlicher physikalischer Bedeutung (Verschiebungen, Schädigung) im Variationsprinzip Verwendung finden.

<sup>5</sup> Die Differenzierbarkeitsanforderungen an die Beschreibung des Schädigungsfeldes sind durch die Anwendung des Variationsprinzips herabgestuft worden, daher die Bezeichnung „schwache“ Form [Har1993], die hier nicht in Bezug zu der Unterscheidung zwischen einer „schwachen“ und „starken“ nicht-lokalen Evolutionsgleichung der Schädigungsfeldgröße gebracht werden darf.

## 5.7 Tafeln

### Tafel 5.1: Nicht-lokales Gurson-Modell

Fließbedingung für das nicht-lokale Modell:

$$\Phi = \frac{J_2(\mathbf{M})}{\sigma_m^2} + 2 q_1 d^* \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) - (q_1 d^*)^2 - 1 = 0$$

Beschleunigtes Hohlraumwachstum:

$$d^*(d) = \begin{cases} d & \text{für } d \leq d_c \\ d_c + k_d (d - d_c) & \text{für } d > d_c \end{cases} \quad \text{mit } k_d = \frac{(d_u^* - d_c)}{(d_f - d_c)}$$

Wachstum und Entstehung von Hohlräumen:

$$\text{lokaler Hohlraumvolumenanteil } \dot{f} = (1-f) \text{tr}(\mathbf{D}_p) + A(\varepsilon_m) \dot{\varepsilon}_m$$

$$\text{globales Schädigungsfeld } \dot{d} = \dot{f} - c \nabla^2 \dot{d} \quad \text{bzw.}$$

$$\text{globales Schädigungsfeld } \dot{d} = \dot{f} - c \nabla^2 d$$

Nukleation von Hohlräumen:

$$A(\varepsilon_m) = \frac{f_n}{\sqrt{2\pi} s_n^2} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)^2}{2 s_n^2}\right)$$

Äquivalenz der plastischen Dissipationsleistung von homogenem Ersatzmedium und Matrixmaterial

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_p = (1-f) \sigma_m \dot{\varepsilon}_m$$

Schädigungsparameter:

$d_0$  Hohlraumvolumenanteil des Materials im Ausgangszustand

$d_c$  Kritischer Hohlraumvolumenanteil

$d_f$  Endgültiger Hohlraumvolumenanteil

$f_n$  Volumenanteil hohlraumbildender Partikel

$\varepsilon_n$  Dehnungsmittelwert der Gauß-Verteilung der Nukleation

$s_n$  Standardabweichung der Gauß-Verteilung der Nukleation

6	Finite Elemente Methode .....	6-1
6.1	Einleitung .....	6-1
6.2	Elementformulierung .....	6-3
6.3	Ebenes Element mit bilinearen Ansatzfunktionen .....	6-4
6.4	Axialsymmetrische Formulierung .....	6-9
6.5	Diskretisierung .....	6-12
6.6	Elementsteifigkeitsmatrix.....	6-14
6.7	Berücksichtigung großer Deformationen .....	6-15
6.8	Inkrementelle Form der Gleichgewichtsbedingung .....	6-19
6.9	Element-Integrationstechnik.....	6-20
6.10	Spannungsalgorithmus.....	6-22
6.11	Integration der Materialgleichungen .....	6-24
6.12	Newton-Raphson-Verfahren.....	6-26
6.13	Ermittlung der Tangente der Stoffgesetziteration .....	6-28
6.13.1	Lokales Gurson-Modell .....	6-28
6.13.2	Nicht-lokales Gurson-Modell .....	6-31
6.14	Konvergenzkriterien .....	6-35
6.15	Elementverifikation .....	6-37
6.15.1	Elementverifikation für große Deformationen .....	6-37
6.15.2	Elementverifikation für die Schädigungssimulation .....	6-38
6.16	Verifikation des Gradientenmodells.....	6-39
6.17	Tabellen .....	6-42
6.18	Bilder .....	6-42
6.19	Tafeln .....	6-48

## 6 Finite Elemente Methode

### 6.1 Einleitung

Im Rahmen der Anwendung der Finiten Elemente Methode wird das der Struktur zugrundeliegende Gebiet durch eine Zerteilung in Finite Elemente approximiert. Weiterhin werden die Feldgrößen des Problems ausgehend von einem

vorgegebenen Verschiebungsfeld angenähert. Die angewendeten Variationsprinzipien (d.h. in der Regel das Prinzip der virtuellen Verschiebungen) werden dabei im Mittel über das jeweilige Elementvolumen erfüllt, wobei bei der durchzuführenden numerischen Integration über das Elementvolumen eine weitere numerische Näherung des abzubildenden Zustand vorgenommen wird. Die Umsetzung der in Kapitel 4 beschriebenen, lokalen Werkstoffmodellierung führt auf ein System nichtlinearer algebraischer Gleichungen in den Knotenfreiheitsgraden. Durch den Einsatz des um eine Feldgröße erweiterten Variationsprinzips in einer „gemischten“ schwachen Form für die Simulation nicht-lokaler Schädigung (s. Kapitel 5) ist es erforderlich, die Schädigungsgröße  $d$  als neuen zusätzlichen Freiheitsgrad zu berücksichtigen. Hierzu ist ein geeigneter Elementtyp zu entwickeln und in ein FE-Programm zu implementieren, der die zu beschreibenden Feldgrößen  $u$  und  $d$  sowie die entsprechenden virtuellen Größen durch geeignete Ansätze approximiert. Die zur numerischen Lösung des Gleichgewichts notwendige Linearisierung des eingesetzten Variationsprinzips und die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix werden in diesem Kapitel vorgestellt. Ausgehend von der Unterteilung der Belastung in diskrete Zeitschritte wird anschließend ein Spannungsalgorithmus zur numerisch effizienten Integration der Materialgleichungen des nicht-lokalen Gurson-Modells hergeleitet. Die Lösung des daraus entstehenden nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit dem Newton-Verfahren.

Eine maßgebliche Aufgabe der Implementierung des um einen Gradiententerm erweiterten Gurson-Modells ist die Verifizierung und der Vergleich der Ergebnisse anhand des vorgestellten „klassischen“ lokalen Gurson-Modells. Daher werden beide in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Materialmodelle in Zusammenhang mit eigens entwickelten Elementtypen in das FE-Programm ABAQUS implementiert. Diese Vorgehensweise ist erforderlich, da bei einer klassischen lokalen Implementierung die aktuellen Werte des Hohlraumvolumenanteils in den Gauß-Punkten eines Elementes als innere Zustandsgrößen gespeichert werden, bei einer Formulierung mit  $d$  als zusätzlichem Freiheitsgrad diese Werte aber in den Knotenpunkten eines Elementes gespeichert und erst durch eine Approximation über die Ansatzfunktionen des Elements auf die Gauß-Punktkoordinaten abgebildet werden. Auch wenn durch die Verwendung der kritischen Länge  $c=0$  die gradientenabhängige Form der Evolutionsgleichung in die klassische Formulierung des Gurson-Modells übergeht, wird die Gleichgewichtsbedingung der Evolutionsgleichung des Schädigungsfeldes mit der neuen Elementformulierung nur in der „schwachen“ Form erfüllt, so dass die Ergebnisse nicht mit denen einer lokalen Formulierung übereinstimmen.

Das hier zum Einsatz kommende FE-Programm ABAQUS verwendet für die Abbildung zwei-dimensionaler Verschiebungszustände Elementformulierungen mit vier Knoten (CPE4 und CAX4) eine modifizierte Berechnung des Deformationsgradienten („selectively reduced integration technique“ [Nag1974, Hib1998a]), die bei Verschiebungszuständen, die zu einer Volumenänderung führen, abweichende Verzerrungen bewirken. Diese Modifikation bezieht sich auf die Formulierung kleiner und großer Deformation und dient u.a. der Vermeidung von Locking-Effekten bei der ebenen Elementformulierung [Hib1998a] und wird für die neuen Elementformulierungen übernommen.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Implementierung des erweiterten nicht-lokalen Gurson-Modells, wobei auf Abweichungen zur Implementierung des lokalen Gurson-Modells im Einzelnen eingegangen wird. Die Implementierung der gradientenabhängigen Formulierung des Gurson-Modells mittels der ABAQUS-Schnittstelle UEL erstreckt sich auf die folgenden Teilaufgaben :

- Bestimmung der erforderlichen Elementtypen
- Verwaltung der Elementfreiheitsgrade und Implementierung von zwei Elementformulierungen mit bilinearen Ansatzfunktionen für die Abbildung ebener Dehnungszustände und die Simulation axialsymmetrischer Strukturen
- formale Ausgestaltung des Aufbaus der Elementsteifigkeitsmatrix auf Grundlage der Diskretisierung der Variationsprinzipien
- konsistente Linearisierung der Materialtangente zum Aufbau der Blockmatrizen für die Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix und Bildung der Element-Kraft-Vektoren für die Aufstellung des Kräftegleichgewichts der FE-Rechnung
- Entwicklung und Implementierung eines geeigneten Algorithmus zur Spannungsintegration auf Gauß-Punkt-Ebene
- Bildung der Elementsteifigkeitsmatrizen unter Berücksichtigung großer Deformationen

## 6.2 Elementformulierung

Der zu betrachtende kontinuierliche Körper mit der Referenzkonfiguration  ${}^0B$  wird in  $n$  finite Elemente in eine diskretisierte Struktur  $B^{\text{FE}}$  unterteilt, so dass gilt

$$B \approx B^{\text{FE}} = \bigcup_{e=1}^n \Omega_e . \quad (6-1)$$

Für die in einem Element der Fläche  $\Omega_e$  abzubildenden Feldgrößen und für die Interpolation der Geometrie sind geeignete Ansatzfunktionen zu finden. Hier wird das isoparametrische Konzept verfolgt, bei dem für die Abbildung der Elementgeometrie, wie auch für die Interpolation der Feldgrößen, die gleichen Ansatzfunktionen und die gleichen Stützpunkte (nämlich die Knotenkoordinaten) gewählt werden. Diese Vorgehensweise gewährleistet die geometrische Verträglichkeit der Abbildung und der inkrementellen Verschiebungen. Darüber hinaus ist die räumliche Formulierung eines Kontinuumsproblems sehr einfach, da es keinen Unterschied macht, ob man von der Ausgangs- oder Momentankonfiguration eines Elementes auf das der isoparametrischen Formulierung zugrunde liegende Einheitsquadrat transformiert, das eine Referenzkonfiguration darstellt.

Bezüglich der Auswahl eines geeigneten Elementtyps sind zunächst geeignete Ansatzfunktionen für die Abbildung der Feldgrößen im Element festzulegen. Hierbei müssen für die Interpolation der Feldgrößen  $\mathbf{u}$  und  $d$  nicht zwingend die selben Ansatzfunktionen gewählt werden, auch wenn für die Diskretisierung der in Kapitel 5 vorgestellten Variationsprinzipien in beiden Fällen  $C^0$ -stetige Ansatzfunktionen genügen [Pee1999]<sup>1</sup>. Die Wahl der Ansatzfunktionen hat einen Einfluss auf die Abbildung des Gradienten der Feldgrößen und durch die Kopplung der Verschiebungen mit dem globalen Schädigungsfeld auch auf die Abbildungsfähigkeit hoher Schädigungsgradienten, was einen Einfluss auf die maximal verwendbare Größe der eingesetzten Elemente haben kann.

Im nächsten Abschnitt werden 4-Knoten-Flächenelemente mit linearen Ansatzfunktionen und der Abbildung eines ebenen Dehnungszustandes für kleine Deformationen betrachtet. Die dargestellte Vorgehensweise unterliegt hierbei aber keiner Einschränkung bzgl. der Erweiterung auf Elemente mit höheren und verschiedenen Ansatzfunktionen oder aber bzgl. der Verwendung von Volumenelementen.

### 6.3 Ebenes Element mit bilinearen Ansatzfunktionen

Die Approximation des Ortsvektors  $\mathbf{X}$  der Ausgangskonfiguration und des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration von einem Punkt des Referenzelementes

---

<sup>1</sup> Bei  $C^0$ -Ansatzfunktionen für die globale Schädigung und die Verschiebungen ergeben sich zum einen konstante Dehnungszustände im Element und konstante Schädigungsverläufe. Weiterhin wird der Gradient der Schädigungsverteilung im Element konstant abgebildet. Auch zu berücksichtigen ist, dass die Spannungen nahezu linear im Element sind und durch die direkte Abhängigkeit der lokalen Schädigung von dem globalen Schädigungsfeld auch nur linear abgebildet werden können.

$\Omega_e$  mit den Koordinaten  $\xi, \eta$  wird durch auf dem Referenzelement definierte Ansatzfunktionen  $N_i$  mit dem Vektor  $\mathbf{N}$  der bilinearen Ansatzfunktionen

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \end{bmatrix} \quad (6-2)$$

durchgeführt (s. Bild 6.2):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{X}}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}}_i. \quad (6-3)$$

Hierbei sind  $\hat{\mathbf{X}}_i$  bzw.  $\hat{\mathbf{x}}_i$  die Knotenkoordinaten der Ortsvektoren der Referenz- bzw. Momentanelementkonfiguration. Die Approximationen der Feldgrößen in einem Element ergeben sich für die Verschiebungen bzw. die entsprechenden virtuellen Größen zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \hat{\mathbf{u}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\eta}_u = \mathbf{N}_u \hat{\boldsymbol{\eta}}_u, \quad (6-4)$$

wobei  $\hat{\mathbf{u}}$  der Vektor der Knotenverschiebungen und  $\mathbf{N}_u$  der Zuordnungsvektor der linearen Ansatzfunktionen darstellt. Entsprechend gilt für die Abbildung des neu eingeführten Freiheitsgrades  $d$  und der zugeordneten virtuellen Größe

$$d = \mathbf{N}_d \hat{\mathbf{d}} \quad \text{und} \quad \eta_d = \mathbf{N}_d \hat{\boldsymbol{\eta}}_d \quad (6-5)$$

mit  $\hat{\mathbf{d}}$  bzw.  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_d$  als Elementknotenvektor der Schädigungswerte und  $\mathbf{N}_d$  als dem Zuordnungsvektor der linearen Ansatzfunktionen.

Für die Berechnung der Verzerrungen und deren Variation werden die Ableitungen des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}_e$  eines Elementes benötigt :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{X}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \mathbf{X}} \mathbf{u}_i. \quad (6-6)$$

Die partielle Ableitung von  $N_i$  nach  $X_\alpha$  erfolgt nach

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,\xi} & \mathbf{N}_{,\eta} \end{bmatrix} \mathbf{J}_e^{-1} \quad (6-7)$$

wobei die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}_e$  die Transformation zwischen Referenz- und Ausgangskonfiguration eines Elementes darstellt:

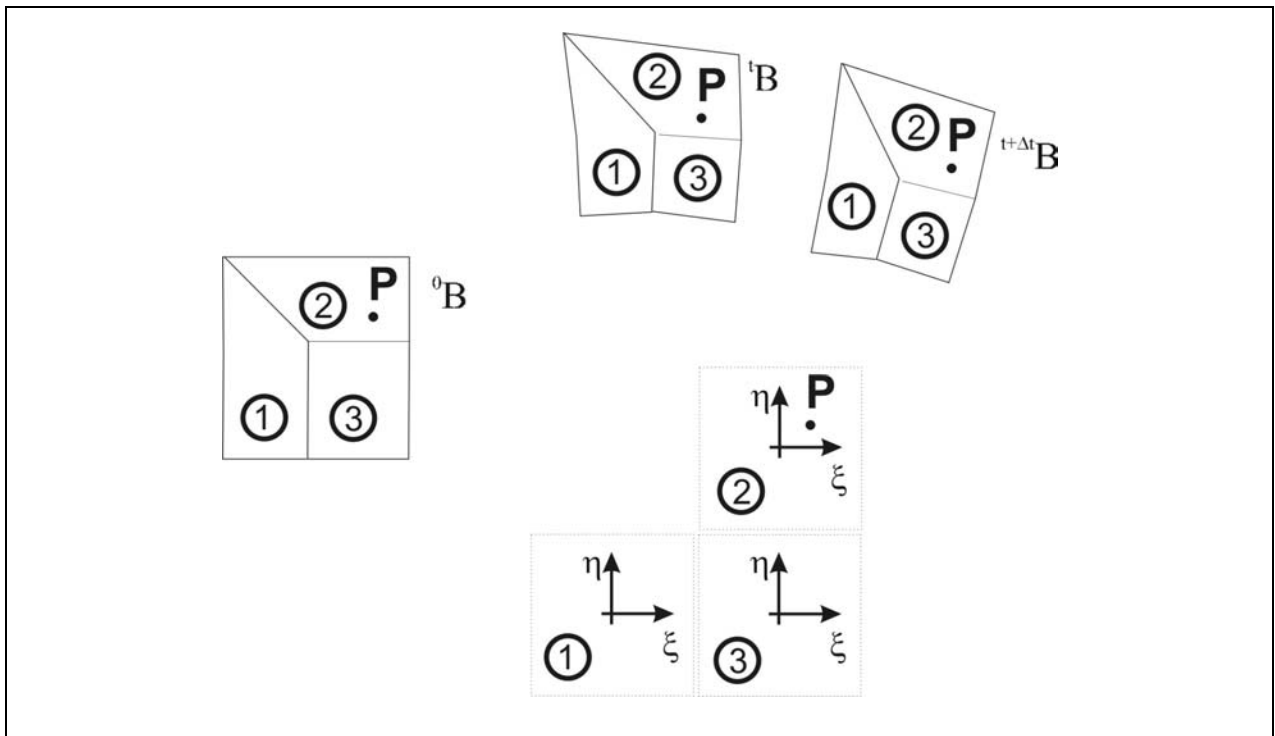


Bild 6.1: Diskretisierung einer Struktur

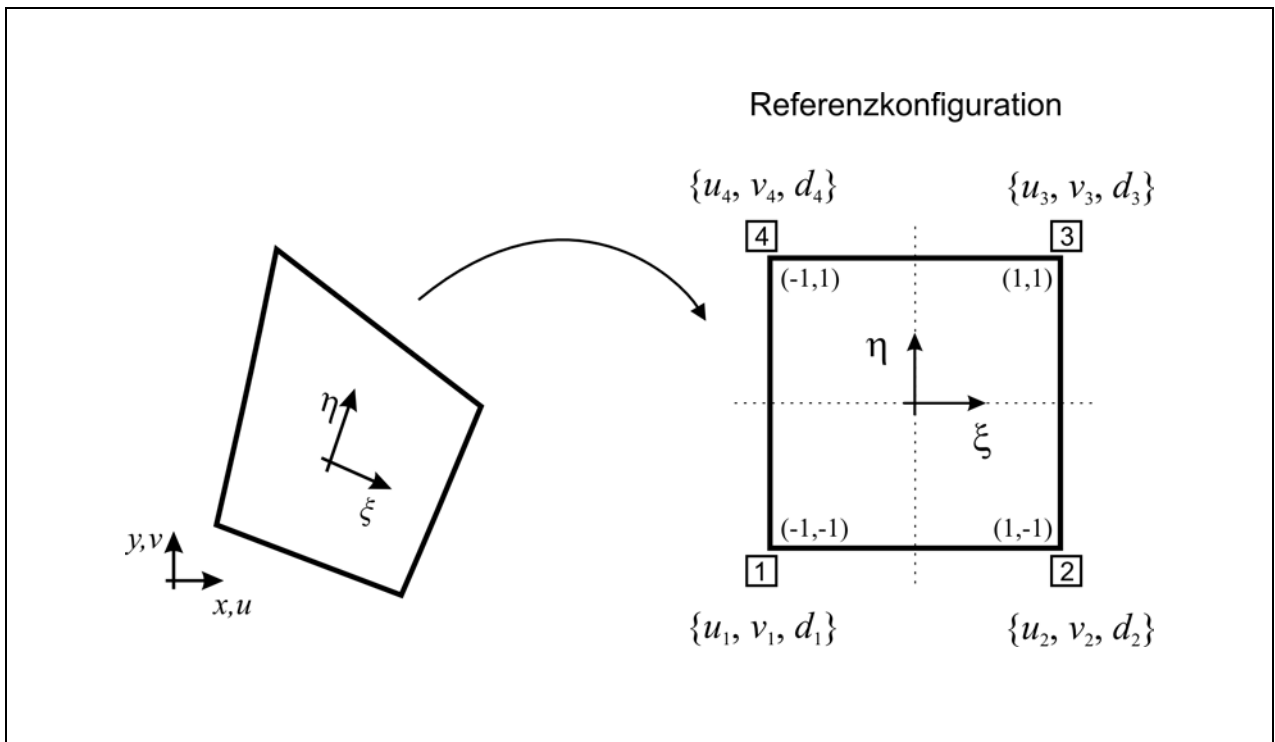


Bild 6.2: Ebenes Element mit 4 Knoten und 12 Freiheitsgraden

$$\mathbf{J}_e = \begin{bmatrix} X_{1,\xi} & X_{1,\eta} \\ X_{2,\xi} & X_{2,\eta} \end{bmatrix} = [\mathbf{N}_{,\xi} \quad \mathbf{N}_{,\eta}]^T \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \\ X_4 & Y_4 \end{bmatrix} \tag{6-8}$$

Die zunächst als klein angenommenen Verzerrungen berechnen sich aus

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad \text{mit} \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (6-9)$$

wobei hier ausschließlich ebene Verzerrungszustände berücksichtigt werden, so dass gilt :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (6-10)$$

Der so gebildete Spannungstensor ist wie folgt besetzt :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (6-11)$$

Die Abbildung der Verzerrungen erfolgt über eine entsprechende Zuordnungsmatrix über die Beziehung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}}. \quad (6-12)$$

Weiterhin wird der Gradient des Schädigungsfeldes über

$$\nabla d = \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{d}} \quad (6-13)$$

aus den Elementknotenwerten der Schädigungswerte abgebildet. Bei der Abbildung des Gradienten des Schädigungsfeldes wird die aktuelle räumliche Konfiguration des Elementes betrachtet, wozu die Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den räumlichen Koordinaten  $(x, y)$  zu bilden sind. Für die hier verwendeten Zuordnungsmatrizen  $\mathbf{B}_u$  und  $\mathbf{B}_d$  gilt im Einzelnen :

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_{,y} \\ 0 & 0 \\ \mathbf{N}_{,y} & \mathbf{N}_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (6-14)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix}. \quad (6-15)$$

Hierbei gilt für die Vektoren der Ableitungen der Ansatzfunktionen im Elementkoordinatensystem  $\xi, \eta$ :

$$\mathbf{N}_{,\xi} = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ N_{4,\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\eta \\ 1-\eta \\ 1+\eta \\ -1-\eta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_{,\eta} = \begin{bmatrix} N_{1,\eta} \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ N_{4,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\xi \\ 1-\xi \\ 1+\xi \\ -1-\xi \end{bmatrix}. \quad (6-16)$$

Bezüglich der Wirkung des Gradiententerms in der Evolutionsgleichung des globalen Schädigungsfeldes  $d$  ist die Bedeutung der Wahl der (hier linearen) Ansatzfunktionen des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  (s. Bild 6.3a) besonders hervorzuheben.

Die Ermittlung der räumlichen Ableitung der Schädigungswerte über die Elementfläche führt auf linear veränderliche Schädigungsgradienten und auf einen über der Elementfläche konstanten 2. Gradienten des Schädigungsfeldes  $\nabla^2 d$  (s. Bild 6.3a).

Weiter ist zwischen einer räumlichen und einer materiellen Berücksichtigung des Gradienten zu unterscheiden, wie u.a. in [Gee2000] aufgeführt. Bevorzugt wird in dieser Arbeit die materielle Bildung des Gradienten, da eine räumliche Betrachtung bei starken Deformationen der Elementfläche zu sehr hohem Gradienteneinfluss führen kann.

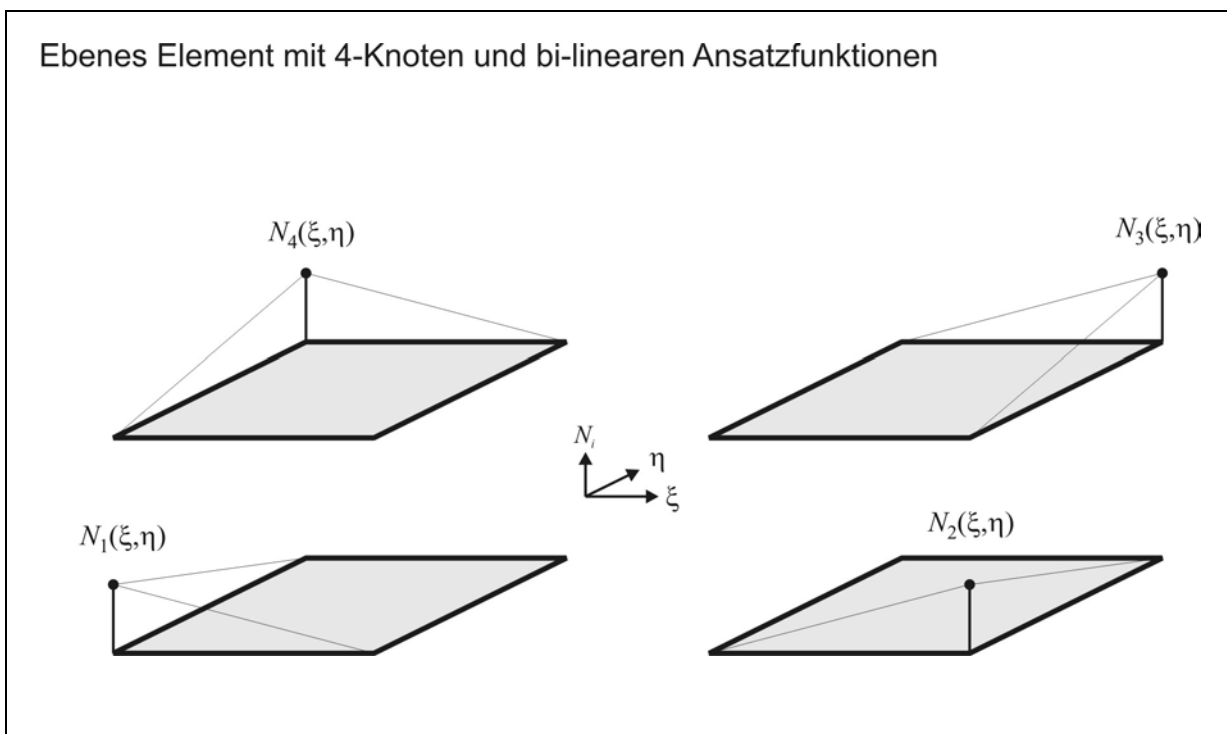


Bild 6.3a: Lineare Ansatzfunktionen der Abbildung der Schädigungs- und Verschiebungsfreiheitsgrade in den Knoten der ebenen Elementformulierung.

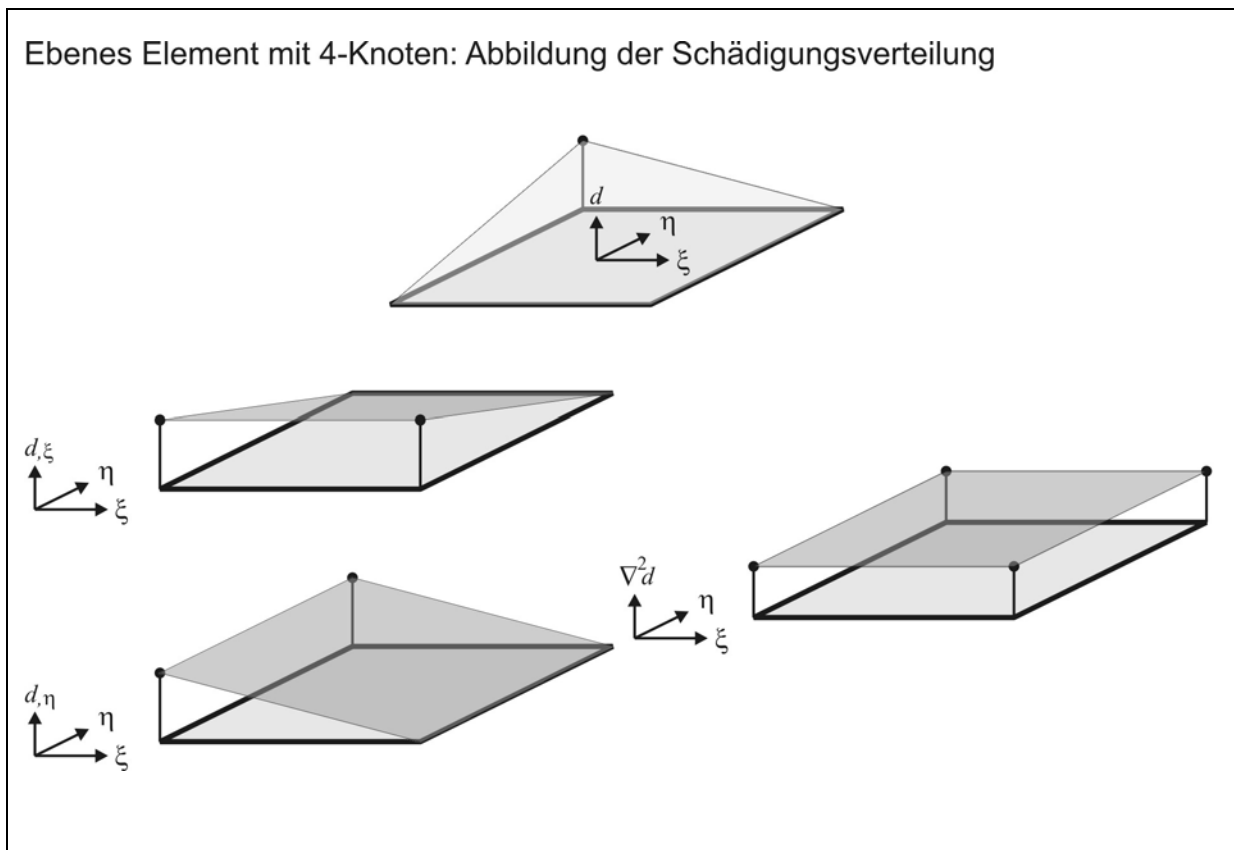


Bild 6.3b: Lineare Abbildung eines Schädigungsfreiheitsgrades und Abbildung der räumlichen Änderung und des 2. Gradienten der Schädigung über die undeformierte Referenzkonfiguration des Elements.

#### 6.4 Axialsymmetrische Formulierung

Für eine Bestimmung der Schädigungsparameter des Gurson-Modells werden üblicherweise Ergebnisse von Versuchen an gekerbten Rundzugproben herangezogen. Diese finden in einer FE-Simulation ihre Entsprechung in eben modellierten Modellen mit axialsymmetrischen Elementen, die die Rotationssymmetrie einer Rundzugprobe berücksichtigen und so die effiziente Abbildung als ebene diskretisierte Struktur erlauben. Um entsprechende FE-Rechnungen durchführen zu können, ist über die ebene Elementformulierung hinaus ein Elementtyp zu entwickeln, der der Abbildung der geometrischen Zwangsbedingung axialsymmetrischer Probengeometrien gerecht wird. In diesem Abschnitt werden die hierzu durchzuführenden Modifikationen an der Elementformulierung des Elements für ebene Verzerrungszustände aufgezeigt.

Bei der axialsymmetrischen Formulierung wird der, um eine Achse rotationssymmetrische, Körper über Zylinderkoordinaten dargestellt. Hierbei sind  $r$  und  $z$  die Radial- bzw. Axialkoordinaten in der Querschnittsfläche des zu beschreibenden Volumens

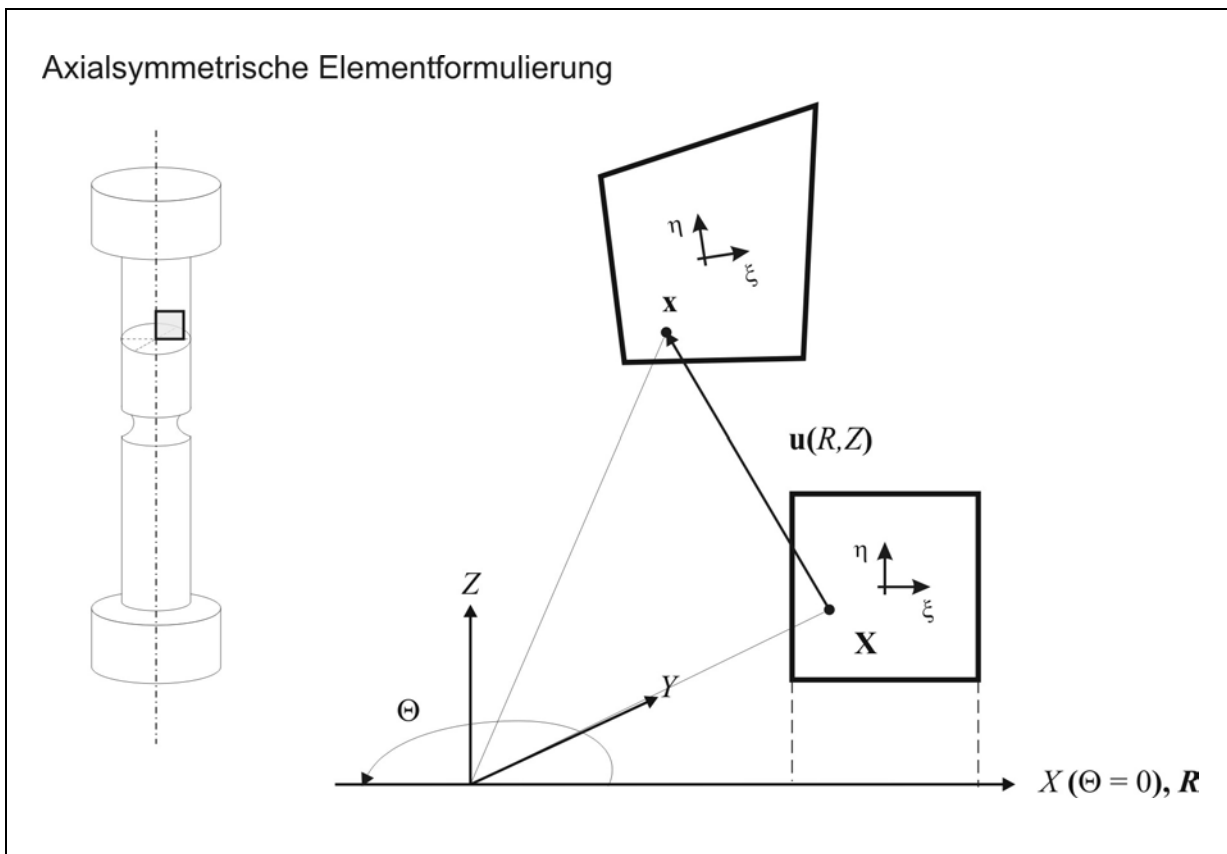


Bild 6.4: Axialsymmetrische Elementformulierung

(s. Bild 6.4). Für einen Drehwinkel  $\theta = 0$  stimmen  $r$  und  $z$  mit den globalen räumlichen Koordinaten  $X$  und  $Z$  überein.

Unter der Annahme isotropen Materialverhaltens und aufgebrachtter Lasten, die vom Drehwinkel  $\Phi$  unabhängig sind, kann so die Verschiebung eines jeden materiellen Punktes über die radialen und axialen Verschiebungen  $u_r$  und  $u_z$  beschrieben werden, womit der Verzerrungs- und Spannungszustand über die Deformation in der  $r$ - $z$ -Ebene abgebildet wird. Der sich so einstellende Spannungszustand ergibt sich zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{zr} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}. \quad (6-17)$$

Mit  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_Z$  und  $\mathbf{e}_\Theta$  als Basisvektoren der Referenzposition eines Punktes  $\mathbf{X}$  wird sein Abstand  $R$  zur Rotationsachse und der axialen Koordinate  $Z$  als:

$$\mathbf{X} = R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z \quad (6-18)$$

beschrieben. Sind  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{e}_\theta$  die Basisvektoren eines Punktes  $\mathbf{x}$  in der deformierten Konfiguration, so ergibt sich in Analogie die Lage des Punktes zu

$$\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad (6-19)$$

wobei der radiale und der axiale Basisvektor noch von der Umfangskoordinate abhängig sind:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta), \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z(\theta). \quad (6-20)$$

Der Verschiebungszustand eines Punktes wird dann vollständig durch

$$\begin{aligned} r(R, Z) &= R + u_r(R, Z) \\ z(R, Z) &= Z + u_z(R, Z) \\ \theta(R, Z, \Theta) &= \Theta + \Phi(R, Z) \end{aligned} \quad (6-21)$$

beschrieben werden.

Die Approximation des Verschiebungsfeldes wird wieder durch die auf dem Referenzelement definierte bilineare Ansatzfunktionen  $N_i$  vorgenommen:

$$\begin{aligned} u_r &= \mathbf{N}(\xi) \hat{\mathbf{u}}_r \\ u_z &= \mathbf{N}(\xi) \hat{\mathbf{u}}_z \\ \Phi &= \mathbf{N}(\xi) \hat{\Phi} \end{aligned} \quad (6-22)$$

mit  $\hat{\mathbf{u}}_r$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_z$  und  $\hat{\Phi}$  als Vektoren der Knotenkoordinaten des Elements. Über die Definition des Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$  ergibt sich so die Matrixrepräsentation

des Deformationsgradienten zu :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \partial u_r / \partial R & \partial u_r / \partial Z & 0 \\ \partial u_z / \partial R & 1 + \partial u_z / \partial Z & 0 \\ 0 & 0 & r/R \end{bmatrix}. \quad (6-23)$$

Die diskretisierte Form des Verzerrungszustandes wird mit der Zuordnungsmatrix

$$\mathbf{B}_{\mathbf{u},ax} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \\ \frac{N_1}{\bar{x}} & 0 & \frac{N_1}{\bar{x}} & 0 & \frac{N_1}{\bar{x}} & 0 & \frac{N_1}{\bar{x}} & 0 \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} & N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (6-24)$$

gebildet zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_{\mathbf{u},ax} \hat{\mathbf{u}}. \quad (6-25)$$

Hierbei ist die x-Koordinate des aktuellen Gauß-Punktes gemäß der Definition

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 N_i x^i \quad (6-26)$$

gegeben.

Die Eliminierung der 3. Zeile aus Gl.(6-24) führt auf die Zuordnungsmatrix der Formulierung für 2D-Elemente mit ebenen Verzerrungszuständen (Gl.(6-14)), was die Vereinheitlichung der Programmstruktur für beide hier behandelten Elementtypen erlaubt. Für die Bildung des später eingeführten Vektors der Elementknotenkräfte ist zu beachten, dass die Knotenkräfte auf die aktuelle Umfangslänge bezogen werden.

### 6.5 Diskretisierung

Die gemischte Form des Variationsprinzips, bestehend aus der Gleichgewichtsbedingung und der schwachen Form der Entwicklung der Schädigungsvariablen und unter Berücksichtigung der gegebenen Randbedingungen, ergibt für ein Volumen  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_u \cdot \{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}\} d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \eta_d (\dot{d} - \dot{f} + c^2 \nabla \dot{d}) d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (6-27)$$

Die Anwendung des Divergenztheorems führt unter Berücksichtigung des Randlastvektors  $\mathbf{t}$  die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Gamma_u(\mathbf{u}, d, \boldsymbol{\eta}_u) &= \int_{\Omega} [\nabla \boldsymbol{\eta}_u]^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\eta}_u \cdot \mathbf{t} d\Gamma = 0 \\ \Gamma_d(\mathbf{u}, d, \eta_d) &= \int_{\Omega} \eta_d (\dot{d} - \dot{f}) + c^2 \nabla \eta_d \cdot \nabla \dot{d} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6-28)$$

Die Linearisierung für das inkrementelle Integrationsschema der Einzelterme aus Gl.(6-28) für die Inkremente der Größen des Iterationsschrittes  $i$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i)} + d\boldsymbol{\sigma}, \quad d^{(i+1)} = d^{(i)} + dd, \quad f^{(i+1)} = f^{(i)} + df \quad (6-29)$$

ergibt

$$\begin{aligned}
& \Gamma_u^{(i+1)}(\mathbf{u}, d, \boldsymbol{\eta}_u) = \\
& \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) + D_u \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) \cdot \Delta \mathbf{u} + D_d \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) \cdot \Delta d \\
& \Gamma_d^{(i+1)}(\mathbf{u}, d, \eta_d) = \\
& \Gamma_d^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \eta_d) + D_u \Gamma_d^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \eta_d) \cdot \Delta \mathbf{u} + D_d \Gamma_d^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \eta_d) \cdot \Delta d
\end{aligned} \tag{6-30}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
D_u \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) \cdot \Delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} (D_u \boldsymbol{\sigma}) \nabla(\Delta \mathbf{u}) \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega \\
D_d \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) \cdot \Delta d &= \int_{\Omega} (D_d \boldsymbol{\sigma}) \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega \\
D_u \Gamma_d^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \eta_d) \cdot \Delta \mathbf{u} &= - \int_{\Omega} (D_u \dot{f}) \nabla(\Delta \mathbf{u}) \eta_d d\Omega \\
D_d \Gamma_d^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \eta_d) \cdot \Delta d &= \int_{\Omega} 1 - (D_d \dot{f}) \Delta d \eta_d d\Omega + \int_{\Omega} c \nabla(\Delta d) \nabla \eta_d d\Omega
\end{aligned} \tag{6-31}$$

Die Ausdrücke  $D_u \boldsymbol{\sigma}$ ,  $D_d \boldsymbol{\sigma}$ ,  $D_u \dot{f}$ ,  $D_d \dot{f}$  ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
D_u \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\
D_d \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial d} \\
D_u \dot{f} &= \frac{\partial \dot{f}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \\
D_d \dot{f} &= \frac{\partial \dot{f}}{\partial d} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{d}} \frac{\dot{d}}{\partial d} = \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{d}} \Delta t
\end{aligned} \tag{6-32}$$

Die Ausführung der einzelnen Ableitungsterme ist im Anhang zu finden.

Die Assemblierung über alle  $n$  Elemente  $e = 1..n$  einer diskretisierten Struktur mit den in Gl.(6-28) beschriebenen diskretisierten Formen der Feldgrößen führt auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_u(\hat{\mathbf{v}}_u, \hat{\mathbf{v}}_d) &= \bigcup_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C} \mathbf{B}_u \hat{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \\
\mathbf{U}_d(\hat{\mathbf{v}}_u, \hat{\mathbf{v}}_d) &= \bigcup_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T (\dot{d} - \dot{f}) + \mathbf{B}_d^T c \nabla d d\Omega \\
&= \bigcup_{e=1}^n \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_d \dot{\mathbf{d}} - \mathbf{N}_d^T \dot{f} + \mathbf{B}_d^T c \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{d}} d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{6-33}$$

Hierbei ist  $\hat{\mathbf{v}}_u$  der globale Knotenverschiebungsvektor und  $\hat{\mathbf{v}}_d$  der globale Knotenvektor der Schädigungswerte. Die Lösung des Gleichungssystems wird iterativ mit dem Newton-Verfahren nach der Vorschrift

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_u \\ \hat{\mathbf{v}}_d \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{v}}_u \\ \hat{\mathbf{v}}_d \end{pmatrix}^{(n)} - \hat{\mathbf{K}}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_u(\hat{\mathbf{v}}_u, \hat{\mathbf{v}}_d) \\ \mathbf{U}_d(\hat{\mathbf{v}}_u, \hat{\mathbf{v}}_d) \end{pmatrix}^{(n)} \quad (6-34)$$

gewonnen.

Die Berechnung der Systemsteifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}$  erfolgt über die Beiträge der Einzelsteifigkeiten der Elemente gemäß

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{U}(\hat{\mathbf{v}}^{(n)})}{\partial \hat{\mathbf{v}}^{(n)}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \hat{\mathbf{K}}_e \quad (6-35)$$

In dieser Darstellung sind vereinfachend die Unbekanntenvektoren  $\hat{\mathbf{v}}_u$  und  $\hat{\mathbf{v}}_d$  zu einem Vektor  $\hat{\mathbf{v}}$  der Systemfreiheitsgrade zusammengefasst. Das Problem stellt sich also analog zur klassischen Elementformulierung dar, nur dass die zusätzliche Approximation der "neuen" Feldgröße  $d$  berücksichtigt werden muss.

## 6.6 Elementsteifigkeitsmatrix

Unter Berücksichtigung der Verzerrungen, des Gradienten der Schädigungsevolution und der (hier allgemein formulierten) Spannungs-Dehnungs-Relation ergibt sich die Elementsteifigkeitsmatrix eines Elementes zu

$$\hat{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{uu} & \hat{\mathbf{K}}_{ud} \\ \hat{\mathbf{K}}_{du} & \hat{\mathbf{K}}_{dd} \end{bmatrix} \quad (6-36)$$

Die in Gl.(6-36) aufgeführten Blockmatrizen  $\hat{\mathbf{K}}_{uu}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}_{ud}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}_{du}$  und  $\hat{\mathbf{K}}_{dd}$  werden aus der Linearisierung des Variationsprinzips Gl. (6-30) unter Verwendung der Abkürzungen der Gleichungen (6-32)<sub>1,2,3,4</sub> ermittelt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T (D_u \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{B}_u d\Omega_e & \mathbf{K}_{ud} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T (D_d \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{N}_d d\Omega_e \\ \mathbf{K}_{du} &= - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T (D_u \dot{f}) \mathbf{B}_u d\Omega_e & \mathbf{K}_{dd} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T (1 - (D_d \dot{f})) \mathbf{N}_d + \mathbf{B}_d^T c \mathbf{B}_d d\Omega_e \end{aligned} \quad (6-37)$$

Schließlich ergeben sich die Elementknotenkräfte (s. Bild 6.5) aus der linearisierten Form des Variationsprinzips Gl.(6-28) unter Berücksichtigung von Gl.(6-30) und Gl.(6-31) zu :

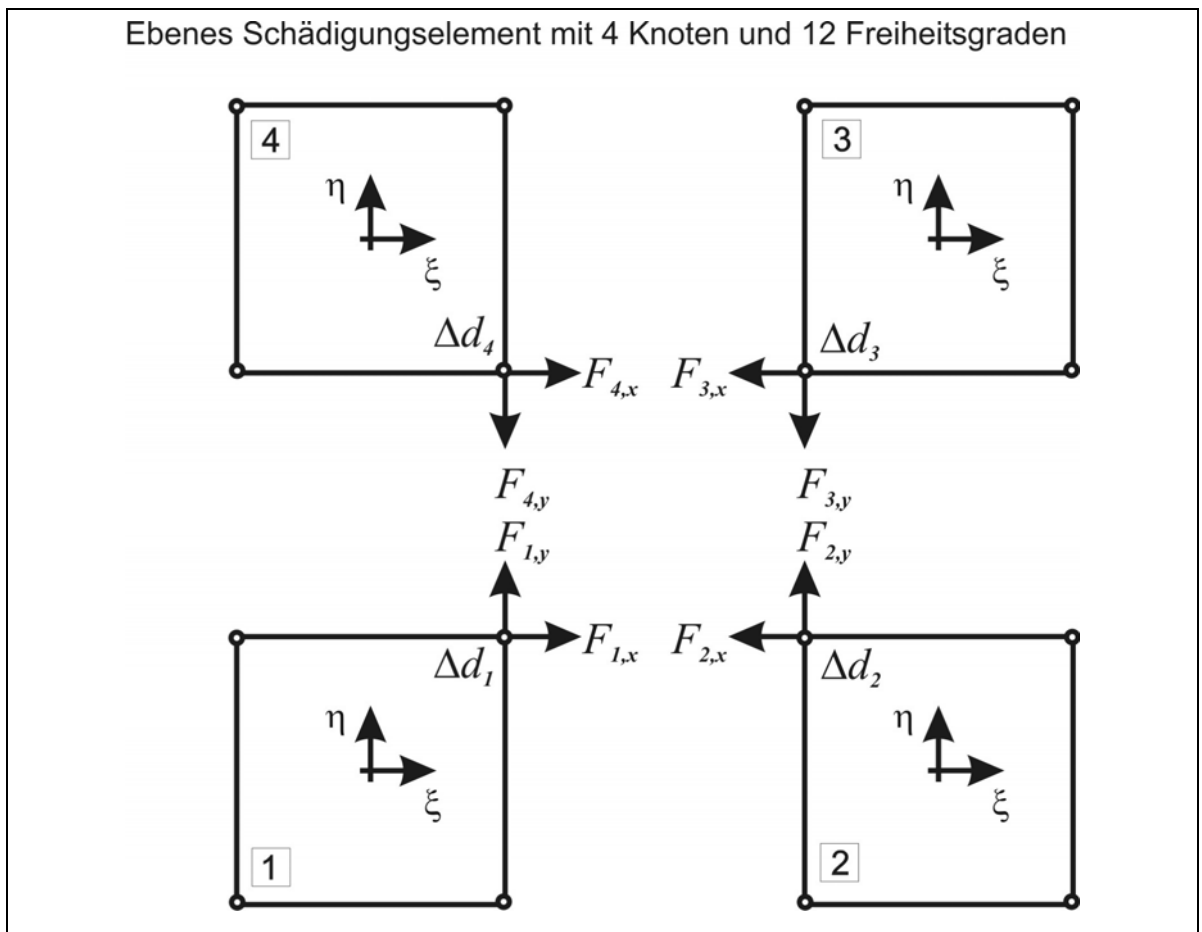


Bild 6.5: Kräftegleichgewicht an einem Element mit 12 Freiheitsgraden

$$\mathbf{F}_{ue} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_L^T \mathbf{T} d\Omega_e, \quad (6-38)$$

$$\mathbf{F}_{de} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T (\dot{d} - \dot{f}) + \mathbf{B}_d^T c \nabla \dot{d} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_d \hat{\mathbf{d}} - \mathbf{N}_d^T \dot{f} + c \mathbf{B}_d^T \mathbf{B}_d \hat{\mathbf{d}} d\Omega_e.$$

Für den Fall elastischer Zustandsänderungen entfällt die Kopplung zwischen der Spannungs- und der Schädigungsentwicklung, so dass mit einem linear-elastischen Verhalten die Elementsteifigkeitsmatrix die folgende Form gewinnt:

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T (\mathbf{C}_e) \mathbf{B}_u d\Omega_e \quad \mathbf{K}_{ud} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}_{du} = \mathbf{0} \quad \mathbf{K}_{dd} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_d + \mathbf{B}_d^T c \mathbf{B}_d d\Omega_e. \quad (6-39)$$

## 6.7 Berücksichtigung großer Deformationen

Für die Berücksichtigung großer Deformationen bei der Elementformulierung ändert sich die prinzipielle Vorgehensweise nicht, nur sind nun lineare und quadratische Anteile des Verzerrungsmaßes zu berücksichtigen und durch die damit veränderte

diskretisierte Form des Variationsprinzips neue Blockmatrizen für die Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  aus Gl.(6-36) zusätzlich aufzubauen.

Zunächst wird mit Hilfe des P.d.v.V. das Gleichgewicht in der Momentankonfiguration zur Zeit  $t + \Delta t$  gefordert. Da alle Größen in der Momentankonfiguration noch unbekannt sind, werden die Gleichungen des P.d.v.V. auf bekannte Zustände zurücktransformiert. Hier wird der letzte bekannte Gleichgewichtszustand zur Zeit  $t$  als Referenzzustand verwendet, die Gleichungen werden so in der Updated Lagrange- (U.L.-) Formulierung dargestellt.

Die in Gl.(6-28) formulierte Gleichgewichtsbedingung

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\eta}_u \cdot \{\nabla \mathbf{T}\} d\Omega = 0. \quad (6-40)$$

wird durch die Anwendung des Divergenztheorems umgeformt:

$$\Gamma_u(\mathbf{u}, d, \boldsymbol{\eta}_u) = \int_{\Omega} [\nabla \boldsymbol{\eta}_u]^T \cdot \mathbf{T} d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\eta}_u \cdot \mathbf{t} d\Gamma. \quad (6-41)$$

Die Linearisierung der Einzelterme aus Gl.(6-41)<sub>2</sub> schreibt sich

$$\Gamma_u^{(i+1)}(\mathbf{u}, d, \boldsymbol{\eta}_u) = \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) + D_{\mathbf{u}} \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (6-42)$$

mit der Abkürzungen

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} \Gamma_u^{(i)}(\mathbf{u}^{(i)}, d^{(i)}, \boldsymbol{\eta}_u) \cdot \Delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} D_u(\mathbf{T}) \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} D_u(\nabla \boldsymbol{\eta}_u) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \nabla(\Delta \mathbf{u}) \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} D_u(\nabla \boldsymbol{\eta}_u) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \nabla(\Delta \mathbf{u}) \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} \Delta \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \nabla(\Delta \mathbf{u}) \nabla \boldsymbol{\eta}_u d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} (\delta \Delta \mathbf{L} + \delta \Delta \mathbf{Q}) d\Omega \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\delta \Delta \mathbf{H} = \nabla \delta \Delta \mathbf{u} = \Delta \nabla \boldsymbol{\eta}_u = \delta \Delta \mathbf{L} + \delta \Delta \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\delta \Delta \mathbf{H} + \delta \Delta \mathbf{H}^T) + \frac{1}{2} (\delta \Delta \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{H} + \Delta \mathbf{H}^T \delta \Delta \mathbf{H}) \quad (6-43)$$

das virtuelle Inkrement des Verschiebungsgradienten  $\mathbf{H}$ . Die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen ergibt sich so zu

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \Delta \mathbf{L} \cdot \delta \Delta \mathbf{L} dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \Delta \mathbf{Q} dV = \delta A_a - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \Delta \mathbf{L} dV . \quad (6-44)$$

Mit dieser Formulierung wird solange die inkrementelle Verschiebung  $\Delta \mathbf{u}$  klein genug bleibt – im Rahmen der Mittelung durch finite Elemente – das Gleichgewicht gelöst. Damit können die gesamten Verschiebungen ohne Einschränkung große Verschiebungen, Rotationen und Verzerrungen enthalten.

Für die weitere Vorgehensweise erweist es sich als vorteilhaft, die aus dem Verschiebungsfeld abgeleiteten symmetrischen Anteile  $\Delta \mathbf{L}$ ,  $\delta \Delta \mathbf{L}$  und  $\delta \Delta \mathbf{Q}$ , in Vektorschreibweise

$$\begin{aligned} \bar{\Delta \mathbf{L}} &= \langle \Delta L_{11} \quad \Delta L_{22} \quad \Delta L_{33} \quad \Delta L_{12} \quad \Delta L_{13} \quad \Delta L_{23} \rangle^T \\ \bar{\Delta \mathbf{Q}} &= \langle \Delta Q_{11} \quad \Delta Q_{22} \quad \Delta Q_{33} \quad \Delta Q_{12} \quad \Delta Q_{13} \quad \Delta Q_{23} \rangle^T \\ \bar{\mathbf{T}} &= \langle T_{11} \quad T_{22} \quad T_{33} \quad T_{12} \quad T_{13} \quad T_{23} \rangle^T \end{aligned} \quad (6-45)$$

zu formulieren. Mit dieser Darstellung wird die kompakte Schreibweise mit Vektoren und Matrizen ermöglicht. Die Darstellung der Verzerrungsmaße  $\Delta \mathbf{L}$ ,  $\delta \Delta \mathbf{L}$  erfolgt für den ebenen Verzerrungszustand über die Zuordnungsmatrix

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} N_{1,x_1} & 0 & N_{2,x_1} & 0 & N_{3,x_1} & 0 & N_{4,x_1} & 0 \\ 0 & N_{1,x_2} & 0 & N_{2,x_2} & 0 & N_{3,x_2} & 0 & N_{4,x_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,x_2} & N_{1,x_1} & N_{2,x_2} & N_{2,x_1} & N_{3,x_2} & N_{3,x_1} & N_{4,x_2} & N_{4,x_1} \end{bmatrix},$$

so dass gilt :

$$\delta \bar{\Delta \mathbf{L}} = \mathbf{B}_L \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e \quad \text{und} \quad \Delta \bar{\mathbf{L}} = \mathbf{B}_L \Delta \hat{\mathbf{u}}_e, \quad (6-46)$$

mit  $\delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e$  und  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_e$  als Vektoren der inkrementellen Knotenverschiebungen des Elements. Der lineare Anteil der Verzerrungen des Prinzips der virtuellen Verrückungen aus Gl.(6-44)

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \Delta \mathbf{L} \cdot \delta \Delta \mathbf{L} dV \quad (6-47)$$

lässt sich so durch geeignete Zuordnungsmatrizen in der diskretisierten Form darstellen, wobei hier nach den globalen Koordinaten zur Zeit  $t$  differenziert wird. Die linearen Spannungsanteile ergeben sich somit zu

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} : \Delta \mathbf{L} \cdot \delta \Delta \mathbf{L} = [\mathbf{C} : \Delta \bar{\mathbf{L}}] \delta \Delta \bar{\mathbf{L}}^T = \delta \Delta \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{L}} = \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L^T \Delta \hat{\mathbf{u}}_e. \quad (6-48)$$

Der Materialoperator  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  wird hierbei in seiner Matrixdarstellung  $\mathbf{C}$  als 6x6-Matrix eingesetzt. Für die rechte Seite aus Gl.(6-44) gilt

$$\mathbf{T} \cdot \delta \Delta \mathbf{L} = \bar{\mathbf{T}} \delta \Delta \bar{\mathbf{L}}^T = \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{T}}. \quad (6-49)$$

Der quadratische Anteil aus Gl.(6-44) mit gemischten Termen aus Verschiebungsincrement und virtuellen Verschiebungen

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \delta \Delta \mathbf{Q} dV \quad (6-50)$$

wird mit den Spannungsmatrizen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \quad (6-51)$$

und der Zuordnungsmatrix für die Verschiebungs-Verzerrungrelation

$$\mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} N_{1,x1} & 0 & N_{2,x1} & 0 & N_{3,x1} & 0 & N_{4,x1} & 0 \\ N_{1,x2} & 0 & N_{2,x2} & 0 & N_{3,x2} & 0 & N_{4,x2} & 0 \\ 0 & N_{1,x1} & 0 & N_{2,x1} & 0 & N_{3,x1} & 0 & N_{4,x1} \\ 0 & N_{1,x2} & 0 & N_{2,x2} & 0 & N_{3,x2} & 0 & N_{4,x2} \end{bmatrix} \quad (6-52)$$

umgeformt, so dass sich für Gl.(6-50) der Ausdruck

$$\mathbf{T} \cdot \delta \Delta \mathbf{Q} = \mathbf{T} \cdot \frac{1}{2} (\delta \Delta \mathbf{H} + \delta \Delta \mathbf{H}^T) = \bar{\mathbf{T}} \delta \Delta \mathbf{Q}^T = \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{B}_{NL}^T \hat{\mathbf{T}} \mathbf{B}_{NL} \Delta \hat{\mathbf{u}}_e. \quad (6-53)$$

ergibt. Das Einsetzen der so formulierten Anteile des P.d.v.V. mit Gl.(6-48), Gl.(6-49) und Gl.(6-53) führt auf die diskretisierte Form

$$\delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{C} \mathbf{B}_L d\Omega \Delta \hat{\mathbf{u}}_e + \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_{NL}^T \hat{\mathbf{T}} \mathbf{B}_{NL} d\Omega \Delta \hat{\mathbf{u}}_e = \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \mathbf{A}_e - \delta \Delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{T}} d\Omega, \quad (6-54)$$

so dass die Elementsteifigkeitsmatrix aus zwei Anteilen  $\mathbf{K}_{e,L}$  und  $\mathbf{K}_{e,NL}$  zu bilden ist. Ausgehend von der grundlegenden Gleichgewichtsbeziehung

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K} \Delta \hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{A} - {}^t \mathbf{F}, \quad (6-55)$$

bei der der Subindex  $e$  weggelassen wurde, da diese Bedingung für eine elementweise Betrachtung ebenso wie für eine assemblierte Struktur gilt, ergibt sich für die U.L.-Darstellung

$$\left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_L + {}^t\mathbf{K}_{NL} \right) \Delta \hat{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{A} - {}^t\mathbf{F} \quad (6-56)$$

mit den Anteilen der Elementsteifigkeitsmatrix

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{e,L} = \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_L^T \mathbf{C}^{t+\Delta t} \mathbf{B}_L \det(\mathbf{J}) d\Omega \quad (6-57)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}_{e,NL} = \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{NL}^T \hat{\mathbf{T}} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_{NL} \det(\mathbf{J}) d\Omega \quad (6-58)$$

und dem Vektor der Elementknotenkräfte :

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_e = \int_{\Omega} {}^{t+\Delta t}\mathbf{B}_L^T \mathbf{T} \det(\mathbf{J}) d\Omega . \quad (6-59)$$

## 6.8 Inkrementelle Form der Gleichgewichtsbedingung

Zur Integration über die Zeit wird die bei impliziten Finite-Elemente-Programmen übliche inkrementelle Vorgehensweise gewählt. Durch die Einführung der Schädigungsvariablen  $d$  als Freiheitsgrad kann die Spannungsintegration vollständig lokal auf Gauß-Punkt-Ebene durchgeführt werden.

Neben den Verschiebungsinkrementen  $\Delta \mathbf{u}$  in den Knotenpunkten sind nun auch die Inkremente des globalen Schädigungsfeldes  $d$  vorgegeben, so dass daraus am Beginn eines Zeitschrittes die aktuellen Werte

$$\hat{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{u}}_t + \Delta \hat{\mathbf{u}} \quad (6-60)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{d}}_t + \Delta \hat{\mathbf{d}} \quad (6-61)$$

und alle Größen der inneren Variablen aus dem letzten Zeitschritt bekannt sind bzw. direkt ermittelt werden können. Ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtszustand zur Zeit  $t$  wird so die Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems zur Zeit  $t+\Delta t$  durch Iteration bestimmt.

Als Konsequenz dieser Vorgehensweise sind die Spannungen und alle Zustandsvariablen des Materials, ausgehend von einem bekannten Spannungs- und Materialzustand, in jedem Gauß-Punkt eines Elements zur Zeit  $t$  über das

Zeitintervall  $[t, t+\Delta t]$  zu integrieren. Die räumliche Integration durch gewichtete Summation der Gauß-Punkte ergibt die Elementknotenkräfte der globalen Gleichgewichtssiteration entsprechend den Ausführungen aus dem vorangegangenen Kapitel. Die Knotenverschiebungsinkremente und die Schädigungsinkremente in den Knotenpunkten aus dem Iterationsschritt des Newton-Raphson-Verfahrens werden dabei im Gauß-Punkt durch Anwendung der Ansatzfunktionen ermittelt. Die Implementierung dieses Verfahrens erfolgt über die, in dem FE-Programm ABAQUS verfügbare, Schnittstelle UEL, die die Anwendung von benutzerspezifischen Materialmodellen und Elementformulierungen erlaubt [Hib1998a].

## 6.9 Element-Integrationstechnik

Die Integration der Elementsteifigkeitsmatrix über die Fläche  $\Omega_e$  des ebenen Elements wird in der deformierten Referenzkonfiguration des Elements durchgeführt, so dass für eine beliebige zu integrierende Funktion  $f(\xi, \eta)$  gilt:

$$\int_{\Omega_e} f(\xi, \eta) dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}(\xi, \eta)) d\xi d\eta \quad (6-62)$$

Hierbei erfolgt die numerische Approximation der Integrale üblicherweise mittels des Verfahrens der Gauß-Integration, wobei die gewichtete Auswertung des Integrals an diskreten Stützstellen der Elementfläche erfolgt:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \det(\mathbf{J}) d\xi d\eta \approx \sum_{p=1}^{n_p} f(\xi_p, \eta_p) \det(\mathbf{J}_p) \alpha_p \det(\mathbf{F}_p) \quad (6-63)$$

Der Ausdruck  $\det(\mathbf{J}_p)$  transformiert die Referenzfläche auf die räumliche Ausgangskonfiguration und der Ausdruck  $\det(\mathbf{F}_p)$  berücksichtigt die deformierte Gauß-Punktfläche des Referenzelements. Die Werte der Gewichtungspunkte  $\alpha_p$ , sowie die Koordinaten der Stützstellen  $\xi_p$  und  $\eta_p$ , für das Verfahren der Gauß-Integration im 4-Knotenelement sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen:

$p$	$\xi_p$	$\eta_p$	$\alpha_p$
1	$-1/(3^{-0,5})$	$-1/(3^{-0,5})$	1
2	$+1/(3^{-0,5})$	$-1/(3^{-0,5})$	1
3	$-1/(3^{-0,5})$	$+1/(3^{-0,5})$	1
4	$+1/(3^{-0,5})$	$+1/(3^{-0,5})$	1

Abweichend von der beschriebenen Gauß-Integration erfolgt die Integration isoparametrischer Flächenelemente mit bi-linearen Ansatzfunktionen im FE-Programm ABAQUS mittels der reduzierten selektiven Integrationstechnik [Hib1998b]. Dabei wird die aktuelle Volumenänderung eines Gauß-Punktes durch die über das Element gemittelte Volumenänderung ersetzt. Diese Vorgehensweise verhindert das beim „vollen Integrationsschema“ auftretende „Locking“ von Elementen bei diskreten Verschiebungs konfigurierungen und annähernd inkompressiblem Materialverhalten. Die in [Nag1974, Hib1998a] beschriebene Modifikation des Deformationsgradienten wurde bei der hier implementierten Elementformulierung berücksichtigt, um numerisches stabiles Verhalten der Elemente zu erzielen und eine direkte Verifizierung der Ergebnisse mit ABAQUS-Standardberechnungen unter Verwendung des Elementtyps CPE4 (Abbildung ebener Verzerrungszustände) bzw. CPAX4 (ebene Elemente für die Abbildung axialsymmetrischer Strukturen) [Hib1998b] zu ermöglichen.

Bezüglich der Bildung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  wird eine Korrektur vorgenommen, so dass sich der gemittelte und im weiteren verwendete Deformationsgradient wie folgt berechnet:

$$\bar{\mathbf{F}} = \left( \frac{J}{\bar{J}} \right)^2 \mathbf{F} = \left( \frac{J}{\bar{J}} \right)^2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (6-64)$$

mit  $J = \det(\mathbf{F})$  und  $\bar{J}$ , über das Elementvolumen gemittelten Determinante des Deformationsgradienten

$$\bar{J} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} J dV_e \quad (6-65)$$

Der symmetrische Anteil des Verzerrungsgeschwindigkeitsgradienten  $\bar{\mathbf{D}}$  ergibt sich aus Verwendung des modifizierten Deformationsgradienten zu

$$\bar{\mathbf{D}} = \text{sym} \left( \dot{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{F}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left( \dot{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\mathbf{F}}^{-1} + \bar{\mathbf{F}} \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{-1} \right) + f \mathbf{I} \left( \frac{\dot{\bar{J}}}{\bar{J}} - \frac{\dot{J}}{J} \right) \quad (6-66)$$

oder direkt über die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  ausgedrückt zu :

$$\bar{\mathbf{D}} = \text{sym} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right) + f \mathbf{I} \left( \text{tr} \left( \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{u}}}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \text{tr} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right), \quad (6-67)$$

mit

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{v_e} \int_{v_e} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} dv_e \quad (6-68)$$

was auf die inkrementeller Form des Dehnungsinkrementes führt :

$$\Delta \bar{\mathbf{D}} = \text{sym} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) + f \mathbf{I} \left( \text{tr} \left( \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \text{tr} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) \quad (6-69)$$

Das so berechnete Dehnungsinkrement muss in der Aufstellung der Zuordnungsmatrizen berücksichtigt werden. Die Zuordnungsmatrix

$$\mathbf{B}_{u,\text{mod}} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \\ N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6-70)$$

bildet den Ausdruck  $\mathbf{I} \text{tr} \left( \frac{\partial \Delta \bar{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)$  bzw.  $\mathbf{I} \text{tr} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)$  aus Gl. (6-69) ab, woraus sich die

Definition der zusätzlichen Zuordnungsmatrix ergibt:

$$\mathbf{B}_u^* = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{B}}_{u,\text{mod}} - \mathbf{B}_{u,\text{mod}}). \quad (6-71)$$

Die Verzerrungen ergeben sich so über die Zuordnungsmatrizen

$$\Delta \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{B}_u \Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_u^* \Delta \hat{\mathbf{u}}. \quad (6-72)$$

Für die axialsymmetrische Elementformulierung wird weiterhin die „out-of-plane“-Komponente des Deformationsgradienten im Mittel gebildet:

$$\bar{F}_{33} = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} F_{33} dV_e. \quad (6-73)$$

## 6.10 Spannungsalgorithmus

Die Einschränkungen auf kleine elastische Verzerrungen, wie sie für metallische Werkstoffe auftreten, und klein angenommene Verzerrungsinkremente werden verwendet, um einen effizienten Spannungsalgorithmus zu entwickeln. Die zur Integration der konstitutiven Gleichungen verwendete Methode ist das Prädiktor-Korrektor-Verfahren, bei dem zuerst das gesamte Deformationsinkrement als elastisch angenommen wird. Von dieser Teillösung (elastische Vorschätzung) aus wird dann die plastische Deformation anhand der Projektion auf die Fließfläche

berechnet. Ausführliche Erläuterungen zu dem vorgestellten Verfahren in Zusammenhang mit der Integration der Stoffgleichungen des Gurson-Modells finden sich in [Arn2000]. Entsprechend wird hier ein implizites Integrationsverfahren (Euler-Rückwärts-Integration) über den Zeitschritt

$$\tau^{(n)} = \Delta t = t^{(n+1)} - t^{(n)} \quad (6-74)$$

angewendet.

Mit den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^{(n)}$  der Konfigurationen  $B_t$  und  $\mathbf{F}^{(n+1)}$  der Konfigurationen  $B_{t+\Delta t}$  erfolgt die Definition eines relativen Deformationsgradienten zwischen den beiden Konfigurationen:

$$\mathbf{F}^{(rel)} = \mathbf{F}^{(n+1)} \mathbf{F}^{(n)-1} . \quad (6-75)$$

Wird  $\mathbf{L}_p$  im Intervall näherungsweise als konstant angenommen, führt die Integration auf die exponentielle Form:

$$\mathbf{F}_p^{(n+1)} = \exp\left(\tau^{(n)} \mathbf{L}_p^{(n+1)}\right) \mathbf{F}_p^{(n)} . \quad (6-76)$$

Für kleine plastische Verzerrungssinkremente

$$\varepsilon_p = \left| \tau^{(n)} \mathbf{L}_p^{(n+1)} \right| \ll 1 \quad (6-77)$$

wird der exponentielle Term durch die Entwicklung

$$\exp\left(\tau^{(n)} \mathbf{L}_p^{(n+1)}\right) = \mathbf{I} + \tau^{(n)} \mathbf{L}_p^{(n+1)} + \mathbf{O}\left(\varepsilon_p^2\right) \quad (6-78)$$

angenähert<sup>2</sup>. Die Gl.(6-78) kann durch die Einführung des elastischen Prädiktors  $\mathbf{F}_e^{(tr)}$ , definiert durch die Anwendung des relativen Deformationsgradienten auf die elastische Deformation,

$$\mathbf{F}_e^{(tr)} = \mathbf{F}^{(rel)} \mathbf{F}_e^{(n)} , \quad (6-79)$$

in Abhängigkeit vom elastischen Deformationsgradienten formuliert werden:

$$\mathbf{F}_e^{(n+1)} = \mathbf{F}_e^{(tr)} \exp\left(\tau^{(n)} \mathbf{L}_p^{(n+1)}\right)^{-1} . \quad (6-80)$$

Durch den direkten Zusammenhang der Mandel-Spannungen  $\mathbf{M}$  mit dem elastischen Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_e$ , wie er sich aus der Verwendung des in Kapitel

---

<sup>2</sup> Diese Näherung gilt exakt, wenn  $\mathbf{L}_p^2 = \mathbf{0}$ , aber  $\mathbf{L}_p \neq \mathbf{0}$ . Dies ist z.B. der Fall für reine Schubverzerrung. [Arn2000]

3 skizzierten hyper-elastischen Stoffgesetzes ergibt, erweist sich diese Wahl der Formulierung als vorteilhaft.

Mit der polaren Zerlegung von  $\mathbf{F}_e^{(tr)}$  gilt<sup>3</sup>:

$$\mathbf{C}_e^{(tr)} = \mathbf{F}_e^{(tr)T} \mathbf{F}_e^{(tr)} = \mathbf{C}_e^{(n+1)} - \left[ \tau^{(n)} \mathbf{W}_p^{(n+1)}, \mathbf{C}_e^{(n+1)} \right] + \left\langle \tau^{(n)} \mathbf{D}_p^{(n+1)}, \mathbf{C}_e^{(n+1)} \right\rangle + \mathbf{O}(\varepsilon_p^2) \quad (6-81)$$

und

$$\mathbf{R}_e^{(n+1)T} \mathbf{R}_e^{(tr)} = \mathbf{U}_e^{(n+1)} \left[ \mathbf{I} + \tau^{(n)} \mathbf{L}_p^{(n+1)} \right] \mathbf{U}_e^{(tr)-1} + \mathbf{O}(\varepsilon_p^2). \quad (6-82)$$

Treten, wie gefordert, nur kleine elastische Verzerrungen auf, d.h.  $\mathbf{U}_e \approx \mathbf{I}$ , folgt

$$\mathbf{R}_e^{(n+1)T} \mathbf{R}_e^{(tr)} \cong \mathbf{I} + \tau \mathbf{W}_p \quad (6-83)$$

und die polare Zerlegung des Deformationsgradienten wird zu

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{R}_e \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p. \quad (6-84)$$

Mit der in Kapitel 2 erläuterten Annahme  $\mathbf{R}_p = \mathbf{I}$  ergibt sich zugleich, dass der plastische Wirbeltensor  $\mathbf{W}_p$  (Plastic Spin) rein kinematisch bestimmt ist. Damit gilt

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{R}_e \mathbf{U}_p \quad (6-85)$$

und somit  $\mathbf{R}_e \approx \mathbf{R}$  aus der Eindeutigkeit von  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$ . Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren aus Gl. (6-81) reduziert sich dann auf die folgende Form für den elastischen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_e$ :

$$\mathbf{E}_e^{(n+1)} = \mathbf{E}_e^{(tr)} - \tau^{(n)} \mathbf{D}_p^{(n+1)}. \quad (6-86)$$

## 6.11 Integration der Materialgleichungen

Die Integration der Materialgleichungen erfolgt für das lokale wie das nicht-lokale Gurson-Modell in analoger Weise, da die neu eingeführte globale Feldvariable  $d$  ausschließlich als innerhalb eines Inkrements vorgegebener Wert in die Fließbedingung eingeht. Die lokalen konstitutiven Gleichungen beider Modelle unterscheiden sich bis auf die Formulierung der Fließbedingung nicht.

<sup>3</sup> In der Notation treten die Lie-Klammer  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{A}$  sowie die Jacobi-Klammer  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}\mathbf{A}$  auf.

Die direkte Ermittlung der Spannungen  $\mathbf{M}^{(n+1)}$  und  $\mathbf{M}^{(tr)}$  aus der Anwendung des elastischen Verzerrungsmaßes  $\mathbf{E}_e = \ln \mathbf{U}_e$  aus Kapitel 2 über die Verzerrungen  $\mathbf{E}^{(n+1)}$  und  $\mathbf{E}^{(tr)}$  ermöglicht die Umformung des Ausdrucks der Mandel-Spannungen

$$\mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{E}_e \quad (6-87)$$

zu

$$\mathbf{M}^{(n+1)} = \mathbf{M}^{(tr)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \left( \tau^{(n+1)} \mathbf{D}_p^{(n+1)} \right) \quad (6-88)$$

Die Euler-Rückwärts-Integration der konstitutiven Gleichungen stellt so ein Projektionsverfahren des Spannungsprädiktors  $\mathbf{M}^{(tr)}$  auf den am nächsten gelegenen Punkt auf der Fließfläche  $\Phi^{(n+1)}$  dar [Arn2000, Sim1991]. Für die hier behandelte isotrope Verfestigung ist bei einer druck-unabhängigen Fließfläche die Projektionsrichtung durch die Normale an die Fließfläche gegeben. Durch Einsetzen der assoziierten Fließregel ergibt sich die vollständige Form der Rückwärts-Euler-Integration.

Das hierbei zur Anwendung kommende Potential nach Gurson ergibt sich zu

$$\Phi(\mathbf{M}, \sigma_m, f) = \frac{\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'}{\sigma_m} + 2 q_1 f^* \cosh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m} \right) - (q_1 f^*)^2 - 1 \quad , \quad (6-89)$$

bzw. für die nicht-lokale Formulierung des Gurson-Modells unter Berücksichtigung der globalen Schädigungsgröße  $d$  zu

$$\Phi_d(\mathbf{M}, \sigma_m, d) = \frac{\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'}{\sigma_m} + 2 q_1 d \cosh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m} \right) - (q_1 d)^2 - 1. \quad (6-90)$$

Im folgenden wird das Potential dort, wo keine weitere Fallunterscheidung erforderlich ist,  $\Phi$  genannt.

Die Evolution der plastischen Vergleichsdehnung  $\varepsilon_m$  ergibt sich aus Gl.(3.37). Durch die assoziierte Fließregel gilt die Proportionalität der Spannungen  $\mathbf{M}$  mit der plastischen Deformationsrate  $\mathbf{D}_p$  :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_p = (1 - f) \sigma_m \dot{\varepsilon}_m \quad . \quad (6-91)$$

Durch Einsetzen des Fließgesetzes aus Gl.(6-89) bzw. Gl.(6-90) und der entsprechenden Ableitung der Fließregel (s. Anhang) folgt

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{D}_p = \mathbf{M} \cdot \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} = -\dot{\lambda} \sigma_m \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \quad (6-92)$$

und es tritt nur noch der plastische Multiplikator  $\dot{\lambda}$  und die Ableitung des Potentials  $\Phi$  nach der Spannung  $\sigma_m$  auf. Das Produkt

$$\Delta \lambda = \dot{\lambda} \Delta t \quad (6-93)$$

wird als inkrementeller plastischer Multiplikator  $\Delta \lambda$  eingeführt. Damit gilt die inkrementelle Form für die plastische Vergleichsdehnung mit der nach Gurson auf die Verfestigung des Matrixmaterials bezogenen plastischen Dissipationsleistung:

$$\varepsilon_m^{(n+1)} = \varepsilon_m^{(n)} - \frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(n+1)}}{\partial \sigma_m} \quad (6-94)$$

Die Assemblierung der Gleichungen (6-88), (6-89) bzw. (6-90) und (6-94) sowie der Gleichung für die Evolution der lokalen Schädigung aus Kapitel 4 führt auf das nicht-lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(n+1)} &= \mathbf{M}^{(tr)} - \Delta \lambda \underset{=c}{\mathbf{C}} \left[ \frac{\partial \Phi^{(n+1)}}{\partial \mathbf{M}} \right] \\ \varepsilon_m^{(n+1)} &= \varepsilon_m^{(n)} - \frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(n+1)}}{\partial \sigma_m} = \Delta \lambda M_\varepsilon \\ f^{(n+1)} &= f^{(n)} + \Delta \lambda (1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial \Phi^{(n+1)}}{\partial \mathbf{M}} \right) - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(n+1)}}{\partial \sigma_m} = \Delta \lambda M_f \\ \Phi^{(n+1)} &= 0 \end{aligned} \quad (6-95)$$

das für den Vektor

$$\bar{\mathbf{x}} = \left\langle \mathbf{M}^{(n+1)}, \varepsilon_m^{(n+1)}, f^{(n+1)}, \dot{\lambda}^{(n+1)} \right\rangle^T \quad (6-96)$$

der unbekanntenen Größen zu lösen ist.

Die konstitutive Bestimmung des im nicht-lokalen Modell eingeführten Schädigungsfeldes  $d$  ergibt sich durch die Formulierung des Variationsprinzips auf globaler Ebene im Rahmen der Gleichgewichtsiteration der betrachteten Struktur.

## 6.12 Newton-Raphson-Verfahren

Die bevorzugte Wahl für die numerische Lösung dieses Gleichungssystems mit dem Unbekanntenvektor  $\bar{\mathbf{x}}$  aus Gl.(6-96) ist die Iteration mit dem Newton-Raphson-

Verfahren. Mit dem Lösungsvektor für den  $(k)$ -ten Iterationsschritt des letzten Gleichgewichtszustandes  $n$

$$\left\| {}^t \mathbf{F}^{(i-1)} \right\| < \varepsilon_{\text{err}} \quad (6-97)$$

und der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$ , als Matrix der Ableitungen der Zeilen in  $\bar{\mathbf{r}}$  nach allen unabhängigen Größen im Vektor  $\bar{\mathbf{x}}$ ,

$$\mathbf{J}^{(k)} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \quad (6-98)$$

ergibt sich für die Korrektur  $\Delta \bar{\mathbf{x}}$  des Vektors  $\bar{\mathbf{x}}$  die Iterationsvorschrift zu:

$$\bar{\mathbf{x}}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{x}}^{(k)} + \delta \bar{\mathbf{x}}^{(k)}, \quad \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(k)} = -(\mathbf{J}^{(k)})^{-1} \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}). \quad (6-99)$$

Als Startwert für die Iteration  $k = 0$  wird der Vektor

$$\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = \left\langle \mathbf{M}^{(tr)}, \varepsilon_m^{(n)}, f^{(n)}, \dot{\lambda}^{(n)} \right\rangle^T \quad (6-100)$$

gewählt, der sich aus der elastischen Vorschätzung  $\mathbf{M}^{(tr)}$  des aktuellen Inkrements  $n+1$  und den Zustandsvariablen des letzten Gleichgewichtszustandes  $n$  zusammensetzt. Konvergenz ist erreicht, wenn der Betrag des Fehlervektors eine Fehlertoleranz  $\varepsilon_{\text{err}}$  unterschreitet:

$$\left| \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) \right| < \varepsilon_{\text{err}}. \quad (6-101)$$

Mit der Bestimmung des Lösungsvektors Gl.(6-96) kann auch der elastische Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_e^{(n+1)}$  bestimmt werden. Aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_e^{(n+1)} = \mathbf{R}_e^{(n+1)} \mathbf{U}_e^{(n+1)} \quad (6-102)$$

folgt wegen der Beschränkung auf kleine elastische Verzerrungen und der Annahme  $\mathbf{R}_p = \mathbf{I}$  und der daraus folgenden Übereinstimmung  $\mathbf{R}_e = \mathbf{R}$ :

$$\mathbf{F}_e^{(n+1)} = \mathbf{R}^{(n+1)} \mathbf{U}_e^{(n+1)}. \quad (6-103)$$

Das Schema für den Ablauf dieses Verfahrens in der Implementierung im Finite-Elemente Programm ist in der Tafel 6.1 angegeben. Über die Benutzerschnittstelle UEL des FE-Programms wird das in der Programmiersprache C geschriebene Programm zur Elementformulierung aufgerufen. Dort wird die Integration der

Materialgleichungen in jedem Gauß-Punkt durchgeführt. Die Änderungsterme der zu den Knotenfreiheitsgraden konjugierten Größen (Verschiebung : Kraft bzw. Schädigung : Schädigungsfluss) etablieren die physikalischen Prinzipien, hier als das P.d.v.V. und die Schädigungsvariation im FE-Programm.

Für die Berechnung der Kirchhoff-Spannungen wird unter der Annahme  $\mathbf{R}_e = \mathbf{R}$  auf die Transformationsbeziehung zwischen den Mandel-Spannungen und den Kirchhoff-Spannungen aus Kapitel 2

$$\mathbf{K}^{(n+1)} = \mathbf{R}^{(n+1)} \mathbf{M}^{(n+1)} \mathbf{R}^{(n+1)T} \quad (6-104)$$

zurückgegriffen, die dann in das Variationsprinzip zur Gleichgewichtsermittlung eingehen.

## 6.13 Ermittlung der Tangente der Stoffgesetziteration

### 6.13.1 Lokales Gurson-Modell

Für die Bestimmung des Materialtangenteoperators des lokalen Gurson-Modells ergibt sich der Zusammenhang zwischen Dehnungs- und Spannungsinkrement aus der impliziten Euler-Rückwärts-Integration (s.a.Gl.(6-88)) zu:

$$\dot{\mathbf{M}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} \right) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \cdot \mathbf{N}), \quad (6-105)$$

wobei die Abkürzung

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} = \frac{3}{\sigma_m^2} \mathbf{M}' + \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_m} \sinh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m} \right) \mathbf{I} \quad (6-106)$$

eingeführt worden ist.

Weiterhin ist mit  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , das zur Mandel-Spannung  $\mathbf{M}$  konjugierte Dehnungsmaß  $\boldsymbol{\varepsilon} \hat{=} \mathbf{E}_e = \ln \mathbf{U}_e$  bezeichnet, da die Herleitung formal auch auf hypoelastisch-plastische Formulierungen angewendet werden kann, wobei für die Mandel-Spannungen die Kirchhoff-Spannungen und das entsprechende Dehnungsmaß eingesetzt werden können.

Mit den Evolutionsgleichungen

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda M_\varepsilon = \lambda \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \quad (6-107)$$

$$\dot{f} = \lambda M_f = \lambda \left( (1-f) \mathbf{N} : \mathbf{I} - A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right) \quad (6-108)$$

aus Kapitel 4 führt die Ableitung der Konsistenzbedingung  $\dot{\Phi} = 0$  führt für das lokale Gurson-Modell auf

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} \dot{\mathbf{M}} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} \dot{\varepsilon}_m \\ &= \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\dot{\varepsilon} - \lambda \mathbf{N}) + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \lambda M_f + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} \lambda M_\varepsilon \\ &= \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \dot{\varepsilon} + \left( -\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon \right) \lambda = 0 \end{aligned} \quad (6-109)$$

woraus sich durch Umformung der plastische Multiplikator zu

$$\lambda = \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \dot{\varepsilon}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon} \quad (6-110)$$

ergibt. Einsetzen in die Form des Spannungskrementes aus dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren Gl.(6-105) führt auf die Darstellung der Tangente des lokalen Gurson-Modells zu:

$$\dot{\mathbf{M}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon} : \dot{\varepsilon} \right) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \dot{\varepsilon} \quad (6-111)$$

mit der Tangente für plastische Zustandsänderungen

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e - \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon} \quad (6-112)$$

Für die Bildung des konsistenten Materialoperators der Stoffgesetzintegration mit dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist die Bildungsvorschrift der Mandel-Spannungen gemäß

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{M}_{n+1}^{(tr)} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \varepsilon_{n+1} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} \quad (6-113)$$

zu berücksichtigen. Die Bildung des Differentials dieses Ausdrucks führt auf die Einzelterme

$$\begin{aligned}
& D\mathbf{M}_{n+1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \\
& \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} \right) \Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
& \frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} \right) \Delta\mathbf{N} = -(\Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e) : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} \Delta\mathbf{M}, \\
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} \right) \Delta\lambda = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1}) \Delta\lambda
\end{aligned} \tag{6-114}$$

woraus sich die linearisierte Form des Inkrements der Mandel-Spannungen ergibt:

$$\Delta\mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - (\Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e) : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} \Delta\mathbf{M} + \Delta\lambda (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1}). \tag{6-115}$$

Mit der Umformung

$$\Delta\mathbf{M} \left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} \right) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} \tag{6-116}$$

und der Abkürzung

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^* = \frac{\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e}{\left( \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} \right)} \tag{6-117}$$

ergibt sich so die Form:

$$\Delta\mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{N}\Delta\lambda) \tag{6-118}$$

Die Ableitung der Konsistenzbedingung in der inkrementellen Form führt auf

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} : \Delta\mathbf{M} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{N}\Delta\lambda) + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_m \\
&= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{N}\Delta\lambda) + \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f \Delta\lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} M_\varepsilon \Delta\lambda
\end{aligned} \tag{6-119}$$

woraus sich das Inkrement des plastischen Multiplikators ergibt:

$$\Delta\lambda = \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial \lambda}}, \tag{6-120}$$

Einsetzen Gl.(6-120) in die Form des Spannungsinkrements Gl.(6-118) führt auf

$$\Delta \mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \left( \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{N} \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} M_\varepsilon} \right) \quad (6-121)$$

und unter Verwendung der Abkürzung

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^* = \frac{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}{\left( \mathbf{1} + \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \mathbf{M}} \right)} \quad (6-122)$$

auf den Ausdruck

$$\Delta \mathbf{M} = \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*)}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} M_\varepsilon} \right) : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6-123)$$

womit der direkte Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und dem Dehnungsinkrement beschrieben ist. Hieraus ergibt sich die Definition des konsistenten inkrementellen Tangentenoperators für plastische Zustandsänderungen

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_c = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*)}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} M_\varepsilon} \quad (6-124)$$

im Vergleich zum Materialoperator der Stoffgesetzintegration:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e - \frac{(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e)}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} M_\varepsilon}. \quad (6-125)$$

### 6.13.2 Nicht-lokales Gurson-Modell

Die Anwendung des nicht-lokalen Gurson-Modells führt auf insgesamt vier Materialoperatoren, die sich durch die Verwendung einer zweiten Feldgröße und der Kopplung des Verschiebungsfelds mit dem Schädigungsfeld ergeben. Aus dem Spannungs-Dehnungszusammenhang ergeben sich nun wieder über die Ermittlung des plastischen Multiplikators die zugehörigen Materialoperatoren. Mit deren Hilfe ermittelt man die Spannungsrate aus dem Dehnungsinkrement und dem Schädigungsinkrement. Ebenso werden aus der Feldgleichung für die Schädigungsrate die Operatoren für die Beiträge des Dehnungsinkrements und des Schädigungsinkrements für die Entwicklung des Schädigungsflusses bestimmt.

Für die Bildung des Spannungsinkrements gilt die zum lokalen Modell analoge Form

$$\dot{\mathbf{M}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} \right) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \cdot \mathbf{N}). \quad (6-126)$$

Mit der Fließbedingung des nicht-lokalen Modells

$$\Phi_d(\mathbf{M}, \sigma_m, d) = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}'}{\sigma_m} + 2 q_1 d \cosh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m} \right) - (q_1 d)^2 - 1 \quad (6-127)$$

ergibt die Ableitung der Konsistenzbedingung  $\dot{\Phi} = 0$  für das nicht-lokale Gurson-Modell

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} \dot{\mathbf{M}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} \dot{\varepsilon}_m + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d} = 0, \quad (6-128)$$

und weiter unter Berücksichtigung des Spannungsinkrements und der Evolutionsgleichungen zu

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \mathbf{N}) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} \lambda M_\varepsilon + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d} \\ &= \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( -\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon \right) \lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d} = 0 \end{aligned} \quad (6-129)$$

Hieraus wird durch Umformung das Inkrement des plastischen Multiplikators ermittelt:

$$\lambda = \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon}, \quad (6-130)$$

das eingesetzt in die Gleichung des Spannungsinkrements auf die Form

$$\dot{\mathbf{M}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda \cdot \mathbf{N}) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \Phi}{\partial d} \dot{d}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon} \mathbf{N} \right) \quad (6-131)$$

führt und mit der Abkürzung

$$H = \frac{\partial \Phi}{\partial f} M_f + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} M_\varepsilon \quad (6-132)$$

schließlich

$$\dot{\mathbf{M}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e - \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - H} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} \frac{\partial \Phi}{\partial d}}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - H} \right) \dot{d} \quad (6-133)$$

ergibt. Die Entwicklungsgleichung der globalen Schädigung führt schließlich auf

$$\dot{d} = \dot{f} - c \nabla^2 \dot{d} = M_f \lambda - c \nabla^2 \dot{d} \quad (6-134)$$

und unter Verwendung des Ausdrucks für den plastischen Multiplikator zu

$$0 = M_f \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - H} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( 1 - M_f \frac{\partial \Phi / \partial d}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N} - H} \right) \dot{d} - c \nabla^2 \dot{d}. \quad (6-135)$$

Auch für die Herleitung des konsistenten inkrementellen Materialoperators wird die selbe Vorgehensweise wie bei der lokalen Form des Gurson-Modells gewählt. Die Bildung des Spannungsinkrements

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{M}_{n+1}^{(tr)} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} \quad (6-136)$$

führt über die Bildung des Differentials

$$\begin{aligned} D\mathbf{M}_{n+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &\Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1}) \Delta \mathbf{N} &= -\Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} \Delta \mathbf{M} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1}) \Delta \lambda &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1} \Delta \lambda \end{aligned} \quad (6-137)$$

auf die Gleichung

$$\Delta \mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e) : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} \Delta \mathbf{M} + \Delta \lambda (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{N}_{n+1}) \quad (6-138)$$

und durch Umformen auf die Form

$$\Delta \mathbf{M} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e^* : (\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{N} \Delta \lambda) \text{ mit } \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e^* = \frac{\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e}{\left( \mathbf{1} + \Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 \mathbf{M}} \right)}. \quad (6-139)$$

Die Differentiation der Konsistenzbedingung wird nun unter Berücksichtigung der Differentiation des globalen Schädigungsfeldes durchgeführt :

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} : \Delta\mathbf{M} + \frac{\partial\Phi}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_m} \Delta\varepsilon_m \\
&= \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : (\Delta\varepsilon - \mathbf{N}\Delta\lambda) + \frac{\partial\Phi}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_m} \Delta\varepsilon_m, \\
&= \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : (\Delta\varepsilon - \mathbf{N}\Delta\lambda) + \frac{\partial\Phi}{\partial d} \Delta d + M_\varepsilon \Delta\lambda = 0
\end{aligned} \tag{6-140}$$

wobei für die Ableitung der Fließfunktion gilt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial d} = \frac{\partial d^*}{\partial d} \left( 2q_1 \cosh\left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2\sigma_m} \right) - 2q_1^2 d^* \right). \tag{6-141}$$

Für den plastischen Multiplikator ergibt sich so durch Umformen der Gl.(6-140)

$$\Delta\lambda = \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \Delta\varepsilon - \frac{\partial\Phi}{\partial d} \Delta d}{\left( \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_m} \frac{\partial\varepsilon_m}{\partial\lambda} \right)} \tag{6-142}$$

und so schließlich der Ausdruck für das Spannungskrement

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{M} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : (\Delta\varepsilon - \mathbf{N}\Delta\lambda) = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \left( \Delta\varepsilon - \mathbf{N} \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \Delta\varepsilon - \frac{\partial\Phi}{\partial d} \Delta d}{\left( \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_m} \frac{\partial\varepsilon_m}{\partial\lambda} \right)} \right) \\
&= \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* - \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N}}{\left( \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_m} \frac{\partial\varepsilon_m}{\partial\lambda} \right)} \right) : \Delta\varepsilon + \left( \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial d} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N}}{\left( \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_m} \frac{\partial\varepsilon_m}{\partial\lambda} \right)} \right) \Delta d.
\end{aligned} \tag{6-143}$$

Für das globale Schädigungskrement gilt die Bilanz

$$0 = \Delta d - \Delta f - c\nabla\Delta d, \tag{6-144}$$

mit der Bildung des Differentials

$$\begin{aligned}
Dd_{n+1} &= D(\Delta d - \Delta f + c\nabla^2 d) \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial d} (\Delta d - \Delta f + c\nabla^2 \Delta d) \Delta d &= \Delta d \\
\frac{\partial}{\partial \lambda} (d_n - \Delta f + c\nabla^2 \Delta d) \Delta \lambda &= \frac{\partial \Delta f}{\partial \lambda} \Delta \lambda = M_f \Delta \lambda
\end{aligned} \tag{6-145}$$

Somit ist die linearisierte Form der Bilanzgleichungen gegeben zu

$$0 = M_f \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*}{\left( \underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda} \right)} \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \left( 1 - M_f \frac{\partial \Phi / \partial d}{\left( \underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda} \right)} \right) \Delta d \quad (6-146)$$

und

$$\Delta \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* - \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}}}{\left( \underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda} \right)} \right) : \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \left( \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial d} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}}}{\left( \underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda} \right)} \right) \Delta d \quad (6-147)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{\mathbf{M}}} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma \varepsilon} : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma d} \Delta d \\ 0 &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{d \varepsilon} : \Delta \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{dd} \Delta d \end{aligned} \quad (6-148)$$

mit den Operatoren

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma \varepsilon} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* - \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}}}{\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma d} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial d} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}}}{\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda}} \quad (6-149)$$

und

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{d \varepsilon} = M_f \frac{\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*}{\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{dd} = 1 - M_f \frac{\partial \Phi / \partial d}{\underline{\underline{\mathbf{N}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \underline{\underline{\mathbf{N}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m}} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda}}, \quad (6-150)$$

wobei die aufgeführten Ableitungen im Anhang (Kapitel 11) detailliert dargestellt werden.

## 6.14 Konvergenzkriterien

Die Anwendung eines gemischten Variationsprinzips, bei dem die eingeführten Freiheitsgrade des Elements verschiedene physikalische Größen repräsentieren (Verschiebung, Schädigung) erfordert die besondere Beachtung der Konvergenzkriterien der globalen Gleichgewichtsiteration der Systemgleichungen. Der Gleichgewichtszustand ist erreicht, wenn die Gleichung

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(i-1)} \Delta \hat{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{A}}} - {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{(i-1)} \quad (6-151)$$

erfüllt ist, d.h. die Differenz zwischen den äußeren „Kräften“  $\mathbf{A}$  und den „Knotenkräften“  $\mathbf{F}$  sich innerhalb einer vorgegebenen Fehlertoleranz zu null ergeben:

$$\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{A} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \right\| < \varepsilon_{\text{fehler}} \quad (6-152)$$

Hierbei sind  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{F}$  die zusammengesetzten Vektoren der Knotenkräfte und der Änderungswerte des globalen Schädigungsfelds. Gegenüber einer klassischen FE-Rechnung ist der Vektor der Elementknotenkräfte und der Elementfreiheitsgrade mit Kraft und Schädigungswerten besetzt, so dass für die verschiedenen „Klassen“ von Freiheitsgraden unterschiedliche Fehlerschranken eingeführt werden müssen, so dass gilt :

$$\left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{A} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_u^{(i-1)} \right\| < \varepsilon_{u,\text{fehler}} \quad \text{und} \quad \left\| {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_d^{(i-1)} \right\| < \varepsilon_{d,\text{fehler}} , \quad (6-153)$$

mit  $\mathbf{F}_u$  als Vektor der Knotenkräfte und  $\mathbf{F}_d$  als Vektor der Werte der Schädigungsänderung.

Das FE-Programm ABAQUS erlaubt für jede der beschriebenen physikalischen Feldgrößen die Angabe eigener Konvergenzkriterien<sup>4</sup> [Hib1998b]: Der Gleichgewichtszustand der Iteration des Inkrements  $n$  ist erreicht, wenn die größte auftretende Ungleichgewichtskraft  $\tau_{\max}^\alpha$  kleiner ist, als ein aus dem zeitlich über die Belastungsgeschichte gemittelter Fluss  $\bar{q}^\alpha$  und mit  $R_n^\alpha \bar{q}^\alpha$  gewichteter Grenzwert

$$\tau_{\max}^\alpha \leq R_n^\alpha \bar{q}^\alpha . \quad (6-154)$$

Ist dieses Kriterium erfüllt, so wird geprüft, ob die größte Lösungskorrektur  $c_{\max}^\alpha$  „klein“ im Verhältnis zum größten Zuwachs des Freiheitsgrades  $\Delta u_{\max}^\alpha$  ist, dessen Größe mit dem Faktor  $C_n^\alpha$  gewichtet wird

$$c_{\max}^\alpha \leq C_n^\alpha \Delta u_{\max}^\alpha . \quad (6-155)$$

Ist der im momentanen Belastungsinkrement gemittelte Fluss  $\bar{q}^\alpha$  um einen Faktor  $\varepsilon^\alpha$  kleiner als  $\bar{q}^\alpha$ , gilt das Kriterium für „zero flux“

$$\bar{q}^\alpha \leq \varepsilon^\alpha \bar{q}^\alpha , \quad (6-156)$$

so dass die Lösung nur dann akzeptiert wird, wenn die größte auftretende Ungleichgewichtskraft  $\tau_{\max}^\alpha$  klein gegenüber dem gemittelten Fluss ist

<sup>4</sup> Im folgenden bezeichnete Größen mit dem Index  $(\cdot)_\alpha$  beziehen sich jeweils auf die verwendeten Feldgrößen.

$$\tau_{\max}^{\alpha} \leq \varepsilon^{\alpha} \tilde{q}^{\alpha} . \quad (6-157)$$

Ist dieses Kriterium nicht erfüllt, was insbesondere für die Entwicklung des globalen Schädigungsfelds möglich ist<sup>5</sup>, so wird die Konvergenz nur dann akzeptiert wenn gilt

$$c_{\max}^{\alpha} \leq C_{\varepsilon}^{\alpha} \Delta u_{\max} . \quad (6-158)$$

Somit kann das „zero flux“-Kriterium umgangen werden, wenn die Ungleichung immer erfüllt ist, was durch die Angabe von hohen Werten für  $C_{\varepsilon}^{\alpha}$  erreicht werden kann.

## 6.15 Elementverifikation

Für die Verifikation des entwickelten Elementtyps bzgl. der Modellierung großer Deformationen wird hier beispielhaft der Belastungsfall bei reiner Schubbeanspruchung ohne Schädigungsentwicklung für eine hypoelastische und eine hyperelastische Formulierung vorgestellt. Weiter werden Ergebnisse der Schädigungssimulation des lokalen Gurson-Modells auf Basis der hyper-elastischen Formulierung aus Kapitel 3 mit den Ergebnissen der erweiterten Elementformulierung für das nicht-lokale Gurson-Modell vorgestellt.

### 6.15.1 Elementverifikation für große Deformationen

Zur Verifikation des entwickelten Elementtyps zur Abbildung ebener Verzerrungszustände und der Berücksichtigung großer Deformationen wird der Belastungsfall der einfache Scherung („simple shear“) untersucht (s. Bild 6.6). Für eine ebene Schubverzerrung nimmt der Deformationsgradient die Form

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6-159)$$

an. Der Scherwinkel ist eine lineare Funktion der Zeit:

$$\gamma(t) = \frac{v_0}{h} t . \quad (6-160)$$

Die Simulation des Belastungsfalls erfolgt in Abstimmung mit der Modellverifikation in [Arn2000] unter Berücksichtigung klassischer von-Mises-Plastizität und linearer isotroper Verfestigung und einer hypoelastischen und einer hyperelastischen

<sup>5</sup> Hierfür ist der Quellterm des lokalen Schädigungsfelds verantwortlich, der lokal in der Struktur für großen Schädigungszuwachs sorgen kann, obgleich die, über die Struktur gemittelten, Schädigungsflüsse klein bzw. null sind.

Formulierung. In Ergänzung werden die Ergebnisse für linear-kinematische Verfestigung für die hyperelastische Formulierung mit in die Betrachtung einbezogen, wie sie in [Arn2000] für eine hyper-elastische Implementierung mit kinematischer Verfestigung ermittelt wurden. Für die Rechnungen sind vier Materialparameter anzugeben: Die elastischen Konstanten  $E = 210 \text{ GPa}$  und  $\nu = 0.3$ , für die Beschreibung des plastischen Materialverhaltens, die Fließspannung  $\sigma_y = 500 \text{ MPa}$  und der isotrope Verfestigungsmodul  $H = 1000 \text{ MPa}$  bzw.  $c = 1000 \text{ MPa}$  für die kinematische Verfestigungsmodellierung.

Bild [6.7a] zeigt die Ergebnisse des Spannungsverlaufs der Schubspannungskomponente der Kirchhoff-Spannungen  $K_{12}$  für den in ABAQUS implementierten CPE4-Elementtyp und einer Modellimplementierung über die Schnittstelle UMAT im Vergleich zu dem in Abschnitt 6.3 vorgestellten Elementtyp und der Implementierung über die ABAQUS-Schnittstelle UEL. Die Ergebnisse der UMAT-Rechnungen stimmen dabei exakt mit denen der Rechnungen mit der UEL-Schnittstelle überein. Unterschiede ergeben sich erwartungsgemäß für den der Schubspannungskomponentenverlauf der hyperelastischen Formulierung mit kinematischer Verfestigung.

In den Bildern [6.7b] - [6.7d] ist die Kirchhoff-Spannungskomponente  $K_{22}$  für die lineare isotrope Verfestigung der hyper-elastischen Formulierung [6.7b] und der hypoelastischen Formulierung und der hyper-elastischen Formulierung mit linearer kinematischer Verfestigung [6.7c] über der Schubbeanspruchung  $\gamma$  aufgetragen. Auch hier sind die Ergebnisse der UMAT- und der UEL-Implementierung in allen drei Fällen identisch. Bei der hypoelastischen Formulierung [6.7b] treten die im 2. Kapitel erwähnten Oszillationen auf. Für die Spannung  $K_{22}$  für die hyper-elastischen Formulierungen [6.7a] und [6.7b] ergibt sich mit wachsender Schubverzerrung  $\gamma$  ein kontinuierlicher Anstieg, wobei sich die Unterschiede in der Höhe durch die unterschiedlichen Verfestigungsmodellierungen ergeben.

### 6.15.2 Elementverifikation für die Schädigungssimulation

Für die Verifikation der Schädigungsentwicklung werden Ergebnisse von Rechnungen mit der Elementformulierung für ebene Dehnungszustände und der Elementformulierung für die Simulation axial-symmetrischer Strukturen herangezogen. Die so gewonnenen Ergebnisse werden mit den Resultaten der entsprechenden Elementformulierungen des FE-Programms ABAQUS und einer Implementierung des lokalen Gurson-Modells verglichen. Durch die Annahme einer

homogenen Schädigungsverteilung und der Vernachlässigung des Gradiententerms der nicht-lokalen Schädigungsevolution ( $c=0$ ) entsprechen sich die Gleichungen des nicht-lokalen und des lokalen Gurson-Modells.

Es wird idealplastisches isotropes Verfestigungsverhalten mit einer Fließspannung von  $\sigma_y=500$  MPa und einem linearen Verfestigungsmodul  $H=0$  MPa angenommen. Der hohe anfängliche Hohlraumvolumenanteil  $f_0=0,1$  und die Wahl des kritischen Hohlraumvolumenanteils von  $f_c=0,1125$  bedingen eine ausgeprägte Schädigungsentwicklung bis zu einem finalen Hohlraumvolumenanteil von  $f_f=0,18$ . Die für die Rechnung eingesetzten Materialparameter sind im Detail der Tabelle 6.1 zu entnehmen.

Die Bilder [6.8a] bis [6.8c] zeigen die Ergebnisse der Simulation einer reinen Zugbeanspruchung und der Verwendung des ABAQUS eigenen Elementtyps CPE4 über die Schnittstelle UMAT und der Verwendung des Elementtyps mit Schädigungsfreiheitsgrad über die Schnittstelle UEL. Für die Spannungsverläufe, die lokale Schädigungsentwicklung  $f$  und die Entwicklung der Plastizität  $p$  ergeben sich gute Übereinstimmungen zwischen den beiden Elementtypen.

Die Bilder [6.8d]-[6.8f] zeigen die Ergebnisse der Simulation einer reinen Zugbeanspruchung der Verwendung des ABAQUS eigenen Elementtyps CAX4 und der entsprechenden Formulierung mit zusätzlichem Schädigungsfreiheitsgrad für die Abbildung axialsymmetrischer Strukturen. Auch hier wird eine gute Übereinstimmung des Spannungsverlaufs, der lokalen Schädigungsentwicklung  $f$  und der Entwicklung der Plastizität  $p$  erzielt.

### 6.16 Verifikation des Gradientenmodells

Für die Untersuchung des Gradienteneinflusses des nicht-lokalen Gurson-Modells wird ein auf Zug beanspruchter Stab mit einer vorgegebenen Schädigungsinhomogenität untersucht. Der Stab wird mit drei verschiedenen Elementkantenlängen  $l_e = 1,0$ mm,  $l_e = 0,5$ mm und  $l_e = 0,25$  mm bei gleichmäßiger Elementierung modelliert (Bild 6.9). Hierbei werden die 4-Knotenelemente mit zusätzlichem Schädigungsfreiheitsgrad mittels der UEL-Schnittstelle des FE-Programms ABAQUS verwendet.

Es wird ein idealplastisches isotropes Verfestigungsverhalten mit einer Fließspannung von  $\sigma_y=450$  MPa und einem linearen Verfestigungsmodul  $H=0$  MPa angenommen. Der hohe anfängliche Hohlraumvolumenanteil  $f_0=0,1$  und die Wahl des kritischen Hohlraumvolumenanteils von  $f_c = 0,012$  bedingen eine rapide

Schädigungsentwicklung in der Struktur bis zum Versagen einzelner Elemente bei einem finalen Hohlraumvolumenanteil von  $f_f = 0,18$ . Die für die Rechnung eingesetzten Materialparameter sind im Detail der Tabelle 6.1 zu entnehmen. In der Stabmitte wird als Schädigungsinhomogenität in einem vorgegebenen Flächenbereich ein anfänglicher Hohlraumvolumenanteil  $f_0^* = 1,1 \cdot f_0$  vorgegeben (s. Markierung in Bild 6.9).

Der Vergleich der Ergebnisse der Kraft-Verschiebungs-Kurven in Bild 6.10 der drei verschiedenen Strukturdiskretisierungen für das „lokale Modell“ ( $c=0$ ) zeigt deutlich die pathologische Netzabhängigkeit einer lokalen Schädigungssimulation, in der die Kraft-Verschiebungs-Kurven mit feiner werdender Diskretisierung ein zunehmend beschleunigtes Versagensverhalten aufweisen.

Bild 6.11a zeigt die Kraft-Verschiebungs-Kurven des Stabes mit einer Elementkantenlänge  $l_e = 1,0\text{mm}$  und einer Gradientenwirkung  $c = -0,5$  bis  $c = 1,0$ . Für negative Werte  $c < 0$  kommt es zu einer Schädigungskonzentration in dem mittleren Bereich des Stabes, was zu einem beschleunigten Versagensverhalten der Struktur in Form eines rapiden Kraftabfalls gegenüber der „lokalen“ Rechnung mit  $c=0$  führt. Für  $c$ -Werte größer null, wird ein zunehmend steiferes Strukturverhalten abgebildet, da es durch den Einfluss des Gradiententerms zu einem Schädigungsausgleich in der Struktur kommt. Für größer werdende Werte  $c$  dominiert schließlich der Schädigungsausgleich gegenüber der lokalen Schädigungsproduktion durch die Änderung des lokalen Hohlraumvolumenanteils, so dass das Verfestigungsverhalten nicht mehr durch die Schädigungsänderung beeinflusst wird.

Die Ergebnisse der Strukturdiskretisierung mit einer Elementkantenlänge von  $l_e = 0,5\text{mm}$  und  $l_e = 0,25\text{mm}$  in Bild 6.11b und Bild 6.11c zeigen ein analoges Verhalten, wobei hier nur Ergebnisse mit Werten  $c > 0$  Berücksichtigung finden.

Eine Zusammenstellung der Kraft-Verschiebungs-Kurven der nicht-lokalen Rechnung mit  $c = 1,0$  zeigt, dass die Netzabhängigkeit der Simulation durch einen Schädigungsausgleich in der Struktur minimiert wird (Bild 6.12). Der unterschiedliche Zeitpunkt des rapiden Abfalls der Kraft-Verschiebungs-Kurven ist durch das Erreichen des maximalen Schädigungswertes  $f_f$  in den Elementen bedingt, die den tragenden Querschnitt der Struktur in Abhängigkeit von der Elementkantenlänge bzw. dem repräsentativen Gauß-Punktvolumen abrupt verändern.

Abweichungen in dem Strukturverhalten ergeben sich in diesem Beispiel auch durch die begrenzte Größe des Bereichs in dem sich die Schädigungszone beschränkt

durch die Stabbreite ausbreiten kann. Weiterhin ist der Schädigungsbereich von den „freien“ Stabrändern abgegrenzt, so dass der Schädigungsabfluss ausschließlich in Längsrichtung des Stabes erfolgt.

## 6.17 Tabellen

**Tabelle6.1a: Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen**

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$f_0$	$f_c$	$f_f$	$f_u^*$	$f_n$	$s_n$	$\varepsilon_n$
1,5	1,0	2,25	0,1	0,1125	0,18	0,5	0,1	0,1	0,3

**Tabelle6.1b: Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für ideal-plastisches Verhalten für die Beispielrechnungen**

$E$ [MPa]	$\nu$	$H$ [MPa]	$\sigma_y$ [MPa]
210000	0,3	0	450

## 6.18 Bilder

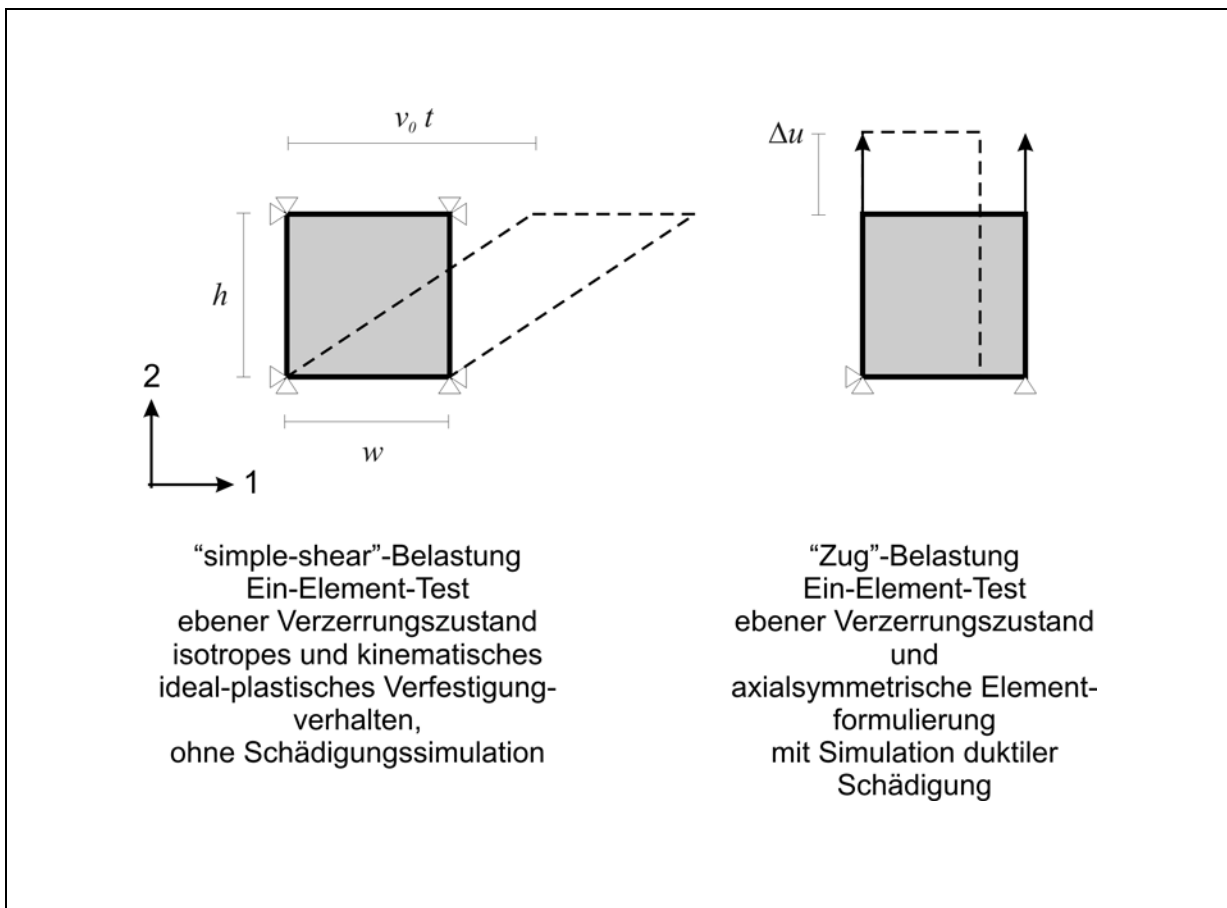


Bild 6.6: Elementverifikation für große Deformationen mit „Ein-Element“-Tests

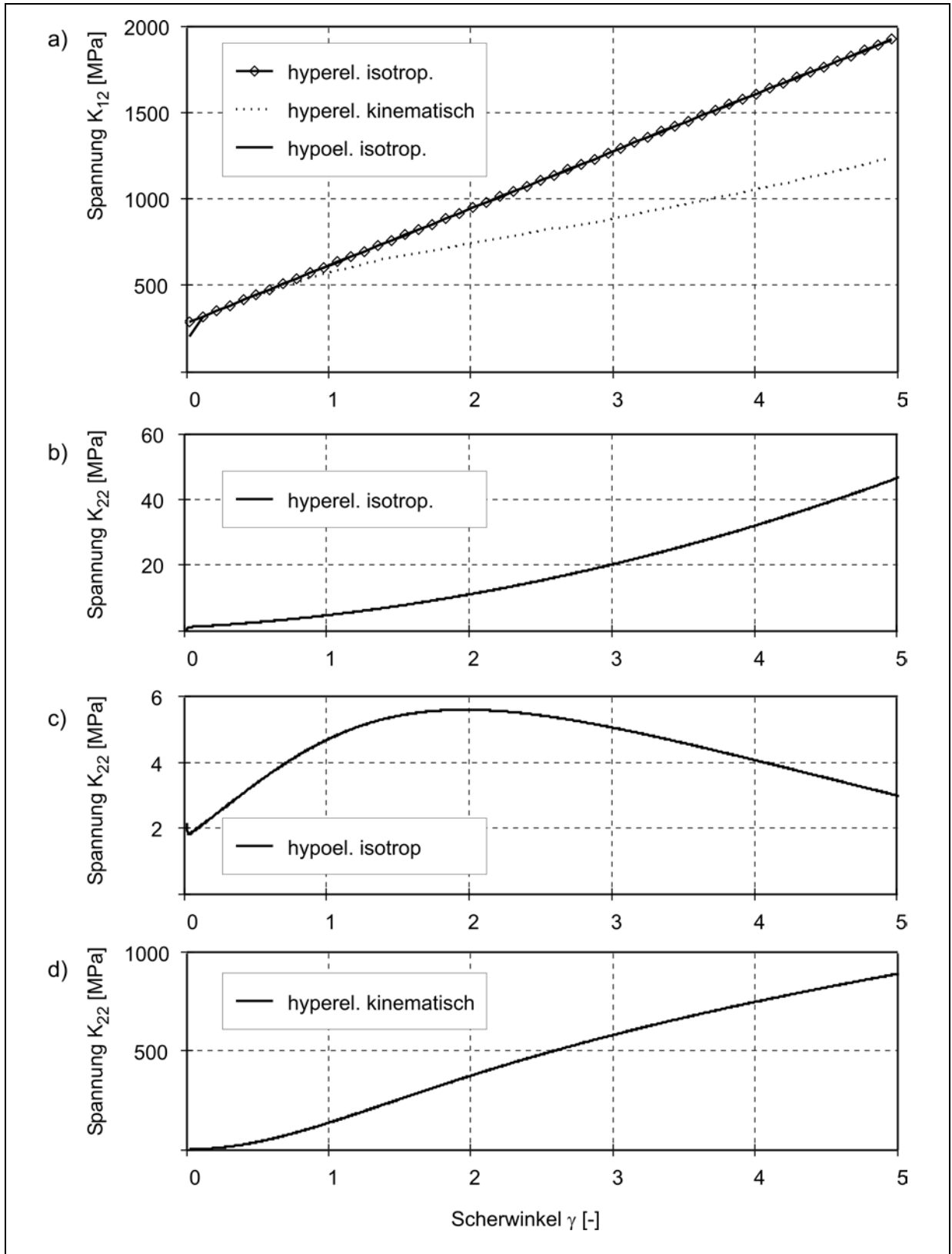


Bild 6.7: Elementverifikation für große Deformationen unter reiner Schubbeanspruchung, ohne Schädigung

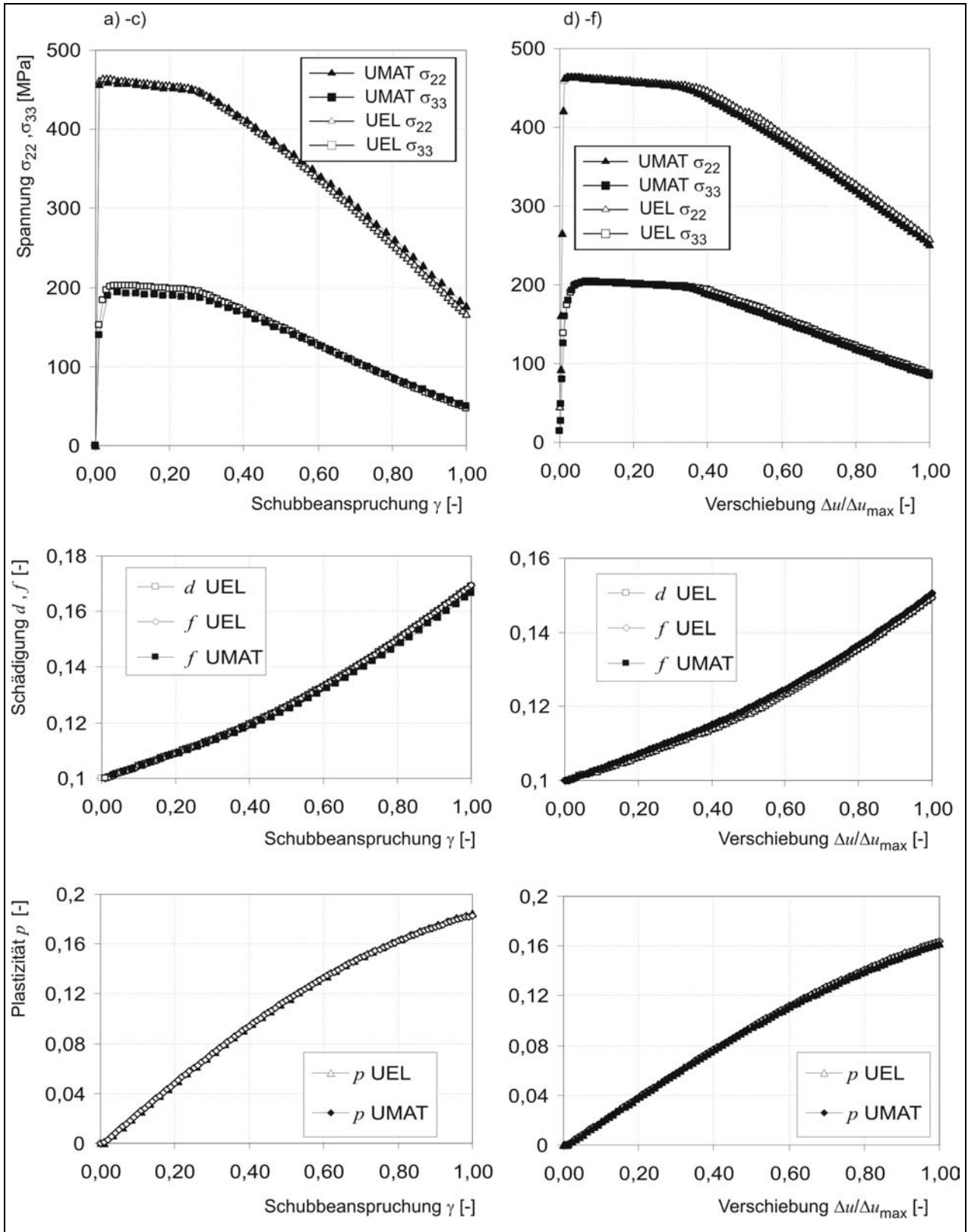


Bild 6.8: Elementverifikation mit dem Gurson-Modell unter Zugbeanspruchung, ebenes 4-Knotenelement mit bi-linearen Ansatzfunktionen:  
 a) Elementformulierung für den ebenen Verzerrungszustand,  
 b) axialsymmetrische Formulierung

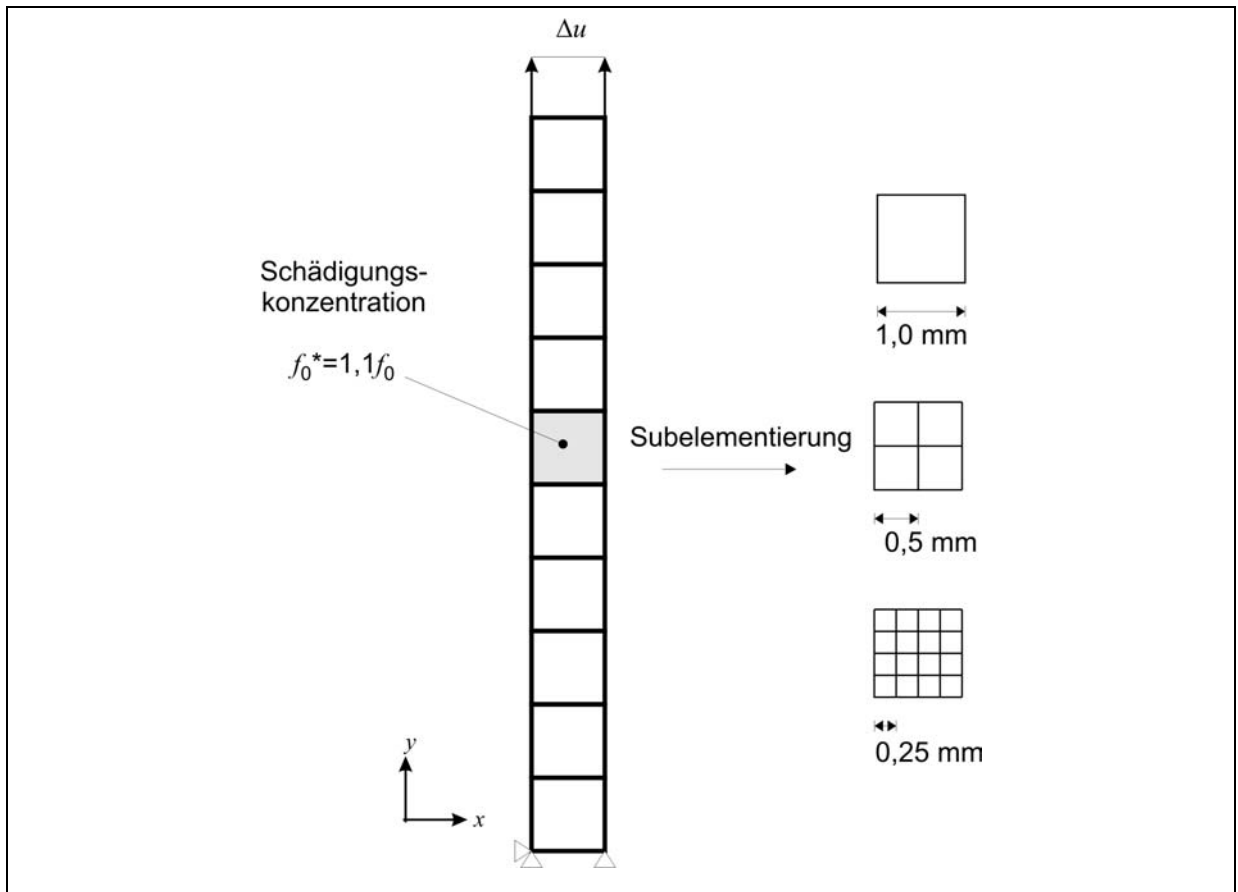


Bild 6.9: FE-Elementierung und Randbedingung eines ebenen Zugstabs mit verschiedenen Elementkantenlängen

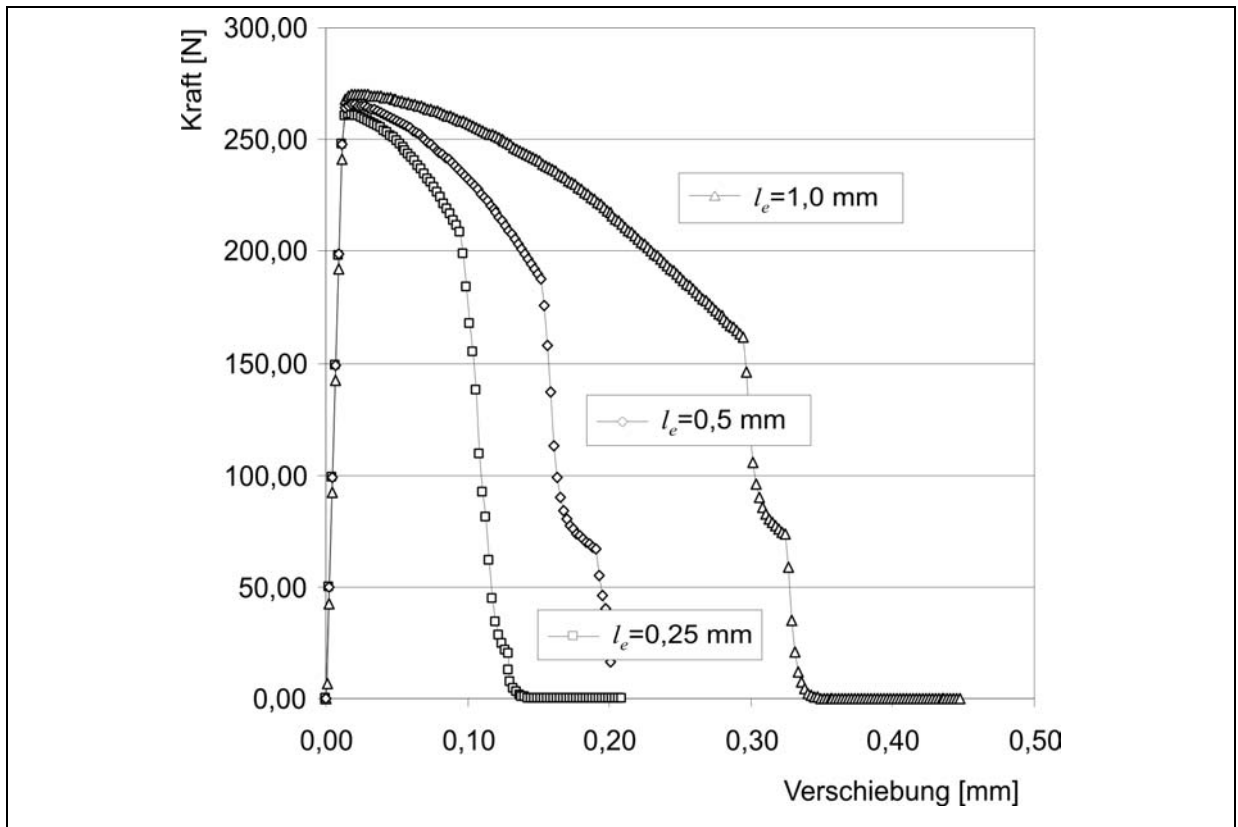


Bild 6.10: Kraft-Verschiebungs-Kurven eines ebenen Zugstabs bei Diskretisierungen mit den Elementkantenlängen  $l_e = 0,25 \text{ mm}$ ,  $l_e = 0,5 \text{ mm}$  und  $l_e = 0,25 \text{ mm}$  (lokales Gurson-Modell)

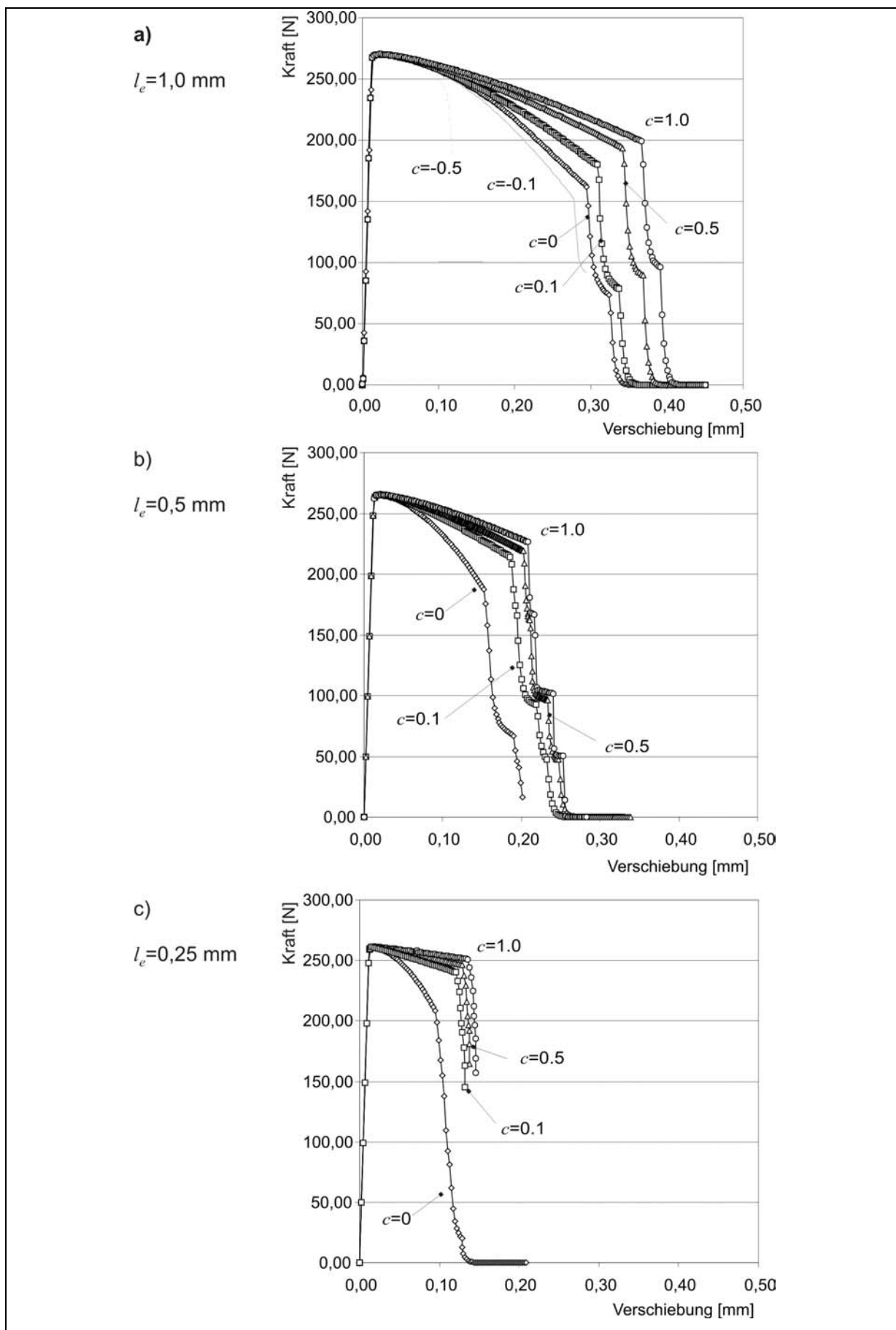


Bild 6.11: Kraft-Verschiebungs-Kurven des ebenen Zugstabs (Elementkantenlängen  $l_e = 1,0 \text{ mm}$ ) für das nicht-lokale Gurson-Modell für  $c$ -Werte von  $-1,0 \dots 0,5$ .

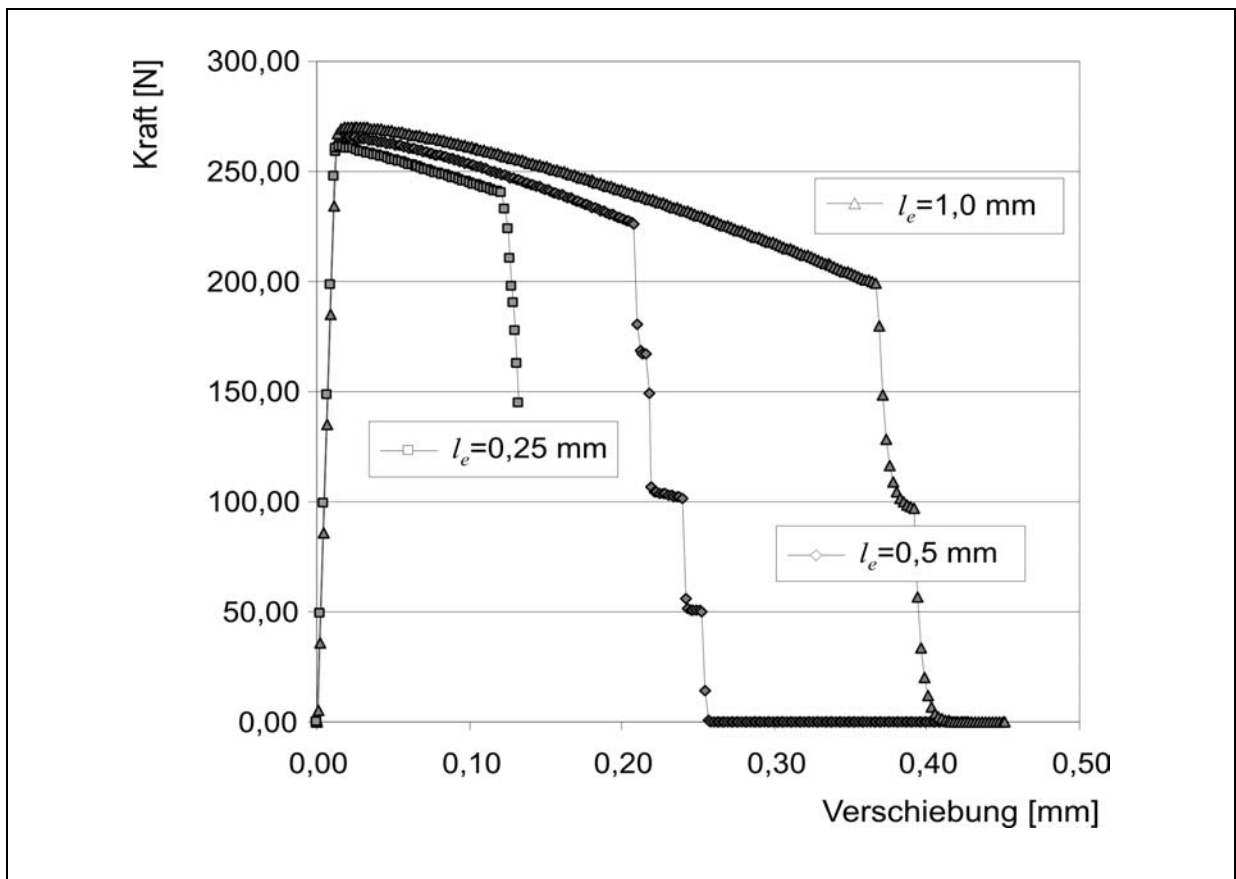


Bild 6.12: Kraft-Verschiebungs-Kurven des ebenen Zugstabs bei Diskretisierungen mit den Elementkantenlängen  $l_e=0,25$  mm,  $l_e=0,5$  mm und  $l_e=1,0$  mm für das nicht-lokale Gurson-Modell mit  $c=0,5$ .

## 6.19 Tafeln

**Tafel 6.1: Implementierung im Finite-Elemente-Programm**

- Ermittlung der Deformationsgradienten  $\mathbf{F}^{(n)}$ ,  $\mathbf{F}^{(n+1)}$  aus den Knotenverschiebungsvektoren  $\mathbf{u}^{(n)}$ ,  $\mathbf{u}^{(n+1)}$  für ein Element und Bestimmung des Gradienten  $\nabla d$
- Berechnung der Zuordnungsmatrizen  $\mathbf{B}_L$ ,  $\mathbf{B}_{NL}$ ,  $\mathbf{B}_d$
- Spannungsintegration und Ermittlung der Materialoperatoren  $\mathbf{D}_{uu}$ ,  $\mathbf{D}_{ud}$ ,  $\mathbf{D}_{du}$ ,  $\mathbf{D}_{dd}$
- Ermittlung der Gauß-Punkt-Beiträge zu den Knotenkräften und der Elementsteifigkeitsmatrix des Elements

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{uu} &= \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}_{uu} \mathbf{B}_L dV \\ \mathbf{K}_{uuNL} &= \int_V \mathbf{B}_{NL}^T \hat{\mathbf{T}} \mathbf{B}_{NL} dV \\ \mathbf{K}_{dd} &= \int_V \mathbf{N}_d^T \mathbf{D}_{dd} \mathbf{N}_d + \mathbf{B}_d^T c \mathbf{B}_d dV \quad \text{mit } \hat{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{ud} &= \int_V \mathbf{B}_u^T \mathbf{D}_{ud} \mathbf{N}_d dV \\ \mathbf{K}_{du} &= - \int_V \mathbf{N}_d^T \mathbf{D}_{du} \mathbf{B}_u dV \end{aligned}$$

- Ermittlung der Elementknotenkräfte

$$\mathbf{F}_u = \int_V \mathbf{B}_L^T \mathbf{T} dV, \quad \mathbf{F}_d = \int_V \mathbf{N}_d^T (\dot{d} - \dot{f}) + \mathbf{B}_d^T c \nabla d dV$$

- Assemblieren der Steifigkeitsmatrix eines Integrationspunktes

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} + \mathbf{K}_{uuNL} & \mathbf{K}_{ud} \\ \mathbf{K}_{du} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix}$$

- Assemblieren der GP-Beiträge

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{K}_{e,i}, \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{e,i}$$

- Aktualisierung der inneren Zustandsvariablen des Elementes
- Rückgabe der Elementsteifigkeitsmatrix und des Vektors der Elementknotenkräfte

**Tafel 6.2: Spannungsintegration**

- Spannungsintegration mit den Vorgabewerten

$$t^{(n)}, t^{(n+1)}, \mathbf{F}^{(n)}, \mathbf{F}^{(n+1)}, d^{(n)}, d^{(n+1)}, (\mathbf{F}_e, \mathbf{M}, \boldsymbol{\varepsilon}_m, \vec{\mathbf{q}})^{(n)}$$

- Berechnung des relativen Deformationsgradienten und der elastischen Vorschätzung

$$\mathbf{F}_{\text{rel}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1}, \mathbf{F}_{(\text{tr})}^e = \mathbf{F}_{\text{rel}} \mathbf{F}_n^e = \mathbf{F}_{n+1}^e \Delta \mathbf{F}^p, \mathbf{C}_{(\text{tr})}^e = \mathbf{F}_{(\text{tr})}^e \mathbf{F}_{(\text{tr})}^e \Rightarrow \Lambda_I, \mathbf{E}_I$$

- Bestimmung des elastischen rechten Strecktensors über die Definition

$$\mathbf{U}_{(\text{tr})}^e = \sqrt{\Lambda_I} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_I$$

- Logarithmischer elastischer rechter Strecktensor

$$\ln \mathbf{U}_{(\text{tr})}^e = \ln \sqrt{\Lambda_I} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_I$$

- Elastischer Rotationsanteil

$$\mathbf{R}_{(\text{tr})}^e = \mathbf{F}_{(\text{tr})}^e \mathbf{U}_{(\text{tr})}^e^{-1}$$

- Elastische Vorschätzung der Mandel-Spannungen

$$\mathbf{M}_{(\text{tr})} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e \ln \mathbf{U}_{(\text{tr})}^e$$

- Fallunterscheidung:

$$\text{a) } \Phi(\mathbf{M}_{(\text{tr})}, \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(n)}, \vec{\mathbf{q}}^{(n)}) \leq 0 \Rightarrow \text{elastisch } (\mathbf{M}^{(n+1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(n+1)}, \vec{\mathbf{q}}^{(n+1)}) = (\mathbf{M}_{(\text{tr})}, \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(n)}, \vec{\mathbf{q}}^{(n)})$$

$$\text{b) } \Phi(\mathbf{M}_{(\text{tr})}, \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(n)}, \vec{\mathbf{q}}^{(n)}) > 0 \Rightarrow \text{plastisch}$$

Lösung der Rückwärts-Euler-Integration mit dem Newton-Verfahren:

$$(\mathbf{M}_{(\text{tr})}, \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(n)}, \vec{\mathbf{q}}^{(n)}) \Rightarrow (\mathbf{M}^{(n+1)}, \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(n+1)}, \vec{\mathbf{q}}^{(n+1)})$$

- (Logarithmischer) Elastischer Strecktensor

$$\ln \mathbf{U}^e = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e^{-1} \mathbf{M} \Rightarrow \Lambda_I, \mathbf{E}_I, \mathbf{U}^e = \exp(\Lambda_I) \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_I, \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \Rightarrow \Lambda_I, \mathbf{E}_I$$

- Ermittlung des rechten Strecktensors

$$\mathbf{U} = \sqrt{\Lambda_I} \mathbf{E}_I \otimes \mathbf{E}_I$$

- Aktualisierung des elastischen Deformationsanteils

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^{e-1} = \mathbf{R} \mathbf{U}^{e-1}$$



7	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes .....	7-1
7.1	Kriterien bei kleinen Deformationen .....	7-2
7.1.1	Kriterium für das lokale Gurson-Modell .....	7-3
7.1.2	Kriterium für das nicht-lokale Gurson-Modell.....	7-7
7.1.3	Anwendung .....	7-12
7.2	Kriterien bei großen Deformationen .....	7-14
7.2.1	Hyperelastisch-plastische Formulierung .....	7-14
7.2.2	Hypoelastisch-plastische Formulierung .....	7-18
7.3	Ergebnisse .....	7-20
7.3.1	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell an einfachen Lastfällen .....	7-20
7.3.2	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes und der Lokalisierung für das lokale Gurson-Modell an Bruchmechanikproben aus einem realen Werkstoff .....	7-21
7.3.3	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell bei großen Deformationen für einfache Lastfälle an Ein-Elementrechnungen und verschiedenen Implementierungen .....	7-22
7.3.4	Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das nicht-lokale Gurson-Modell bei kleinen Deformationen.....	7-23
7.4	Tabellen.....	7-26
7.5	Bilder .....	7-27
7.6	Tafeln .....	7-32

## 7 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes

Die Untersuchung des Lösungsverhaltens der konstitutiven Gleichungen führt auf Kriterien zur Bestimmung des möglichen Elliptizitätsverlustes bzw. des damit verbundenen Einsetzens von Lokalisierungsphänomenen. In diesem Kapitel werden für das lokale Gurson-Modell und die nicht-lokale Erweiterung des Gurson-Modells Kriterien angegeben, die eine Untersuchung des Einsetzens von Lokalisierungsphänomenen erlauben.

In frühen Arbeiten [Hil1958, Hil1962, Rud1975, Ric1975, Ric1980] wird der Elliptizitätsverlust des konstitutiven Gleichungssystems im inelastischen Fall als eine materielle Instabilität interpretiert, die sich durch räumliche Singularitäten im Geschwindigkeitsgradienten ausdrückt. In diesen Arbeiten werden die für den materiellen Tangentenmodul notwendigen Bedingungen zur Lokalisierung bei kleinen Deformationen formuliert. Kriterien zur Untersuchung des Elliptizitätsverlust für elastisch-plastische Stoffgesetze mit assoziativer Fließregel und nicht-assoziativer Fließregel für kleine und große Deformationen findet man u.a. in [Big1991a, Big1991b, Big1993, Ste1997, Sza2000, Pet2000, Ste2000]. Für ratenunabhängige lokale Schädigungsmodellierung bei kleinen Deformationen wurden Lokalisierungsbedingungen in [Dog1995, Ben1996] formuliert und untersucht. In [Dog1995, Ben1996, Sza2000] wurden weiter allgemeingültige Kriterien für die Untersuchung der Lokalisierung und des Elliptizitätsverlustes bzw. des starken Elliptizitätsverlustes elastisch-plastischer ratenabhängiger Stoffgleichungen aufgestellt. In jüngster Zeit wurde auch für das Gurson-Modell unter Berücksichtigung kleiner Deformationen der Elliptizitätsverlust in [Lew2002] untersucht.

### 7.1 Kriterien bei kleinen Deformationen

Zur Untersuchung des möglichen Eindeutigkeitsverlustes der Lösung der konstitutiven Gleichungen des Materialverhaltens wird die Ratenform der Spannungsentwicklung über die Gleichung

$$\dot{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (7-1)$$

herangezogen, wobei  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  als Tensor 4. Stufe den Materialoperator für elastisch-plastische Zustandsänderungen beschreibt. Die Größen  $\dot{\mathbf{T}}$  und  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  stehen hier zunächst allgemein für beliebige konjugierte Spannungs- und Dehnungsmaße, so z.B. die Cauchy-Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und kleine Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  oder im Fall des in Kapitel 3 vorgestellten hyperelastisch-plastischen Stoffgesetzes für die Mandel-Spannungen  $\mathbf{M}$  und den elastische logarithmische Verzerrungstensor  $\ln \mathbf{U}_e$ .

Für eine strenge Untersuchung des Eindeutigkeitsverlustes in Abhängigkeit vom vorgegebenen Verschiebungsfeld muss die Ratenform der Gl.(7-1) in Abhängigkeit vom räumlichen Verzerrungsgeschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$  oder allgemeiner vom Verschiebungsinkrement ausgedrückt werden:

$$\dot{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_M + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_G) : \mathbf{L} \quad (7-2)$$

Für die hier zunächst betrachteten kleinen Deformationen gilt der Zusammenhang

$$\dot{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}} = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{u}}}} + \nabla \dot{\underline{\underline{\boldsymbol{u}}}}^T). \quad (7-3)$$

Im allgemeinen Fall der ratenunabhängigen Form der Elastoplastizität mit assoziierter Fließregel hat der Materialoperator in Gleichung (7-2) die folgende Form

$$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* - \frac{1}{H} \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* : \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} : \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^*. \quad (7-4)$$

Hierbei ist  $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^*$  ein sich aus der Formulierung des Materialmodells ergebender Tensor 4.Stufe,  $\mathbf{N}$  der äußere Normaleneinheitsvektor in Fließrichtung und  $H$  ein Skalar

$$H = h - \mathbf{N} : \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* : \mathbf{N} \quad (7-5)$$

mit  $h$  als ein das Verfestigungsverhalten beschreibenden Skalar.

Die Formulierung für den Materialoperator für eine allgemeine Klasse elastisch-plastischer Materialien ist in [Dog1995, For1995, For1996, Ben1995, Sza2000, Lie2001] ausführlich beschrieben und für verschiedene Gurson-Modellvarianten u.a. in [Arn2000, Sch1995] für kleine Deformationen und unterschiedliche Integrationsverfahren hergeleitet.

Für das Gurson-Modell ergibt sich der elastisch-plastische Materialoperator gemäß den Betrachtungen aus Kapitel 6 zu :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* - \frac{(\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{N}^T : \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^*)}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* : \mathbf{N} - h} = \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^e - \frac{(\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{N}^T : \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^*)}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^* : \mathbf{N} - \frac{\partial \Phi}{\partial f^*} \frac{\partial f^*}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_m} \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda}} \quad (7-6)$$

### 7.1.1 Kriterium für das lokale Gurson-Modell

Seien  $(\dot{\mathbf{T}}_a, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a)$  und  $(\dot{\mathbf{T}}_b, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_b)$  zwei zulässige Lösungen des Randwertproblems für die Spannungen  $\mathbf{T}$  und die zugehörigen Dehnungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_a - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_b$  sowie  $\Delta \dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}_a - \dot{\mathbf{T}}_b$  die Differenz zwischen beiden Lösungen. Das zugehörige Verzerrungsgeschwindigkeitsfeld  $\Delta \mathbf{v}$  verschwindet auf dem Rand des betrachteten Kontinuums  $B$  nur dort, wo das Geschwindigkeitsfeld vorgegeben ist. Die Anwendung des Variationsprinzips führt so auf eine Bedingung für den Eindeutigkeitsverlust [Hil1958], wenn gilt:

$$\int_B \Delta \dot{\mathbf{T}} : \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = 0. \quad (7-7)$$

Das Auftreten von Verzweigungsproblemen („bifurcation“) kann also solange ausgeschlossen werden, solange es nicht einen Punkt in der untersuchten Struktur gibt, für den gilt

$$\dot{\mathbf{T}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} > 0, \quad (7-8)$$

d.h. dass es zu keiner Entfestigung („condition of non-softening“) kommt [Hil1958].

Die Entwicklung eines strengen Kriteriums für das mögliche Auftreten des Elliptizitätsverlustes wird durch die Untersuchung der konstitutiven Gleichungen des angewendeten Materialgesetzes durchgeführt. Die Lösung des durch die konstitutiven Gleichungen gestellten Anfangsrandwertproblems führt auf ein System partieller Differentialgleichungen elliptischen Charakters, das für die lokale Form des Gurson-Modells durch die Gleichgewichtsbedingung definiert ist.

Das im Rahmen der FE-Methode zu lösende Differentialgleichungssystem dessen Lösungseigenschaften zu untersuchen sind, besteht aus der, der Gleichgewichtsbedingung resultierenden, Gleichung:

$$\operatorname{div}(\dot{\mathbf{T}}) = \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{C}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0. \quad (7-9)$$

Für die Beschreibung der Änderung des Geschwindigkeitsfeldes  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  wird ein exponentieller Ansatz der Form

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \quad (7-10)$$

eingeführt, mit  $\dot{\mathbf{u}}_0$  als Amplitude,  $\mathbf{n}$  als Richtungsvektor,  $k$  als Wellenzahl und  $\mathbf{x}$  als Ort eines Punktes des Geschwindigkeitsfeldes. Das Einsetzen des Ansatzes in Gl.(7-9) ergibt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{C}}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \operatorname{div} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \frac{1}{2} (ik \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik \dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \right), \\ &= -k^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}} : (\mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n}) \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (7-11)$$

und weitere Umstellungen<sup>1</sup> das Gleichungssystem

$$\left[ \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{n} \right] [\dot{\mathbf{u}}_0] = 0 \quad (7-12)$$

---

<sup>1</sup>  $= \frac{1}{2} \mathbf{C}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}) \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{C}_{ijkl} (n_k m_l + m_k n_l) n_j = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{ijkl} n_k m_l n_j + n_j \mathbf{C}_{jikl} n_l m_k) = \frac{1}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$

mit der Amplitude des Geschwindigkeitsfelds als unabhängige Veränderliche, für das nur eindeutige Lösungen existieren, wenn die Determinante

$$\det(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{n}) = \det(\mathbf{H}) \quad (7-13)$$

nicht zu null wird, wobei  $\mathbf{H}$  im weiteren als akustischer Tensor<sup>2</sup> (2.Stufe) bezeichnet wird. Zusammen mit der Betrachtung des gewählten Ansatzes für das Verschiebungsfeld ist das Erreichen des Singularitätspunktes des Gleichungssystems so interpretierbar, dass es einen Punkt in der Struktur gibt, für den ein Richtungsvektor  $\mathbf{n}$  existiert, an dem der Ausdruck  $\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{n}$  singularär wird, und es so zu einer Dehnungsdiskontinuität in Form eines Dehnungszuwachses („strain rate

jump“) mit unbekannter Amplitude  $\dot{\mathbf{u}}_0$  kommen kann, der sich durch die Form

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0) \quad (7-14)$$

auszeichnet.

Bild 7.1 zeigt beispielhaft die Vorgehensweise bei der Untersuchung des Elliptizitätsverlustes an einer belasteten Struktur. Für alle Punkte der Struktur wird für den gesamten Belastungsverlauf (Bild 7.1a) das Minimum der Determinante des akustischen Tensors in Abhängigkeit vom Richtungswinkel  $\varphi$  bestimmt. Der Nulldurchlauf der sich so ergebenden Funktion zeigt den Zeitpunkt des ersten möglichen Eindeutigkeitsverlustes der Lösung an (Bild 7.1b). Die Auswertung des Spannungsverlaufs erlaubt weiter die Angabe der Spannungen im Moment des Eindeutigkeitsverlustes (Bild 7.1c). Weiterhin kann, z.B. für den Zeitpunkt des Elliptizitätsverlustes, die Richtungsabhängigkeit des Kriteriums dargestellt werden, und so die Richtung der Diskontinuität der Verschiebungsantwort bestimmt werden. Die Auswertung des Kriteriums für den Elliptizitätsverlust in einem materiellen Punkt in Abhängigkeit vom Belastungszustand und dem Richtungswinkel ergibt eine Flächendarstellung für den Wert des akustischen Tensors, wie in Bild 7.2 dargestellt. Hierbei ist Punkt 1 der Zeitpunkt des ersten Auftretens des Elliptizitätsverlustes, der sich durch einen Nullwert (Punkt 3) in der Kurve der richtungsabhängigen Auswertung des akustischen Tensors (Punkt 2) auszeichnet. Die Betrachtung aller Nullwerte des akustischen Tensors ergibt so eine Grenzlinie für den Eindeutigkeitsverlust der Lösung.

<sup>2</sup> Für die Bildung des akustischen Tensors gilt in Indexschreibweise:  $\mathbf{H} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{n} = H_{jk} = n_i C_{ijkl} n_l$

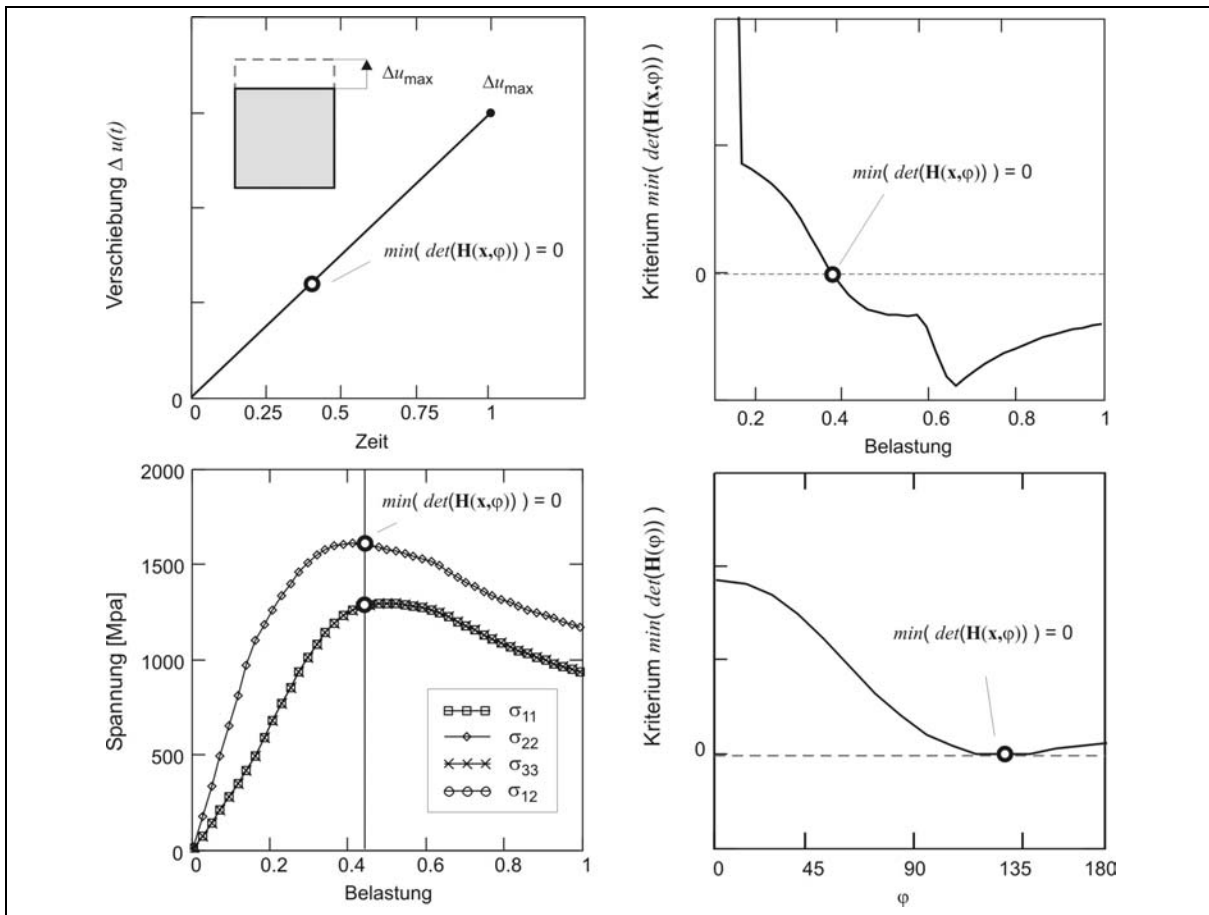


Bild 7.1: Schematische Vorgehensweise bei der Untersuchung zum Elliptizitätsverlust

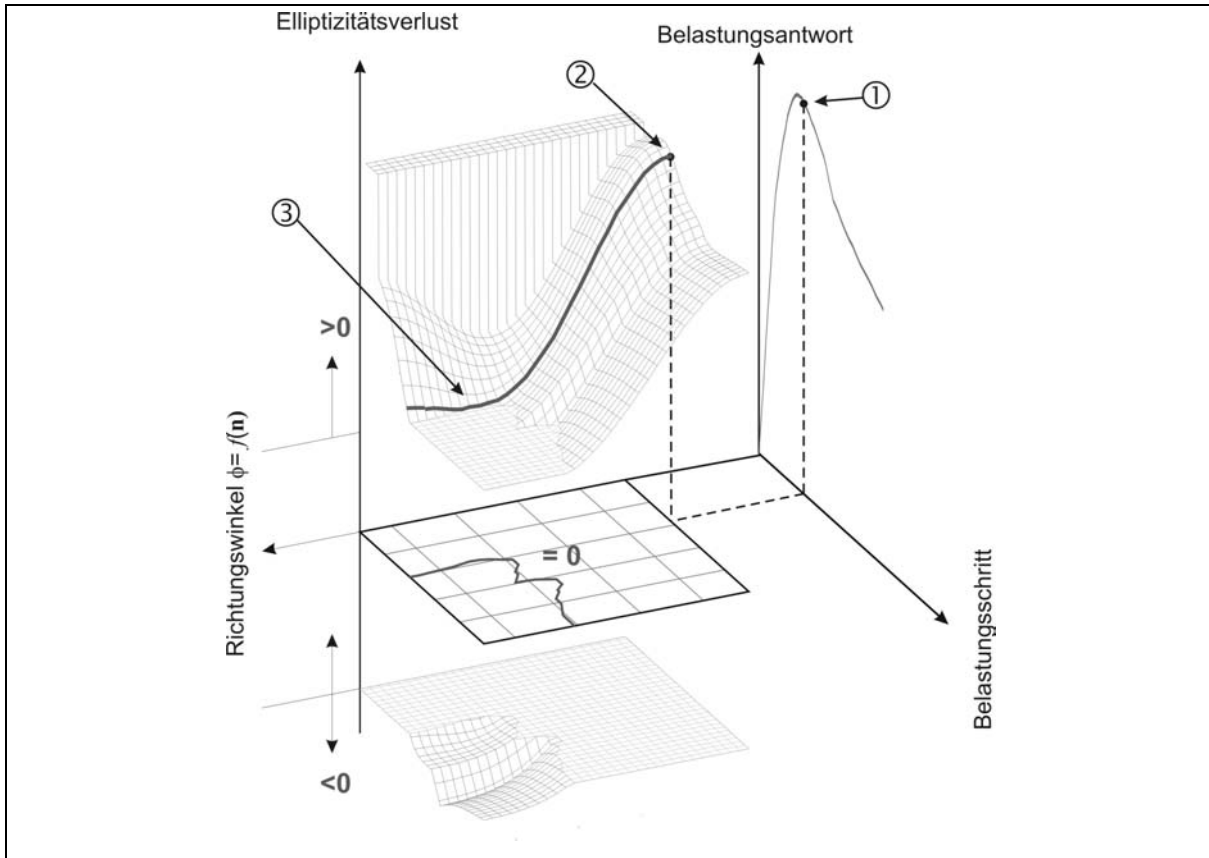


Bild 7.2: Flächendarstellung zum Elliptizitätsverlust

### 7.1.2 Kriterium für das nicht-lokale Gurson-Modell

Die nicht-lokale Erweiterung des Gurson-Modells erfordert die zusätzliche Betrachtung des Inkrements des Schädigungsfeldes  $d$  für die Forderung nach der Erfüllung der lokalen Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div}(\dot{\mathbf{T}}) = \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{C}^{\sigma d} \dot{d}) = 0, \quad (7-15)$$

sowie die Erfüllung der Bilanzgleichung der Entwicklung des globalen Schädigungsfelds

$$0 = C^{dd} \dot{d} + \mathbf{C}^{d\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - c \nabla \dot{d}, \quad (7-16)$$

mit den in Kapitel 6 definierten Größen  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon}$ ,  $\mathbf{C}^{\sigma d}$ ,  $C^{dd}$  und  $\mathbf{C}^{d\varepsilon}$ . Für die Untersuchung der Lösungseindeutigkeit wird nun neben dem Ansatz des Verschiebungsfelds gemäß Gl.(7-10) ein gleichartiger Ansatz für die Schädigungsgröße gemacht:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\ \dot{d} &= \dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7-17)$$

Dabei wird auf die getrennte Bezeichnung der Größen  $\mathbf{n}$  und  $k$  für die beiden Ansätze verzichtet.

Das Einsetzen der Ansätze aus Gl.(7-17) in den ersten Term von Gl.(7-15) führt auf

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \operatorname{div} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^T}{\partial \mathbf{x}} \right) \right) \\ &= \operatorname{div} \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} \frac{1}{2} (ik \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik \dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \right) \\ &= -k^2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} (\mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n}) \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\ &= -k^2 (\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7-18)$$

und für den zweiten Term von Gl.(7-15) auf :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{C}^{\sigma d} \dot{d}) &= \operatorname{div}(\mathbf{C}^{\sigma d} \dot{d}) \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{C}^{\sigma d} \dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \\ &= \dot{d}_0 ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (7-19)$$

Zusammenführen von Gl.(7-18) und Gl.(7-19) führt auf

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\dot{\mathbf{T}}) &= \operatorname{div}(\underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{C}^{\sigma d}\dot{d}) \\
&= -k^2(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}}} \cdot \mathbf{n})\dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \dot{d}_0 ik \mathbf{C}^{\sigma d} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\
&= \left(-k^2(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}}} \cdot \mathbf{n})\dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{d}_0 ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d}\right) \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7-20}$$

Das Einsetzen der Ansätze aus Gl.(7-17) in die Bilanzgleichung der Schädigungsentwicklung Gl.(7-16) führt auf die folgende Schreibweise der Schädigungsbilanz:

$$\begin{aligned}
0 &= C^{dd}\dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{C}^{d\varepsilon} \left( \frac{1}{2} (ik \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik \dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \right) \\
&\quad - c \nabla^2 (\dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}))
\end{aligned} \tag{7-21}$$

Die Entwicklung der Einzelterme erfolgt durch

$$\begin{aligned}
C^{dd}\dot{d} &= C^{dd}\dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}), \\
\mathbf{C}^{d\varepsilon}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{C}^{d\varepsilon} \left( \frac{1}{2} (ik \mathbf{n} \otimes \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik \dot{\mathbf{u}}_0 \otimes \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \right) \text{ und} \\
&= ik \mathbf{C}^{d\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\
-c \nabla^2 \dot{d} &= -c \nabla^2 (\dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \\
&= -c \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^2} (\dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \\
&= -c \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\dot{d}_0 ik \mathbf{n} \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})) \\
&= c \dot{d}_0 k^2 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{7-22}$$

Das Einsetzen dieser Ausdrücke aus Gl.(7-22)<sub>1,2,3</sub> in Gl.(7-16) führt auf die Bilanzgleichung der Schädigungsentwicklung in der Form:

$$\begin{aligned}
0 &= C^{dd}\dot{d} + \mathbf{C}^{d\varepsilon}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - c \nabla^2 \dot{d} \\
&= C^{dd}\dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + ik \mathbf{C}^{d\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + c \dot{d}_0 k^2 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \\
&= ik \mathbf{C}^{d\varepsilon} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) + (C^{dd} + ck^2) \dot{d}_0 \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})
\end{aligned} \tag{7-23}$$

Die Kombination der Ausdrücke Gl.(7-20) und Gl.(7-23) führt unter der Berücksichtigung von

$$0 \neq \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{n}, \mathbf{x} \in R^3 \tag{7-24}$$

auf das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -k^2(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}}) & ik\mathbf{C}^{\sigma d} \cdot \mathbf{n} \\ ik\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{d\varepsilon}}} & C^{dd} + ck^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \dot{d}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7-25)$$

das durch Bestimmung der zweiten Zeile

$$0 = (C^{dd} + ck^2)\dot{d}_0 + ik\mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (7-26)$$

nach  $\dot{d}_0$  aufgelöst

$$\dot{d}_0 = \frac{-ik\mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_0}{(C^{dd} + ck^2)} \quad (7-27)$$

und durch Einsetzen in die erste Zeile in Gl.(7-25) in der folgenden Form reduziert werden kann:

$$\begin{aligned} [\mathbf{0}] &= \begin{bmatrix} -k^2(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}}) & ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \dot{d}_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k^2(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}}) + ik\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \frac{-ik\mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n}}{(C^{dd} + ck^2)} \end{bmatrix} [\dot{\mathbf{u}}_0] \end{aligned} \quad (7-28)$$

Das so aufgestellte Gleichungssystem ist nur noch von der Ansatzfunktion des Geschwindigkeitsfelds abhängig und der Wellenzahl  $k$  des Ansatzes aus Gl.(7-17):

$$\begin{aligned} [\mathbf{0}] &= \begin{bmatrix} -k^2(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}}) + k^2 \frac{\mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n}}{C^{dd} + ck^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \end{bmatrix} [\dot{\mathbf{u}}_0] \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}} \cdot \mathbf{n}}) - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d})(\mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n})}{C^{dd} + ck^2} \end{bmatrix} [\dot{\mathbf{u}}_0] \end{aligned} \quad (7-29)$$

Da

$$0 \neq \exp(ik \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}) \text{ für } \mathbf{n}, \mathbf{x} \in R^3 \quad (7-30)$$

gilt, ist nun nur noch ein Gleichungssystem in Abhängigkeit von  $\dot{\mathbf{u}}_0$  zu lösen:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{0}] &= \left[ \left( \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \right) - \frac{\left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \right) \left( \mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \right)}{C^{dd} + ck^2} \right] [\dot{\mathbf{u}}_0] \\
&= \left[ \left( \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \right) - \frac{\mathbf{n} \cdot \left( \mathbf{C}^{\sigma d} \otimes \mathbf{C}^{d\varepsilon} \right) \cdot \mathbf{n}}{C^{dd} + ck^2} \right] [\dot{\mathbf{u}}_0]. \quad (7-31) \\
&= \left[ \mathbf{n} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} - \frac{\mathbf{C}^{\sigma d} \otimes \mathbf{C}^{d\varepsilon}}{C^{dd} + ck^2} \right) \cdot \mathbf{n} \right] [\dot{\mathbf{u}}_0]
\end{aligned}$$

Auch hier gilt, dass eindeutige Lösungen nur dann existieren, wenn die Determinante

$$\det(\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{n}) = \det(\mathbf{H}) \quad (7-32)$$

nicht zu null wird. Hierbei ist

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon} - \frac{\mathbf{C}^{\sigma d} \otimes \mathbf{C}^{d\varepsilon}}{C^{dd} + ck^2} \quad (7-33)$$

der für das nicht-lokale Gurson-Modell gültige Materialoperator in Form eines Tensors 4.Stufe und  $\mathbf{H}$  der akustische Tensor für das gekoppelte Problem.

Im Vergleich zum Kriterium des lokalen Modells aus Gl.(7-13) ist hier die Auswertung der Determinante des akustischen Tensors in Gl.(7-32) nicht nur von der charakteristischen Richtung des Lösungsvektors  $\mathbf{n}$  abhängig, sondern auch von der Wellenzahl  $k$  des Ansatzes der Schädigungsänderung in Gl.(7-17)<sub>2</sub> und von der im Gradiententerm des nicht-lokalen Modells wirkenden Größe  $c$ .

Eine Untersuchung des möglichen Eindeutigkeitsverlustes kann daher nicht mehr alleine an dem materiellen Zustand eines lokalen Punktes erfolgen, sondern muss unter Berücksichtigung der sich einstellenden globalen Schädigungsverteilung der betrachteten Struktur für eine konkrete Belastungssituation durchgeführt werden. Ergebnisse hierzu werden in Kapitel 8 an Strukturrechnungen präsentiert.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Stabilitätsuntersuchung unter Berücksichtigung verschiedener Kombinationen der Wellenzahl  $k$  des Ansatzes der Schädigungsänderung in Gl.(7-17)<sub>2</sub> und der spezifischen Länge  $c$  an homogenen Schädigungsverteilungen und Belastungsfällen. Die so gewonnenen Erkenntnisse lassen Aussagen über die Wahl des Parameters  $c$  zu, um eine regularisierende Wirkung des Gradiententerms der nicht-lokalen Entwicklungsgleichung der globalen Schädigungsevolution zu erhalten.

Bild 7.3 zeigt schematisch die Auswertung des Kriteriums für den Elliptizitätsverlust für eine homogene Belastung und Schädigungsverteilung in einem materiellen Punkt

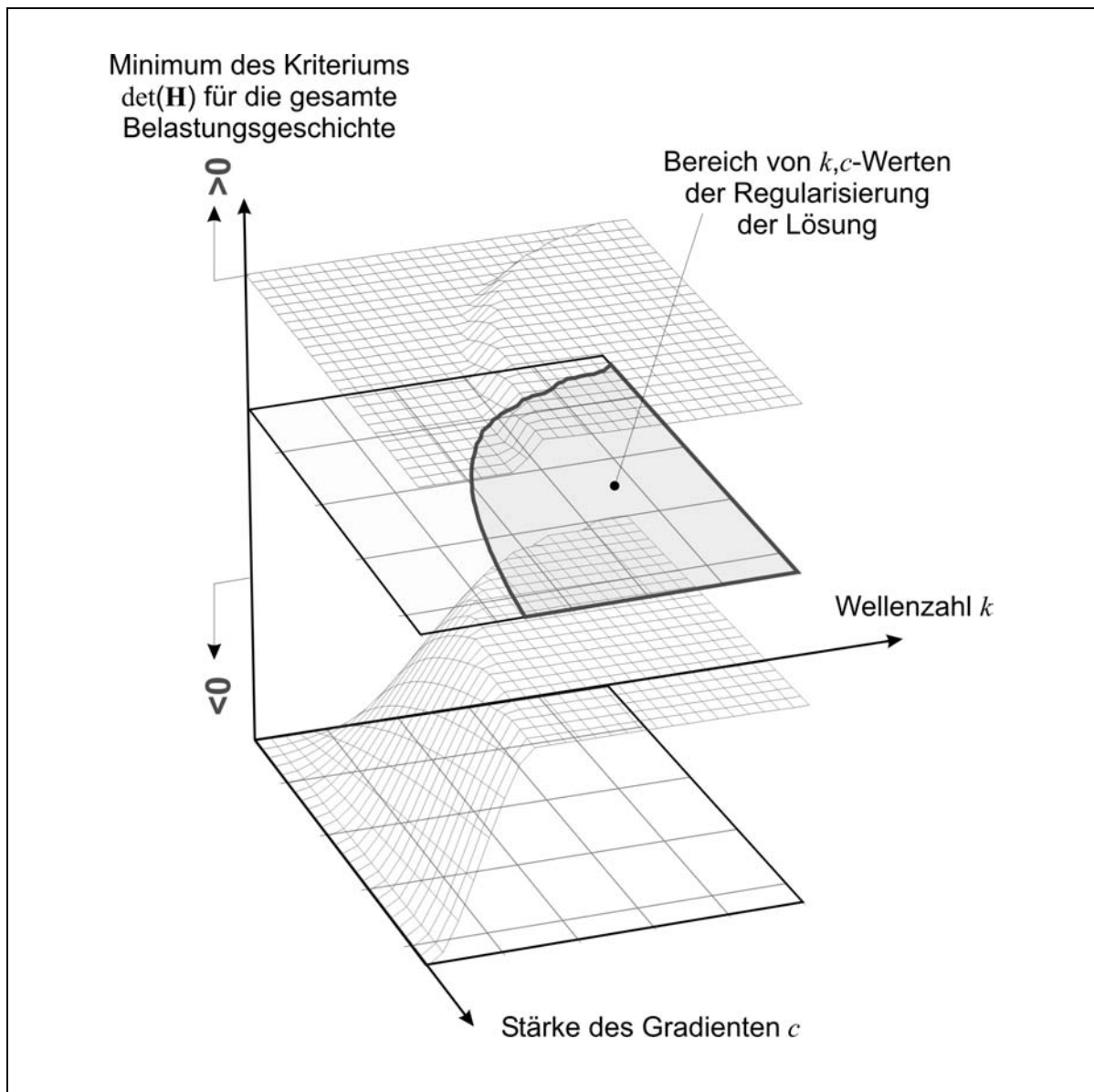


Bild 7.3: Einfluss der kritischen Länge und der Wellenzahl bzgl. des Elliptizitätsverlustes beim nicht-lokalen Gurson-Modell

in Abhängigkeit der kritischen Länge und der Wellenzahl:

Für verschiedene Parameterkombinationen ergeben sich Bereiche für die im Belastungsverlauf Elliptizitätsverlust auftritt ( $\det(\mathbf{H}) < 0$ ) und solche in denen die Lösung regularisiert ist ( $\det(\mathbf{H}) > 0$ ).

Hierbei gilt, dass für große Wellenzahlen  $k$  die erforderliche Größe der kritischen Länge abnimmt, um den Eindeutigkeitsverlust der Lösung während der gesamten Belastung ausschließen zu können. Ebenso genügen kleinere Wellenzahlen bei größer werdenden Werten von  $c$ , um die Lösung des Problems zu regularisieren.

Der Grenzfall  $k = \infty$  beschreibt eine Diskontinuität im Verschiebungsfeld, die durch die Wirkung des Gradiententerms regularisiert werden kann. Einen Sonderfall stellt der

Übergang des nicht-lokalen Modells in die Formulierung des lokalen Modells mit  $c=0$  dar bei dem der nicht-lokale Term bei der Bildung des akustischen Tensors verschwindet:

$$\mathbf{H}_{c=0} = \mathbf{n} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}}} - \frac{\mathbf{C}^{\sigma d} \otimes \mathbf{C}^{d\varepsilon}}{C^{dd}} \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (7-34)$$

Die Betrachtung des zu bestimmenden Gleichungssystems in der Form

$$[\mathbf{0}] = \left[ \left( \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}}} \cdot \mathbf{n} \right) - \frac{\left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \right) \otimes \left( \mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \right)}{C^{dd} + ck^2} \right] [\dot{\mathbf{u}}_0] \quad (7-35)$$

zeigt, dass die Determinante zu null wird, wenn beide Summanden in der Matrix gleich sind, so dass als Lösungskriterium die Gleichung

$$1 - \frac{\left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{\sigma d} \right) \cdot \left( \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}^{\sigma\varepsilon}}} \cdot \mathbf{n} \right) \cdot \left( \mathbf{C}^{d\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \right)}{C^{dd} + ck^2} = 0 \quad (7-36)$$

herangezogen werden kann.

### 7.1.3 Anwendung

Für eine Abgrenzung des Phänomens der Lokalisierung bzw. des Elliptizitätsverlustes ist die Anwendung der „condition of non-softening“ aus Gl.(7-8) zunächst ausreichend, die für die Formulierung des zur Anwendung gebrachten Gurson-Modells in den FE-Code implementiert wurde. Eine exakte Aussage für das mögliche Auftreten von Lokalisierung in einer belasteten Struktur ist das im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte Kriterium für Elliptizitätsverlust entsprechend Gl.(7-13) für das lokale bzw. Gl.(7-32) für das nicht-lokale Gurson-Modell.

Der Materialoperator  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  ist aus der Lösung der Stoffgleichungsintegration eines Belastungsincrements für jeden beliebigen Punkt der Struktur bekannt, so dass das Kriterium durch eine entsprechende numerische Umsetzung leicht zur Anwendung gebracht werden kann.

Mit der Definition des akustischen Tensors gemäß Gl. (7-13) in Indexschreibweise

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \mathbf{n} = H_{jk} = n_i C_{ijkl} n_l (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \quad (7-37)$$

folgt die Form der einzelnen Komponenten zu

$$\begin{aligned}
H_{jk} &= n_1 (C_{1jk1}n_1 + C_{1jk2}n_2 + C_{1jk3}n_3) \\
&+ n_2 (C_{2jk1}n_1 + C_{2jk2}n_2 + C_{2jk3}n_3) \\
&+ n_3 (C_{3jk1}n_1 + C_{3jk2}n_2 + C_{3jk3}n_3)
\end{aligned} \tag{7-38}$$

Für den hier betrachteten ebenen Dehnungszustand mit

$$\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i \text{ mit } i=1,2,3 \text{ und } n_3 = 0 \tag{7-39}$$

und einem entsprechend besetzten Materialoperator, sowie unter der Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften ergibt sich die Komponentendarstellung des akustischen Tensors zu

$$H_{kl} = n_1 (C_{1jk1}n_1 + C_{1jk2}n_2) + n_2 (C_{2jk1}n_1 + C_{2jk2}n_2), \tag{7-40}$$

bzw. für die Auswertung des Kriterium in Gl.(7-13) zu

$$\det(H_{jk}) = \det \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 0. \tag{7-41}$$

Durch die Darstellung des Einheitsvektors  $\mathbf{n}$  als Funktion einer Winkelkoordinate  $\varphi$ :

$$\mathbf{n}^T = [\cos(\varphi) \quad \sin(\varphi) \quad 0] \mathbf{e}_i, \tag{7-42}$$

wird die Anwendung des Kriteriums somit zu einem Minimierungsproblem bzgl. der Winkelkoordinate des zunächst beliebigen Einheitsvektors  $\mathbf{n}$  mit den Komponenten des akustischen Tensors für  $k = 1,2$  und  $l = 1,2$ :

$$H_{kl} = \cos \varphi (C_{1jk1} \cos \varphi + C_{1jk2} \sin \varphi) + \sin \varphi (C_{2jk1} \cos \varphi + C_{2jk2} \sin \varphi) \tag{7-43}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
H_{11} &= C_{1111} \cos^2 \varphi + C_{1112} \sin^2 \varphi \\
H_{12} &= (C_{1122} + C_{2121}) \cos \varphi \sin \varphi \\
H_{21} &= (C_{1212} + C_{2211}) \cos \varphi \sin \varphi \\
H_{22} &= C_{1121} \cos^2 \varphi + C_{2222} \sin^2 \varphi
\end{aligned} \tag{7-44}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
a &= C_{1111}C_{2112} \\
b &= C_{2112}C_{2222} \\
c &= C_{1111}C_{2222} - 2C_{1122}C_{2112} - C_{1122}^2
\end{aligned} \tag{7-45}$$

und der Auswertung der Determinante des akustischen Tensors gemäß Gl.(7-41) gilt

für das Kriterium des Elliptizitätsverlustes

$$0 = \sin^4 \varphi (a - c + b) + \sin^2 \varphi (c - 2a) + a \quad (7-46)$$

bzw. ausgeschrieben

$$0 = \sin^4 \varphi \left( C_{1111} C_{2112} - \left( C_{1111} C_{2222} - 2C_{1122} C_{2112} - C_{1122}^2 \right) + C_{2112} C_{2222} \right) + \sin^2 \varphi \left( C_{1111} C_{2222} - 2C_{1122} C_{2112} - C_{1122}^2 - 2C_{1111} C_{2112} \right) + C_{1111} C_{2112} \quad (7-47)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann für eine allgemein formulierte Klasse elastisch-plastischer Stoffgesetze das Auftreten von Lokalisierung für einfache Spannungszustände qualitativ analytisch untersucht werden, wie u.a. in [Dog1995] gezeigt. Mittels einer geeigneten numerischen Anwendung können weiterhin kritische Belastungszustände für reale Materialien und Strukturen bestimmt werden.

## 7.2 Kriterien bei großen Deformationen

Für die Spezifizierung des Kriteriums für Elliptizitätsverlust unter Berücksichtigung großer Deformationen ist der geometrische Spannungsanteil der Spannungsrate durch die materielle Zeitableitung des Spannungstensors mit in die Betrachtung der Auswertung einzubeziehen. Das Kriterium des Elliptizitätsverlustes wird im folgenden für das in Kapitel 3 näher erläuterte hyperelastisch-plastische Stoffgesetz der Materialgleichungen sowie für eine hypoelastisch-plastische Formulierung hergeleitet und zur Anwendung gebracht.

### 7.2.1 Hyperelastisch-plastische Formulierung

Unter Verwendung der in Kapitel 3 vorgestellten hyperelastisch-plastischen Formulierung des Stoffgesetzes und der Zusammenstellung der zugehörigen Gleichungen in Tafel 7.2 können die Kirchhoff-Spannungen mittels einer „Push-Forward“-Operation von der plastischen Zwischenkonfiguration auf die Momentankonfiguration gewonnen werden:

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{R}_e \mathbf{M}_{n+1} \mathbf{R}_e^T \quad (7-48)$$

Die materielle zeitliche Ableitung der Kirchhoff-Spannungen gemäß Gl.(7-48) führt auf die Rate der Kirchhoff-Spannungen:

$$d\mathbf{K} = \mathbf{R}_e d\mathbf{M} \mathbf{R}_e^T + d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T \mathbf{K} + \mathbf{K} (d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T)^T \quad (7-49)$$

wobei

$$d\mathbf{M}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{M}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{(tr)}^e} d\mathbf{E}_{(tr)}^e = \underline{\underline{\mathbf{C}}} : d\mathbf{E}_{(tr)}^e \quad (7-50)$$

die materielle Zeitableitung der Kirchhoff-Spannungsrate darstellt. Der Materialoperator

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \mathbf{M}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{(tr)}^e} \quad (7-51)$$

ergibt sich aus der in Kapitel 6 vorgestellten Linearisierung der Integrationsvorschrift der konstitutiven Gleichung. Weiter wird der elastische Anteil des Spintensors

$$\mathbf{W}_e = d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T \quad (7-52)$$

eingeführt, für den als antisymmetrischer Tensor die Beziehungen

$$\mathbf{W}_e = -\mathbf{W}_e^T \quad (7-53)$$

und

$$d(\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T) = d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T + \mathbf{R}_e d\mathbf{R}_e^T = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T = -\mathbf{R}_e d\mathbf{R}_e^T \quad (7-54)$$

gelten.

Gesucht ist eine Gleichung, die die Formulierung der Rate der Kirchhoff-Spannungen aus Gl.(7-49) als Funktion des Deformationsgeschwindigkeitstensors  $\mathbf{D}$  bzw. des Verschiebungsinkrementes und den inneren Zustandsgrößen darstellt:

$$d\mathbf{K} = \mathbf{R}_e d\mathbf{M} \mathbf{R}_e^T + \mathbf{W} \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{W}^T = f(\mathbf{F}, \mathbf{D}). \quad (7-55)$$

Es ergibt sich entsprechend den Ausführungen in Kapitel 7.1 und 7.2 die Aufgabe, die drei Summanden aus Gl.(7-55) in Abhängigkeit von  $\mathbf{D}$  bzw.  $\mathbf{L}$  zu formulieren.

Die logarithmischen Verzerrungen  $\mathbf{E}_e = \ln \mathbf{U}_e$  können mittels der Padé-Approximation [Bad1993] über den Zusammenhang

$$\mathbf{E}_{(tr)}^e \cong 2(\mathbf{U}_{(tr)}^e - \mathbf{I})(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I})^{-1} \quad (7-56)$$

ermittelt werden. Im Folgenden wird für  $\ln \mathbf{U}_e$  vereinfachend  $\mathbf{E}_e$  geschrieben. Dabei liegt der Gültigkeitsbereich für die Näherung in Gl. (7-56) bei  $0,7 < \lambda_i < 1,2$ , mit  $\lambda_i$  als den Eigenwerten aus der spektralen Zerlegung von  $\mathbf{U}_{(tr)}^e$ . Für die als klein angenommene elastische Verzerrung wird dieser Wertebereich nicht überschritten.

Die Ableitung von Gl.(7-56) führt auf den weiter unten verwendeten Zusammenhang

$$d\mathbf{E}_{(tr)}^e = 4\left(\mathbf{U}_{(tr)}^e - \mathbf{I}\right)d\mathbf{U}_e \left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1}. \quad (7-57)$$

Zur Ermittlung von  $d\mathbf{U}_e$  wird über die Definition des Trial-Wertes des elastischen rechten Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}_{(tr)}^e = \mathbf{F}_n^{eT} \mathbf{F}_{rel} = \mathbf{U}_{(tr)}^{e2}$  und der Ableitung des sich daraus ergebenden Ausdrucks

$$\mathbf{U}_{(tr)}^{e2} = \mathbf{F}_{(tr)}^e{}^T \mathbf{F}_{(tr)}^e = \mathbf{F}_n^{eT} \mathbf{F}_{rel}{}^T \mathbf{F}_n^e \mathbf{F}_{rel} \quad (7-58)$$

die Gleichung

$$\mathbf{U}_{(tr)}^e d\mathbf{U}_{(tr)}^e + d\mathbf{U}_{(tr)}^e \mathbf{U}_{(tr)}^e = 2\mathbf{F}_n^{eT} \text{sym}\left(\mathbf{F}_{rel}^T d\mathbf{F}_{rel}\right) \mathbf{F}_n^e \quad (7-59)$$

bestimmt. Weitere Umformungen ergeben den Ausdruck

$$d\mathbf{U}_{(tr)}^e \cong \text{sym}\left(\mathbf{U}_{(tr)}^{e-1} \mathbf{F}_n^{eT} \text{sym}\left(\mathbf{F}_{rel}^T d\mathbf{F}_{rel}\right) \mathbf{F}_n^e\right). \quad (7-60)$$

Das Einsetzen dieser Gleichung in Gl.(7-61) führt auf die gesuchte Gleichung

$$d\mathbf{E}_{(tr)}^e = 4\left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1} \text{sym}\left(\mathbf{U}_{(tr)}^{e-1} \mathbf{F}_n^{eT} \text{sym}\left(\mathbf{F}_{rel}^T d\mathbf{F}_{rel}\right) \mathbf{F}_n^e\right) + \left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1} + o\left(\mathbf{E}_B^2\right). \quad (7-62)$$

Für die Rotationsanteile aus Gl.(7-49) gilt mit der Zerlegung des elastischen relativen Deformationsgradienten:

$$\mathbf{R}_{(tr)}^e \mathbf{U}_{(tr)}^e = \mathbf{F}_{(tr)}^e = \mathbf{F}_{rel} \mathbf{F}_n^e. \quad (7-63)$$

Differenzieren und Umstellen führt auf die Gleichung

$$d\mathbf{R}_{(tr)}^e \mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{R}_{(tr)}^e d\mathbf{U}_{(tr)}^e = d\mathbf{F}_{rel} \mathbf{F}_n^e, \quad (7-64)$$

was unter Verwendung von Gl.(7-60) auf die Formulierung

$$d\mathbf{R}_{(tr)}^e \mathbf{R}_{(tr)}^e = d\mathbf{F}_{rel} \mathbf{F}_n^e - \mathbf{R}_{(tr)}^e \text{sym}\left(\mathbf{U}_{(tr)}^{e-1} \mathbf{F}_n^{eT} \text{sym}\left(\mathbf{F}_{rel}^T d\mathbf{F}_{rel}\right) \mathbf{F}_n^e\right) \mathbf{U}_{(tr)}^{e-1} \mathbf{R}_{(tr)}^{eT} \quad (7-65)$$

führt. Für das Inkrement der Kirchhoff-Spannungen aus Gl.(7-49) ergibt sich so die Form

$$\begin{aligned} d\mathbf{K} &= \mathbf{R}_e d\mathbf{M} \mathbf{R}_e^T + d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T \mathbf{K} + \mathbf{K} (d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T)^T \\ &= \mathbf{R}_e \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} : d\mathbf{E}_{(tr)}^e \right) \mathbf{R}_e^T + d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T \mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} (d\mathbf{R}_e \mathbf{R}_e^T)^T, \end{aligned} \quad (7-66)$$

wobei die Beziehung  $\mathbf{R}_e = \mathbf{R}_{(tr)}^e$  verwendet wird, um im Folgenden den Subindex  $_{(tr)}$

weglassen zu können. Der Ausdruck

$$d\mathbf{E}_e = 4\left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1} \text{sym}\left(\mathbf{U}_{(tr)}^e{}^{-1} \mathbf{F}_e^T \text{sym}\left(\mathbf{F}_{rel}^T d\mathbf{F}_{rel}\right) \mathbf{F}_e\right) + \left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1} + O\left(\mathbf{E}_B^2\right) \quad (7-67)$$

muss hierbei zunächst als Funktion von  $d\mathbf{F}_{rel}$  formuliert werden. Mit den Operatoren

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 \equiv 4\left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1} \underline{\otimes} \left(\mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I}\right)^{-1}, \quad (7-68)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \equiv \mathbf{F}_e^T \underline{\otimes} \mathbf{F}_e^T, \quad (7-69)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \equiv \mathbf{U}_{(tr)}^e{}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{I} \text{ und} \quad (7-70)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I}\right) \quad (7-71)$$

wird Gl.(7-67) in die folgende Form gebracht:

$$d\mathbf{E}_e = \left[ \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} \right) : \left( \mathbf{F}_{rel}^T \underline{\otimes} \mathbf{1} \right) \right] : d\mathbf{F}_{rel} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_E : d\mathbf{F}_{rel} \quad (7-72)$$

Die hier und im Weiteren verwendeten Operatoren zwischen Tensoren 2. bzw. 4. Stufe werden in der Tafel 7.4 erläutert. Ebenso wird der Ausdruck aus Gl. (7-65)

$$d\mathbf{R}_{(tr)}^e \mathbf{R}_{(tr)}^e{}^T = d\mathbf{F}_{rel} \mathbf{F}_n^e{}^{-1} - \mathbf{R}_{(tr)}^e \text{sym}\left(\mathbf{U}_{(tr)}^e{}^{-1} \mathbf{F}_e^T \text{sym}\left(\mathbf{F}_{rel}^T d\mathbf{F}_{rel}\right) \mathbf{F}_e\right) \mathbf{U}_{(tr)}^e{}^{-1} \mathbf{R}_{(tr)}^e{}^T \quad (7-73)$$

in die Form

$$d\mathbf{R}_{(tr)}^e \mathbf{R}_{(tr)}^e{}^T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_R : d\mathbf{F}_{rel} \quad (7-74)$$

gebracht, wobei der Tensor  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_R$  durch die Zuordnung

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_R \equiv \left[ \left( \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{U}_e^{-1} \right) : \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} \right) : \left( \mathbf{F}_{rel}^T \underline{\otimes} \mathbf{1} \right) \right] \quad (7-75)$$

definiert ist.

Das Einsetzen von Gl.(7-72) und Gl.(7-74) ergibt für die inkrementelle Form der Kirchhoff-Spannungen aus Gl. (7-49) die Formulierung

$$d\mathbf{K} = \mathbf{R}_e \left[ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_E : \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_E : d\mathbf{F}_{rel} \right) \right] \mathbf{R}_e^T + \left[ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_R : d\mathbf{F}_{rel} \right] \mathbf{K}_{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} \left[ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_R : d\mathbf{F}_{rel} \right]^T \quad (7-76)$$

und weiter den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{K} &= \mathbf{R}_e \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}} : d\mathbf{F}_{\text{rel}} \right) \right) \mathbf{R}_e^T + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}}(\mathbf{K}_{n+1}) : d\mathbf{F}_{\text{rel}} \\
 &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{KM}} : d\mathbf{F}_{\text{rel}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}} : d\mathbf{F}_{\text{rel}} \quad , \quad (7-77) \\
 &= \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{KM}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}} \right) : d\mathbf{F}_{\text{rel}}
 \end{aligned}$$

mit den Tensoren

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{Re}} \equiv \mathbf{R}_e^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{C}}} \otimes \mathbf{R}_e^T, \quad (7-78)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{KM}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{Re}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_E \quad \text{und} \quad (7-79)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}}(\mathbf{K}_{n+1}) = \left[ \left( \mathbf{K}_{n+1}^T \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) + \left( \mathbf{K}_{n+1} \otimes \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right) \right] : \underline{\underline{\mathbf{C}}}_R, \quad (7-80)$$

mit  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{KM}}$  als materiellem Materialoperator und  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}}$  als geometrischem Materialoperator. Hier eingeführte Tensoroperatoren werden in Tafel 7.4 beschrieben.

Über die Definition des relativen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{\text{rel}} \mathbf{F}_n \Rightarrow \mathbf{F}_{\text{rel}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1} \quad (7-81)$$

gewinnt man den Zusammenhang zwischen  $d\mathbf{F}_{\text{rel}}$  und den unbekanntem Zuwächsen des Verschiebungsfeldes  $d\mathbf{u}$  über

$$d\mathbf{F}_{\text{rel}} = d(\nabla_n \mathbf{x}) = \nabla_n(d\mathbf{x}) = \nabla_n(d\mathbf{u}), \quad (7-82)$$

so dass man das Ergebnis

$$d\mathbf{K} = \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{KM}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}} \right) : \mathbf{L} \quad (7-83)$$

erhält. Der akustische Tensor für die Untersuchung der Eindeutigkeit des Gleichungssystems ist somit

$$\mathbf{H}_{\text{hyper}} = \mathbf{n} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{KM}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\text{RR}} \right) \cdot \mathbf{n}. \quad (7-84)$$

## 7.2.2 Hypoelastisch-plastische Formulierung

Im Rahmen von FE-Programmen ist bei Verwendung inkrementeller hypoelastisch-plastischer Stoffgesetze (s. Tafel 7.3) unter Berücksichtigung großer Deformationen

die materielle Spannungsableitung unter Verwendung der Jaumann-Rate

$$d\mathbf{K} = d\mathbf{K}_J + \dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{K} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{\Omega}}^T = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{JK} : \mathbf{D} + \dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{K} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{\Omega}}^T. \quad (7-85)$$

zu berücksichtigen. Der Materialoperator ergibt sich aus der in Kapitel 6 vorgestellten Linearisierung der Rate der Kirchhoff-Spannungen

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{JK} = \frac{\partial \mathbf{K}_{n+1}}{\partial \mathbf{D}}. \quad (7-86)$$

Der Ausdruck  $\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{K} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{\Omega}}^T$  wird über die Definition des Spintensors (bzw. des antisymmetrischen Anteils des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten)

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (7-87)$$

in Abhängigkeit von  $\mathbf{L}$  formuliert:

$$\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{K} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{\Omega}}^T = (\mathbf{L} - \mathbf{D})\mathbf{K} + \mathbf{K}(\mathbf{L} - \mathbf{D})^T = \frac{1}{2}(\mathbf{L}\mathbf{K} - \mathbf{L}^T\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{L} + \mathbf{K}\mathbf{L}^T). \quad (7-88)$$

Die Anwendung, der in Tafel 7.4. aufgeführten Tensoroperatoren führt auf die Darstellung

$$\dot{\mathbf{\Omega}}\mathbf{K} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{\Omega}}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{K}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} - \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{K}^T - \mathbf{K} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{K} \bar{\otimes} \mathbf{I}) : \mathbf{L}. \quad (7-89)$$

Das Einsetzen der Gl.(7-88) in Gl. (7-85) ergibt die Schreibweise der Kirchhoff-Rate in der Form

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{JK} : \mathbf{D} + \frac{1}{2}[\mathbf{K}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} - \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{K}^T - \mathbf{K} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{K} \bar{\otimes} \mathbf{I}] : \mathbf{L} \quad (7-90)$$

mit dem Tensor 4. Stufe

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\Omega KK\Omega} \equiv \frac{1}{2}[\mathbf{K}^T \underline{\otimes} \mathbf{I} - \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{K}^T - \mathbf{K} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{K} \bar{\otimes} \mathbf{I}]. \quad (7-91)$$

Abschließend kann durch den Zusammenhang

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I}) : \mathbf{L} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{DL} : \mathbf{L} \quad (7-92)$$

die Gl.(7-90) in die gesuchte Form gemäß Gl.(7-55) gebracht werden

$$d\mathbf{K} = [\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{KL} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\Omega KK\Omega}] : \mathbf{L} \quad (7-93)$$

mit  $\underline{\underline{C}}_{KL}$  als materiellem Materialoperator und  $\underline{\underline{C}}_{\Omega KKK\Omega}$  als geometrischem Materialoperator. Der akustische Tensor für die Untersuchung der Eindeutigkeit des Gleichungssystems ist somit

$$\mathbf{H}_{\text{hypo}} = \mathbf{n} \cdot (\underline{\underline{C}}_{KL} + \underline{\underline{C}}_{\Omega KKK\Omega}) \cdot \mathbf{n}. \quad (7-94)$$

### 7.3 Ergebnisse

Im diesem Abschnitt sind die Ergebnisse der Untersuchung des Elliptizitätsverlustes des lokalen und des nicht-lokalen Gurson-Modells zusammengefasst. Es werden Untersuchungen des Elliptizitätsverlustes und der Lokalisierung für die folgenden Fälle durchgeführt:

- lokales Gurson-Modell bei kleinen Deformationen für einfache Lastfälle an Ein-Element-Rechnungen
- lokales Gurson-Modell an Bruchmechanikproben aus einem realen Werkstoff
- lokales Gurson-Modell bei großen Deformationen für einfache Lastfälle an Ein-Elementrechnungen und verschiedenen Implementierungen (kleine Deformationen, hypoelastisch-plastisch und hyperelastisch-plastisch)
- nicht-lokales Gurson-Modell für einfache Lastfälle und kleine Deformationen: Einfluss der Parameter  $c$  und  $k$  auf die Regularisierung.

#### 7.3.1 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell an einfachen Lastfällen

Zur Charakterisierung des möglichen Auftretens von Elliptizitätsverlust bei der Anwendung des Gurson-Modells werden zunächst Ergebnisse von Rechnungen an Ein-Element-Strukturen unter einfachen Belastungen vorgestellt. Hierzu wurde ein idealplastisches isotropes Verfestigungsverhalten mit einer Fließspannung von  $\sigma_y = 450$  MPa und einem linearen Verfestigungsmodul  $H=0$  MPa angenommen. Der hohe anfängliche Hohlraumvolumenanteil  $f_0=0,1$  und die Wahl des kritischen Hohlraumvolumenanteils von  $f_c = 0,1$  bedingen eine rapide Schädigungsentwicklung in der Struktur bis zum Versagen einzelner Elemente bei einem finalen Hohlraumvolumenanteil von  $f_f=0,18$ , um so deutliche Lokalisierungsphänomene simulieren zu können. Die für die Rechnung eingesetzten Materialparameter sind im Detail der Tabelle 7.1 zu entnehmen.

Bild 7.4 zeigt für verschiedene durchgeführte Berechnungen die Anwendung des Kriteriums für Entfestigung Gl.(7-8) und Elliptizitätsverlust Gl.(7-13). Den

Darstellungen ist jeweils der Richtungswinkel für das Auftreten der Lokalisierung zu entnehmen, sowie, als Projektion auf den Spannungsverlauf, der Zeitpunkt des Auftretens der Entfestigung (Dreiecksmarker) bzw. der Lokalisierung (Kreismarker). Die Ergebnisse sind für Schub- und biaxiale Zug- sowie für kombinierte Zug-Schub-Belastung identisch mit den analytischen Betrachtungen für eine allgemeine Klasse elastisch-plastischer Stoffgesetze aus [Dog1995]. Für die Zugbelastungen wird der Theorie entsprechend, zunächst das Entfestigungskriterium und anschließend das Kriterium für den Elliptizitätsverlust erfüllt. Für die Schubbelastung und die kombinierte Zug-Schub-Belastung wird bis zu der aufgetragenen Endverschiebung keines der Kriterien erfüllt, das Winkelminimum für den Endbelastungszustand in dem betrachteten Punkt kennzeichnet jedoch bereits den Winkel der möglichen Lokalisierung in Übereinstimmung mit den Angaben in [Dog1995].

### **7.3.2 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes und der Lokalisierung für das lokale Gurson-Modell an Bruchmechanikproben aus einem realen Werkstoff**

Für eine detailliertere Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens des lokalen Gurson-Modells wurde das Kriterium Gl.(7-13) im Rahmen der Belastungssimulation von Bruchmechanikproben aus dem Werkstoff 10MnMoNi5-5 [Kli2000] zur Anwendung gebracht.

Bild 7.5 zeigt für drei verschiedene Probengeometrien (RZP, M(T), C(T)) und für einen in [Kli2000] bestimmten Materialparametersatz des lokalen Gurson-Modells für den Werkstoff 10MnMoNi5-5 den Zeitpunkt der Erfüllung der Kriterien Gl.(7-8) und Gl.(7-13) für den Punkt der Struktur, in dem es zur Rissinitiierung kommt. Hierbei ist der Zeitpunkt der ersten Erfüllung des Kriteriums auf dem Spannungsverlauf im betrachteten materiellen Punkt, die Entwicklung des Hohlraumvolumenanteils und die äußere Last durch einen Kreismarker gekennzeichnet.

Das Kriterium für Elliptizitätsverlust wurde dabei in allen Rechnungen immer zuerst im Punkt der Rissinitiierung an der Rissspitze der Struktur erreicht, daher sind hier die Ergebnisse anderer Bereiche der Struktur nicht dargestellt. Für alle Rechnungen gilt, dass bereits deutlich vor dem endgültigen Versagen des materiellen Punktes, also vor dem Erreichen des Werts  $f_f$  für den Hohlraumvolumenanteil, das Kriterium für Elliptizitätsverlust erfüllt ist. Die Eindeutigkeit der Lösung ist somit bereits vor Rissinitiierung nicht mehr sichergestellt. Die Kraft-Verschiebungsdiagramme bzw. das Kraft-Durchmesseränderungsdiagramm zeigt, dass lange vor dem Überschreiten des Maximums der Kraft-Verschiebungs-Kurve der Elliptizitätsverlust auftreten kann.

### 7.3.3 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell bei großen Deformationen für einfache Lastfälle an Ein-Elementrechnungen und verschiedenen Implementierungen

Die verschiedenen Möglichkeiten der Implementierung des Gurson-Modells auf Grundlage kleiner Deformationen, einer hypoelastisch- bzw. einer hyperelastisch-plastischen Formulierung wirft die Frage auf, wie sich die Ergebnisse von FE-Berechnungen bzgl. eines möglichen Elliptizitätsverlustes der konstitutiven Gleichungen voneinander unterscheiden. Zur Untersuchung dieser Fragestellung wird hier ein Vergleich der drei verschiedenen Implementierung des lokalen Gurson-Modells bzgl. der Erfüllung des Kriteriums für Elliptizitätsverlust bei gleichen einfachen Belastungssituationen und der Verwendung der in Tabelle 7.2 angegebenen Materialparameter vorgenommen.

Bild 7.6a zeigt den Spannungsverlauf von drei Rechnungen für eine Zugbeanspruchung unter Behinderung der Querkontraktion. Die Ergebnisse der Rechnung unter Berücksichtigung kleiner Deformationen bzw. der hypoelastisch-plastischen und der hyperelastischen-elastischen Formulierung unterscheiden sich dabei nur unwesentlich. Bei einem anfänglichen Hohlraumvolumenanteil von  $f_0=0,005$  und einem kritischen Hohlraumvolumenanteil von  $f_c =0,025$  wird ebenfalls für alle drei Rechnungen ein Schädigungswert von  $f=0,038$  erreicht, der noch deutlich unter dem finalen Hohlraumvolumenanteil von  $f_f=0,20$  liegt (s. Bild 7.6b). Die Abbildung 7.6c zeigt die Auswertung des Kriteriums für Elliptizitätsverlust. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Kriterium für alle drei Rechnungen im gleichen Belastungspunkt erfüllt wird, wobei der Verlauf der Kurve für die hyperelastisch-plastische Formulierung und die Rechnung mit kleinen Deformationen identisch ist. Die Auswertung des Richtungswinkels im Moment der Erfüllung des Kriteriums (Bild 7.6d) zeigt, dass auch dieser Wert von der Wahl der Formulierung für die vorliegende Belastungssituation unabhängig ist. Bemerkenswert ist, dass auch hier das Kriterium deutlich vor dem Erreichen des kritischen Hohlraumvolumenanteils erfüllt wird.

Bild 7.7a zeigt den Spannungsverlauf von drei Rechnungen für eine kombinierte Zug-Schub-Bbeanspruchung. Der Zeitpunkt des Stabilitätsverlustes liegt hierbei deutlich später (s.Bild 7.7b) als in dem vorangegangenen Beispiel und fällt mit dem Erreichen des kritischen Werts des Hohlraumvolumenanteils von  $f_c =0,025$  zusammen (s.Bild 7.7c). Eine detaillierte Betrachtung des Zeitpunktes der Erfüllung des Kriteriums (s.Bild 7.7d) zeigt, dass geringfügige Unterschiede bzgl. den verschiedenen Implementierungen bestehen, was durch das Auftreten von materiellen Rotation durch die überlagerte Schubbeanspruchung bedingt ist. Die Richtungscharakteristik

des Eindeutigkeitsverlustes unterscheiden sich nicht voneinander, wie in Bild 7.7e deutlich zu erkennen ist. Weiterführende, hier nicht gezeigte Rechnungen ergeben, dass mit einer Erhöhung des Schubanteils die Lösung stabilisiert, dass Kriterium also nicht erfüllt wird.

Das Auftreten einer möglichen Instabilität ist offensichtlich nicht stark von der Wahl der Formulierung abhängig, da die maßgebliche Ursache für den Stabilitätsverlust der voranschreitende Schädigungsprozess und die damit verbundene Entfestigung ist, die nur schwach von der Wahl der Formulierung beeinflusst wird.

Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass bei verschiedenen Implementierungen die Anpassung der Materialparameter des Gurson-Modells auf Grundlage experimenteller Daten nicht zu identischen Ergebnissen führen wird und sich so weitere Unterschiede bei einer Stabilitätsuntersuchung gleicher Belastungsfälle für unterschiedliche Implementierungen ergeben können.

Für das Gurson-Modell erweisen sich kombinierte Belastungen mit hohen Schubanteilen als regularisierend. Für die Modellierung von Bruchmechanikproben ist in der kritischen Phase der Belastungszunahme jedoch der Zuganteil dominant, so dass ein Auftreten des Stabilitätsverlustes bei der Anwendung des lokalen Gurson-Modells in vielen Situationen unvermeidbar erscheint.

#### **7.3.4 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das nicht-lokale Gurson-Modell bei kleinen Deformationen**

Die Betrachtung des Kriteriums für den Elliptizitätsverlust des nicht-lokalen Gurson-Modells zeigt, dass, im Vergleich zum Kriterium des lokalen Modells aus Gl.(7-13), die Auswertung der Determinante in Gl.(7-32) nicht nur von der charakteristischen Richtung des Lösungsvektors  $\mathbf{n}$  abhängig ist, sondern auch von der Wellenzahl  $k$  des Ansatzes der Schädigungsfeldgröße und von der kritischen Länge  $c$  abhängt. Weiterhin wirkt der Term  $ck^2$  in Gl.(7-32) unabhängig von der aktuellen Schädigungsverteilung in einer Struktur, so dass auch bei einem homogenen Schädigungsfeld, d.h.  $\nabla d = 0$  bzw.  $\nabla f = 0$ , die Auswertung des akustischen Tensors von der Wahl der kritischen Länge bzw. der Wellenzahl abhängt.

Eine Untersuchung des möglichen Stabilitätsverlustes kann daher nicht mehr alleine an dem materiellen Zustand eines lokalen Punktes erfolgen, sondern muss unter Berücksichtigung der sich einstellenden globalen Schädigungsverteilung der Struktur für eine konkrete Belastungssituation durchgeführt werden. Ergebnisse hierzu werden in Kapitel 8 an Strukturrechnungen präsentiert.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Stabilitätsuntersuchung unter Berücksichtigung verschiedener Kombinationen der Wellenzahl  $k$  des Ansatzes der Schädigungsfeldgröße und der kritischen Länge  $c$  an homogenen Schädigungsverteilungen und Belastungsfällen. Die so gewonnenen Erkenntnisse lassen Aussagen über die Wahl des Parameters  $c$  zu, um eine regularisierende Wirkung des Gradiententerms der nicht-lokalen Entwicklungsgleichung der globalen Schädigungsevolution zu erhalten.

Zu diesem Zweck wird beispielhaft die Untersuchung des Einflusses des nicht-lokalen Parameters  $c$  auf die Regularisierung der Lösung an einem einfachen Belastungsfall homogener Deformation (kombinierte Zug-Schubbelastung) und Schädigungsverteilung an Ein-Element-Rechnungen unter Berücksichtigung kleiner Deformationen vorgestellt.

Bild 7.8a zeigt den Spannungsverlauf für ein auf 16% Zugdehnung und 8% Schub beanspruchtes Element. Die Materialparameter wurden dabei entsprechend der Tabelle 7.2 gewählt. Es wurde ein idealplastisches isotropes Verfestigungsverhalten mit einer Fließspannung von  $\sigma_Y = 450$  MPa und einem linearen Verfestigungsmodul  $H = 0$  MPa angenommen. Der niedrige anfängliche Hohlraumvolumenanteil  $f_0 = d_0 = 0,005$  und die Wahl des kritischen Hohlraumvolumenanteils von  $d_c = 0,025$  bedingen eine gemäßigte Schädigungsentwicklung bei frühem beschleunigtem Schädigungswachstum in Entsprechung der Schädigungsentwicklung duktiler metallischer Werkstoffe bei Raumtemperatur. In Bild 7.8c ist die Entwicklung des lokalen Hohlraumvolumenanteils  $f$  über die Belastung aufgetragen, wobei am Ende der Belastung ein Wert von  $f = 0,06$  erreicht wird, der noch weit unter dem endgültigen Versagen des Materials bei  $f_f = 0,2$  liegt.

Bild 7.8c zeigt das Ergebnis der Auswertung des nicht-lokalen Stabilitätskriteriums für drei Werte-Kombinationen  $[k_d; c]$ : Mit  $k_d = 0$  und  $c = 0$  wird das Stabilitätskriterium entsprechend dem lokalen Gurson-Modell ausgewertet und mit  $k_d = 0$  und  $c = 0,1$  bzw.  $k_d = 10^{10}$  und  $c = 0,1$  liegen zwei beispielhafte Wertabgrenzungen der Anwendung des nicht-lokalen Kriteriums vor. Deutlich ist zu erkennen, dass bereits im anfänglichen Verlauf der Belastung das Stabilitätskriterium den Nullwert durchläuft. Eine detaillierte Betrachtung, wie in Bild 7.8d gezeigt, macht deutlich, dass für  $[k_d = 0; c = 0,1]$  und  $[k_d = 0; c = 0]$  bei  $t \approx 0,156$  der Wert des Stabilitätskriteriums durch die Nulllinie verläuft. Für  $[k_d = 10^{10}; c = 0,1]$  wird das Minimum der Kurve später und ohne einen Nulldurchgang durchlaufen, m.a.W. es kommt zu keinem Elliptizitätsverlust. Im weiteren Verlauf der Belastung wird für keine der drei Auswertungen der Nullwert des

Kriteriums erneut erreicht.

Die vollständige Auswertung des Stabilitätskriteriums unter Berücksichtigung der Abhängigkeit vom Richtungswinkel  $\varphi$  des Vektors  $\mathbf{n}$  ist beispielhaft für den „lokalen“ Fall  $[k=0 ; c=0]$  in Bild 7.8f dargestellt. Hier ist über der, durch die Belastung und mögliche Richtungswinkel  $\varphi$  aufgespannten, Fläche der Wert des Stabilitätskriteriums aufgetragen.

Wird für die Simulation das Kriterium des Elliptizitätsverlustes für den Wertebereich  $[k=0 .. 10 ; c=0 .. 0,10]$  berechnet und der, über die gesamte Belastungsgeschichte ermittelte Minimalwert in Abhängigkeit von  $k_d$  und  $c$  aufgetragen, so ergibt sich die in Bild 7.8e gezeigte Flächendarstellung. Mit zunehmender Länge  $c$  tritt ein Elliptizitätsverlust später bzw. für Werte  $c > 0,05$  gar nicht auf. Ähnlich verhält sich der Einfluss der Wellenzahl  $k$ . Hohe Wellenzahlen bedeuten, dass starke räumliche Veränderungen des Schädigungsfelds abgebildet werden, was zur Folge hat, dass der Einfluss des Gradiententerms zu einer Regularisierung der Wirkung führen kann.

## 7.4 Tabellen

**Tabelle 7.1a: Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen**

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$f_0$	$f_c$	$f_f$	$f_u^*$	$f_n$	$s_n$	$\epsilon_n$
1,5	1,0	2,25	0,1	0,1	0,18	0,5	0,1	0,35	0,1

**Tabelle 7.1b: Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für ideal-plastisches Verhalten für die Beispielrechnungen**

$E$ [MPa]	$\nu$	$H$ [MPa]	$\sigma_Y$ [MPa]
210000	0,3	0	450

**Tabelle 7.2a: Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen**

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$f_0$	$f_c$	$f_f$	$f_u^*$	$f_n$	$s_n$	$\epsilon_n$
1,5	1,0	2,25	0,005	0,025	0,2	0,5	0,005	0,05	0,1

**Tabelle 7.2b: Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für ideal-plastisches Verhalten für die Beispielrechnungen**

$E$ [MPa]	$\nu$	$H$ [MPa]	$\sigma_Y$ [MPa]
210000	0,3	0	450

**Tabelle 7.3: Verfestigungs- und Schädigungsparameter für 10MnMoNi5-5**  
Materialparameter für isotrope und kinematische Verfestigung:

$E$ [GPa]	$\sigma_Y$ [MPa]	$R_1$ [MPa]	$k_1$ [-]	$R_2$ [MPa]	$k_2$ [-]
210,0	620,0	406,0	213,0	-167,0	62,1

Materialparameter für duktile Schädigung:

$f_0$	$f_c$	$f_f$	$f_n$	$\epsilon_n$	$s_n$
0,0005	0,025	0,2	0,005	0,1	0,05

Konstanten des Gurson-Modells:

$q_1$	$q_2$	$f_u^*$
1,5	1,0	0,75

7.5 Bilder

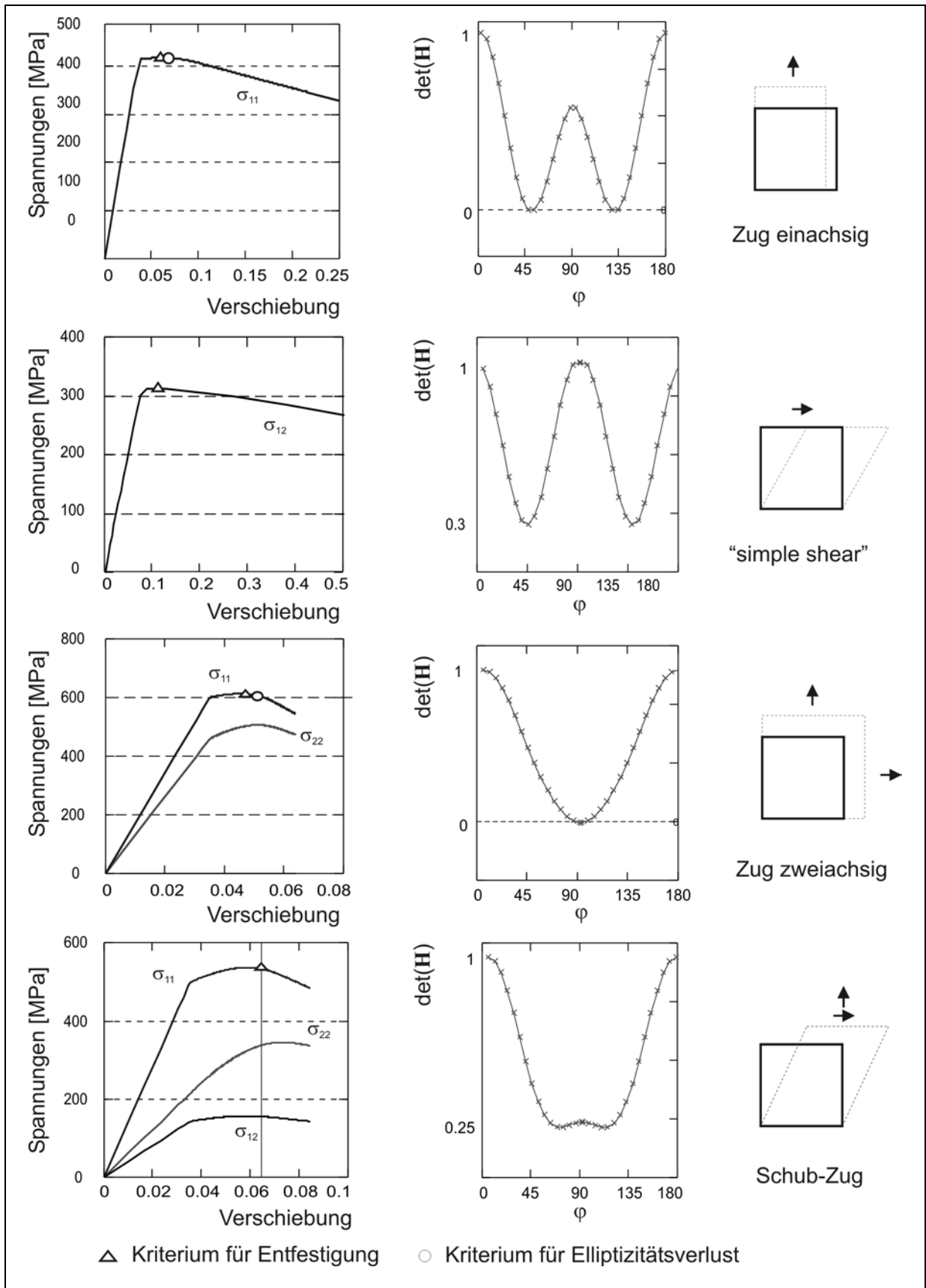


Bild 7.4: Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell an einfachen Lastfällen

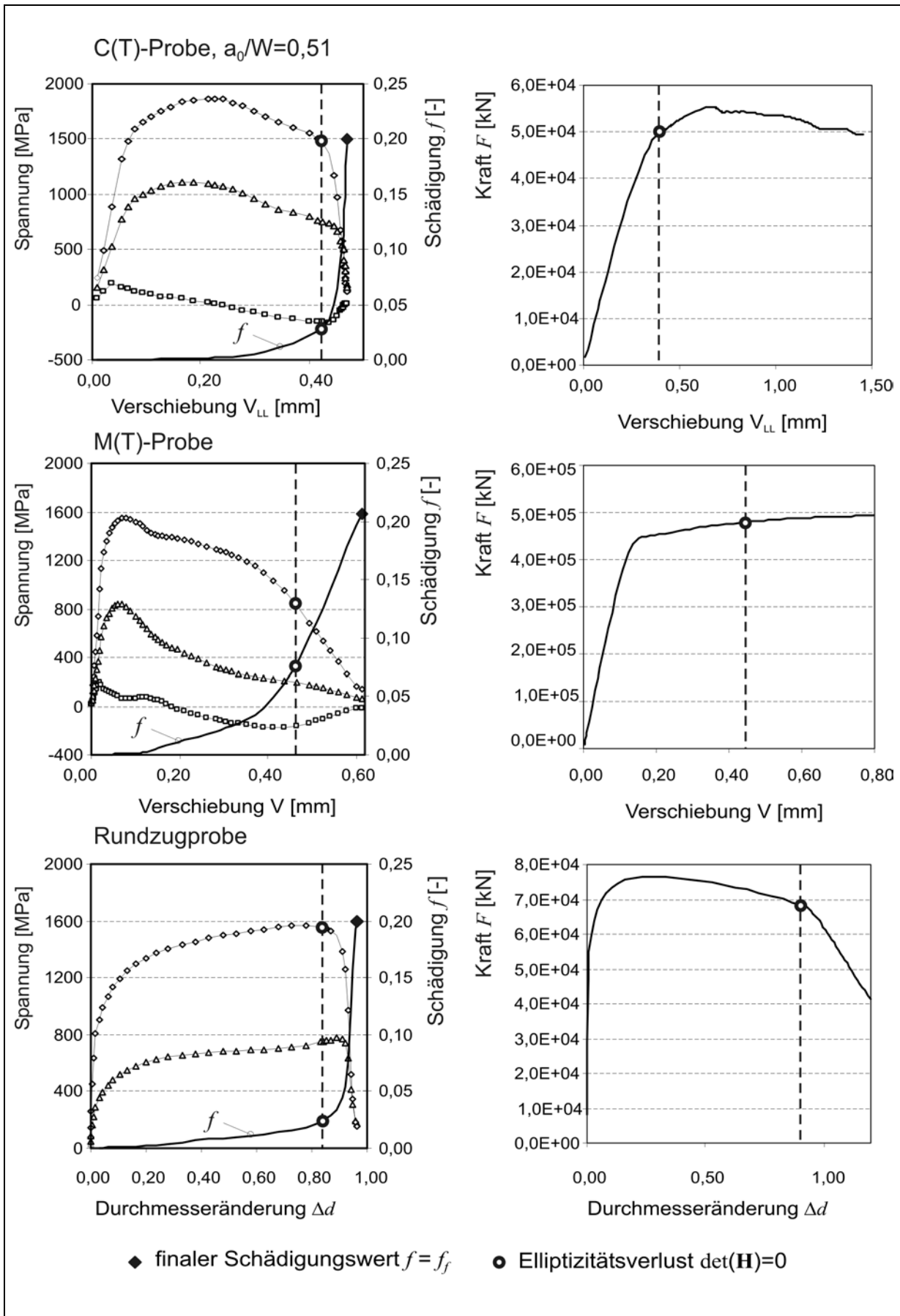


Bild 7.5: Untersuchung des Elliptizitätsverlustes und der Lokalisierung für das lokale Gurson-Modell an Bruchmechanikproben aus einem realen Werkstoff (10MnMoNi5-5)

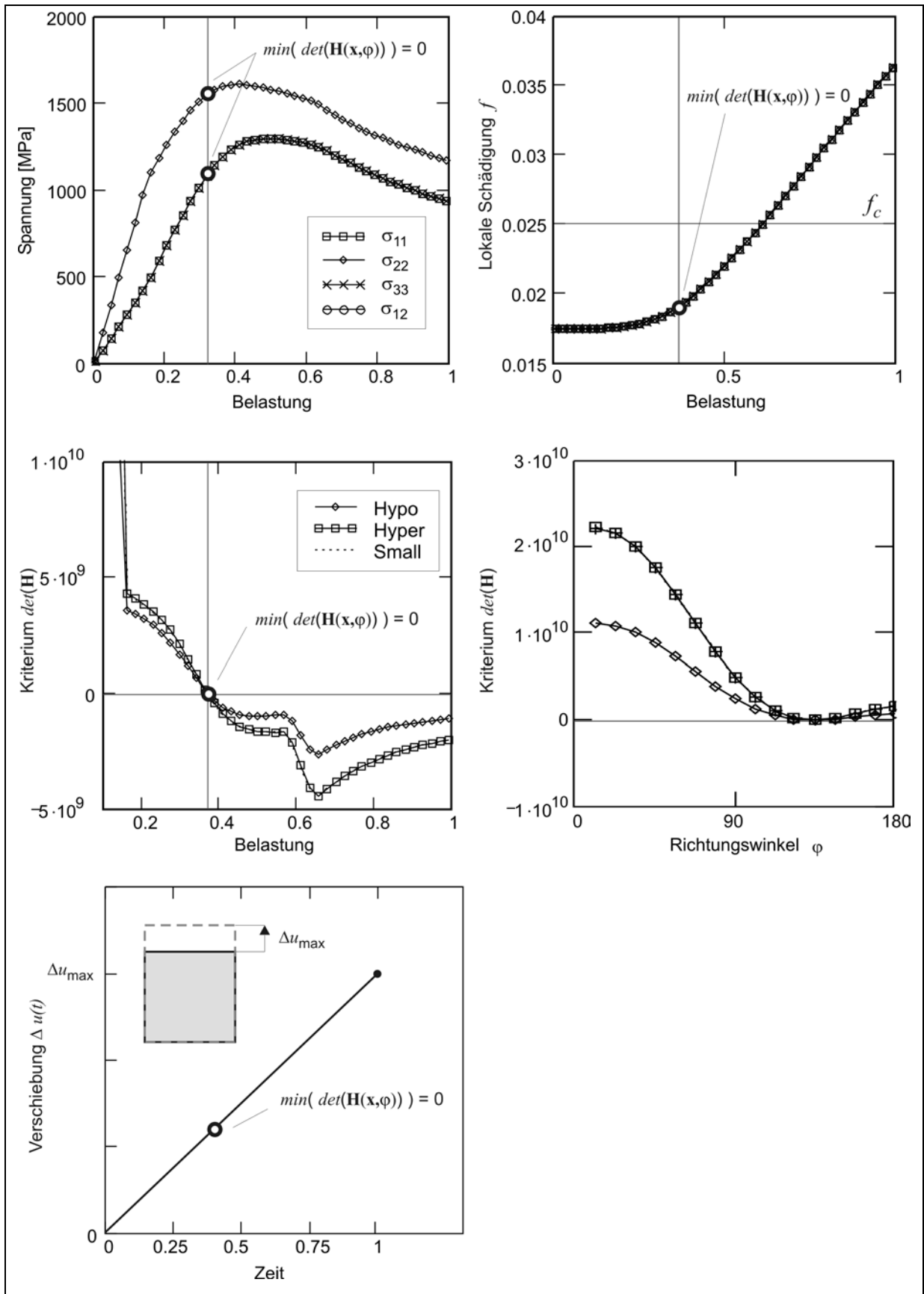


Bild 7.6: Untersuchung des Elliptizitätsverlustes einer Strukturrechnung (Zug) für das lokale Gurson-Modell an einer Ein-Elementrechnung und verschiedenen Implementierungen (kl. Deformationen, hypoelastisch und hyperelastisch)

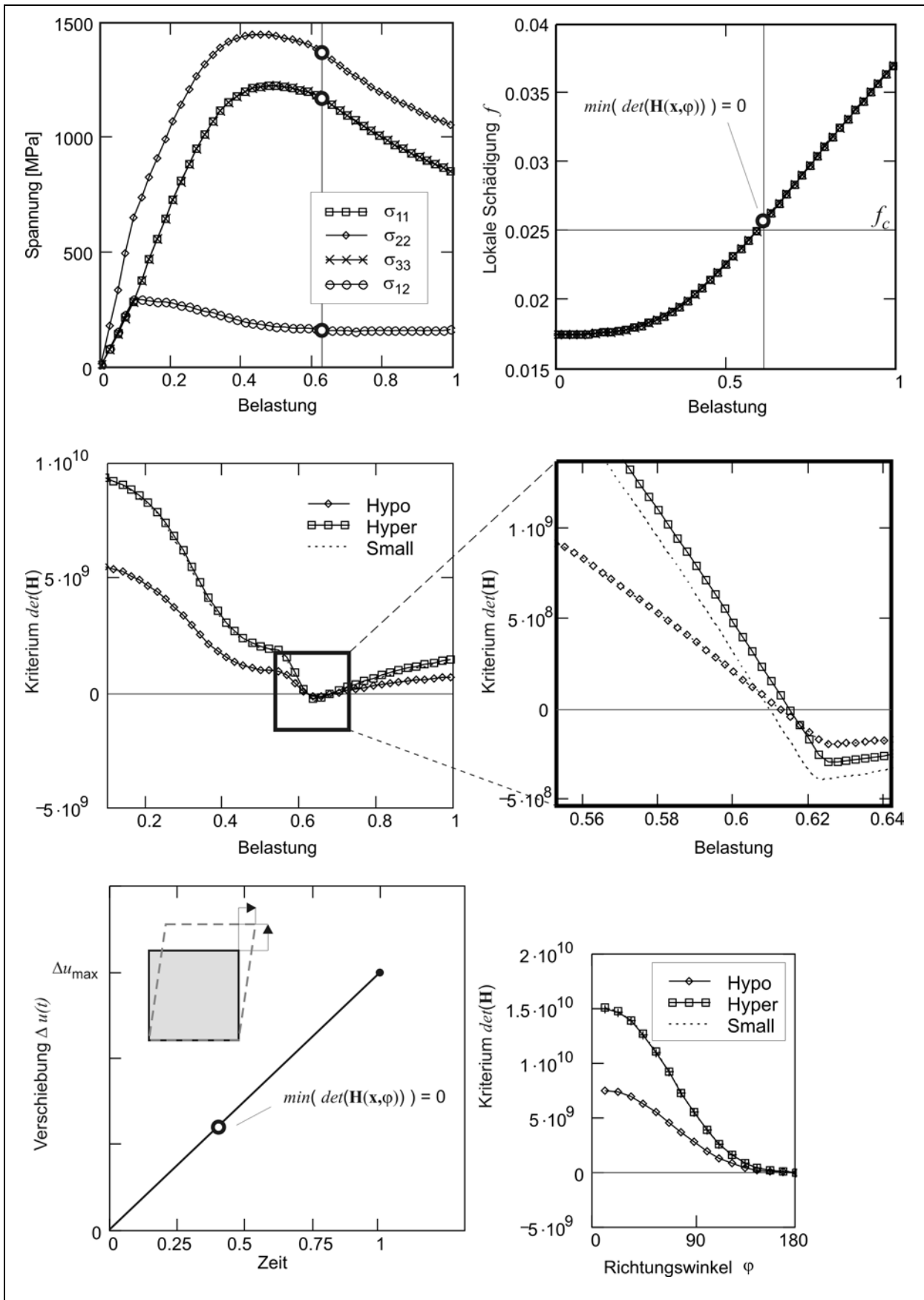


Bild 7.7: Untersuchung des Elliptizitätsverlustes einer Strukturrechnung (Zug/Schub) für das lokale Gurson-Modell an einer Ein-Elementrechnung und verschiedenen Implementierungen (kl. Deformationen, hypoelastisch und hyperelastisch)

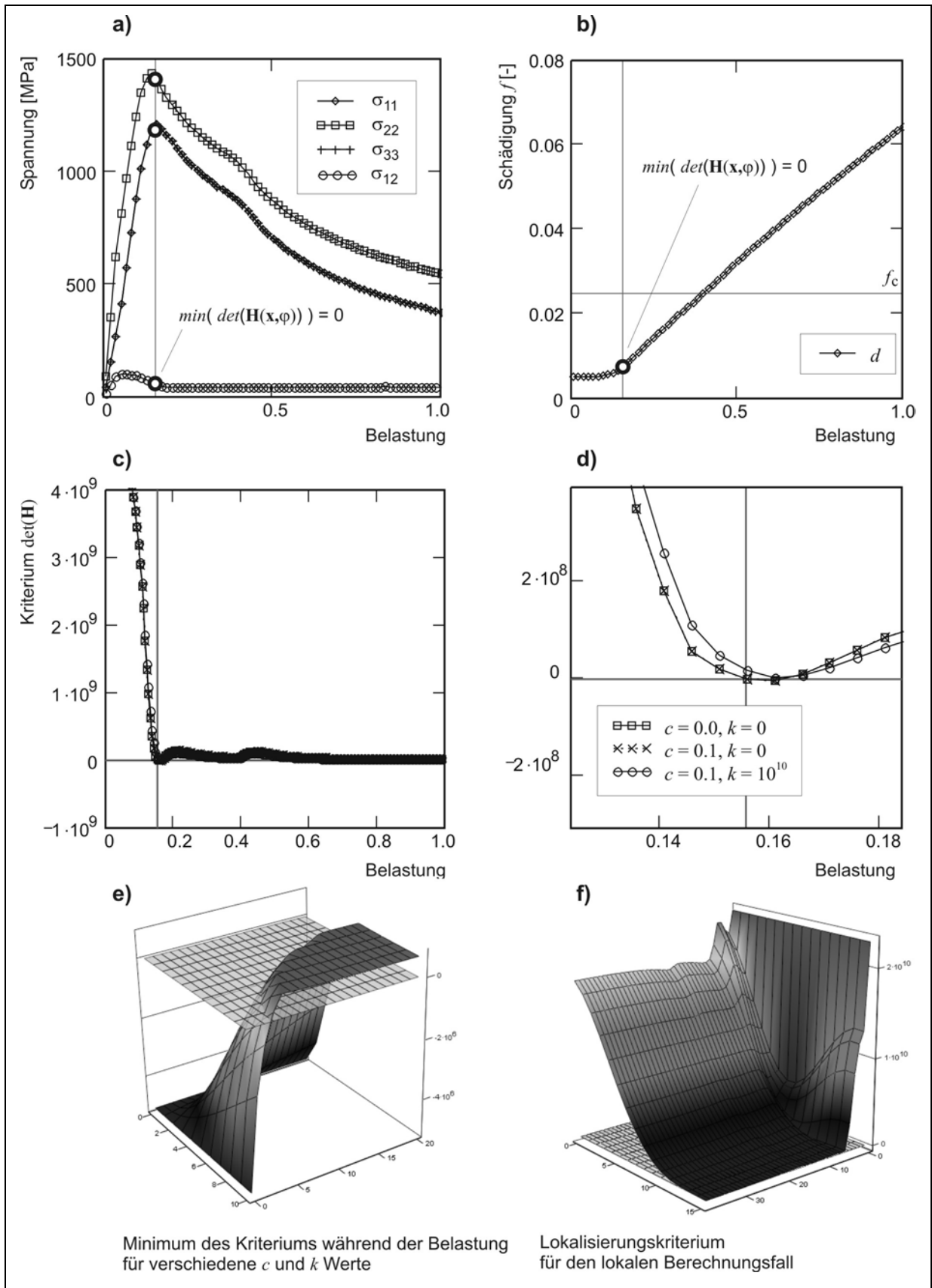


Bild 7.8: Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das nicht-lokale Gurson-Modell bei kleinen Deformationen: Einfluss der Parameter  $c$  und  $k$  auf die Auswertung für einen homogenen Belastungsfall (Zug) in einer Struktur

## 7.6 Tafeln

**Tafel 7.1: Akustische Tensoren****Hyperelastische Formulierung**

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \mathbf{M}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{(tr)}^e}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_1 \equiv 4 \left( \mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I} \right)^{-1} \underline{\underline{\otimes}} \left( \mathbf{U}_{(tr)}^e + \mathbf{I} \right)^{-1}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \equiv \mathbf{F}_e^T \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{F}_e^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \equiv \mathbf{U}_{(tr)}^e{}^{-1} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} \equiv \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} \right)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{Re} \equiv \mathbf{R}_e^T \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{R}_e^T$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_R \equiv \left( \mathbf{I} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{U}_e^{-1} \right) \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} \underline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_3 \underline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_2 \underline{\underline{\otimes}} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{sym} \right) \cdot \left( \mathbf{F}_{rel}^T \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} \right)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{RR} = \left[ \left( \mathbf{K}_{n+1}^T \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} \right) + \left( \mathbf{K}_{n+1} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} \right) \right] \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}_R$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{KM} \equiv \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{Re} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}_E$$

$$\mathbf{H}_{hyper} = \mathbf{n} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{KM} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{RR} \left( \mathbf{K}_{n+1} \right) \right) \cdot \mathbf{n}$$

**Hypoelastische Formulierung**

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{JK} = \frac{\partial \mathbf{K}_{n+1}}{\partial \mathbf{D}}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\Omega KK\Omega} \equiv \frac{1}{2} \left[ \mathbf{K}^T \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} - \mathbf{I} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{K}^T - \mathbf{K} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} + \mathbf{K} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} \right]$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{I} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\underline{\otimes}} \mathbf{I} \right) : \mathbf{L} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{DL} : \mathbf{L}$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{KL} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\Omega KK\Omega} \right) : \mathbf{L}$$

$$\mathbf{H}_{hypo} = \mathbf{n} \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{KL} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{\Omega KK\Omega} \right) \cdot \mathbf{n}$$

**Tafel 7.2: Konstitutive Gleichungen der Hyperelastoplastizität**

$$\mathbf{M} = \mathbf{C}_e \ln \mathbf{U}_e = \mathbf{C}_e \mathbf{E}_e$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_e \mathbf{M} \mathbf{R}_e^T$$

$$\mathbf{F}_{\text{rel}} = \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{F}_n^{-1}$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^p = \exp(\tau \mathbf{D}_{n+1}^p) \mathbf{F}_n^p$$

$$\mathbf{F}_{(\text{tr})}^e = \mathbf{F}_{\text{rel}} \mathbf{F}_n^e = \mathbf{F}_{n+1}^e \Delta \mathbf{F}^p$$

$$\Delta \mathbf{F}^p = \exp(\tau \mathbf{D}_{n+1}^p)$$

$$\left(\mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}\right)^T \left(\mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}\right) = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \text{ und } \mathbf{F}_e = \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1}$$

$$\mathbf{R}_{(\text{tr})}^e = \mathbf{R}_{n+1}^e$$

$$\mathbf{U}_{(\text{tr})}^e = \mathbf{U}_{n+1}^e \exp(\tau \mathbf{D}_{n+1}^p) = \mathbf{U}_{n+1}^e \Delta \mathbf{F}^p$$

$$\mathbf{E}_{n+1}^e + \Delta t \mathbf{D}_{n+1}^p = \mathbf{E}_{(\text{tr})}^e$$

$$\mathbf{M}_{n+1} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{E}_{n+1}^e = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{E}_{(\text{tr})}^e - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\Delta t \mathbf{D}_{n+1}^p)$$

$$\mathbf{M}_{(\text{tr})} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{E}_{(\text{tr})}^e$$

$$\mathbf{M}_{n+1} = \mathbf{M}_{(\text{tr})} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\Delta t \mathbf{D}_{n+1}^p)$$

**Tafel 7.3: Konstitutive Gleichungen der Hypoelastoplastizität**

$$\mathbf{L} = \Delta \mathbf{F} \frac{1}{2} (\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_{n+1})^{-1}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L})$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$$

$$\mathbf{K}_{(\text{tr})} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{D}$$

$$\Delta \mathbf{R} = \left( \mathbf{1} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{W} \right)^{-1} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{W} \right)$$

$$\mathbf{K}_{n+1} = \Delta \mathbf{R} \mathbf{K}_n \Delta \mathbf{R} + \Delta \mathbf{K}$$

$$\Delta \mathbf{K} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : \mathbf{D} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e : (\Delta t \mathbf{D}_{n+1}^p)$$

**Tafel 7.4: Tensoroperatoren**

Einer u.a. in [Ste1997] definierten Notation folgend werden die dyadischen Operatoren zwischen den Tensoren 2.Stufe  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  in Indexschreibweise in Bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem definiert:

- Verknüpfung 1:  $[\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}]_{ijkl} = [\mathbf{A}]_{ik} [\mathbf{B}]_{jl}$

Diese Verknüpfung erlaubt die Anwendung der Operationen

$$[\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}] : \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T] \quad \text{und} \quad \mathbf{C} [\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B}] = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$$

was die Bildung eines Tensors 4. Stufe für die Ausführung eines

Produkts zweier Tensoren zweiter Stufe erlaubt :

$$[\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{I}] : \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C} : [\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{I}] = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}$$

- Verknüpfung 2:  $[\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}]_{ijkl} = [\mathbf{A}]_{il} [\mathbf{B}]_{jk}$

$$\text{mit } [\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}] : \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C} : [\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}] = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{A}$$

- Anwendungsbeispiel für V1 und V2:

Die Wirbelterme der Jaumann-Raten-Formulierung

$$\dot{\underline{\mathbf{K}}} + \underline{\mathbf{K}} \dot{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}^T = (\underline{\mathbf{L}} - \underline{\mathbf{D}}) \underline{\mathbf{K}} + \underline{\mathbf{K}} (\underline{\mathbf{L}} - \underline{\mathbf{D}})^T = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{L}} \underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{L}}^T \underline{\mathbf{K}} - \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{L}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{L}}^T)$$

ergeben mit Anwendung der oben aufgeführten Verknüpfungen

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{K}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \dot{\underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}}^T = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{K}}}^T \underline{\underline{\underline{\mathbf{I}}}} - \underline{\underline{\underline{\mathbf{I}}}} \underline{\underline{\underline{\mathbf{K}}}}^T - \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\underline{\mathbf{I}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\underline{\mathbf{I}}}})$$

- Die Verknüpfung zweier Tensoren 4.Stufe  $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}$  ist in

Indexschreibweise wie folgt definiert:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} = [\underline{\underline{\mathbf{C}}}]_{ijkl} = [\underline{\underline{\mathbf{A}}}]_{ijmn} [\underline{\underline{\mathbf{B}}}]_{mnkl}$$

8	Anwendungen.....	8-1
8.1	Anwendung des gradientenabhängigen Gurson-Modells an einfachen Teststrukturen bei idealisiertem Materialverhalten.....	8-2
8.1.1	Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung .....	8-2
8.1.2	Ergebnisse für das geschwindigkeitsunabhängige Modell .....	8-3
8.1.3	Ergebnisse für das geschwindigkeitsabhängige Modell .....	8-5
8.1.4	Rissfortschrittssimulation an einer Probe .....	8-7
8.2	Anwendung an Bruchmechanikproben aus dem Werkstoff 10MnMoNi5-5 ....	8-8
8.2.1	Bestimmung der Materialparameter .....	8-8
8.2.2	Simulation duktilen Rissfortschritts an Bruchmechanikproben .....	8-9
8.2.3	Simulation duktilen Rissfortschritts an gekerbten Rundzugproben.....	8-10
8.2.4	Simulation duktilen Rissfortschritts an C(T)-Proben .....	8-11
8.3	Tabellen .....	8-12
8.4	Bilder.....	8-13

## 8 Anwendungen

Dieses Kapitel widmet sich der Anwendung des gradientenabhängigen Gurson-Modells an einfachen Teststrukturen bei idealisiertem Materialverhalten (Untersuchung des Einflusses der charakteristischen Länge) sowie der

Untersuchung der Schädigungssimulation von Bruchmechanikproben aus realen Materialien am Beispiel des Werkstoffes 10MnMoNi5-5.

## **8.1 Anwendung des gradientenabhängigen Gurson-Modells an einfachen Teststrukturen bei idealisiertem Materialverhalten**

Zu den hier dargestellten Ergebnissen gehört

- die Untersuchung des Einflusses des nicht-lokalen Gurson-Modells und der charakteristischen Länge auf das Ergebnis von FE-Simulationen von Schädigungszonen in einer einfachen rechteckigen ebenen Struktur mit einer inhomogenen Schädigungsverteilung bei verschiedenen Netzdiskretisierungen (Elementkantenlängen) und
- die Untersuchung der Unterschiede bzgl. der Formulierung des Gradiententerms für die geschwindigkeitsunabhängige Formulierung und eine in Kapitel 5.4 vorgestellte geschwindigkeitsabhängige Formulierung des Gurson-Modells
- sowie der Einfluss der Anwendung des nicht-lokalen Gurson-Modells auf die Netzabhängigkeit der Ausprägung von Schädigungszonen (Scherbänder bzw. Bereiche lokal konzentrierter Schädigungsverteilungen) an einer auf Zug beanspruchten Struktur.

### **8.1.1 Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung**

Ziel der hier vorgestellten Simulationsergebnisse ist die Untersuchung der Anwendung des nicht-lokalen Gurson-Modells im Vergleich zum lokalen Gurson-Modell bzgl. der Netzabhängigkeit der Ergebnisse von FE-Rechnungen an einer einfachen Zugscheibe mit inhomogener Schädigungsverteilung. Weiterhin wird durch die Auswertung des Kriteriums für Elliptizitätsverlust der durchgeführten Rechnungen mit dem lokalen und dem nicht-lokalen Gurson-Modell der Nachweis der regularisierenden Wirkung des nicht-lokalen Gurson-Modells erbracht.

Das nicht-lokale Gurson-Modell wird an einer zugbelasteten rechteckigen, am unteren Rand fest eingespannten, Scheibe für verschiedene Diskretisierungen mit Elementkantenlängen mit  $l_e = 1,0\text{mm}$ ,  $l_e = 0,5\text{mm}$  und  $l_e = 0,25\text{ mm}$  bei regelmäßiger Elementierung unter Berücksichtigung eines ebenen Verzerrungszustandes angewendet (Bild 8.1). Hierbei kommt die Implementierung der 4-Knotenelemente mit zusätzlichem Schädigungsfreiheitsgrad mittels der UEL-Schnittstelle des FE-Programms ABAQUS [Hib1998b] zum Einsatz. Die Ergebnisse werden mit denen einer lokalen Gurson-Modell-Rechnung und einer Diskretisierung durch ebene 4-

Knotenelemente mit Verschiebungsansätzen (Typ CPE4, s. [Hib1998b]) verglichen. Beiden Implementierungen liegt eine hyperelastische Formulierung zugrunde. Zur Ausprägung eines Schädigungsbandes ist in einem Punkt der Struktur ein erhöhter anfänglicher Hohlraumvolumenanteil  $f_0 = 1,1 \cdot f_0$  vorgegeben (s. Markierung in Bild 8.1).

Es wurde ein idealplastisches isotropes Verfestigungsverhalten mit einer Fließspannung von  $\sigma_y = 450$  MPa und einem linearen Verfestigungsmodul  $H = 0$  MPa angenommen. Der hohe anfängliche Hohlraumvolumenanteil  $f_0 = 0,1$  und die Wahl des charakteristischen Hohlraumvolumenanteils von  $f_c = 0,1$  bedingen eine rapide Schädigungsentwicklung in der Struktur bis zum Versagen einzelner Elemente bei einem finalen Hohlraumvolumenanteil von  $f_f = 0,18$ , um so deutliche Lokalisierungsphänomene simulieren zu können. Die für die Rechnung eingesetzten Materialparameter sind im Detail der Tabelle 8.1 zu entnehmen.

### 8.1.2 Ergebnisse für das geschwindigkeitsunabhängige Modell

Die geschwindigkeitsunabhängige nicht-lokale Erweiterung des Gurson-Modells wurde für die Simulation einer zugelasteten Scheibe entsprechend Bild 8.1 eingesetzt. Für die drei verschiedenen Strukturdiskretisierungen ergeben sich bei der Abmessung 15mm x 10mm 150, 600 bzw. 2400 Elemente.

Bild 8.2 zeigt die Last-Verschiebungs-Kurven der Struktur für die drei verschiedenen Strukturdiskretisierungen, wobei die resultierende Reaktionskraft über der aufgetragenen Randverschiebung aufgetragen ist. Die mit Markern versehenen Kurven wurden mit Rechnungen des nicht-lokalen Modells mit einer charakteristischen Länge  $c = 0$  ermittelt. Die zugehörigen unterbrochenen Linien wurden mit dem nicht-lokalen Gurson-Modell berechnet. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse bei gleichen Elementkantenlängen nicht exakt übereinstimmen. Da in der nicht-lokalen Rechnung die Werte des globalen Schädigungsfeldes in den Knotenpunkten als Freiheitsgrade abgebildet werden und so die Ermittlung der Entwicklung der Schädigung über die Gleichgewichtsiteration der Struktur erfolgt, ist der Abstand zwischen den Abbildungspunkten der Schädigungswerte die gesamte Elementkantenlänge. Die Rechnung verhält sich durch die, in den Knotenpunkten „gespeicherten“ Schädigungswerte und die so erfolgende Kopplung mit angrenzenden Elementen nicht-lokal. Bei der lokalen Berechnung repräsentieren vier Gauß-Punkte mit jeweils einem Viertel des Elementvolumens die diskretisierten Schädigungswerte der Struktur. Bei gleicher Elementkantenlänge führt so eine nicht-

lokale Berechnung zu einer geringfügig „steiferen“ jedoch im gleichen Maß netzabhängigen Abbildung des Strukturverhaltens.

Bild 8.3 zeigt die Ergebnisse einer Untersuchung des Einflusses der charakteristischen Länge  $c$  auf die berechneten Kraft-Verschiebungs-Verläufe am Beispiel der Strukturdiskretisierung mit einer Elementkantenlänge von  $l_e=0,25$  mm. Mit ansteigenden Werten von  $c$  wird ein zunehmend steiferes Strukturverhalten abgebildet, da die punktuell erhöhte Schädigungskonzentration durch die Wirkung des Gradiententerms abgebaut wird.

Der Vergleich der unterschiedlichen Strukturdiskretisierungen in Bild 8.4 zeigt, dass sich die Netzabhängigkeit der Systemantwort in Form der Kraft-Verschiebungs-Kurven mit zunehmenden Werten von  $c$  gegenüber den Ergebnissen der lokalen Rechnungen stark reduziert. Deutlich ist der steigende Einfluss der dämpfenden Schädigungswirkung mit einer „charakteristischen Länge“ von  $c=0,1$  und  $c=0,5$  an dem steiferen Strukturverhalten zu erkennen, der zu einer steiferen Systemantwort führt. Der unterschiedliche Zeitpunkt des starken Lastabfalls der Kraft-Verschiebungs-Kurven ist durch den Ausfall von Elementen am oberen Strukturrand zu erklären, da sich in Abhängigkeit von der Elementkantenlänge die tragende Restbreite durch den Steifigkeitsverlust einzelner Elemente unterschiedlich schnell verkleinert.

Die Darstellung der räumlichen lokalen Schädigungsverteilung  $f$  in Bild 8.5 zeigt die stark netzabhängigen Ergebnisse beim lokalen Gurson-Modell in Bezug auf die Breite des sich einstellenden Schädigungsbandes, wobei die Breite des Scherbandes gerade der Elementkantenlänge entspricht und sich nicht an der anfänglichen Größe der Schädigungsstörung orientiert.

Die Betrachtung der räumlichen Verteilung des lokalen Schädigungsfeldes bei der nicht-lokalen Gurson-Modellierung mit einer charakteristischen Länge von  $c=1,00$  in Bild 8.6 zeigt, dass die Schädigungsbänder eine annähernd gleiche Breite aufweisen. Die Breite des Schädigungsbandes erweist sich dabei als reduziert abhängig von der gewählten Elementkantenlänge und wird u.a. durch die Größe des Bereiches der anfänglich erhöhten Schädigungskonzentration gesteuert.

Analog zur Entwicklung des lokalen Schädigungsfeldes stellen sich für die drei nicht-lokalen Rechnungen die in Bild 8.6 gezeigten Verteilungen des nicht-lokalen Schädigungsfeldes  $d$  ein, wobei die Höhe des erreichten Schädigungswertes unterhalb der Werte der lokalen Schädigungsentwicklung liegen, da durch die

Wirkung des Gradiententerms eine Dekonzentration der Schädigungszone bewirkt wird.

Zur Untersuchung des regularisierenden Verhaltens der numerischen Lösung des nicht-lokalen Gurson-Modells wurde im Punkt der anfänglich erhöhten Vorschädigung das Kriterium für den Elliptizitätsverlust bei der lokalen und der nicht-lokalen Rechnung mit einer Elementkantenlänge von  $l_e=1,0$  mm ausgewertet. Bild 8.7 zeigt den Wert der Determinante des akustischen Tensors  $\mathbf{H}$  über den Verlauf der aufgetragenen Randbelastung. Die Linie mit den gefüllten schwarzen Markern für die lokale Rechnung zeigt, dass über die Belastungsgeschichte das Elliptizitätskriterium für diesen Punkt in der Struktur erfüllt wurde, d.h. ein Eindeutigkeitsverlust der Systemantwort eingetreten ist. Bei der nicht-lokalen Rechnung (Linie mit weißen Markern) kann dagegen kein Nulldurchgang des Kriteriums bis zum Versagen des betrachteten Punktes festgestellt werden. Charakteristisch für die lokale Rechnung ist, dass der Elliptizitätsverlust bereits lange vor dem Erreichen des finalen Hohlraumvolumenanteils von  $f_f=0,18$  auftritt.

### 8.1.3 Ergebnisse für das geschwindigkeitsabhängige Modell

Im Vergleich zu den vorangegangenen Rechnungen wurde das geschwindigkeitsabhängige nicht-lokale Gurson-Modell an einer zugbelasteten Scheibe der Dimension 10mmx12mm angewendet (Bild 8.8). Zur Ausprägung eines Schädigungsbandes ist auch hier in einem Punkt der Struktur ein erhöhter anfänglicher Hohlraumvolumenanteil  $f_0^* = 1,1f_0$  vorgegeben (s. Markierung in Bild 8.8). Die für die Rechnung eingesetzten Materialparameter entsprechen wiederum der Tabelle 8.1.

Bild 8.9 zeigt die Last-Verschiebungs-Verläufe der Struktur für die drei verschiedenen Strukturdiskretisierungen, wobei die resultierende Reaktionskraft über der aufgetragenen Randverschiebung aufgetragen ist. Die mit Markern versehenen Kurven wurden mit Rechnungen des nicht-lokalen Modells mit einer charakteristischen Länge  $c=0$  ermittelt. Die zugehörigen unterbrochenen Linien wurden mit dem lokalen Gurson-Modell berechnet. Auch hier wird deutlich, dass die Ergebnisse bei gleichen Elementkantenlängen erwartungsgemäß nicht übereinstimmen.

Bild 8.10 zeigt, dass sich die Netzabhängigkeit der Systemantwort in Form der Kraft-Verschiebungs-Kurven bei der Anwendung des nicht-lokalen Modells mit zunehmenden Werten von  $c$  gegenüber den Ergebnissen der lokalen Rechnungen

stark reduziert. Deutlich ist der steigende Einfluss der dämpfenden Schädigungswirkung mit einer „charakteristischen Länge“ von  $c=0,05$  an dem steiferen Strukturverhalten zu erkennen, der zu einer steiferen Systemantwort führt. Der unterschiedliche Zeitpunkt des starken Lastabfalls der Kraft-Verschiebungs-Kurven ist auch hier durch den Ausfall von Elementen am oberen Strukturrand zu erklären, da sich in Abhängigkeit von der Elementkantenlänge die tragende Restbreite durch den Steifigkeitsverlust einzelner Elemente unterschiedlich schnell verkleinert.

Wird durch einen erhöhten Wert von  $f_u^*=0,9$  gegenüber dem Ausgangswert von  $f_u^*=0,5$  die Resttragfähigkeit des Materials beim Elementausfall stark herabgesetzt, kann dieses Phänomen reduziert werden, wie den Last-Verschiebungs-Kurven aus Bild 8.11 für eine ansonsten der Rechnung in Bild 8.9 entsprechenden Simulation entnommen werden kann.

Die Betrachtung der räumlichen Verteilung der lokalen Schädigungsentwicklung in Bild 8.12 zeigt die stark netzabhängigen Ergebnisse beim lokalen Gurson-Modell in Bezug auf Orientierung und Breite des sich einstellenden Schädigungsbandes, wobei die Breite des Scherbandes gerade der Elementkantenlänge entspricht. Für eine Elementkantenlänge von  $l_e=0,25$  mm wechselt die Orientierung des sich einstellenden Schädigungsbandes um  $90^\circ$  gegenüber den Rechnungen mit  $l_e=0,5$  bzw.  $l_e=1,0$ . Die hier mit dem lokalen Gurson-Modell erzielten Ergebnisse weisen eine gute Übereinstimmung zu den in [Feu1998] ähnlich durchgeführten Strukturrechnungen auf, wo ebenfalls ein Orientierungswechsel des Schädigungsbandes berechnet wird. Die Ursache für den Orientierungswechsel des Schädigungsbandes liegt in einer sekundären Bifurkation der Simulation in der sich zunächst das Schädigungsband in der anfänglichen Orientierung von  $45^\circ$  in der Struktur ausprägt, wobei es dann bei voranschreitender Belastung in einem Punkt der Verzerrungsdiskontinuität entlang des Bandes erneut zu einem sich dominant ausprägendem Verzweigungspunkt kommt, der zu einer finalen Schädigungsentwicklung mit einem Orientierungswechsel um  $90^\circ$  führt.

Die Betrachtung der Schädigungszonen bei einer nicht-lokalen Gurson-Modellierung mit einer charakteristischen Länge von  $c=0,05$  zeigt, dass die Schädigungsbänder eine annähernd gleiche Breite und für alle drei Diskretisierungen die gleiche Orientierung aufweisen. Die Breite des Schädigungsbandes erweist sich dabei als unabhängig von der gewählten Elementkantenlänge und wird durch die Größe des Bereichs der anfänglich erhöhten Schädigungskonzentration gesteuert.

Analog zur Entwicklung des lokalen Schädigungsfeldes stellen sich für die drei nicht-lokalen Rechnungen die in Bild 8.12 gezeigten Verteilungen des nicht-lokalen Schädigungsfeldes  $d$  ein. Die Höhe des erreichten Schädigungswertes liegt hier unterhalb der Werte der lokalen Schädigungsentwicklung, da durch die Wirkung des Gradiententerms eine Dekonzentration der Schädigungszone bewirkt wird.

#### 8.1.4 Rissfortschrittssimulation an einer Probe

Maßgebliche Zielstellung bei der Entwicklung eines nicht-lokalen Schädigungsmodells ist es u.a., Bereiche konzentrierter Schädigungsentwicklung netzunabhängig simulieren zu können. Die Anwendung einer Schädigungssimulation für die nicht-gleichmäßig diskretisierte Geometrie eines Bauteils verdeutlicht diese Problematik am Beispiel einer zugbelasteten prismatischen Hutprobe (s. Bild 8.13). Für die FE-Rechnung werden die im vorherigen Abschnitt erläuterten und in Tabelle 8.1 dargestellten Materialparameter verwendet. Bei der Probe handelt es sich um den Viertelausschnitt einer auf Zug beanspruchten prismatischen Hutprobe, wie sie u.a. in [Sie2001] zur Untersuchung der Entwicklung von Scherzonen in duktilen Materialien verwendet wird. Charakteristisch für das Versagensbild ist hierbei ein sich zwischen den Radien 1 und 2 ausprägende Scherzone in der Probe mit einem Versagen des tragenden Querschnitts (s. Bild 8.13a).

Ist die Ausprägung, der sich im Experiment einstellenden Schädigungszone bekannt, so ist die Wahl der geeigneten Elementkantenlänge und die Netztopologie von entscheidender Bedeutung für exakte Ergebnisse der FE-Simulation, die hier unter Ausnutzung der Probensymmetrie als Halbmodell im ebenen Verzerrungszustand erfolgt (s. Bild 8.13b). Die Auswertung der Schädigungsverteilung und des Rissfortschritts unter Verwendung des lokalen Gurson-Modells zeigt, dass das Schädigungswachstums mit voranschreitender Belastung ab einem gewissen Schädigungsgrad der Elementorientierung folgt und so beliebige (netzabhängige) Ergebnisse erzielt werden.

Anfänglich entsteht ein schmales Band konzentrierter Schädigung zwischen den Punkten 1 und 4 (s. Bild 8.13c). Bei voranschreitender Belastung und erfolgter Rissinitiierung im Punkt 1 „folgt“ die Schädigungszone ausgehend der Elementkantenorientierung unter  $45^\circ$ , um bei einer Änderung der Orientierung der Elemente in Punkt 2 zu verzweigen (s. Bild 8.13d) und der Vorzugsorientierung in Richtung von Punkt 3 zu folgen, um schließlich zum Versagen der Struktur zu führen (s. Bild 8.13e).

Durch die Anwendung des nicht-lokalen Gurson-Modells kann die Netzabhängigkeit der Rissfortschrittsimulation überwunden werden, wie die Ergebnisse in Bild 8.13f-h verdeutlichen. Anfänglich entsteht ein schmaler, senkrecht verlaufender Bereich akkumulierter Schädigung (s. Bild 8.13f) dessen Breite und Orientierung sich auch bei weiterer Lastaufbringung nicht ändert (s. Bild 8.13g), bis schließlich der gesamte Probenquerschnitt beim Erreichen des finalen Hohlraumvolumenanteils schlagartig versagt (s. Bild 8.13h).

Ein Vergleich der Kraft-Verschiebungs-Verläufe spiegelt die grundsätzlich unterschiedliche Belastungssituation der Rechnungen wieder. Entsprechend dem unregelmäßigem Rissverlauf der lokalen Rechnung ergibt sich für die markierte Kurve in Bild 8.14 ein früher Lastabfall durch erste ausfallende Elemente gefolgt von einzelnen unregelmäßigen Lastabsenkungen durch weiteres Versagen einzelner Elemente der FE-Struktur. Als Folge der kontinuierlichen Schädigungsentwicklung über den gesamten tragenden Bereich der Struktur ergibt sich für die Anwendung des nicht-lokalen Gurson-Modells eine in Bild 8.14 als durchgezogene Linie dargestellte Kurve des Kraftverlaufs, die bis zum endgültigen Versagen der Probe keinen abrupten Lastabfall aufweist.

## **8.2 Anwendung an Bruchmechanikproben aus dem Werkstoff 10MnMoNi5-5**

Die Anwendung des in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten nicht-lokalen Gurson-Modells und dessen Implementierung in das FE-Programm ABAQUS wird am Beispiel eines realen Werkstoffs beispielhaft dargestellt. Neben der Anpassung der Modellparameter am Beispiel des Werkstoffs 10MnMoNi5-5 werden Ergebnisse der Berechnung bruchmechanischer Proben unter besonderer Berücksichtigung der Simulation duktilen Rissfortschritts im Vergleich zum lokalen Gurson-Modell vorgestellt und bzgl. Netzabhängigkeit, Konvergenzverhalten etc. diskutiert.

Erläuterungen zur Charakterisierung des hier ausgewählten formgeschweißten Vergütungsstahls 10MnMoNi5-5 bzgl. der grundlegenden Materialeigenschaften, dem Herstellungsverfahren, der Ergebnisse mikrostruktureller Analysen und der Parameteranpassung zum lokalen Gurson-Modell finden sich in [Arn2000].

### **8.2.1 Bestimmung der Materialparameter**

Die Bestimmung der Verfestigungsparameter wurde anhand von monotonen Zugversuchen (B8 x 40 nach DIN 50125) mit Dehnungen bis zu über 100% durchgeführt, die Details der Versuchsdurchführung sind in [Kli2000] beschrieben.

Die Bestimmung der Schädigungsparameter des lokalen Gurson-Modells erfolgte durch Finite-Elemente Simulationen der bei [Kli2000] dargestellten Versuche an gekerbten Rundzugproben und Bruchmechanikproben. Im Gegensatz zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens kann hierbei nicht mehr die Vereinfachung auf den eindimensionalen Fall durchgeführt werden. Die grundsätzliche Vorgehensweise entspricht der Darstellung in [Kli1993], bei der die Anpassung für den Stahl StE 460 beschrieben wird.

Bei der gewählten Vorgehensweise werden die für die Parameteranpassung zur Verfügung stehenden Versuche durch Finite-Elemente Simulationen reproduziert. Dabei wurden verschiedene Parametersätze innerhalb ausgewählter Größenordnungen und Grenzen gebildet und hinsichtlich der Qualität der Wiedergabe der Kraftverläufe bewertet. Mit der Erfassung des Zeitpunktes der Rissinitiierung und der Verifizierung der Risswiderstandskurve bei einer C(T)-Probe kann die Gültigkeit für Simulationen von Problemen der Bruchmechanik sichergestellt werden. Die Schädigungsparameter, mit denen diese Anpassung der gesamten Modellierung erzielt wurde, ist zusammen mit den Verfestigungsparametern in einer Übersicht in Tabelle 8.1 wiedergegeben.

### **8.2.2 Simulation duktilen Rissfortschritts an Bruchmechanikproben**

Zur Simulation des Verhaltens von Proben und bauteilähnlichen Strukturen, vorzugsweise unter einfachen Lastpfaden, werden mit den in Abschnitt 8.4 ermittelten Modell-Parametern Bruchmechanikproben unter einfachen monotonen Lastpfaden simuliert. Dabei werden die lokale und die nicht-lokale Gurson-Modellierung miteinander verglichen. Alle Strukturberechnungen werden an FE-Netzen durchgeführt, die im Bereich der Rissausbreitung bzw. im Bereich der Prozesszone verschiedene Diskretisierungen aufweisen. Dabei werden für die Rundzugprobe (Bild 8.15) Elementkantenlängen mit  $l_e=0,25\text{mm}$ ,  $l_e=0,125\text{mm}$  und  $l_e=0,0625$  und für die C(T)-Probe (Bild 8.16) mit  $l_e=0,2\text{mm}$ ,  $l_e=0,1\text{mm}$  und  $l_e=0,05\text{mm}$  bei regelmäßiger Elementierung verwendet.

Bei der Elementierung wurden die Symmetriebedingungen der Probenformen ausgenutzt, was die Darstellung der C(T)-Probe als Halbmodell ermöglicht und der Rundzugproben als Viertelmodell. Die verwendeten FE-Netze sind in Bild 8.15 und 8.16 dargestellt. Aufgrund der zylindrischen Form der Zugproben mit Umfangskerb reicht auch hier eine zweidimensionale Simulation unter der Annahme eines rotationssymmetrischen Spannungszustandes aus.

Die an den geometrischen Symmetrieachsen der Proben geltende Randbedingung des ratenunabhängigen Modells für den Schädigungsfreiheitsgrad  $d$  entspricht dabei der, an freien Rändern definierten natürlichen Randbedingung

$$\nabla \dot{d} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (8-1)$$

da durch die Belastungssymmetrie und damit die Symmetrie des sich einstellenden Schädigungsfeldes keine Interaktion von Schädigungswerten „gegenüber“ der Symmetrielinie auftreten und so der Schädigungsaustausch inaktiv bleibt.

### 8.2.3 Simulation duktilen Rissfortschritts an gekerbten Rundzugproben

Für die Simulation der rotationssymmetrischen mittig gekerbten zylindrischen Zugproben wird der in Kapitel 6 vorgestellte Elementtyp für einfach axialsymmetrische Strukturen verwendet. Für die Simulation mit dem lokalen Gurson-Modell kommt der ABAQUS Elementtyp CAX4 (s. [Hib1998b]) zum Einsatz.

Die Kraft-Durchmesseränderungs-Kurven der Belastungssimulation der Rundzugprobe mit einer Elementkantenlänge von  $l_e=0,2\text{mm}$ ,  $l_e=0,1\text{mm}$  und  $c=0,0$  in Bild 8.17 zeigen, dass die Netzabhängigkeit der Ergebnisse durch den Zeitpunkt des Lastabfalls der Reaktionskraft der Probe gekennzeichnet ist. Mit voranschreitender Belastung kommt es zu einem beschleunigten Rissfortschritt entlang der Symmetrieachse der Probe, was im Experiment durch ein abruptes Versagen gekennzeichnet ist. Für kleiner werdende Elementkantenlängen wird ein zunehmend früherer Versagenszeitpunkt berechnet. Die Bilder der lokalen Schädigungsverteilung zum Zeitpunkt des Lastabfalls der Kraft-Durchmesseränderungskurve zeigen, dass zu diesem Zeitpunkt nur wenige Elemente, ausgehend von der Probenmitte geschädigt sind. Die Schädigungszone beschränkt sich dabei auf die Größe der Elemente in der Symmetrieebene des FE-Netzes.

Die Anwendung der nicht-lokalen Erweiterung des Gurson-Modells zur Belastungssimulation mit  $c=0,1$  führt auf annähernd identische Versagenszeitpunkte der drei verschiedenen Strukturdiskretisierungen (Bild 8.18), so dass die für die Parameterbestimmung relevante Schädigungscharakteristik der Proben unabhängig von der Elementkantenlänge abgebildet werden kann. Die Bilder der globalen Schädigungsverteilung  $d$  und der lokalen Schädigungsverteilung  $f$  (Bild 8.18) zeigen eine annähernd gleiche Größe der Versagenszone unabhängig von der Elementkantenlänge entlang der Symmetrieebene der Struktur.

### 8.2.4 Simulation duktilen Rissfortschritts an C(T)-Proben

Für die Belastungssimulation der C(T)-Proben als 2D-Modell wird die im Kapitel 6 vorgestellte Elementformulierung für die Abbildung ebener Verzerrungszustände eingesetzt, die lokalen Vergleichsrechnungen sind mit dem entsprechenden ABAQUS-Elementtyp CPE4 durchgeführt, wobei es sich um ein isoparametrisches 4-Knotenelement mit linearen Ansatzfunktionen und der in Kapitel 6 vorgestellten „selectively reduced“-Integration im ebenen Verzerrungszustand handelt.

Die Last-Verschiebungs-Kurven der FE-Rechnung der C(T)-Probe mit einer Elementkantenlänge  $l_e=0,2\text{mm}$ ,  $l_e=0,1\text{mm}$  und  $c=0,0$  in Bild 8.19 zeigen die für eine lokale Rechnung typische Netzabhängigkeit der Ergebnisse, mit der Tendenz, dass das Probenverhalten bei größeren Elementkantenlängen steifer abgebildet wird. Die Ergebnisse der nicht-lokalen Simulation mit  $c=0,1$  in Bild 8.20 lassen erkennen, dass bzgl. der globalen Systemantwort in Form der Kraft-Verschiebungs-Verläufe reduziert netzabhängige Ergebnisse erzielt werden. Die Abweichung des Kraftniveaus erklärt sich auch hier durch die unterschiedliche Größe der geschädigten Elemente ( $f = f_f$ ) der drei verschiedenen Strukturdiskretisierungen, die den tragenden Restquerschnitt (Ligamentlänge) der Struktur unterschiedlich schnell verringern.

Die Betrachtung der sich einstellenden Schädigungszone nach dem Aufbringen der Belastung (s. Bild 8.21) zeigt, dass bei der Rechnung mit dem nicht-lokalen Gurson-Modell mit  $c=0,0$  in den Strukturdiskretisierungen mit  $l_e=0,2\text{mm}$  und  $l_e=0,1\text{mm}$  ein Bifurkationspunkt durchlaufen wird, der zu einer Verzweigung des Risses unter  $45^\circ$  in die Probe hinein führt. Die Rechnung mit  $c=0,05$  führt nur noch in dem Netz mit einer Elementkantenlänge  $l_e=0,1\text{mm}$  zu einem späteren Auftreten des Bifurkationspunkts bis schließlich bei einem Wert von  $c=0,1$  der Riss sich in beiden Strukturen gradlinig entlang der Symmetrieebene ausbreitet.

### 8.3 Tabellen

**Tabelle 8.1: Verfestigungs- und Schädigungsparameter für die Beispielstrukturen**

Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$f_0$	$f_c$	$f_f$	$f_u^*$	$f_n$	$s_n$	$\epsilon_n$
1,5	1,0	2,25	0,1	0,1	0,18	0,5	0,1	0,35	0,1

Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für ideal-plastisches Verhalten für die Beispielrechnungen

$E$ [MPa]	$\nu$	$H$ [MPa]	$\sigma_y$ [MPa]
210000	0,3	0	450

**Tabelle 8.2: Verfestigungs- und Schädigungsparameter für 10MnMoNi5-5**

Materialparameter für isotrope und kinematische Verfestigung:

$E$ [GPa]	$\sigma_y$ [MPa]				
210,0	620,0				
$R_1$ [MPa]	$k_1$ [-]	$R_2$ [MPa]	$k_2$ [-]	$R_3$ [MPa]	$k_3$ [-]
406,0	213,0	-167,0	62,1	-	-

Materialparameter für duktile Schädigung:

$f_0$	$f_c$	$f_f$	$f_n$	$\epsilon_n$	$s_n$
0,0005	0,025	0,2	0,005	0,1	0,05

Konstanten des erweiterten Gurson-Modells:

$q_1$	$q_2$	$f_u^*$
1,5	1,0	0,75

## 8.4 Bilder

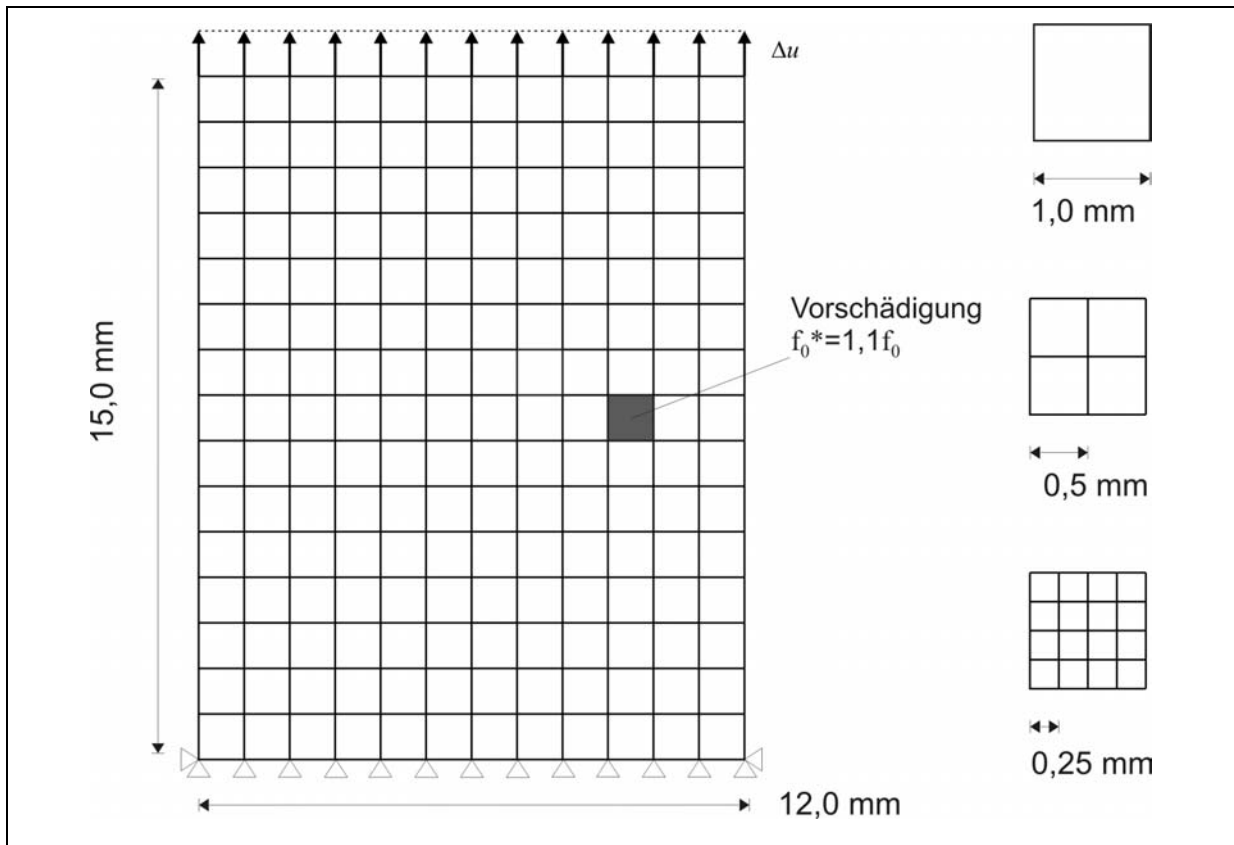


Bild 8.1: Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung, 10x15 Elementdiskretisierung und Netzverfeinerung

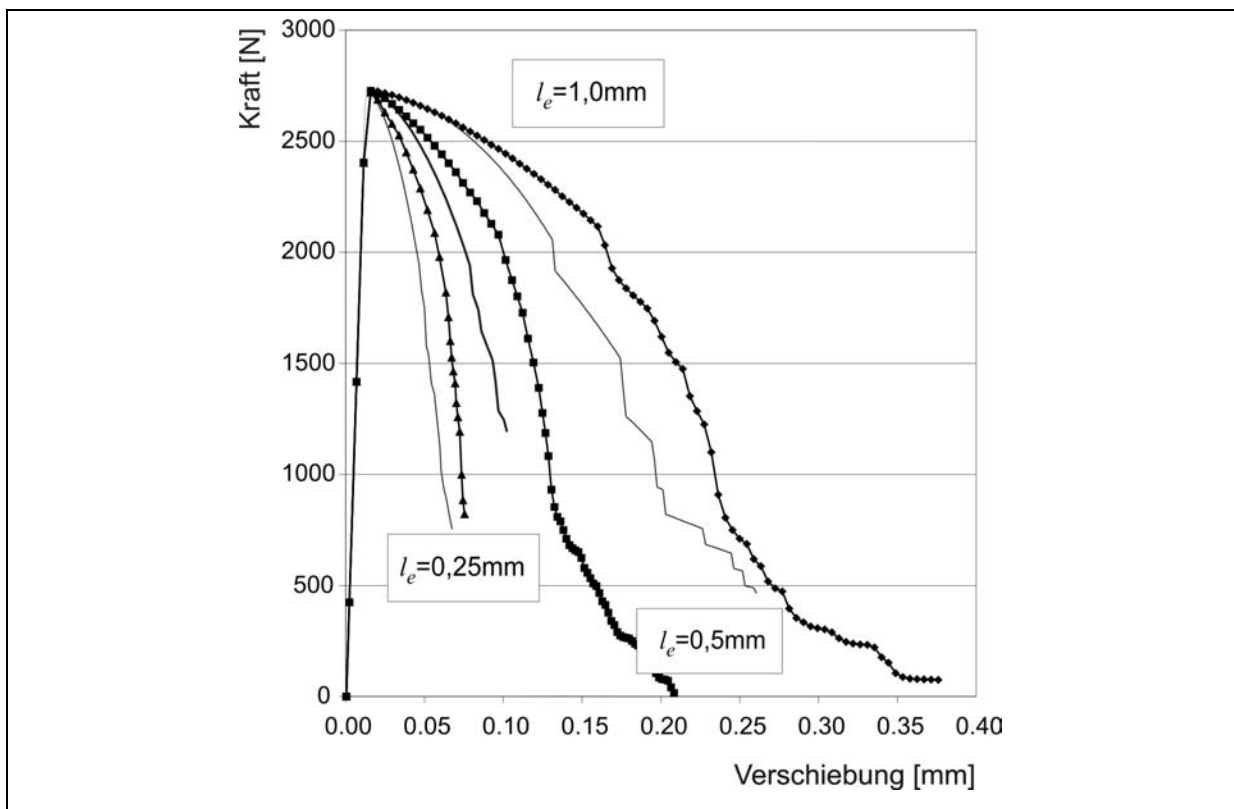


Bild 8.2: Last-Verschiebungs-Kurven für die nicht-lokale Gurson-Modellierung mit  $c=0$  und lokaler Gurson-Modellierung

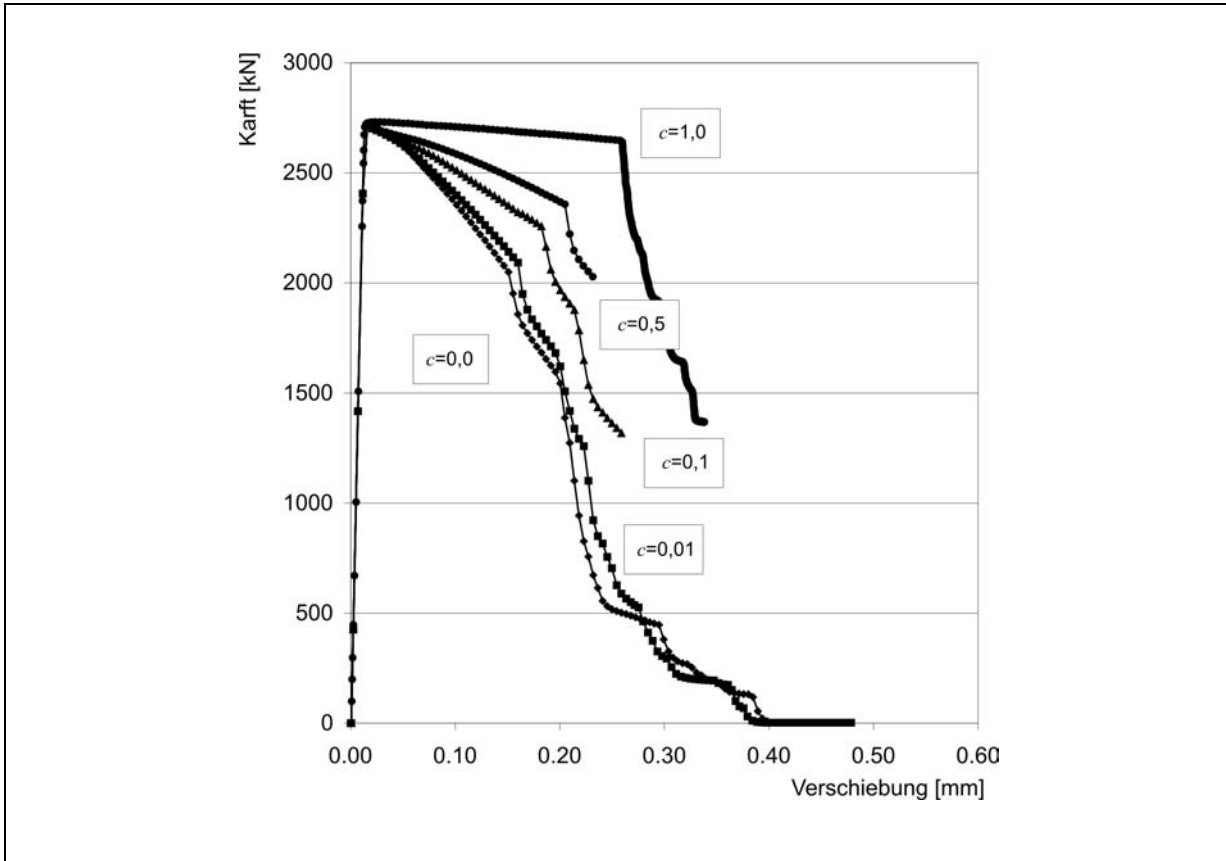


Bild 8.3: Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene charakteristische Längen mit  $l_e=1,0$  mm Elementkantenlänge

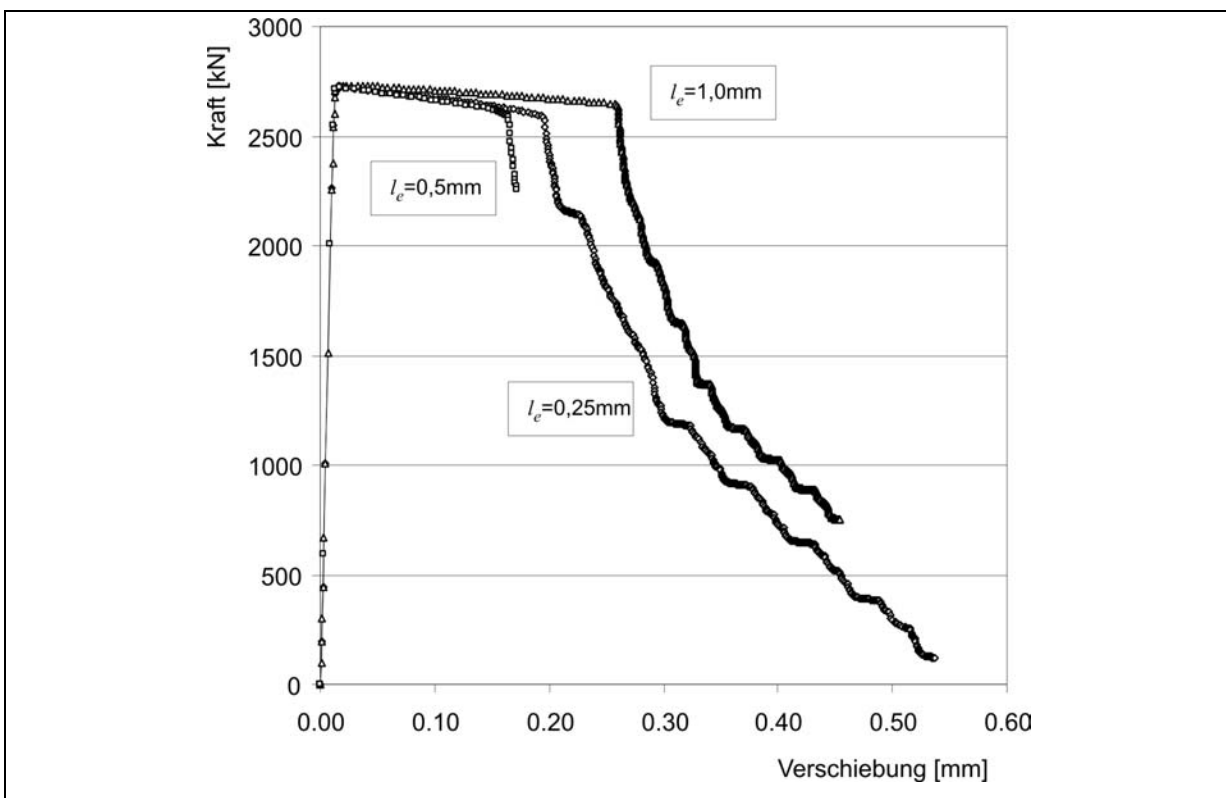


Bild 8.4: Last-Verschiebungs-Kurven für Elementkantenlängen  $l_e=0,25$  mm;  $0,5$  mm und  $1,0$  mm mit  $c=1,0$

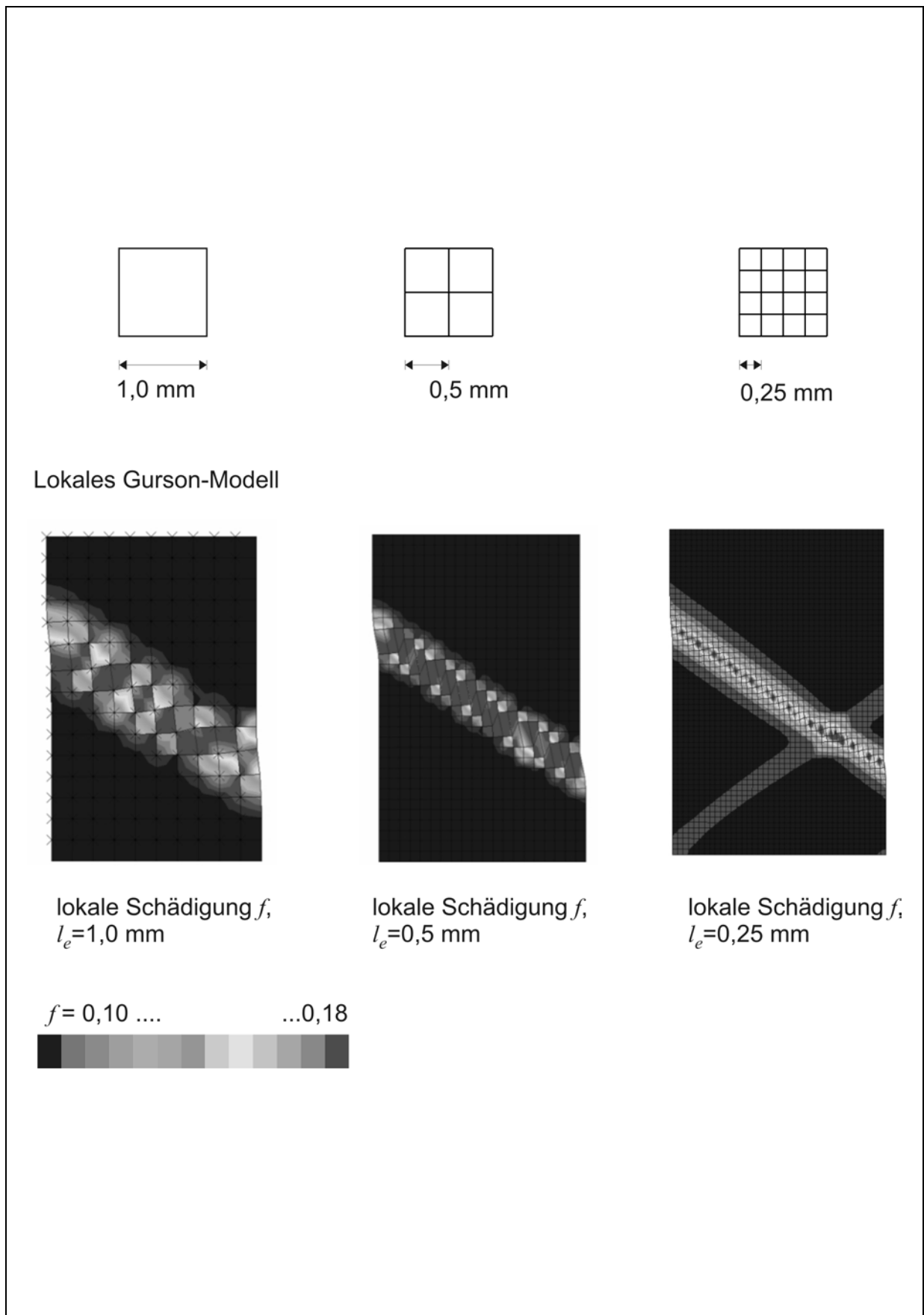


Bild 8.5: Finale Schädigungsverteilung für das lokale Gurson-Modell und für Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0$  mm



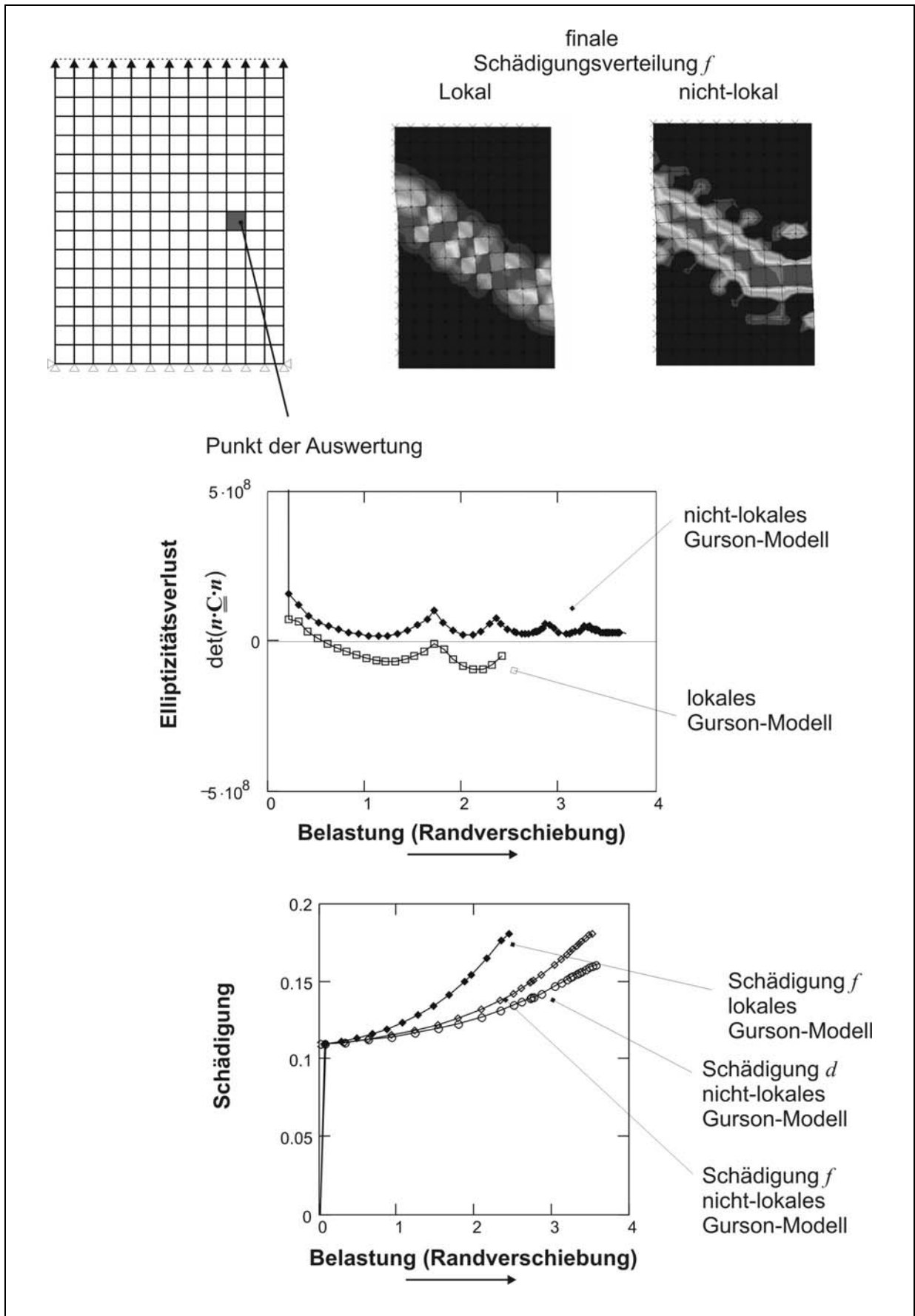


Bild 8.7: Lokalisierungskriterium für die vorgeschädigte Zugscheibe im Punkt der anfänglichen Schädigungskonzentration bis zur finalen Schädigungsentwicklung

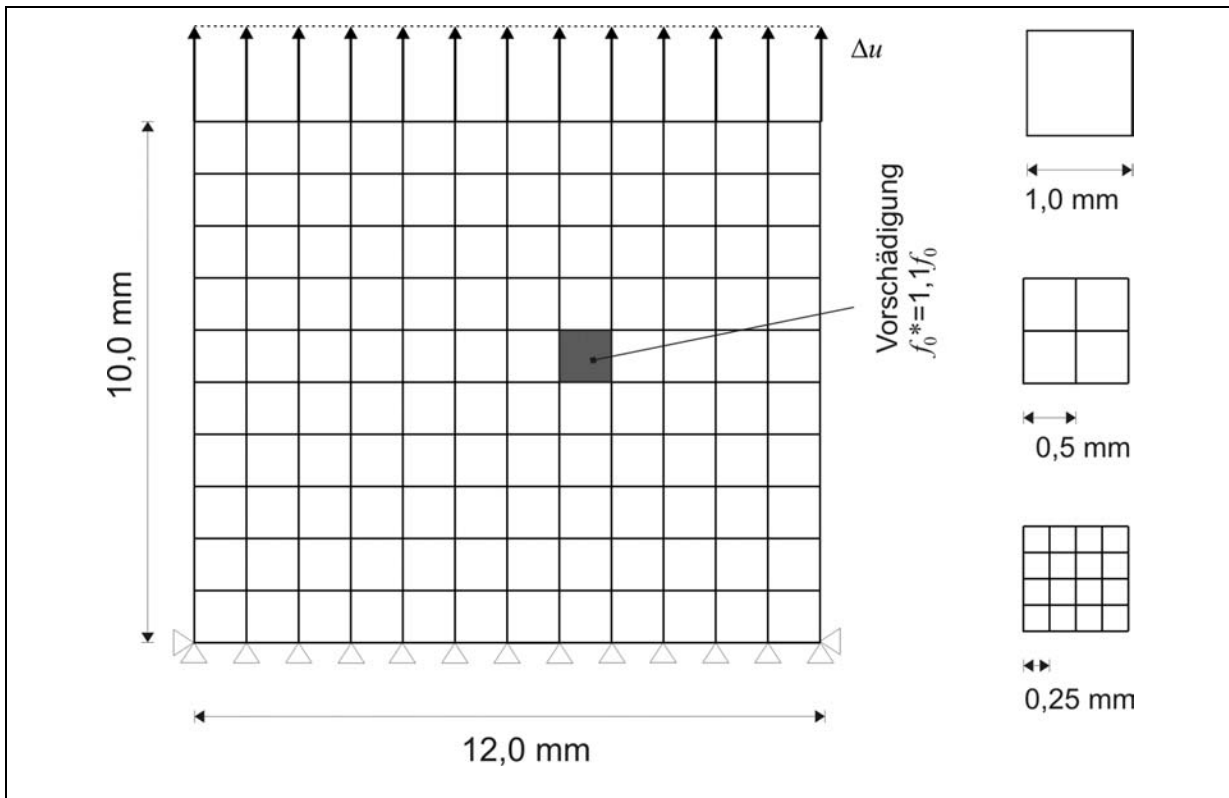


Bild 8.8: Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung, 10x12 Elementdiskretisierung und Netzverfeinerung

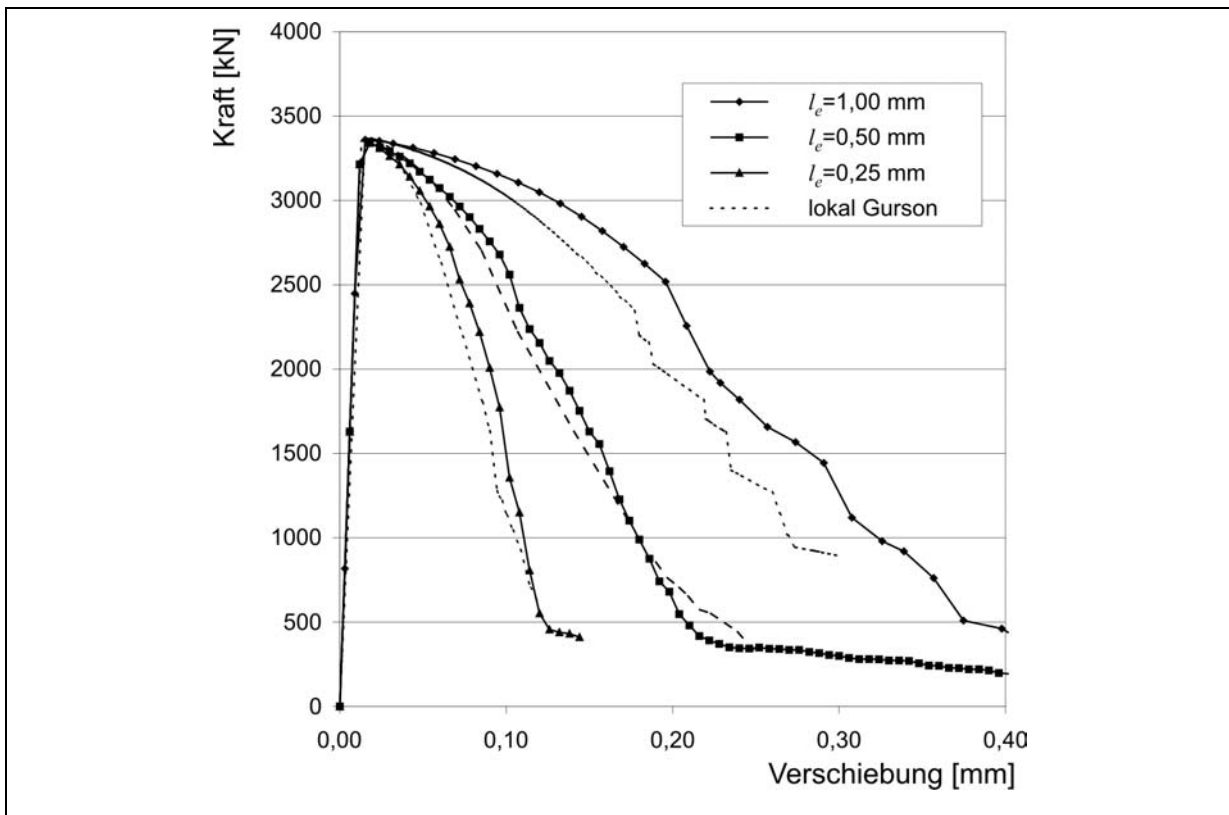


Bild 8.9: Last-Verschiebungs-Kurven für die nicht-lokale Gurson-Modellierung mit  $c=0$  und die lokale Gurson-Modellierung

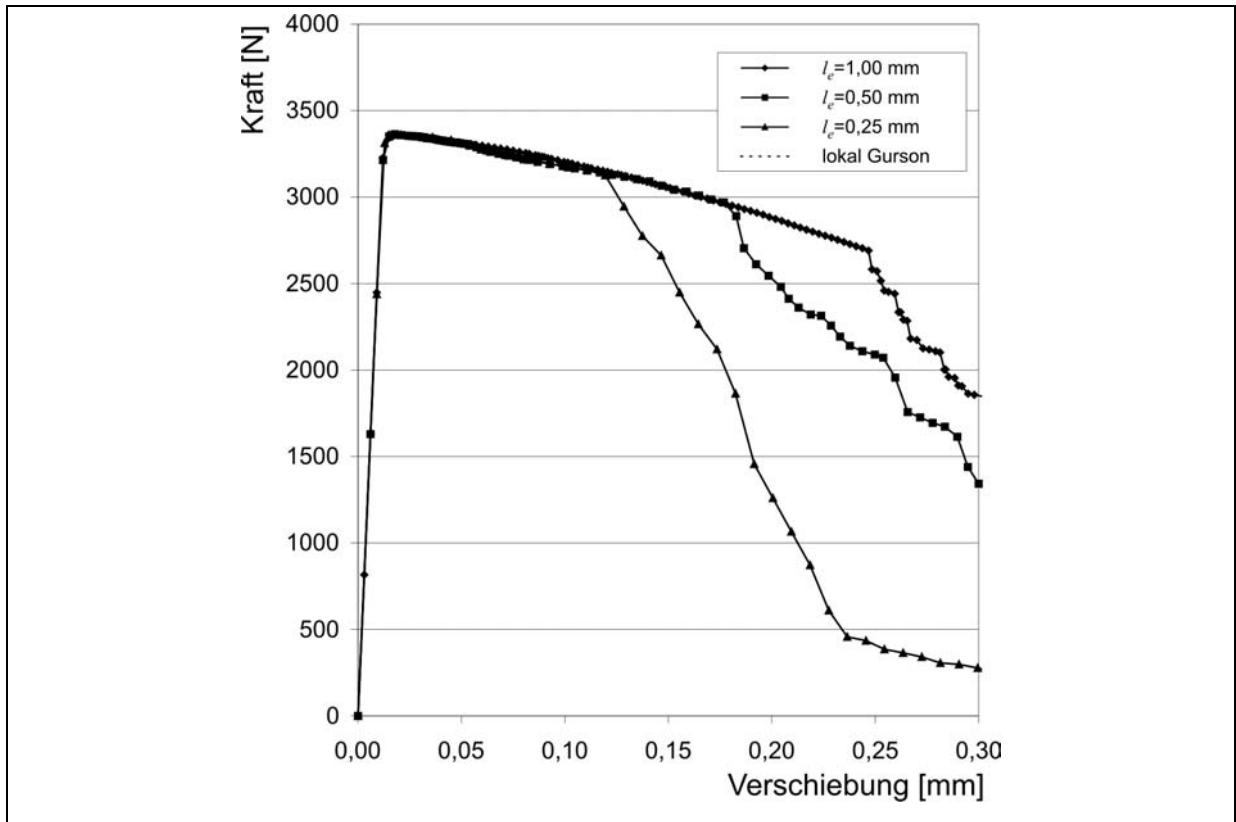


Bild 8.10: Last-Verschiebungs-Kurven für Elementkantenlängen  $l_e = 0,25 \text{ mm}$ ;  $0,5 \text{ mm}$  und  $1,0 \text{ mm}$  mit  $c = 0,05$

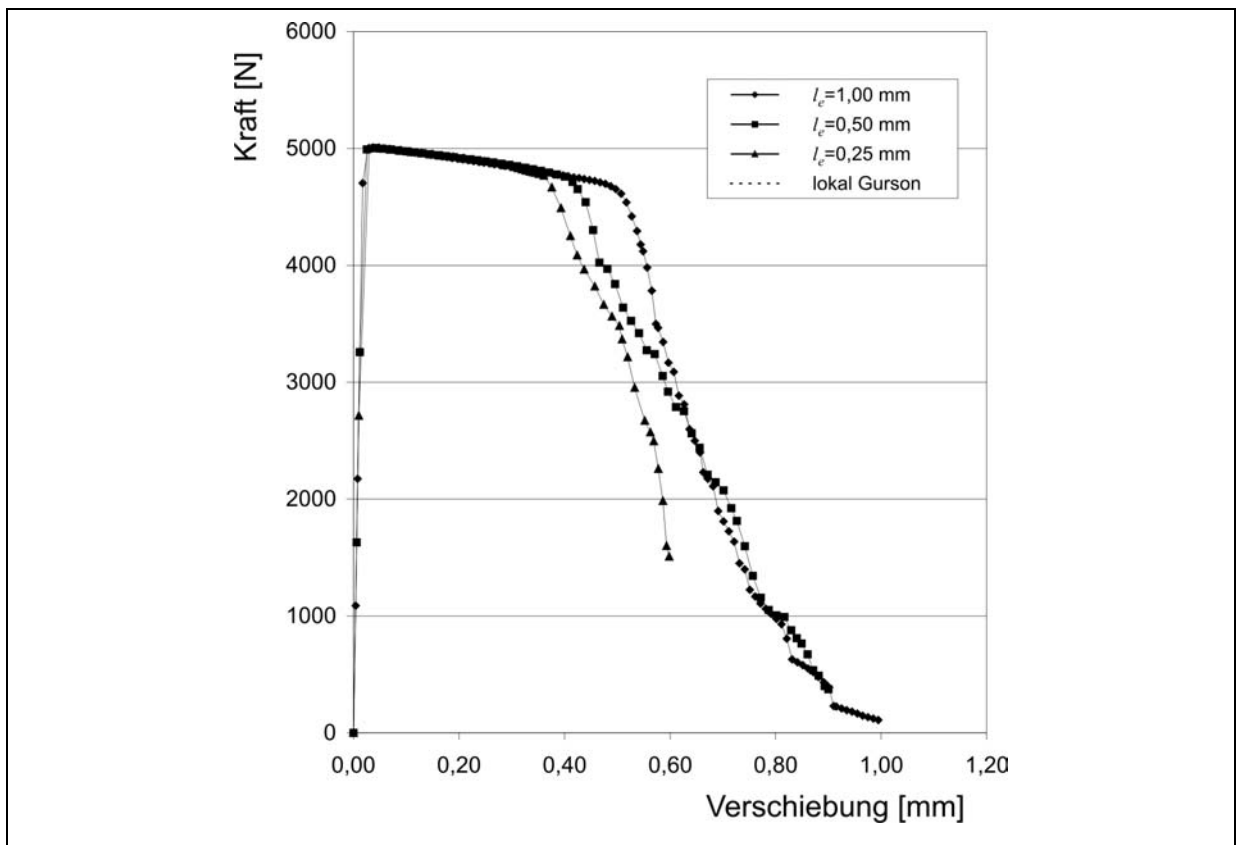


Bild 8.11: Last-Verschiebungs-Kurven für Elementkantenlängen  $l_e = 0,25 \text{ mm}$ ;  $0,5 \text{ mm}$  und  $1,0 \text{ mm}$  mit  $c = 0,05$  und  $f_u^* = 0,9$



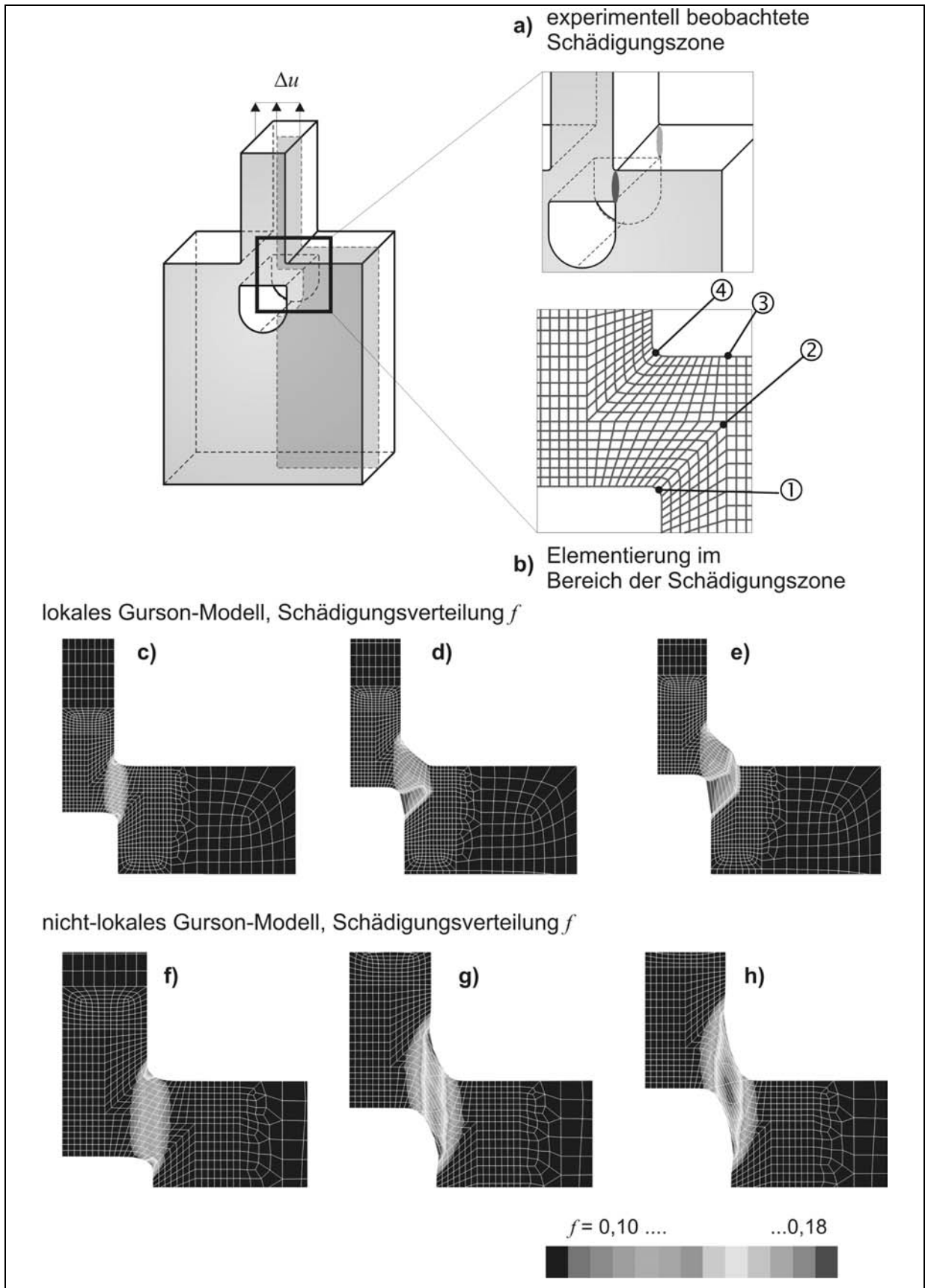


Bild 8.13: Scherbandentwicklung in einer prismatischen Hutprobe: Qualitativer Vergleich der Schädigungsentwicklung (lokales und nicht-lokales Gurson-Modell mit  $c=0,1$ , s. Tabelle 8.1, Probengeometrie [Sie2001]).

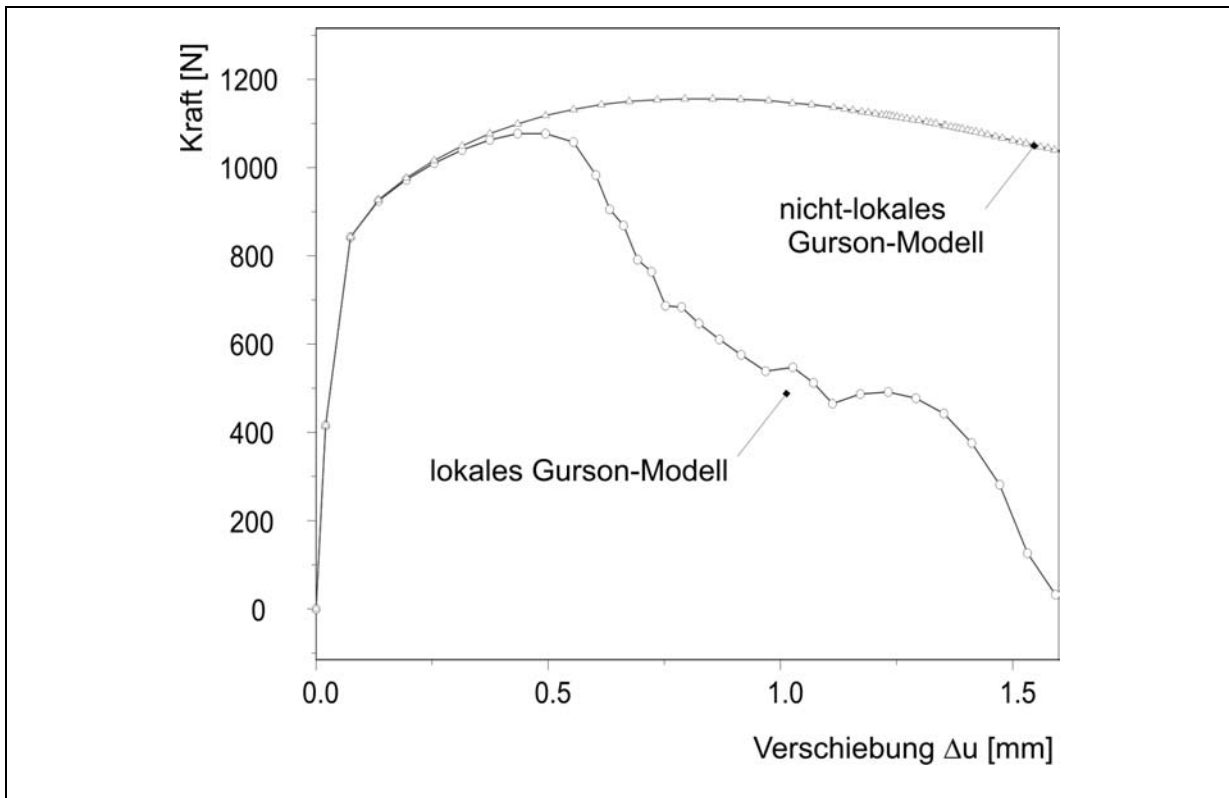


Bild 8.14: Kraft-Verschiebungs-Kurve der Probe aus Bild 8.13 (lokales und nicht-lokales Gurson-Modell)

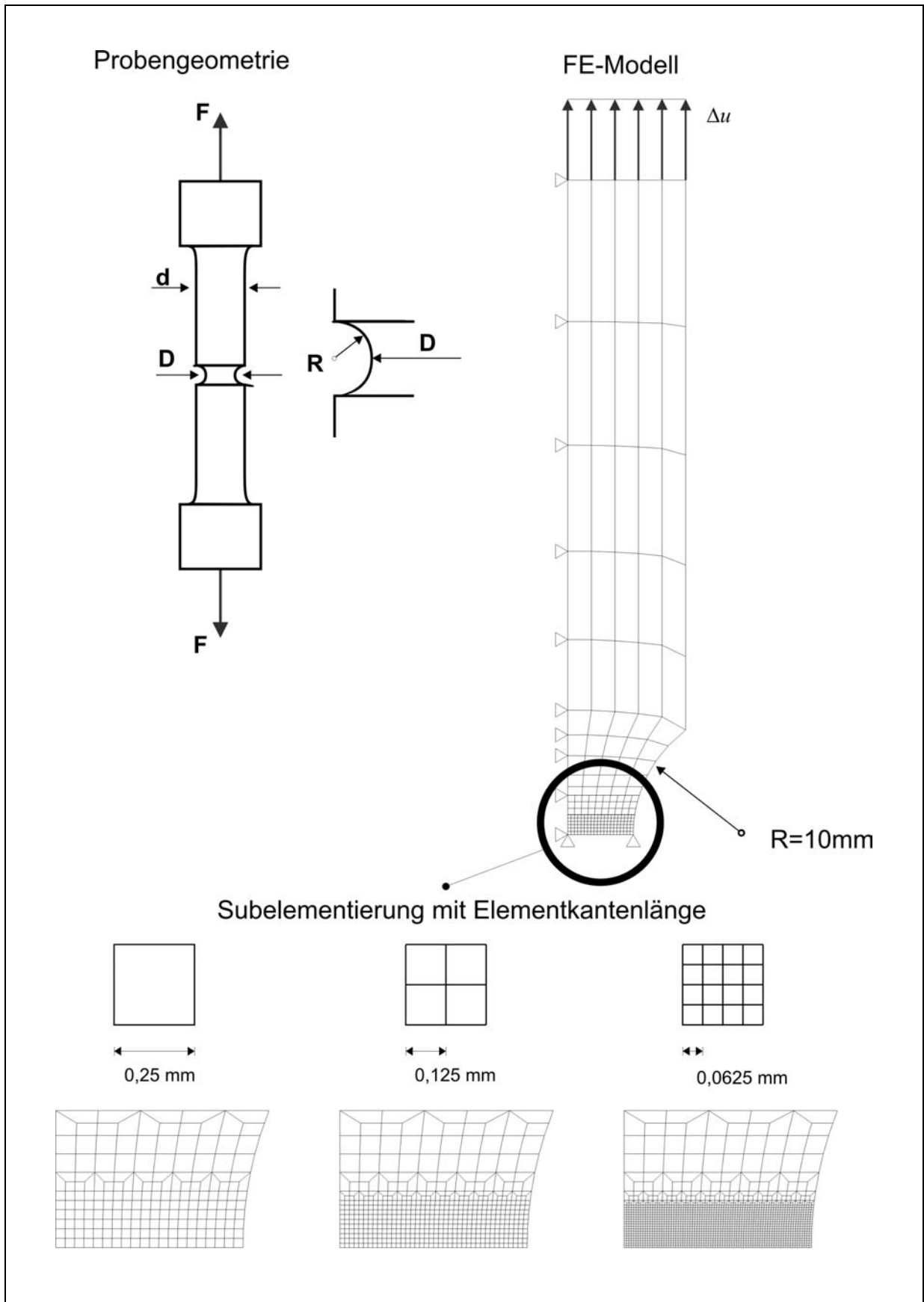


Bild 8.15: Geometrie und Diskretisierung einer gekerbten Rundzugprobe mit Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$  im Bereich der Subelementierung

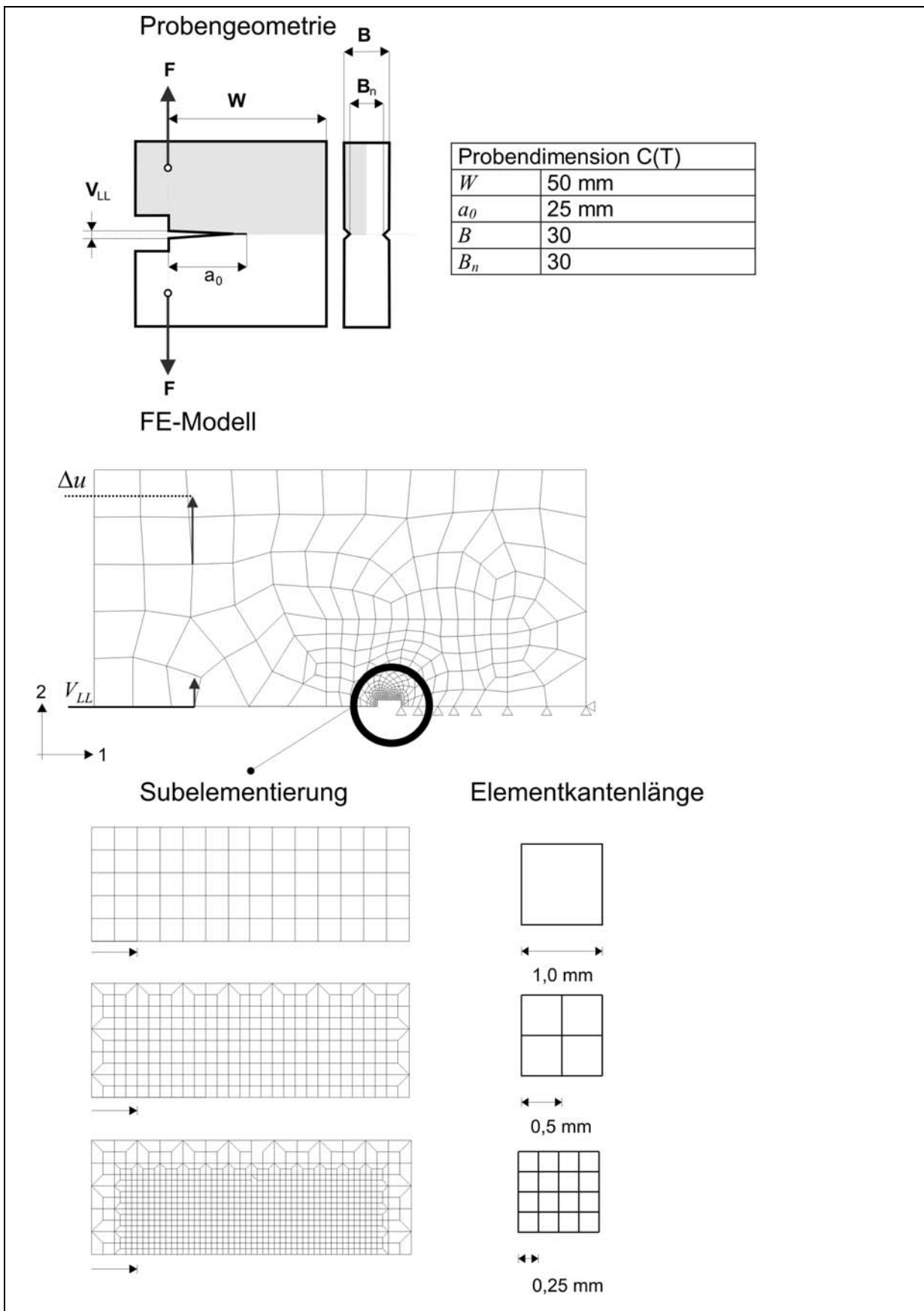


Bild 8.16: Geometrie und Diskretisierung einer C(T)-Probe mit Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$  im Bereich der Subelementierung

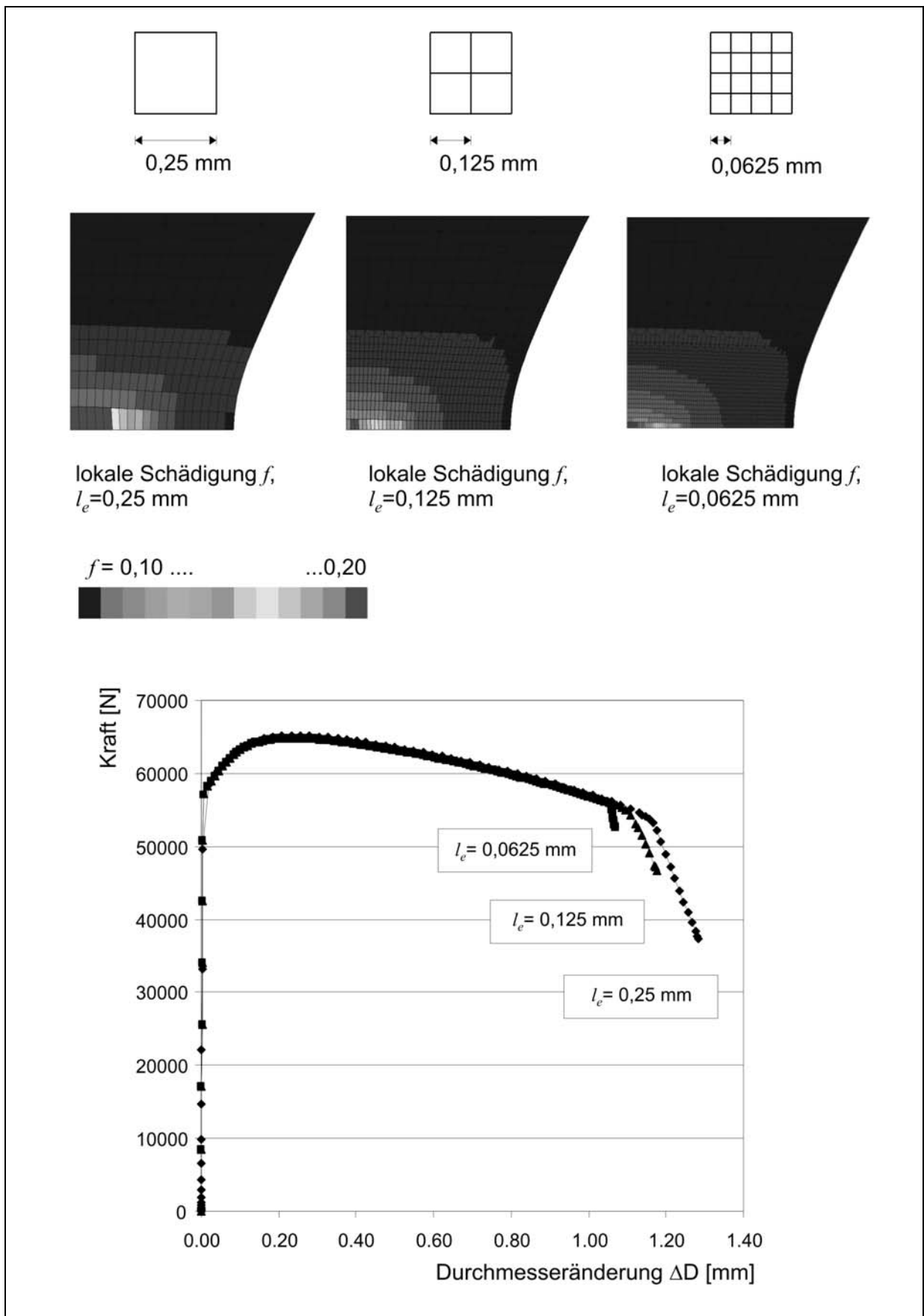


Bild 8.17: Modellierung einer axialsymmetrischen Rundzugprobe: Schädigungsverteilung und Kraft-Durchmesseränderungs-Kurve, lokales Gurson-Modell, Werkstoff 10MnMoNi5-5, Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0 \text{ mm}$

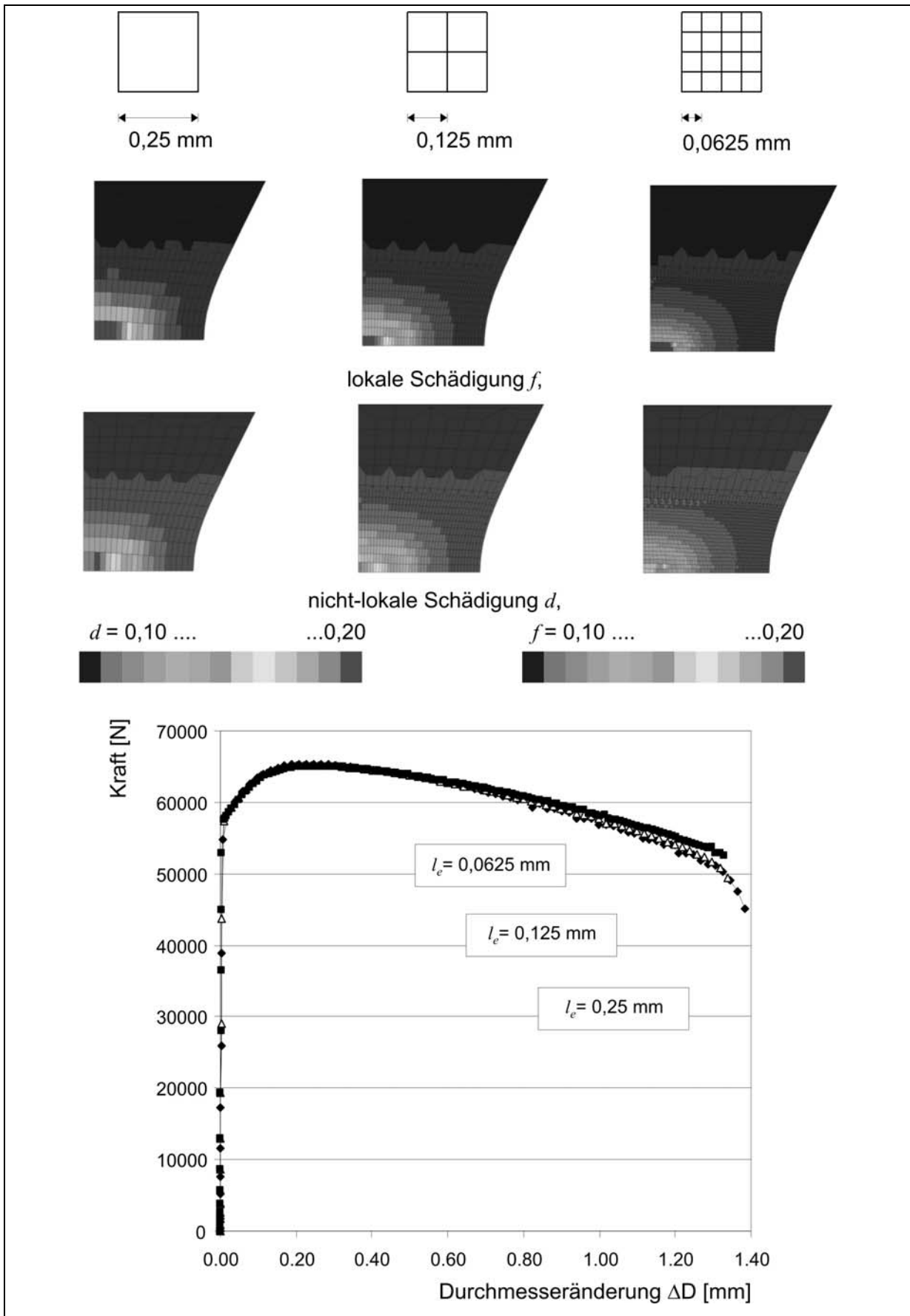


Bild 8.18: Modellierung einer axialsymmetrischen Rundzugprobe: Schädigungsverteilung und Kraft-Durchmesseränderungs-Kurve, nicht-lokales Gurson-Modell, Werkstoff 10MnMoNi5-5, Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0 \text{ mm}$ ,  $c=0,1$

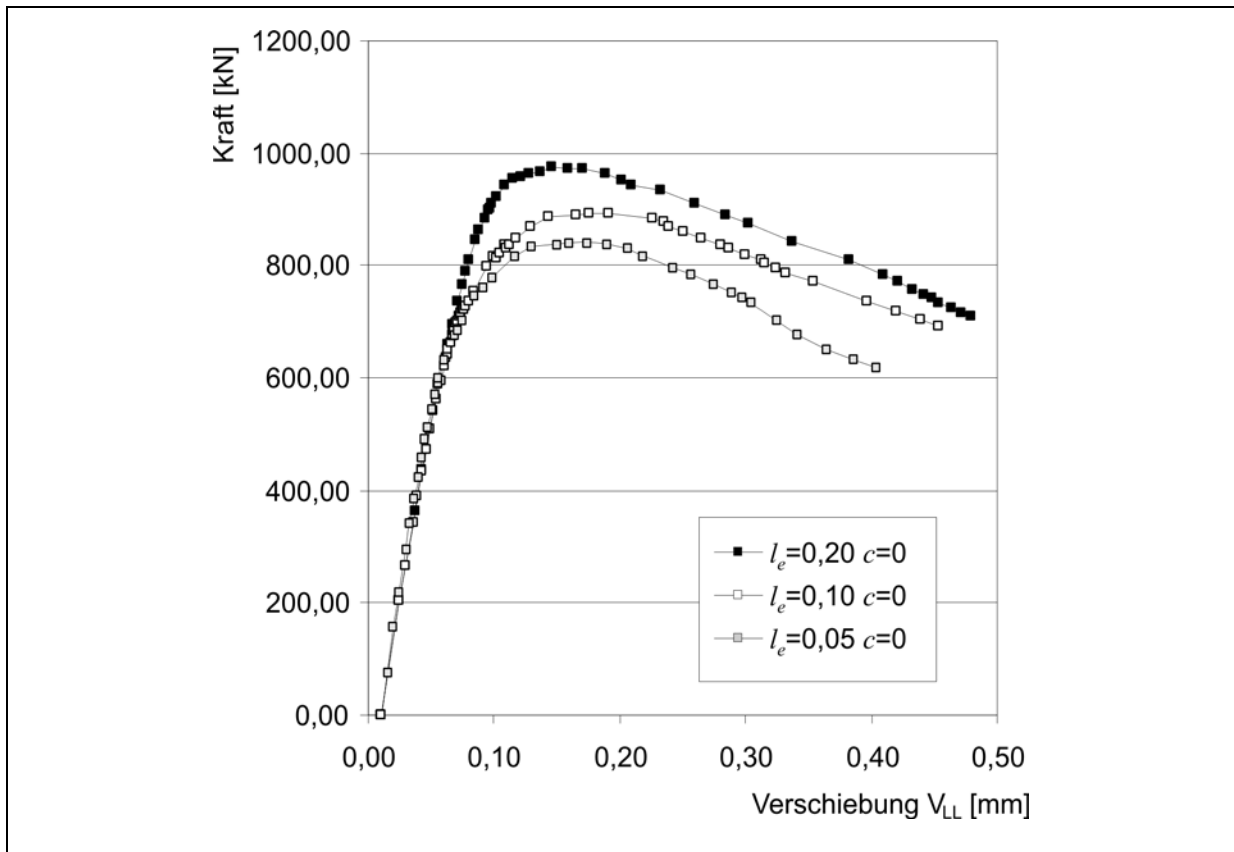


Bild 8.19: Kraft-Verschiebungs-Kurve, C(T)-Probe: lokales Gurson-Modell (10MnMoNi5-5), Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,1$

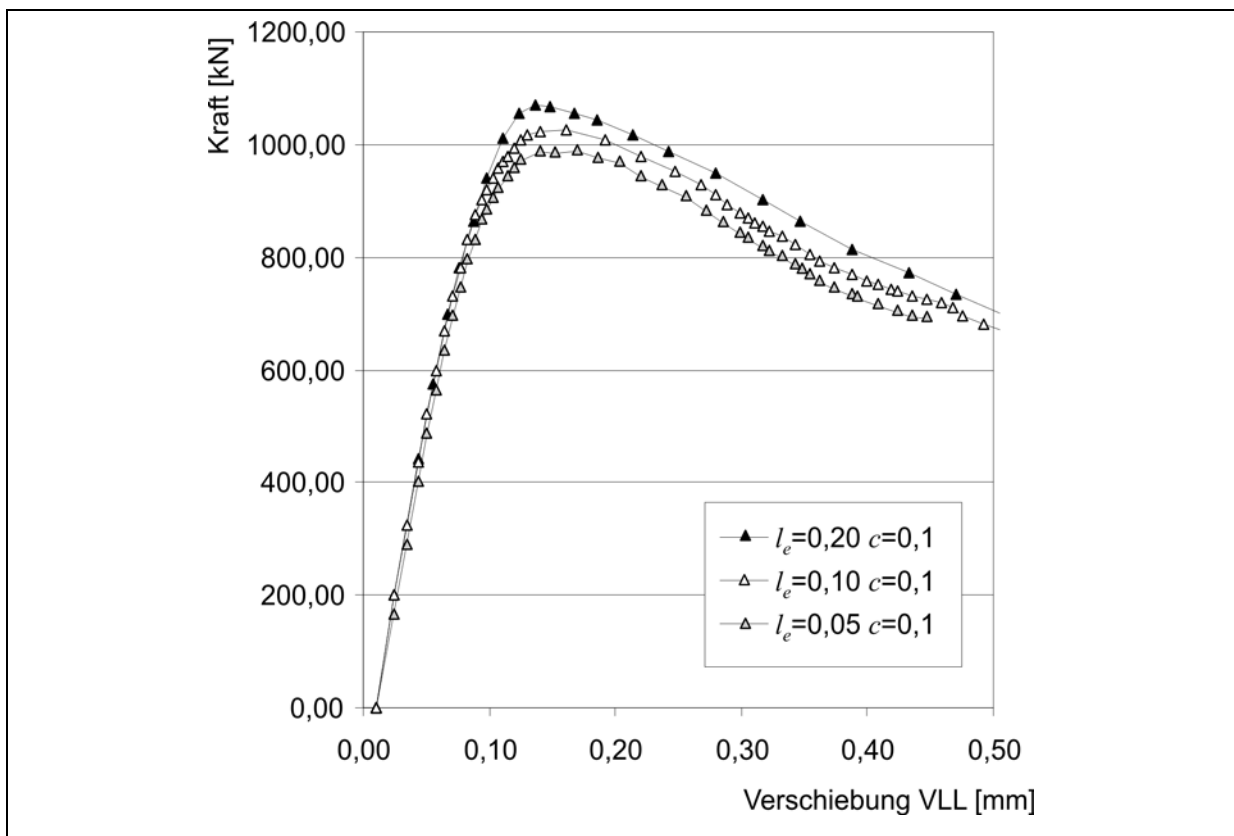


Bild 8.20: Kraft-Verschiebungs-Kurve, C(T)-Probe: nicht-lokales Gurson-Modell (10MnMoNi5-5), Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,1$

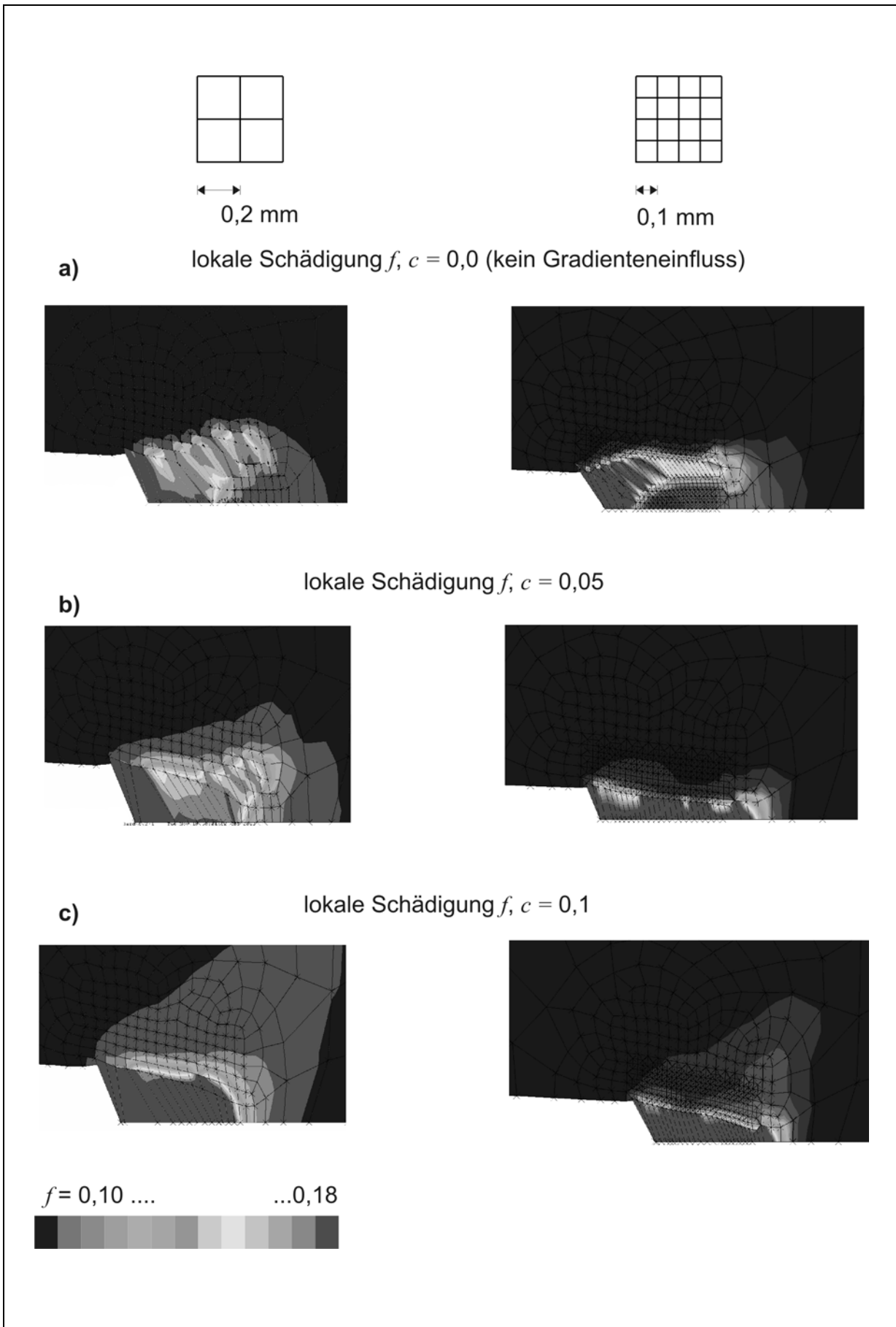


Bild 8.21: Schädigungsverteilung, C(T)-Probe: nicht-lokales Gurson-Modell (10MnMoNi5-5), Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm}; 0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,0-0,1$

9	Schlußbetrachtungen .....	
9.1	Zusammenfassung .....	9-1
9.2	Ausblick .....	9-4

## 9 Schlussbetrachtungen

### 9.1 Zusammenfassung

Diese Arbeit umfasst die Entwicklung, Implementierung und Anwendung einer nicht-lokalen, gradientenabhängigen Erweiterung des lokalen Gurson-Modells zur Simulation duktiler Schädigung für metallische Werkstoffe.

Ausgangspunkt für die nicht-lokale Erweiterung des Gurson-Modells stellt die Zielsetzung dar, die lokale Beschreibung der Schädigungsentwicklung durch die Evolutionsgleichung für den Hohlraumvolumenanteil  $f$  in der Form von Needleman und Tveergard [Nee1984] unverändert beizubehalten. Durch das Einführen einer globalen skalaren Schädigungsfeldgröße  $d$  wird die sich in einer Struktur einstellende räumliche Schädigungsverteilung abgebildet. Die Entwicklung dieser Größe wird mit einem, die lokale Schädigungsentwicklung beschreibenden, Quellterm und unter Berücksichtigung des Gradienten des globalen Schädigungsfeldes ermittelt. Durch

die Abhängigkeit der lokalen Fließbedingung von der Größe  $d$ , wirkt das globale Schädigungsfeld auf die lokale Entwicklung des Hohlraumvolumenanteils  $f$  und bestimmt so maßgeblich das Entfestigungsverhalten des Materials. Die so gewonnene Formulierung des Materialmodells wird auf Grundlage einer hyperelastisch-plastischen Formulierung zur Beschreibung großer Deformationen im einzelnen erläutert.

Die für die Implementierung eines solchen Materialmodells erforderlichen Überlegungen zur Anwendung mittels der Finite Elemente Methode werden dargestellt und diskutiert. Hierzu gehört die, für die Implementierung eines gradientenabhängigen Materialmodells, erforderliche Elementformulierung mit einem neuen, das globale Schädigungsfeld repräsentierenden, Freiheitsgrad, sowie die sich daraus ergebenden Anforderungen an die numerische Integration der konstitutiven Gleichungen des Modells und die Formulierung eines, das Verschiebungs- und das Schädigungsfeld  $d$  berücksichtigenden, gemischten Variationsprinzips.

Als Elementformulierungen werden ein 4-Knotenelement mit bilinearen Ansatzfunktionen zur Abbildung ebener Dehnungszustände sowie ein 4-Knotenelement zur Darstellung axialsymmetrischer Strukturen mit linearen Ansatzfunktionen und den zugehörigen Elementsteifigkeitsmatrizen entwickelt und zur Anwendung gebracht. Hierbei wird zur Integration der Elementsteifigkeit die Methode der „selectively-reduced-integration“-Technik eingesetzt, um die numerische Stabilität der globalen Gleichgewichtsiteration zu gewährleisten und den direkten Vergleich mit Ergebnissen des FE-Programms ABAQUS und den dort eingesetzten Elementtypen zu ermöglichen. Mit den so erarbeiteten theoretischen Grundlagen ist die Implementierung des nicht-lokalen Gurson-Schädigungsmodells in ein kommerziell verfügbares FE-Programm ermöglicht.

Die Auswertung von Simulationen einfacher Belastungsfälle für das lokale und das nicht-lokale Gurson-Modell unter Verwendung der entwickelten Elementtypen stellt die erfolgreiche Verifikation der eingesetzten Elemente sowie des numerischen Algorithmus zur Berücksichtigung großer Deformationen unter Beweis.

Die Probleme bei der Anwendung des lokalen Gurson-Modells im Rahmen der FE-Methode bzgl. Netzabhängigkeit und Lokalisierungsphänomene sind maßgeblich auf den Elliptizitätsverlust des Gleichungssystems des gestellten Anfangsrandwertproblems zurückzuführen. Durch die Entwicklung und Anwendung von Kriterien für die Bestimmung des Eindeutigkeitsverlustes der Lösung wird dieser an Beispielrechnungen nachgewiesen und quantifiziert.

Die Anwendung dieser Kriterien für kleine und große Deformationen im Rahmen einer hyperelastisch-plastischen und einer hypoelastisch-plastischen Implementierung führt auf Aussagen zu den Grenzen der Anwendbarkeit des lokalen Gurson-Modells und auf den Nachweis der regularisierenden Wirkung des nicht-lokalen Modells.

Der Vergleich des Auftretens von Elliptizitätsverlust des lokalen Gurson-Modells bei kleinen Deformationen bzw. unter Anwendung einer hypoelastisch- und einer hyperelastisch-plastischen Formulierung für große Deformationen weist darauf hin, dass Auftreten einer möglichen Instabilität nicht stark von der Wahl der konstitutiven geometrischen Formulierung abhängig ist. Die maßgebliche Ursache für den Stabilitätsverlust ist der voranschreitende Schädigungsprozess und die damit verbundene Entfestigung.

Die Untersuchung einfacher Lastfälle an Bruchmechanikstrukturen zeigt auf, dass der Elliptizitätsverlust der konstitutiven Gleichungen bei der Anwendung des lokalen Modells bereits deutlich vor dem Versagen eines betrachteten materiellen Punktes eintritt und so die Eindeutigkeit der ermittelten Systemantwort nicht mehr gegeben ist. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, Materialmodelle zu entwickeln, die Lokalisierungsprobleme aufheben und die Netzabhängigkeit der erzielten FE-Ergebnisse reduzieren. Die Auswertung des Kriteriums für Elliptizitätsverlust der nicht-lokalen Erweiterung des Gurson-Modells belegt, dass mit dem Wirken der charakteristischen Länge und der Kopplung von Verschiebungs- und Schädigungsfreiheitsgraden der Verlust der Eindeutigkeit bei Strukturrechnungen durch Berücksichtigung des räumlichen Schädigungsgradienten vermieden werden kann.

Die Durchführung von FE-Rechnungen mit dem erweiterten nicht-lokalen Gurson-Modell an einfachen Teststrukturen bei idealisiertem Materialverhalten sowie die Untersuchung von Bruchmechanikproben aus realen Materialien erlauben Rückschlüsse auf das Verhalten des nicht-lokalen Gurson-Modells im Vergleich zur lokalen Formulierung und verdeutlichen die erfolgreiche Anwendung des Modells bzgl. der Simulation duktiler Schädigung. Hierbei zeigt sich, dass die Ergebnisse der lokalen Schädigungssimulation eine starke Netzabhängigkeit aufweisen, wobei es mit abnehmender Elementkantenlänge der diskretisierten Struktur zu einem beschleunigten Schädigungswachstum bzw. Rissfortschritt kommt, was zu einer zunehmend weichen Abbildung der Struktursteifigkeit bei gleichzeitig früher einsetzender Rissinitiierung und anschließendem Versagen führt. Weiterhin ist zu

beobachten, dass Größe und Orientierung der Schädigungszonen sich nach Maßgabe der Elementgröße und Netztopologie einstellen können. Die Anwendung des nicht-lokalen Gurson-Modells erlaubt durch die Hinzunahme eines einzigen neuen Materialparameters  $c$  die Reduzierung der starken Netzabhängigkeit der FE-Ergebnisse. Rechnungen zur Simulation von Scherbändern zeigen, dass sich eine netzunabhängige Größe der Schädigungszone einstellt und auch die Orientierung der Scherbänder von der Elementkantenlänge und Netztopologie unabhängig ist.

Mit der Anwendung des nicht-lokalen Modells zur Simulation duktilen Rissfortschritts von gekerbten Rundzugproben und Bruchmechanikproben des Typs C(T) aus dem Werkstoff 10MnMoNi5-5 kann der Nachweis für die Anwendbarkeit des Modells an realen Werkstoffen und bauteilähnlichen Strukturen erbracht werden. Hierbei erweist sich als vorteilhaft, dass die Parameterbestimmung gegenüber der Anwendung des lokalen Modells lediglich um eine gesonderte Berücksichtigung der Schädigungsparameter und der Bestimmung der kritischen Größe  $c$  zu ergänzen ist. Die Ermittlung des Verfestigungsverhaltens kann durch lokale Modellierungen erfolgen oder gänzlich entfallen, wenn Datenbestände aus Simulationsergebnissen mit dem lokalen Modell zur Verfügung stehen.

## 9.2 Ausblick

Die Probleme bei der Anwendungen des Gurson-Modells werden durch die Untersuchung der Lokalisierung und des Elliptizitätsverlustes nachgewiesen und quantifiziert. Die hier gezeigten Ergebnisse von FE-Rechnungen belegen die erfolgreiche Anwendung des Modells bzgl. der Simulation von FE-Strukturen. Hierbei kann durch den Einsatz der nicht-lokalen Erweiterung des Gurson-Modells die pathologische Netzabhängigkeit der Ergebnisse reduziert und das Auftreten von Lokalisierungsphänomenen regularisiert werden.

Für die Verwendung zur Simulation der duktilen Schädigung und des Rissfortschritts realer metallischer Werkstoffe müssen Methoden entwickelt und zur Anwendung gebracht werden, die für verschiedene Werkstoffe die Bestimmung von Parametersätzen der konstitutiven Gleichungen einschließlich des Wertes  $c$  erlauben. Systematische Untersuchungen an den so gewonnenen Daten erlauben eine weiterführende Untersuchung des Charakters der charakteristischen Länge  $c$  als materialspezifischer Kennwert.

Weiterhin ist es erforderlich, die Verifikation des Modells an komplexen Probenstrukturen nachzuweisen, wozu die Entwicklung neuer Elementtypen, wie von Volumenelementen oder allgemein Elementtypen mit höheren (nicht-linearen) Ansatzfunktionen erforderlich ist. Somit wird die Anwendung des Modells auf Grundlage experimenteller Versuchsdaten an bauteilähnlichen Strukturen unter komplexen Belastungssituationen möglich.

Eine offene Fragestellung bzgl. der gradientenabhängigen Entwicklungsgleichung des globalen Schädigungsfeldes ist auch der Einfluss der Ratenabhängigkeit auf die Ergebnisse von FE-Simulationen. Hier ist die Entwicklung erweiterter Formulierungen notwendig, die die Stärke des Einflusses des Gradiententerms über die Entwicklung der Plastizität steuern. Hierzu sind auf Grundlage der Gradientenplastizität Modelle zu entwickeln, die über eine nicht-lokale Beschreibung der Entwicklung der Plastizität die Schädigungsentwicklung regularisieren.

Weiterführende Arbeiten bzgl. der Versagenssimulation von Bauteilen mittels der FE-Methode sind hierbei erforderlich, da die Simulation des materiellen Versagens nach Erreichen des Schädigungsmaximums und des damit verbundenen Rissfortschritts über das Herabsetzen der Elementsteifigkeiten der betroffenen Volumina bzgl. der numerischen Stabilität und der Genauigkeit der Lösung keine vollständig befriedigende Lösung darstellt.

Abschließend stellt sich die Anwendung nicht-lokaler Materialmodelle als ein zukunftsweisender und erfolgversprechender Weg bei der Simulation des duktilen Schädigungsverhaltens metallischer Werkstoffe dar, um die Anwendungsbereiche und die Zuverlässigkeit der Finite Elemente Methode für eine Beurteilung hochbeanspruchter Bauteile zu erweitern.



10	Notation .....	10-1
10.1	Operatoren .....	10-2
10.2	Indizes .....	10-3
10.3	Formelzeichen .....	10-3

## 10 Notation

Skalare Größen sind als lateinische und griechische Buchstaben in *Kursivschrift* gesetzt. Vektoren im euklidischen Raum sind durch Kleinbuchstaben in Fettschrift ( $\mathbf{a}$ ), allgemeine Vektoren zusätzlich mit Vektorpfeil ( $\vec{\mathbf{a}}$ ), Tensoren 2. Stufe und allgemeine Matrizen durch Großbuchstaben in Fettschrift ( $\mathbf{A}$ ) gekennzeichnet. Tensoren 4. Stufe sind durch zusätzliches doppeltes Unterstreichen hervorgehoben ( $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ ).

Als Ausnahmen werden die Ortsvektoren der Ausgangskonfiguration als  $\mathbf{x}$  und der Momentankonfiguration als  $\mathbf{X}$  bezeichnet, sowie die linken und rechten Basisvektoren des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  als kleine ( $\mathbf{e}_I$ ) und große Buchstaben ( $\mathbf{E}_I$ ) unterschieden.

Tritt die Indexschreibweise auf, wird die Einstein-Summenkonvention verwendet. Die Tensoroperationen werden unter Verzicht der Angabe der Basis in Indexschreibweise dargestellt.

## 10.1 Operatoren

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$	Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$	Skalarprodukt der Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j$	dyadisches Produkt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{kl}$	dyadisches Produkt der Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B} = A_{ik} B_{jl}$	dyadisches Produkt der Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} = A_{il} B_{jk}$	dyadisches Produkt der Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\underline{\underline{\mathbf{C}}} : \mathbf{A} = C_{ijkl} A_{kl}$	Produkt der Tensoren $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ und $\mathbf{A}$
$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} = C_{ijkl} D_{klmn}$	Produkt der Tensoren $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$
$\mathbf{A}^T$	Transposition des Tensors $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Zum Tensor $\mathbf{A}$ inverser Tensor
$\mathbf{A}^{-T}$	Inversion des transponierten Tensors $\mathbf{A}$
$\text{sym}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$	symmetrischer Anteil des Tensors $\mathbf{A}$
$\text{skw}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$	antimetrischer Anteil des Tensors $\mathbf{A}$
$\text{tr}(\mathbf{A}) = A_{ii}$	Spur des Tensors $\mathbf{A}$
$\det(\mathbf{A})$	Determinante des Tensors $\mathbf{A}$ bzw. der Matrix $\mathbf{A}$
$\dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{A}}$	materielle Zeitableitung des Vektors $\mathbf{a}$ bzw. Tensors $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}' = \mathbf{A}' - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A})$	Deviator des Tensors $\mathbf{A}$
$ \mathbf{A} $	Betrag des Tensors $\mathbf{A}$
$J_2(\mathbf{A})$	zweite Invariante des Tensors $\mathbf{A}$
$\text{grad}(\ ) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\ )$	materieller Gradient
$\text{Grad}(\ ) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\ )$	räumlicher Gradient
$\text{div}(\ ) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\ )$	Divergenz
$\Delta a(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \nabla a(\mathbf{x})$	Laplace-Operator eines skalaren Felds

**10.2 Indizes**

$( )_e$	elastischer Anteil
$( )_p$	plastischer Anteil
$( )_0$	Ausgangskonfiguration
$( )_t$	Momentankonfiguration
$( )^{(n)}$	Zeitschritt $n$
$( )^{(n+1)}$	Zeitschritt $n+1$
$( )^{(rel)}$	relative Größe zwischen den Zeitschritten $n$ und $n+1$
$( )^{(tr)}$	Prädiktor-Schritt
$( )^{(k)}$	$k$ -te Iteration
$( )_e$	auf ein Element bezogene Größe
$( )_{,x}$	Ableitung nach der einer skalaren Größe $x$
$( )^*$	Größen in Darstellung in einem anderen $( )^*$ -Bezugssystem
$\hat{\mathbf{x}}$	Wertrepräsentation einer Größe in einem Knotenvektor

**10.3 Formelzeichen****Kapitel 2**

$\mathfrak{B}$	materieller Körper
$\mathcal{P} \in \mathfrak{B}$	Punkt des materiellen Körpers
$B_t$	Körper in der Momentankonfiguration
$\phi_t$	Abbildung eines materiellen Punktes $\mathcal{P}$ von der Bezugs- in die Momentankonfiguration
$\mathbf{x}$	Ortsvektor der Referenzkonfiguration
$\mathbf{X}$	Ortsvektor der Momentankonfiguration
$\mathbf{E}$	Basisvektor der Referenzkonfiguration
$\mathbf{E}$	Basisvektor der Momentankonfiguration
$d\mathbf{X}$	infinitesimales Linienelement der Referenzkonfiguration
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient

$dA$	infinitesimales Flächenelement
$dV$	infinitesimales Volumenelement
$\mathbf{H}$	Verschiebungsgradient
$\mathbf{I}$	Einheitstensor 2. Stufe
$\mathbf{U}$	rechter positiv definiter symmetrischen Strecktensor
$\mathbf{V}$	linker positiv definiter symmetrischen Strecktensor
$\mathbf{R}$	Drehtensor
$\mathbf{C}$	rechter Cauchy-Green-Tensor
$\lambda_I, \mathbf{e}_I$	Eigenwerte und Eigenvektoren der Spektralzerlegung einer räumlichen Größe
$\Lambda_I, \mathbf{E}_I$	Eigenwerte und Eigenvektoren der Spektralzerlegung einer räumlichen Größe
$\mathbf{B}$	linker Cauchy-Green-Tensor
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$	Geschwindigkeit
$\mathbf{L}$	räumlicher Verzerrungsgeschwindigkeitsgradient
$\mathbf{D}$	räumlicher Deformationsgeschwindigkeitstensor
$\mathbf{W}$	Wirbeltensor
$\dot{\lambda}$	plastischer Multiplikator
$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$	Spintensor: Rotationsgeschwindigkeit
$\mathbf{0}$	Nulltensor 2. Stufe
$\mathbf{E}_G$	Green-Lagrange-Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor bei kleinen Deformationen
$\mathbf{E}_A$	Almansi- Verzerrungstensor
$\ln \mathbf{U}$	logarithmischer Verzerrungstensor
$\phi_*(\mathbf{A})$	Transformation eines Tensors $\mathbf{A}$ der Ausgangskonfiguration in einen Tensor der Momentankonfiguration $\bar{\mathbf{A}}$
$\bar{\mathbf{A}}$	Tensor der Momentankonfiguration
$\phi^*(\bar{\mathbf{A}})$	Pull-Back

$m$	Masse des materiellen Körpers $\mathcal{B}$
$\rho_0$	Dichte des materiellen Körpers $\mathcal{B}$
$\mathbf{f}$	Kraftdichte
$\mathbf{n}$	Normalenvektor
$\mathbf{t}$	auf der Momentankonfiguration wirkender Spannungsvektor
$\mathbf{T}$	räumlicher Cauchy-Spannungstensor
$\mathbf{P}$	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\mathbf{K}$	Kirchhoff-Spannungstensor
$\mathbf{S}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\mathbf{Q}$	orthogonalen Tensor
$\nabla_{\mathbf{T}}$	Zaremba-Jaumann-Ableitung
$\overset{\diamond}{\mathbf{T}}$	Green-Naghdi-Ableitung
$\overset{\circ}{\mathbf{T}}$	Oldroyd-Ableitung
$e$	Entropie je Masseinheit
$s$	innere Energie je Masseinheit
$\mathbf{q}$	Wärmefluss je Flächeneinheit
$h$	Wärmequellichte je Masse- und Zeiteinheit
$T$	absolute Temperatur
$\psi$	Freie spezifische Helmholtz-Energie
$\delta$	Dissipationsleistung
$\delta\mathbf{u}$	virtuelles Verschiebungsfeld
$\Delta t$	Zeitinkrement
$t$	Zeit

### Kapitel 3

$\mathbf{I}$ $\underline{\underline{=}}$	Einheitstensor 4. Stufe
$\mathbf{F}_e$	elastischer Anteil der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten
$\mathbf{F}_p$	plastischer Anteil der multiplikativen Zerlegung des

## Deformationsgradienten

$\mathbf{R}_e$	elastische Rotation der polaren Zerlegung des elastischen Deformationsanteils
$\mathbf{U}_e$	elastischer rechter Strecktensor
$\mathbf{R}_p$	plastische Rotation der polaren Zerlegung des plastischen Deformationsanteils
$\mathbf{U}_p$	plastischer rechter Strecktensor
$\mathbf{L}_e$	elastischer Anteil der additiven Zerlegung des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten
$\mathbf{L}_p$	plastischer Anteil der additiven Zerlegung des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten
$\mathbf{D}_p$	symmetrischer Anteil des plastischen Deformationsgeschwindigkeits-tensors
$\mathbf{W}_p$	antimetrischer Anteil des plastischen Verzerrungsgeschwindigkeits-tensors
$\alpha$	Vektors von skalaren und tensoriellen inneren Variablen
$\delta_p$	plastische Dissipationsleistung
$\psi_e$	elastischer Anteil der spezifischen freien Energie $\psi$
$\psi_p$	plastischer Anteil der spezifischen freien Energie $\psi$
$\xi$	Vektor interner skalarer Variablen
$\mathbf{M}$	Mandel-Spannungstensor
$\mathbf{E}_e = \ln \mathbf{U}_e$	elastischer logarithmischer Strecktensor (elastischer Hencky-Tensor)
$\lambda$	Lamé-Konstante
$\mu$	Lamé-Konstante
$E$	Elastizitätsmodul
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Phi$	Fließbedingung
$\sigma_v$	Vergleichsspannung
$\sigma_m$	Fließspannung des Matrixmaterials

$\dot{\lambda}$	Größe des plastischen Inkrements (plastischer Multiplikator)
$\dot{\epsilon}_m$	plastische Vergleichsdehnungsrate
$H$	Tangentenmodul
$k_j$	Exponent des $j$ -ten isotropen Verfestigungsterms
$R_j$	Amplitude des $j$ -ten isotropen Verfestigungsterms

**Kapitel 4**

$\sigma_0$	Fließspannung des starr-idealplastischen Matrixmaterials
$f$	Hohlraumvolumenanteil
$q_1, q_2$	Konstanten des Gurson-Modells
$f^*$	effektiver Hohlraumvolumenanteil
$f_0$	Hohlraumvolumenanteil des Materials im Ausgangszustand
$f_c$	kritischer Hohlraumvolumenanteil
$f_f$	endgültiger Hohlraumvolumenanteil
$f_n$	Volumenanteil hohlraumbildender Partikel
$f_u^*$	ultimativer Hohlraumvolumenanteil
$k_f$	Faktor des beschleunigten Hohlraumwachstums
$\epsilon_m$	plastische Vergleichsdehnung des Matrixmaterials
$\epsilon_n$	Dehnungsmittelwert der Gauß-Verteilung der Nukleation
$s_n$	Standardabweichung der Gauß-Verteilung der Nukleation
$R_y$	anfängliche Fließspannung für isotropes Verfestigungsverhalten

**Kapitel 5**

$W(\mathbf{x})$	Gewichtetes Volumenintegral über den betrachteten Körper
$w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	Gewichtungsfunktion
$p, q$	Shape-Parameter der Gewichtungsfunktion $w(x)$
$l$	charakteristische Länge
$l_c$	charakteristische Länge für das nicht-lokale integrale Gurson-Modell
$\mathbf{q}_f$	Schädigungsfluss

$c$	Stärke des Gradienteneinflusses (charakteristische Länge)
$\sigma_r$	Bezugsspannung
$S_0^p$	äußere Oberfläche des plastischen Bereichs eines Volumens
$S_i^p$	aktuelle Grenzoberfläche eines Belastungsschritts $i$ zwischen elastischen und plastischen Bereichen eines Volumens
$d$	Skalare globale Schädigungsfeldgröße
$d^*$	globaler effektiver Hohlraumvolumenanteil
$d_0$	Hohlraumvolumenanteil des Materials im Ausgangszustand
$d_c$	kritischer Hohlraumvolumenanteil
$d_u^*$	ultimativer Hohlraumvolumenanteil
$k_d$	Faktor des beschleunigten Hohlraumwachstums
$\dot{\psi}$	Rate der Freienenergiedichte
$\pi$	Dissipationspotential
$\psi_E$	elastischer Anteil der Freienenergiedichte
$\beta_D, \gamma_D$	charakteristische lokale bzw. nicht-lokale Dissipationsskalen für den delokalisierten Schädigungsprozess
$\alpha_D$	charakteristische Energieskala
$l_D$	charakteristische Längeskala
$\eta$	skalare Testfunktion

## Kapitel 6

$\Omega_e$	Volumen eines Elements in der Referenzkonfiguration
$N_i$	Ansatzfunktionen
$\mathbf{N}$	Vektor von Ansatzfunktionen
$\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{x}}$	Vektoren der Knotenkoordinaten der Referenz- bzw. Momenelementkonfiguration
$\hat{\mathbf{u}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_u$	Vektor der (virtuellen) Knotenverschiebungen
$\hat{\mathbf{d}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_d$	Elementknotenvektor der (virtuellen) Schädigungswerte
$\mathbf{u}_e$	Verschiebungsvektor eines Elementes

<b>J</b>	Jacobi-Matrix
<b>B<sub>L</sub>, B<sub>NL</sub></b>	lineare und nicht-lineare Verzerrungs-Verschiebungs-Zuordnungsmatrix
<b>B<sub>d</sub></b>	Zuordnungsmatrix zur Bildung des Gradienten der Schädigung aus dem Elementknotenvektor der Schädigungswerte
$\eta, \xi$	lokale Raumkoordinaten in einem Element
$r, z, \theta$	Raumkoordinaten in axialsymmetrischer Darstellung
<b>N<sub>,ξ</sub>, N<sub>,η</sub></b>	Ableitungen des Vektors der Ansatzfunktionen nach den lokalen Raumkoordinaten $\eta, \xi$ eines Elements
<b>e<sub>R</sub>, e<sub>Z</sub>, e<sub>Θ</sub></b>	Basisvektoren der Referenzposition eines Punktes <b>X</b> in der axialsymmetrischen Elementformulierung
<b>û<sub>r</sub>, û<sub>z</sub>, û<sub>θ</sub></b>	Vektoren der Knotenkoordinaten eines axialsymmetrischen Elements
<b>B<sub>u,ax</sub></b>	Zuordnungsmatrix für die axialsymmetrische Elementformulierung
$n_p$	Anzahl der Gauß-Punkte in einem Element
$p$	Index eines Gauß-Punkts
<b>û<sub>u</sub></b>	globaler Knotenverschiebungsvektor
<b>û<sub>d</sub></b>	globaler Knotenvektor der Schädigungswerte
<b>û</b>	Vektor der Systemfreiheitsgrade
<b>U<sub>u</sub>, U<sub>d</sub></b>	Systemanteile der Gleichgewichtsgleichung
<b>K̂</b>	Systemsteifigkeitsmatrix
<b>K̂<sub>e</sub></b>	Elementsteifigkeitsmatrix
<b>K̂<sub>uu</sub>, K̂<sub>ud</sub>, K̂<sub>du</sub>, K̂<sub>dd</sub></b>	Blockmatrizen der Elementsteifigkeitsmatrix
<b>F<sub>ue</sub>, F<sub>de</sub></b>	Elementknotenkraftvektor
<b>K<sub>e,L</sub>, K<sub>e,NL</sub></b>	linearer und quadratischer Anteil der Elementsteifigkeitsmatrix
<b>K<sub>L</sub>, K<sub>NL</sub></b>	linearer und quadratischer Anteil der Systemsteifigkeitsmatrix
$\tau^{(n)}$	Zeitintervall des $n$ -ten Zeitschritts der Rückwärts-Euler-Integration
<b>x̄</b>	unbekannter Vektor des Newton-Raphson-Verfahrens
<b>f̄</b>	Vektor der Ableitungen der Funktionsgleichungen des Newton-

Raphson-Verfahrens

$\varepsilon_{\text{err}}$

Fehler-Toleranz des Newton-Raphson-Verfahrens

$H_{1,2,3}$

Variablen für die Bildung der Tangente der Stoffgesetzintegration

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$

(Kontinuums-)Tangente des Stoffgesetzes

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_c$

konsistente Tangente des Stoffgesetzes unter Berücksichtigung des Integrationsverfahrens

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma\varepsilon}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{\sigma d},$   
 $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{dd}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{d\varepsilon}$

Operatoren zur Bildung der Tangente der Stoffgesetzintegration des nicht-lokalen Gurson-Modells

$\mathbf{A}$

Vektor der äußeren Kräfte

$\mathbf{F}$

Vektor der Knotenkräfte

$\varepsilon_{\text{d,fehler}}$

Fehlertoleranzen bei der Lösung des Systemgleichgewichts

$\varepsilon_{\text{u,fehler}}$

$\tau_{\text{max}}^{\alpha}$

Größte auftretende Ungleichgewichtskraft des Feldes  $\alpha$

$\tilde{q}^{\alpha}$

zeitlich über die Belastungsgeschichte gemittelter Fluss

$c_{\text{max}}^{\alpha}$

maximale Lösungskorrektur des Feldes  $\alpha$

$\Delta u_{\text{max}}^{\alpha}$

größter Zuwachs eines Freiheitsgrades des Feldes  $\alpha$

$\bar{q}^{\alpha}$

im momentanen Belastungsinkrement gemittelter Fluss

$\gamma$

Schwerwinkel

$f_0^*$

vorgegebene Schädigungsinhomogenität

## Kapitel 7

$k$

Wellenzahl

$i$

Imaginäranteil

$\mathbf{n}$

Richtungsvektor

$\mathbf{H}$

akustischer Tensor (2.Stufe)

$\mathbf{H}_{\text{hypo}}, \mathbf{H}_{\text{hyper}}$

akustischer Tensor für die hypoelastische bzw. hyperelastische Formulierung

$\dot{\mathbf{u}}_0$

unbekannte Amplitude des Exponentialansatzes des Geschwindigkeitsfeldes

$\dot{d}_0$

unbekannte Amplitude des Exponentialansatzes der

Schädigungsänderung

$\varphi$  Richtungswinkel des Richtungsvektors

$d\mathbf{X}$  inkrementelle Rate eines Tensors bzw. Skalars

$\mathbf{W}_e = \dot{\mathbf{R}}_e \mathbf{R}_e^T$  elastischer Spintensor (Rotationsgeschwindigkeit)

### **Kapitel 8**

$l_e$  Elementkantenlänge



11	Anhang .....	11-1
11.1	Gleichungen zur Lösung des lokalen Gurson-Modells .....	11-1
11.2	Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens (lokales Gurson-Modell).....	11-4
11.3	Gleichungen zur Lösung des nicht-lokalen Gurson-Modells.....	11-5
11.4	Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens (nicht-lokales Gurson-Modell).....	11-6
11.5	Ableitung für den linearisierten Materialoperator .....	11-8
11.6	Ableitungen zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix.....	11-11

## 11 Anhang

### 11.1 Gleichungen zur Lösung des lokalen Gurson-Modells

Für die Berechnung der Jacobi-Matrix des lokalen Newton-Verfahrens sind die Ableitungen des Potentials  $\Phi$  des Gurson-Modells

$$\Phi(\mathbf{M}, \sigma_m, f) = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'}{\sigma_m^2} + 2q_1 f^* \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2\sigma_m}\right) - (q_1 f^*)^2 - 1$$

zu bilden.

Die ersten Ableitungen von  $\Phi$  sind:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{M}} = \frac{3}{\sigma_m^2} \mathbf{M}' + \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_m} \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} = -\frac{3}{\sigma_m^3} \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}' - \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_m^2} \text{tr}(\mathbf{M}) \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} = \frac{\partial f^*}{\partial f} \left( 2 q_1 \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) - 2 q_1^2 f^* \right)$$

Die zweiten und gemischten Ableitungen von  $\Phi$  sind:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M}^2} = \frac{3}{\sigma_m^2} \left( \mathbf{1} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) + \frac{2 q_1 q_2^2 f^*}{2 \sigma_m^2} \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M} \partial \sigma_m} = -\frac{6}{\sigma_m^3} \mathbf{M}' - \frac{q_1 q_2 f^*}{\sigma_m^2} \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \mathbf{I} - \frac{q_1 q_2^2 f^*}{2 \sigma_m^3} \text{tr}(\mathbf{M}) \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M} \partial f} = \frac{\partial f^*}{\partial f} \left[ \frac{q_1 q_2}{\sigma_m} \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \mathbf{I} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} = -\frac{\partial f^*}{\partial f} \left[ \frac{q_1 q_2}{\sigma_m^2} \text{tr}(\mathbf{M}) \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m^2} = \frac{9}{\sigma_m^4} \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}' + \frac{2 q_1 q_2 f^*}{\sigma_m^3} \text{tr}(\mathbf{M}) \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) + \frac{q_1 q_2^2 f^*}{2 \sigma_m^4} \text{tr}(\mathbf{M})^2 \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right)$$

Die Ableitungen der Spur von  $\partial \Phi / \partial \mathbf{M}$ :

$$\frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi / \partial \mathbf{M})}{\partial \mathbf{M}} = \frac{3 q_1 q_2^2 f^*}{2 \sigma_m^2} \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \mathbf{I}$$

$$\frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi / \partial \mathbf{M})}{\partial f} = \left( \frac{\partial f^*}{\partial f} \right) \frac{3 q_1 q_2}{\sigma_m} \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right)$$

$$\frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi / \partial \mathbf{M})}{\partial \sigma_m} = -\frac{3 q_1 q_2}{\sigma_m^2} \left[ \sinh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) + \frac{q_2 f^*}{2 \sigma_m} \text{tr}(\mathbf{M}) \cosh\left(q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m}\right) \right]$$

Modifizierter Hohlraumvolumenanteil  $f^*$ :

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \text{für } f \leq (f_c - f_r) \\ f_c + k_f (f - f_c) & \text{für } f > (f_c + f_r) \\ \frac{1}{4 f_r} \left[ (f^2 + f_r^2)(k_f - 1) + 2 f (f_c + f_r + k_f (f_r - f_c)) \right. \\ \quad \left. + f_c (2 f_r - f_c + k_f (f_c - 2 f_r)) \right] & \text{für } f \leq (f_c + f_r) \\ & \wedge f > (f_c - f_r) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial f} = \begin{cases} 1 & \text{für } f \leq (f_c - f_r) \\ k_f & \text{für } f > (f_c + f_r) \\ \frac{1}{4 f_r} \left[ 2 f (k_f - 1) + 2 (f_c + f_r + k_f (f_r - f_c)) \right] & \text{für } f \leq (f_c + f_r) \\ & \wedge f > (f_c - f_r) \end{cases}$$

Nukleationsfunktion  $A(\varepsilon_m)$ :

$$A(\varepsilon_m) = \frac{f_n}{\sqrt{2\pi s_n^2}} \exp\left(-\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)^2}{2 s_n^2}\right)$$

$$\frac{\partial A(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} = -\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{s_n^2} A(\varepsilon_m)$$

Isotrope Verfestigungsfunktion  $R(\varepsilon_m)$  als Exponentialansatz:

$$\sigma_m = R(\varepsilon_m) = R_y + \sum_{j=1}^{n_j} R_j [\exp(-k_j \varepsilon_m) - 1]$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon_m} = H(\varepsilon_m) = \sum_{j=1}^{n_j} -k_j R_j \exp(-k_j \varepsilon_m)$$

Isotrope Verfestigungsfunktion  $R(\varepsilon_m)$  für lineare Verfestigung:

$$\sigma_m = R(\varepsilon_m) = R_y + H \varepsilon_m$$

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \varepsilon_m} = \text{const.} = H$$

## 11.2 Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens (lokales Gurson-Modell)

Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  des  $k$ -ten Berechnungsschrittes des Newton-Verfahrens aus dem Kapitel 6 wird aus den Ableitungen des Vektors

$$\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{(k)} + \mathbf{M}^{(tr)} - \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}} \\ -\varepsilon_m^{(k)} + \varepsilon_m^{(n)} - \frac{\Delta\lambda}{(1-f^{(n)})} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \\ -f^{(k)} + f^{(n)} + \Delta\lambda(1-f^{(n)}) \operatorname{tr}\left(\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}}\right) - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f^{(n)})} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \\ \Phi^{(k)} \end{bmatrix}$$

nach den im Vektor

$$\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \left( \mathbf{M}^{(k)}, \varepsilon_m^{(k)}, f^{(k)}, \lambda^{(k)} \right)^T$$

zusammengefassten tensoriellen und skalaren Variablen berechnet:

$$\mathbf{J}^{(k)}_{\langle i,j \rangle} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_{\langle i \rangle}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \bar{\mathbf{x}}_{\langle j \rangle}} .$$

Die Jacobi-Matrix wird hier zur übersichtlichen Darstellung in einzelnen Spalten  $j$  angegeben. Im Weiteren wird auf die Aufführung des hochgestellten Index  $(n)$  verzichtet, da sich die Ableitungen alle auf den  $(n)$ -ten Schritt der lokalen Iteration beziehen:

Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial \mathbf{M}$ :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \mathbf{M}} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \Delta\lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}}_c : \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial^2\mathbf{M}} \\ -\frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}\partial\sigma_m} \\ \Delta\lambda(1-f) \frac{\partial \operatorname{tr}(\partial\Phi^{(k)}/\partial\mathbf{M})}{\partial\mathbf{M}} - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}\partial\sigma_m} \\ \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}} \end{bmatrix}_{\mathbf{s}}$$

Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial \varepsilon_m$ :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \varepsilon_m} = \begin{bmatrix} -\Delta \lambda H(\varepsilon_m) \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M} \partial \sigma_m} \\ -1 - \frac{\Delta \lambda H(\varepsilon_m)}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial^2 \sigma_m} \\ \Delta \lambda H(\varepsilon_m)(1-f) \frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi^{(k)} / \partial \mathbf{M})}{\partial \sigma_m} - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta \lambda H(\varepsilon_m)}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial^2 \sigma_m} \\ H(\varepsilon_m) \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \end{bmatrix}$$

Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial f$ :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial f} = \begin{bmatrix} -\Delta \lambda \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M} \partial f} \\ -\frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m \partial f} - \frac{\Delta \lambda}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \\ -1 + \Delta \lambda \left( (1-f) \frac{\partial}{\partial f} \text{tr} \left( \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M}} \right) - \text{tr} \left( \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M}} \right) - \frac{A(\varepsilon_m)}{(1-f)} \left( \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m \partial f} + \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \right) \right) \\ \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial f} \end{bmatrix}$$

Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial \Delta \lambda$ :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \Delta \lambda} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M}} \\ -\frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \\ (1-f) \text{tr}(\partial \Phi^{(k)} / \partial \mathbf{M}) - \left( A(\varepsilon_m) + \frac{\partial A(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} \Delta \lambda \right) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 11.3 Gleichungen zur Lösung des nicht-lokalen Gurson-Modells

Für die Berechnung der Jacobi-Matrix des lokalen Newton-Verfahrens sind die ersten und zweiten Ableitungen des Potentials  $\Phi$  der nicht-lokalen Formulierung,

$$\Phi(\mathbf{M}, \sigma_m, d) = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}'}{\sigma_m^2} + 2q_1 d^* \cosh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2\sigma_m} \right) - (q_1 d^*)^2 - 1$$

zu bilden. Zusätzlich zu den in Abschnitt 12.1 definierten Ableitungen sind die folgenden Ableitungen neu bzw. zusätzlich zu bilden:

Ableitungen des Potentials  $\Phi$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{M} \partial f} = 0, \quad \frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi / \partial \mathbf{M})}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} = 0, \quad \frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi / \partial \mathbf{M})}{\partial f} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d} = \frac{\partial d^*}{\partial d} \left( 2 q_1 \cosh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m} \right) - 2 q_1^2 d^* \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial d} = - \frac{\partial d^*}{\partial d} \frac{q_1 q_2}{\sigma_m^2} \text{tr}(\mathbf{M}) \sinh \left( q_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2 \sigma_m} \right)$$

Ableitungen des modifizierten Hohlraumvolumenanteil  $d^*$ :

$$d^*(d) = \begin{cases} d & \text{für } d \leq (f_c - f_r) \\ f_c + k_f (f - f_c) & \text{für } d > (f_c + f_r) \\ \frac{1}{4 f_r} \left[ (d^2 + f_r^2)(k_f - 1) + 2 d (f_c + f_r + k_f (f_r - f_c)) \right. \\ \quad \left. + f_c (2 f_r - f_c + k_f (f_c - 2 f_r)) \right] & \text{für } d \leq (f_c + f_r) \\ & \wedge d > (f_c - f_r) \end{cases}$$

$$\frac{\partial d^*}{\partial d} = \begin{cases} 1 & \text{für } d \leq (f_c - f_r) \\ k_f & \text{für } d > (f_c + f_r) \\ \frac{1}{4 f_r} \left[ 2 d (k_f - 1) + 2 (f_c + f_r + k_f (f_r - f_c)) \right] & \text{für } d \leq (f_c + f_r) \\ & \wedge d > (f_c - f_r) \end{cases}$$

#### 11.4 Jacobi-Matrix des Newton-Verfahrens (nicht-lokales Gurson-Modell)

Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  des  $k$ -ten Iterationsschritts wird aus den Ableitungen des Vektors

$$\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{(k)} + \mathbf{M}^{(\text{tr})} - \Delta\lambda \underline{\mathbf{C}} \cdot \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}} \\ -\varepsilon_m^{(k)} + \varepsilon_m^{(n)} - \frac{\Delta\lambda}{(1-f^{(n)})} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \\ -f^{(k)} + f^{(n)} + \Delta\lambda(1-f^{(n)}) \text{tr}\left(\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}}\right) - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f^{(n)})} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \\ \Phi^{(k)} \end{bmatrix}$$

nach den im Vektor  $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = (\mathbf{M}^{(k)}, \varepsilon_m^{(k)}, f^{(k)}, \lambda^{(k)})^T$  zusammengefassten tensoriellen und skalaren Variablen berechnet. Durch die Berücksichtigung des globalen Schädigungswertes  $d$  in der Fließfunktion, die nun nicht mehr direkt von der lokalen Schädigung  $f$  abhängig, müssen die Einträge der Jacobi-Matrix neu definiert werden. Die Jacobi-Matrix wird hier zur übersichtlichen Darstellung in einzelnen Spalten  $j$  angegeben, dabei ist das Zeitinkrement  $\Delta\tau$  angegeben:

1. Spalte  $\partial\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})/\partial\mathbf{M}$  :

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} -\underline{\mathbf{I}} - \Delta\lambda \underline{\mathbf{C}} \cdot \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial^2\mathbf{M}} \\ -\frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}\partial\sigma} \\ \Delta\lambda(1-f) \frac{\partial\text{tr}(\partial\Phi^{(k)}/\partial\mathbf{M})}{\partial\mathbf{M}} - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}\partial\sigma_m} \\ \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\mathbf{M}} \end{bmatrix}$$

2. Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial \varepsilon_M$  :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \varepsilon_m} = \begin{bmatrix} -\Delta \lambda H(\varepsilon_m) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_e \cdot \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M} \partial \sigma_m} \\ -1 - \frac{\Delta \lambda H(\varepsilon_m)}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial^2 \sigma_m} \\ \Delta \lambda H(\varepsilon_m) (1-f) \frac{\partial \text{tr}(\partial \Phi^{(k)} / \partial \mathbf{M})}{\partial \sigma_m} - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta \lambda H(\varepsilon_M)}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi^{(k)}}{\partial^2 \sigma_m} \\ H(\varepsilon_m) \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \end{bmatrix}$$

3. Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial f$  :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial f} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta \lambda}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \\ -1 + -\Delta \lambda \text{tr} \left( \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M}} \right) - A(\varepsilon_m) \frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \left( + \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Spalte  $\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)}) / \partial \Delta \lambda$  :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{x}}^{(k)})}{\partial \Delta \lambda} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{C}}}_e \cdot \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \mathbf{M}} \\ -\frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \\ (1-f) \text{tr}(\partial \Phi^{(k)} / \partial \mathbf{M}) - \left( A(\varepsilon_m) + \frac{\partial A(\varepsilon_m)}{\partial \varepsilon_m} \Delta \lambda \right) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi^{(k)}}{\partial \sigma_m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 11.5 Ableitung für den linearisierten Materialoperator

Die vollständige Ableitung der Schädigungsevolution ergibt sich zu:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \left\{ \Delta\lambda(1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\}}_A - \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \left\{ A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} \right\}}_B,$$

mit der Ableitung des Terms A

$$\frac{\partial}{\partial f} \left\{ \Delta\lambda(1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \{\Delta\lambda\}}_{A1} \left\{ \Delta\lambda(1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\} + \Delta\lambda \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \left\{ (1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\}}_{A2}$$

und den weiter ausgeführten Ableitungen der Terme A1

$$\frac{\partial}{\partial f} \{\Delta\lambda\} = \frac{\partial\Phi}{\partial f}$$

und A2 zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f} \left\{ (1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\} &= \frac{\partial}{\partial f} (1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) + (1-f) \frac{\partial}{\partial f} \left\{ \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\} \\ &= -\operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) + (1-f) \frac{\partial \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right)}{\partial f} \end{aligned}$$

Einsetzen von A1 und A2 in A ergibt die Gleichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f} \left\{ (1-f) \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) \right\} + \Delta\lambda \left\{ -\operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right) + (1-f) \frac{\partial \operatorname{tr} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{M}} \right)}{\partial f} \right\}.$$

Die Ableitung des Terms B führt auf:

$$\frac{\partial}{\partial f} \left\{ A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} \right\} = \frac{\partial}{\partial f} \{\Delta\lambda\} A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} + \Delta\lambda \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \left\{ A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} \right\}}_{B1}$$

mit den Ableitungen von B1

$$\frac{\partial}{\partial f} \left\{ A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} \right\} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \{A(\varepsilon_m)\}}_{B1a} \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} + A(\varepsilon_m) \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \left\{ \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_m} \right\}}_{B1b}$$

und den so entstehenden Ableitungen der Terme B1a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f} \{A(\varepsilon_m)\} &= \frac{\frac{\partial}{\partial f} A(\varepsilon_m)}{\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial f}} \\ &= -\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{s_n^2} A(\varepsilon_m) \left\{ -\frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} - \frac{\Delta \lambda}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\} \end{aligned}$$

und B1b:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial f} \left\{ \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\} &= \frac{\partial}{\partial f} \left( (1-f)^{-1} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \\ &= \frac{1}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \end{aligned}$$

Einsetzen der gebildeten Ableitungen von B1a und B1b in B1

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial f} \left\{ A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \{A(\varepsilon_m)\}}_{B1a} \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + A(\varepsilon_m) \underbrace{\frac{\partial}{\partial f} \left\{ \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\}}_{B1b} \\ &= -\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{s_n^2} A(\varepsilon_m) \left\{ -\frac{\Delta \lambda}{(1-f)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} - \frac{\Delta \lambda}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\} \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \\ &\quad + A(\varepsilon_m) \left\{ \frac{1}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \right\} \\ &= -\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{s_n^2} A(\varepsilon_m) \frac{\Delta \lambda}{(1-f)^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \left\{ -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} - \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} \right\} \\ &\quad + A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \left\{ \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_m \partial f} \right\} \end{aligned}$$

und schließlich von B1 nach B führt auf:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial f} \left\{ A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \right\} \\
&= \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial f} A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \\
&+ \Delta\lambda \left\{ -\frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{s_n^2} A(\varepsilon_m) \frac{\Delta\lambda}{(1-f)^2} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \left\{ -\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m \partial f} - \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \right\} + \right. \\
&\quad \left. A(\varepsilon_m) \frac{1}{(1-f)} \left\{ \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} + \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m \partial f} \right\} \right\} \\
&= \frac{A(\varepsilon_m)}{(1-f)} \left\{ \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial f} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} - \frac{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)}{s_n^2} \frac{\Delta\lambda^2}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \left\{ -\frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m \partial f} - \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} \right\} \right\} \\
&\quad \left. + \Delta\lambda \left\{ \frac{1}{(1-f)} \frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m} + \frac{\partial^2\Phi^{(k)}}{\partial\sigma_m \partial f} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

## 11.6 Ableitungen zur Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrix

Die Linearisierung der Einzelterme des Variationsprinzips für das inkrementelle Integrationsschema ergibt die in Kapitel 6 erläuterten Anteile der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  für die Elementfläche  $\Omega_e$ :

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T (D_u \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{B}_u d\Omega_e$$

$$\mathbf{K}_{ud} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T (D_d \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{N}_d d\Omega_e$$

$$\mathbf{K}_{du} = - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T (D_u \dot{f}) \mathbf{B}_u d\Omega_e$$

$$\mathbf{K}_{dd} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T (D_d \dot{f}) \mathbf{N}_d + \mathbf{B}_d^T c \mathbf{B}_d d\Omega_e$$

Die in Kapitel 6 eingeführten Abkürzungen ergeben sich dabei zu:

$$D_u \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{[6 \times 6]}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* - \frac{\mathbf{N} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N}}{\left( \mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial \lambda} \right)}$$

$$D_d \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{[1 \times 6]}}{\partial d} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} H_3}{\mathbf{N}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N}) - H_2}$$

$$D_u \dot{f} = \frac{\partial \dot{f}^{[6 \times 1]}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = M_f \frac{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^*}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial \lambda}}$$

$$D_d \dot{f} = \frac{\partial \dot{f}^{[1 \times 1]}}{\partial d} = 1 - M_f \frac{\partial \Phi / \partial d}{\mathbf{N} : \underline{\underline{\mathbf{C}}}^* : \mathbf{N} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_m}{\partial \lambda}}$$

Die Dimension der Elementmatrix und der zugehörigen Anteile ergeben sich bei einem Element mit  $n$  Knoten für ebene Verzerrungszustände zu:

$$\mathbf{K}^{[3n \times 3n]} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ud} \\ \mathbf{K}_{du} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{uu}^{[2n \times 2n]} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [2n \times 4] (D_u \boldsymbol{\sigma})^{[4 \times 4]} \mathbf{B}_u [4 \times 2n] d\Omega_e$$

$$\mathbf{K}_{ud}^{[2n \times n]} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_u^T [2n \times 4] (D_d \boldsymbol{\sigma})^{[4 \times 1]} \mathbf{N}_d [1 \times n] d\Omega_e$$

$$\mathbf{K}_{du}^{[n \times n]} = - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T [n \times 1] (D_u \dot{f})^{[1 \times 4]} \mathbf{B}_u [4 \times 2n] d\Omega_e$$

$$\mathbf{K}_{dd}^{[n \times n]} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_d^T [n \times 1] (D_d \dot{f}^{[1 \times 1]}) \mathbf{N}_d [1 \times n] + \mathbf{B}_d^T [n \times 2] c \mathbf{B}_d [2 \times n] d\Omega_e$$

12	Verzeichnisse .....	12-1
12.1	Bilder .....	12-1
12.2	Tafeln .....	12-5
12.3	Tabellen.....	12-6

## 12 Verzeichnisse

### 12.1 Bilder

#### Kapitel 2

Bild 2.1 Ausgangskonfiguration und Momentankonfiguration

Bild 2.2 Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

#### Kapitel 3

Bild 3.1 Plastische Zwischenkonfiguration: Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

#### Kapitel 4

Bild 4.1 Bruchoberfläche nach duktiler Schädigung mit typischem Wabenbruch [Kli2000]

- Bild 4.2 Phänomenologische Beschreibung duktiler Schädigung
- Bild 4.3 Fließfläche des Gurson-Modells im Hauptspannungsraum
- Bild 4.4 Effektiver Hohlraumvolumenanteil
- Bild 4.5 Einfluss der plastischen Vergleichsdehnung des Matrixmaterials
- Bild 4.6 Verzweigungsproblem bei entfestigendem Materialverhalten
- Bild 4.7 Verzweigung durch Strukturdiskretisierung
- Kapitel 5**
- Bild 5.1 Elastisch-plastischer Grenzübergang
- Kapitel 6**
- Bild 6.1 Diskretisierung einer Struktur
- Bild 6.2 Ebenes Element mit 4 Knoten und 12 Freiheitsgraden
- Bild 6.3a Lineare Ansatzfunktionen der Abbildung der Schädigungs- und Verschiebungsfreiheitsgrade in den Knoten der ebenen Elementformulierung.
- Bild 6.3b Lineare Abbildung eines Schädigungsfreiheitsgrades und Abbildung der räumlichen Änderung und des 2. Gradienten der Schädigung über die undeformierte Referenzkonfiguration des Elements.
- Bild 6.4 Axialsymmetrische Elementformulierung
- Bild 6.5 Kräftegleichgewicht an einem Element mit 12 Freiheitsgraden
- Bild 6.6 Elementverifikation für große Deformationen mit „Ein-Element“-Tests
- Bild 6.7 Elementverifikation für große Deformationen unter reiner Schubbeanspruchung, ohne Schädigung
- Bild 6.8 Elementverifikation mit dem Gurson-Modell unter Zugbeanspruchung, ebenes 4-Knotenelement mit bilinearen Ansatzfunktionen, a) ebener Verzerrungszustand, b) axialsymmetrische Formulierung
- Bild 6.9 FE-Elementierung und Randbedingung eines ebenen Zugstabes mit verschiedenen Elementkantenlängen
- Bild 6.10 Kraft-Verschiebungs-Kurven eines ebenen Zugstabes bei Diskretisierungen mit den Elementkantenlängen  $l_e=0,25$  mm,  $l_e=0,5$  mm und  $l_e=0,25$  mm (lokales Gurson-Modell)

Bild 6.11 Kraft-Verschiebungs-Kurven des ebenen Zugstabes (Elementkantenlängen  $l_e=1,0$  mm) für das nicht-lokale Gurson-Modell für  $c$ -Werte von  $-1,0 \dots 0,5$ .

Bild 6.12 Kraft-Verschiebungs-Kurven des ebenen Zugstabes bei Diskretisierungen mit den Elementkantenlängen  $l_e=0,25$  mm,  $l_e=0,5$  mm und  $l_e=0,25$  mm für das nicht-lokale Gurson-Modell mit  $c=0,5$ .

## Kapitel 7

Bild 7.1 Schematische Vorgehensweise bei der Untersuchung zum Elliptizitätsverlust

Bild 7.2 Flächendarstellung zum Elliptizitätsverlust

Bild 7.3 Einfluss der kritischen Länge  $c$  und der Wellenzahl  $k$  bzgl. des Elliptizitätsverlustes beim nicht-lokalen Gurson-Modell

Bild 7.4 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das lokale Gurson-Modell an einfachen Lastfällen

Bild 7.5 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes und der Lokalisierung für das lokale Gurson-Modell an Bruchmechanikproben aus einem realen Werkstoff (10MnMoNi5-5)

Bild 7.6 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes einer Strukturrechnung (Zug) für das lokale Gurson-Modell an einer Ein-Elementrechnung und verschiedenen Implementierungen (kl. Deformationen, hypoelastisch und hyperelastisch)

Bild 7.7 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes einer Strukturrechnung (Zug/Schub) für das lokale Gurson-Modell an einer Ein-Elementrechnung und verschiedenen Implementierungen (kl. Deformationen, hypoelastisch und hyperelastisch)

Bild 7.8 Untersuchung des Elliptizitätsverlustes für das nicht-lokale Gurson-Modell bei kleinen Deformationen: Einfluss der Parameter  $c$  und  $k$  auf die Auswertung für einen homogenen Belastungsfall (Zug) in einer Struktur

## Kapitel 8

Bild 8.1 Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung, 10x15 Elementdiskretisierung und Netzverfeinerung

- Bild 8.2 Last-Verschiebungs-Kurven für nicht-lokale Gurson-Rechnung mit  $c=0$  und lokaler Gurson-Modellierung
- Bild 8.3 Last-Verschiebungs-Kurven für verschiedene kritische Längen mit  $l_e=1,0$  mm Elementkantenlänge
- Bild 8.4 Last-Verschiebungs-Kurven für Elementkantenlängen  $l_e=0,25$ mm; 0,5mm und 1,0 mm mit  $c=1,0$
- Bild 8.5 Schädigungsverteilung für das lokale Gurson-Modell und für Elementkantenlängen  $l_e=0,25$ mm; 0,5mm und 1,0 mm
- Bild 8.6 Schädigungsverteilung für das nicht-lokale Gurson-Modell und für Elementkantenlängen  $l_e=0,25$ mm; 0,5mm und 1,0 mm und  $c=1,0$  mm
- Bild 8.7 Lokalisierungskriterium für die vorgeschädigte Zugscheibe im Punkt der anfänglichen Schädigungskonzentration bis zur finalen Schädigungsentwicklung
- Bild 8.8 Einfache Zugscheibe mit Vorschädigung, 10x12 Elementdiskretisierung und Netzverfeinerung
- Bild 8.9 Last-Verschiebungs-Kurven für nicht-lokale Gurson-Rechnung mit  $c=0$  und lokaler Gurson-Rechnung
- Bild 8.10 Last-Verschiebungs-Kurven für Elementkantenlängen  $l_e=0,25$ mm; 0,5mm und 1,0 mm mit  $c=0,05$
- Bild 8.11 Last-Verschiebungs-Kurven für Elementkantenlängen  $l_e=0,25$ mm; 0,5mm und 1,0 mm mit  $c=0,05$  und  $f_u^*=0,9$
- Bild 8.12 Schädigungsverteilung im lokalen und nicht-lokalen Fall, lokal:  $f$ , nicht-lokal:  $f$  und  $d$
- Bild 8.13 Scherbandentwicklung in einer Probe: Qualitativer Vergleich der Schädigungsentwicklung (lokales und nicht-lokales Gurson-Modell mit  $c=0,1$ , s.Tabelle 1, Probengeometrie [Sie2001]).
- Bild 8.14 Kraft-Verschiebungs-Kurve der Probe aus Bild 8.13 (lokales und nicht-lokales Gurson-Modell)
- Bild 8.15 Geometrie und Diskretisierung einer gekerbten Rundzugprobe mit Elementkantenlängen  $l_e=0,25$ mm; 0,5mm und 1,0 mm im Bereich der Subelementierung

- Bild 8.16 Geometrie und Diskretisierung einer C(T)-Probe mit Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$  im Bereich der Subelementierung
- Bild 8.17 Modellierung einer axialsymmetrischen Rundzugprobe: Schädigungsverteilung und Kraft-Durchmesseränderungs-Kurve, lokales Gurson-Modell, Werkstoff 10MnMoNi5-5, Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$
- Bild 8.18 Modellierung einer axialsymmetrischen Rundzugprobe: Schädigungsverteilung und Kraft-Durchmesseränderungs-Kurve, nicht-lokales Gurson-Modell, Werkstoff 10MnMoNi5-5, Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,1$
- Bild 8.19 Kraft-Verschiebungs-Kurve, C(T)-Probe: lokales Gurson-Modell (10MnMoNi5-5), Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,1$
- Bild 8.20 Kraft-Verschiebungs-Kurve, C(T)-Probe: nicht-lokales Gurson-Modell (10MnMoNi5-5), Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,1$
- Bild 8.21 Schädigungsverteilung, C(T)-Probe: nicht-lokales Gurson-Modell (10MnMoNi5-5), Elementkantenlängen  $l_e=0,25\text{mm};0,5\text{mm}$  und  $1,0\text{ mm}$ ,  $c=0,0 - 0,1$

## 12.2 Tafeln

### Kapitel 3

Tafel 3.1 Hyperelastisch-plastisches Modell mit isotroper Verfestigung

### Kapitel 4

Tafel 4.1 Gleichungen des lokalen Gurson-Modells

### Kapitel 5

Tafel 5.1 Gleichungen des nicht-lokalen Gurson-Modells

### Kapitel 6

Tafel 6.1 Implementierung in FE-Programm

Tafel 6.2 Spannungsintegration

**Kapitel 7**

- Tafel 7.1 Akustische Tensoren
- Tafel 7.2 Konstitutive Gleichungen der Hyperelastoplastizität
- Tafel 7.3 Konstitutive Gleichungen der Hypoelastoplastizität
- Tafel 7.4 Tensoroperatoren

**12.3 Tabellen****Kapitel 6**

- Tabelle6.1a Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen
- Tabelle6.1b Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für idealplastisches Verhalten für die Beispielrechnungen

**Kapitel 7**

- Tabelle7.1a Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen
- Tabelle7.1b Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für idealplastisches Verhalten für die Beispielrechnungen
- Tabelle7.1a Materialparameter der duktilen Schädigung für die Beispielrechnungen
- Tabelle7.1b Elastische Materialparameter und Verfestigungsparameter für idealplastisches Verhalten für die Beispielrechnungen
- Tabelle7.2a Verfestigungs- und Schädigungsparameter für 10MnMoNi5-5
- Tabelle7.3 Verfestigungs- und Schädigungsparameter für 10MnMoNi5-5  
Materialparameter für isotrope und kinematische Verfestigung

**Kapitel 8**

- Tabelle 8.1 Verfestigungs- und Schädigungsparameter für die Beispielstrukturen
- Tabelle 8.2 Verfestigungs- und Schädigungsparameter für 10MnMoNi5-5

13	Literatur .....	13-1
----	-----------------	------

## 13 Literatur

- [Aif1984] Aifantis, E.C. (1984). On the microstructural origin of certain inelastic models, *Journal of Engineering Materials and Technology – Transactions of the ASME* **106**, 326–330.
- [Aif1992] Aifantis, E.C. (1992). On the role of gradients in the localization of deformation and fracture, *Int. J. Engrg. Science.*, **30**, 1279-1299.
- [And1977] Andersson, H. (1977). Analysis of a model for void growth and coalescence ahead of a moving crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, **25**, 217-233.
- [Ara1987] Aravas, N. (1987). On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models, *Int. J. Num. Meth. Engrg*, **24**, 1395-1416.
- [Arg1986] Argyris, J.H. und Mlejnek, H.P. (1986). *Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band I: Verschiebungsmethode in der Statik*, Vierweg, Braunschweig.
- [Ari2000] Arif, A.F.M. et al. (2000). Performance of a finite element procedure for hyperelastic-viscoplastic large deformation problems, *Finite Elements In Analysis and Design*, **34**, 89-112.

- [Arm1966] Armstrong, P.J., Frederick, C.O. (1966). A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, General Electricity Generating Board, Report No. RD/B/N731.
- [Arn1997] Arndt, S., Svendsen, B., Klingbeil, D. (1997). Modellierung der Eigenspannungen an der Rissspitze mit einem Schädigungsmodell, *Technische Mechanik*, **4**, 323-332.
- [Arn2000] Arndt, S. (2000). Modellierung der Warmvorbelastung mit einem Schädigungsmodell für kombinierte Verfestigung am Beispiel des Werkstoffs 10MnMoNi5-5, *Dissertation*, Fakultät Maschinenbau der Otto-von-Guericke-Universität, Magdeburg.
- [ASTM1990] ASTM E399-90 (1990). Standard Test Method for Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, ASTM-Handbook, **3.01**.
- [Aur1987] Aurich, D. et al. (1987). Analyse und Weiterentwicklung bruchmechanischer Versagenskonzepte auf Grundlage von Forschungsergebnissen auf dem Gebiet der Komponentensicherheit, Teilvorhaben: Werkstoffmechanik, Forschungsbericht **137**, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung,.
- [Baa2000] Baaser, H., Tvergaard, V. (2000). A new algorithmic approach treating nonlocal effects at finite rate-independent deformation using the Roussellier damage model, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, Technical University of Denmark, Report No. 647.
- [Bad1993] Badrinarayanan, S., Zabaras, N. (1993). A two-dimensional FEM code for the analysis of large deformations of hyperelastic viscoplastic solids, Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University, Technical Report MM 93-05.
- [Bad1996] Badrinarayanan, S., Zabaras, N. (1996). A sensitivity analysis for the optimal design of metal-forming processes, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **129**, 319-348.
- [Bat1996] Bathe, K.-J. (1996). Finite Element Procedures, 2<sup>nd</sup> edition, Prentice-Hall, New Jersey.
- [Baz1988] Bazant, Z., Pijaudier-Cabot, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence, *J. Appl. Mech.*, **55**, 287-293.
- [Baz1989] Bazant, Z., Pijaudier-Cabot, G. (1989). Measurement of characteristic length of nonlocal continuum, *J. Engrg. Mech.*, **115**, 755-767.
- [Beck1986] Becker, R., Needleman, A. (1986). Effect of yield surface curvature on necking and failure in porous plastic solids. *J. of Appl. Mech.*, **53**, 491-499.

- [Ben1987] Benallal, A., Marquis, D. (1987). Constitutive equations for nonproportional cyclic elasto-viscoplasticity, *J. Engrg. Mat. Tech. - Transactions of the ASME*, **109**, 326-336.
- [Ben1995] Benallal, A., Tvergaard, V. (1995). Nonlocal continuum effects on bifurcation in the plane strain tension-compression test, *J. Mech. Phys. Solids*, **5**, 741-770.
- [Ben1996] Benallal, A., Comi, C. (1996). Localization analysis via a geometric method, *Int. J. Solids Structures*, **33**, 99-119.
- [Ber1983] Beremin, F. M. (1983). A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel, *Metal. Trans.*, **14 A**, 2277-2287.
- [Bert1993] Bertram, A. (1993). Description of finite inelastic deformations, in: *Proceedings of MECAMAT '92 Multiaxial Plasticity*, Benallal, A., R. Billardon and D. Marquis, eds., pp. 821–835.
- [Big1991a] Bigoni, D., Hueckel, T. (1991). Uniqueness and localization - I. Associative and non-associative elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, **28**, 197-213.
- [Big1991b] Bigoni, D., Hueckel, T. (1991). Uniqueness and Localization - II. Coupled Elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, **28**, No.2, 215-224
- [Big1993] Bigoni, D., Zaccaria, D. (1993). On strain localization analysis of elastoplastic materials at finite strain, *Int. J. Plasticity*, **9**, 21-33.
- [Bor1989] Borré, G., Maier, G. (1989). On linear versus non-linear flow rules in strain localisation analysis, *Meccanica*, **24**, 36-41.
- [Bor2000] Borst, R. (2000). Theoretical and computational issues in localisation and failure, in: *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000)*, E. Onate, G. Bugeda, B. Suarez, eds., pp. 1-15, Barcelona.
- [Cha1986] Chaboche, J.-L. (1986). Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity, *Int. J. Plasticity*, **2**, 149-188.
- [Cha1993] Chaboche, J.-L. (1993). Cyclic viscoplastic constitutive relations – Part I: A thermo-dynamically consistent formulation, *J. Appl. Mech.*, **60**, 813–828.
- [Chr1979] Christofferson, J., Hutchinsinon, J. W. (1979). A class of phenomenological corner theories of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, 465-487.
- [Chu1980] Chu, C. C., Needleman, A. (1980). Void nucleation effects in biaxially stretched sheets, *J. Engrg. Mal. Tech.*, **102**, 249-256.
- [Cos1909] Cosserat E. & F. (1909). Théorie des Corps Déformables, Paris, A. Herman et Fils. *Traité de Physique*, **2**, 953-1173.

- [Cri1991a] Crisfield, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. **1**, John Wiley & Sons.
- [Cri1991b] Crisfield, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. **2**, John Wiley & Sons.
- [Daf1985] Dafalias, Y. F. (1985). The plastic spin, *J. Appl. Mech.*, **52**, 865.
- [DeB1991] De Borst, R. (1991). Simulation of strain localisation: A reappraisal of the Cosserat continuum, *Engrg. Comp*, **8**, 317-322.
- [DeB1992] De Borst, R., Mühlhaus, R. & H.-B. (1992). Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **35**, 521-539.
- [DeB1999] De Borst, R., Pamin, J., Geers, M.G.D. (1999). On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **18**, 939 - 962.
- [Dog1995] Dogrhi, I., Billardon, R. (1995). Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials, *Mechanics of Materials*, **19**, 129-149.
- [Ebe1996] Eberle, A., Klingbeil, D. (1996). Durchführung von Zellmodellrechnungen mit dem FE-Programm ABAQUS und der Riks-Methode. Bericht BAM-V.31 96/1, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- [Ede1976] Edelen, D.G.B. (1976). Nonlocal field theories, in: *Continuum Physics*, Vol. **4**, A.C. Eringen, ed., 96-204, Academic Press.
- [Ehl1998] Ehlers, W., Diebels, S., Volk, W. (1998). Deformation and compatibility for elasto-plastic micropolar materials with applications to geomechanical problems, in: *Mechanics of Materials with Intrinsic Length Scale*, A. Bertram, S. Forest, F. Sideroff, eds., pp. 120-127, Magdeburg.
- [Eig1995] Eigenmann, B., Macherauch, E. (1995). Röntgenographische Untersuchung von Spannungszuständen in Werkstoffen, *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.*, **26**, 148-160.
- [Eri1965] Eringen, A.C. (1965). Theory of micropolar continuum, in: *Proceedings of the Ninth Midwestern Mechanical Conference*, p. 23, University of Wisconsin, Madison.
- [Est1996] Estrin Y. (1996). Dislocation-density-related constitutive modeling, in: *Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation*, A. S. Krausz and K. Krausz, eds., pp. 69-106, Academic Press.
- [Ete1990] Eterovic, A.L., Bathe, K.J. (1990). A hyperelastic-based large strain elastoplastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using logarithmic stresses and strain measures, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **30**, 1099–1115.

- [Feu1997] Feucht, M., D. Gross, P. Wriggers (1997). A new element formulation for nonlocal damage models, in: *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen et al., eds., pp. 1083-1088, CIMNE, Barcelona.
- [Feu1998] Feucht, M. (1998). Ein gradientenabhängiges Gursonmodell zur Beschreibung duktiler Schädigung mit Entfestigung, *Dissertation*, Institut für Mechanik, Technische Universität Darmstadt.
- [For1995] Forest, S., Cailletaud, G. (1995). Strain localisation in single crystals: bifurcation analysis, effects of boundaries and interfaces, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **14**, 747-771.
- [For1996] Forest, S. (1996). Mechanical modelling of homogeneous single crystals, *Dissertation*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Fri1994] Fricke, S., Klingbeil, D., Arndt, S. (1994). Systematische Untersuchung des Einflusses der Elementgröße bei Risswachstumssimulationen mit dem Gurson-Modell, Deutscher Verband für Materialforschung, S. 197-206.
- [Gan1999] Ganghoffer, J.F., Sluys, L.J., de Borst, R. (1999). A reappraisal of nonlocal mechanics, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **18**, 17-46.
- [Gan2000] Ganghoffer, J.F., de Borst, R. (2000). A new framework in nonlocal mechanics, *Int. J. Engrg. Sci.*, **38**, 453-486.
- [Gee1998] Geers, M.G.D., de Borst, R., Brekelmans, W.A.M., Peerlings, R.H.J. (1998). Strain-based transient-gradient damage model for failure analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **160**, 133-153.
- [Gee2000] Geers, M.G.D., Ubachs, R.L.J.M., Engelen, R.A.B. (2000). Strongly nonlocal gradient-enhanced finite strain elastoplasticity, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **56**, 2039-2068.
- [Gie1991] Van der Giessen, E. (1991). Micromechanical and thermodynamical aspects of the plastic spin, *Int. J. Plasticity*, **7**, 365-386.
- [Goo1979] Goods, S. H., Brown, L. M. (1979). The nucleation of cavities by plastic deformation, *Acta Metall.*, **27**, 1-15.
- [Gre1965] Green, A. E., Nagdhi, P. M. (1965). A general theory of an elastic-plastic continuum, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **18**, 251-281.
- [Gur1977] Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I. – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Engrg. Mat. Tech.*, **99**, 2–15.
- [Har1993] Hartmann, S. (1993). Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität, *Dissertation*, Bericht 1/1993, Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel.

- [Hau1985] Haupt, P. (1985). On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behaviour, *Int. J. Plasticity*, **1**, 303.
- [Hau1995] Haupt, P. (1995). On the thermodynamic representation of viscoplastic material behaviour, *Proceedings AMSE Materials Division MD 69-1*, pp. 503-519.
- [Hib1998a] Hibbit, Karlsson, Sorensen, Inc. (1998a). *ABAQUS Theory Manual*. Version 5.8.
- [Hib1998b] Hibbit, Karlsson, Sorensen, Inc. (1998b). *ABAQUS Standard User Manual*. Version 5.8.
- [Hil1958] Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in plastic elastic solids, *J. Mech. Phys. Sol.*, **6**, 236-249.
- [Hil1962] Hill, R. (1962). Acceleration waves in solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **10**, 1-16.
- [Hil1975] Hill, R., Hutchinson, J.W. (1975). Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 239-264.
- [Hoe1994] Hönig, A. (1994). Numerische Simulation von dynamisch belasteten Proben unter Berücksichtigung mikromechanischer Materialmodelle, Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik, IWM-Bericht W5/94.
- [Hue1992] Huerta, A., Pijaudier-Cabot, G. (1992). Discretization influence on the regularization by two localization limiters, *Int. Num. Meth. Engrg.*, **120**, 1198-1218.
- [Hug1980] Hughes, T.J.R. & Winget, J. (1980). Finite rotation effects in numerical integration of rotate constitutive equations arising in large deformation analysis, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **15**, 1862-1867.
- [Hut1968] Hutchinson, J. W. (1968). Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 13-31.
- [Hut1981] Hutchinson, J. W., Tvergaard, V. (1981). Shear Band Formation in Plane Strain, *Int. J. Solids Structures*, **17**, 451-470.
- [Jau1911] Jaumann, G. (1911). Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, **120**, 385-530.
- [Kli1993] Klingbeil, D., Künecke, G. & Schicker, J. (1993). On the application of Gurson's model to various fracture mechanics specimens, Bericht BAM-V.31 93/3, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.

- [Kli1994] Klingbeil, D., Künecke, G. & Schicker, J. (1994). A synthesis between experimental and numerical methods applied to the determination of crack resistance curves for various specimens, in: *ECF 10 – Structural Integrity: Experiments, Models and Applications*, K.-H. Schwalbe and C. Berger, eds., Engineering Materials Advisory Services Ltd., pp. 453–462.
- [Kli1995a] Klingbeil, D., Brocks, W. (1995). Verifikation von Schädigungsmodellen zur Vorhersage von Risswiderstandskurven für verschiedene Probengeometrien und Materialien im Rissinitiierungsbereich und bei großem Risswachstum, Abschlußbericht zum DFG-Vorhaben Br521/5.
- [Kli1995b] Klingbeil, D., Fricke, S., Arndt, S. (1995). Systematische Untersuchung des Einflusses der Elementgröße auf die Simulation von Rissfortschritt mit dem Gurson-Modell, *Berichtsband zur 27. Tagung im Arbeitskreis Bruchvorgänge des Deutschen Verbands für Materialforschung*, pp. 197-206.
- [Kli1995c] Klingbeil, D., Moussavi Zadeh, G. (1995). On the simulation of ductile crack growth in fracture mechanics specimen using the Gurson model, *Trans. SMiRT 13, II*, J. D. Riera, ed., pp. 407 - 412.
- [Kli1998a] Klingbeil, D., Aurich, D. (1998). Entwicklung von Verfahren zur Ermittlung von Risswiderstandskurven verschiedener Probengeometrien aus der Kerbschlagarbeit. Forschungsbericht 228, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- [Kli1998b] Klingbeil, D., Brocks, W., et. al. (1998). Verifikation von Schädigungsmodellen zur Vorhersage von Risswiderstandskurven für verschiedene Probengeometrien und Materialien im Rissinitiierungsbereich und bei großem Risswachstum, Bericht BAM.V.31 98/2, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- [Kli2000] Klingbeil, D. et. al. (2000). Werkstoffmechanisches Verhalten von postulierten Anrissen in druckführenden Komponenten mit vorbeanspruchter Riss Spitze bei Belastung infolge rascher Abkühlvorgänge, BAM-Forschungsbericht 234, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- [Kno1999] Knockaert, R., Doghri, I. (1999). Nonlocal constitutive models with gradients of internal variables derived from a micro/macro homogenization procedure, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **174**, 121-136.
- [Koj1987] Kojic, M., Bathe, K. (1987). Studies of finite element procedures – stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation, *Computers & Structures*, **26**, 175-179.
- [Kop1988] Koplic, J., Needleman, A. (1988). Void growth and coalescence in porous plastic solids, *Int. J. Solids Structures*, **24**, 835-853.

- [Kro1966] Kröner, E. (1966). Continuum mechanics and the range of atomic forces, in: *Proceedings of the International Conference Fracture*, Sendai, Japan, **1**, 27.
- [Kuh1999] Kuhl, E., Ramm, E. (1999). Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models, *Comp. Mat. Sci.*, **16**, 176-185.
- [Leb1994] Leblond, J.-B., Perrin, G., Devaux, J. (1994). Bifurcation effects in ductile metals with non-local damage, *J. Appl. Mech.*, **35**, 363-371.
- [Leb1995] Leblond, J.-B., Perrin, G., Devaux, J. (1995). An improved Gurson-type model for hardenable ductile metals, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **4**, 499-527.
- [Lee1969] Lee, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, **36**, 1-6.
- [Leh1972] Lehmann, T. (1972). Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen, *Ing.-Arch.*, **41**, 279-310.
- [Leh1991] Lehmann, T. (1991). Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solid bodies including damage, *Int. J. Plasticity*, **7**, 79-98.
- [Lem1986] Lemaitre, J., Chaboche, J.-L. (1986). *Mécanique des Matériaux Solides*, Dumond, Paris.
- [Lem1996] Lemaitre, J. (1996) *A Course in Continuum Damage Mechanics*, Springer Verlag, Berlin.
- [Lew2002] Lewis, M.W., Discontinuous Bifurcation Analysis of the Gurson Model, in: *WCCM V, Fifth World Congress on Computational Mechanics*, July 7-12, 2002, Vienna, Austria, pp. 369-375.
- [Lie2001] Liebe, T., Steinmann, P., Benallal, A. (2001). Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**, 6555-6576.
- [Man1972] Mandel (1972). *Plasticité Classique et Viscoplastique*, International Centre for Mechanical Sciences (CISM) Courses and Lectures 97, Udine.
- [Mar1985] Marini, B., Mudry, F., Pineau, A. (1985). Experimental study of cavity growth in ductile rupture, *Engrg. Frac. Mech.*, **22**, 989.
- [Mau1990] Maugin, G.A. (1990). Internal variables and dissipative structures, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **15**, 173-192.

- [Mau1998] Maugin, G.A. (1998). The role of canonical balance laws in the study of the progress of "defects" in microstructured materials, in: *Proceedings of Euromech-Mecamat, 2<sup>nd</sup> European Mechanics of Materials Conference*, A. Bertram, F. Sidoroff, eds., pp. 231-237.
- [McC1968] McClintock, F. A. (1968). A criterion for ductile fracture by the growth of holes, *J. Appl. Mech.*, **35**, 363.
- [Mic1992] Michel, J. C., Suquet, P. (1992). The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 783-812.
- [Mie1994] Miehe, C. (1994). On the representation of Prandtl-Reuss tensors within the framework of multiplicative elasto-plasticity. *Int. J. Plasticity*, **10**, 609-621.
- [Müh1997] Mühlich, U., Kienzler, R. (1997). Konstruktion nichtlokaler Ansätze in der Schädigungsmechanik am Beispiel des Gurson-Modells, *Berichtsband zur 29. Tagung des DVM AK "Bruchvorgänge"*, **29**, 199-208.
- [Müh1999] Mühlich, U. (1999). Nichtlokale Modifikation des Gurson-Modells, GKSS-Forschungszentrum Geesthacht, Bericht 99/E/63.
- [Nag1974] Nagtegaal, J.C., Parks, D.M., Rice, J.R. (1974). On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **4**, 153-177.
- [Nag1982] Nagtegaal, J.C., de Jong, J. E. (1982). Some Aspects on Nonisotropic Work Hardening in Finite Strain Plasticity, *Proceedings of Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain*, E. H. Lee and R. L. Mallet, eds., pp. 65-102, Division of Applied Mechanics, Stanford University.
- [Nee1984] Needleman, A., Tvergaard, V. (1984). An analysis of ductile rupture in notched bars, *J. Mech. Phys. Solids*, **32**, 461-490.
- [Nee1988] Needleman, A. (1988). Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **67**, 69-85.
- [Old1950] Oldroyd, J.G. (1950). On the formulation of rheological equations of state, *Proc. R. Soc., London*, **A200**, 523.
- [Pam1994] Pamin, J. (1994). Gradient-Dependent Plasticity in Numerical Simulations of Localization Phenomena. *Ph. D. Thesis*, Delft University of Technology.
- [Pau1987] Paulun, J.E., Pecherski, R.B. (1987). On the application of the plastic spin concept for the description of anisotropic hardening in finite deformation plasticity, *Int. J. Plasticity*, **3**, 303-314.
- [Pau1992] Paulun, J.E., Pecherski, R.B. (1992). On the relation for the plastic spin, *Arch. Appl. Mech.*, **62**, 376-385.

- [Pee1996] Peerlings, R.H.J., de Borst, R., Breeckelmans, W.A.M., de Vree, J.H.P. (1996). Gradient enhanced damage for quasi brittle materials, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **23**, 3391-3403.
- [Pee1999] Peerlings, Ron, H.J. (1999). Enhanced damage modelling for fracture and fatigue, *Proefschrift*, Technische Universiteit Eindhoven.
- [Per1990] Perrin, G., Leblond, J.B. (1990). Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension application to some problems in ductile fracture of metals, *Int. J. Plasticity*, **6**, 677-699.
- [Per1992] Perrin, G. (1992). Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux, *Dissertation*, Ecole Polytechnique, Paris.
- [Pet2000] Petryk, H. (2000). General conditions for uniqueness in materials with multiple mechanisms of inelastic deformations, *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 367-396.
- [Pij1987] Pijaudier-Cabot, G., Bažant, Z. (1987). Nonlocal damage theory, *J. Engrg. Mech. ASCE*, **113**, 1512-1533.
- [Pij1992a] Pijaudier-Cabot, G., Bode, L. (1992). Localisation of damage in a nonlocal-continuum, *Mech. Res. Comm.*, **19**, 1512-1533.
- [Pij1992b] Pijaudier-Cabot, G., Huerta, A., Bode, L. (1992). Nonlocal continuum damage and adapted solution strategies in computational failure mechanics, in: *New Advances in Computational Structural Mechanics*, O.C. Zienkiewicz, Pierre Ladeveze, eds., pp. 81-95.
- [Pij1995] Pijaudier-Cabot, G. (1995). Nonlocal damage, in: *Continuum models for materials with microstructure*, H.-B. Mühlhaus, ed., pp. 105-144, John Wiley and Sons.
- [Ram1998a] Ramaswamy, S., Aravas, N. (1998). Finite element implementation of gradient plasticity models. Part I: Gradient-dependent yield functions, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **163**, 11-32.
- [Ram1998b] Ramaswamy, S., Aravas, N. (1998). Finite element implementation of gradient plasticity models. Part I: Gradient-dependent evolutions equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **163**, 33-53.
- [Reu2000] Reusch, F., Klingbeil, D., Svendsen, B. (2000). Local and non-local Gurson-based models for ductile damage and failure, in: *Proceedings of the 4<sup>th</sup> ESAFORM Conference of Metal Forming*, University of Liège (Belgien), Vol. **2**, pp. 511-519.
- [Reu2003a] Reusch, F., Svendsen, B., Klingbeil, D. (2003). A non-local extension of Gurson-based ductile damage modelling, *Comp. Mat. Sci.*, **26**, 219-229.

- [Reu2003b] Reusch, F., Svendsen, B., Klingbeil, D. (2003). Local and non-local Gurson-based ductile damage and failure modeling at large deformation, *Eur. J. Mech. A/Solids*, in press.
- [Ric1968] Rice, J. R., Rosengren, G. F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, **16**, 13-31.
- [Ric1969] Rice, J. R., Tracey, D. M. (1969). On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *J. Mech. Phys. Solids*, **17**, 201-217.
- [Ric1975] Rice, J. R. (1975). Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms, in: *Constitutive Equations in Plasticity*, A. S. Argon, ed., pp. 23-79, MIT Press, Cambridge.
- [Ric1980] Rice, J. R., Rudnicki, J.W. (1980). A note on some features of the theory of localization of deformation, *Int. J. Solids Structures*, **16**, No. 25, 597-605.
- [Rik1979] Riks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, **15**, 529-551.
- [Rud1975] Rudnicki, J. W., Rice, J. R. (1975). Conditions for localisation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 371-394.
- [Rou1987] Rousselier, G. (1987). Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, *Nucl. Engrg. Des.*, **105**, 97-111.
- [Sch1995] Schicker, J. (1995). Duktiler Rissfortschritt - Implementierung eines Materialmoduls in ein FE-Programm, Bericht BAM-V.31 95/2, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- [Sei1992] Seidenfuss, M. (1992). Untersuchungen zur Beschreibung des Versagensverhaltens mit Hilfe von Schädigungsmodellen am Beispiel des Werkstoffes 20MnMoNi5-5, *Dissertation*, Fakultät Energietechnik der Universität Stuttgart, 1992.
- [Sie2001] Sievert, R. et al. (2001). Werkstoffmechanik einer Nickelbasislegierung beim Hochgeschwindigkeitsspannen. Werkstoffverhalten und Modellierung, Zwischenbericht zum Forschungsvorhaben OL50/8-4, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung, Berlin.
- [Sim1985] Simo, J.C., Taylor, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **48**, 101-118.
- [Sim1991] Simo, J.C., Govindjee, S. (1991). Non-linear b-stability and symmetry preserving return mapping algorithms for plasticity and viscoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **31**, 151-176.

- [Sim1992] Simo, J.C. (1992). Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **99**, 61-112.
- [Ste1997] Steinmann, P., Larrson, R., Runesson, K. (1997). On the Localization Properties of Multiplicative Hyperelasto-Plastic Continua with Strong Discontinuities, *Int. J. Solids Structures*, **34**, 969-990.
- [Ste2000] Steinmann, P., Betsch, P. (2000). A localization capturing FE-interface based on regularized strong discontinuities at large inelastic strains, *Int. J. Solids Structures*, **37**, 4061-4082.
- [Sun1991] Sun, D.-Z., Voss, B., Schmitt, W. (1991). Numerical prediction of ductile fracture resistance behaviour based on micromechanical models, in: *Defect Assessment in Components - Fundamentals and Applications*, **ESIS/EGF 9**, H. Blauel, K.-H. Schwalbe, eds., pp. 447-458, Mechanical Engineering Publications, London.
- [Sve1998a] Svendsen, B. (1998a). A thermodynamic formulation of finite-deformation elastoplasticity with hardening based on the concept of material isomorphism, *Int. J. Plasticity*, **14**, 473-488.
- [Sve1998b] Svendsen, B., Arndt, S., Klingbeil, D., Sievert, R. (1998b). Hyperelastic models for elastoplasticity with non-linear isotropic and kinematic hardening at large deformation, *Int. J. Solids Structures*, **35**, 3363-3389.
- [Sve1999] Svendsen, B. (1999). On the continuum thermodynamics of isotropic thermoelastic materials with scalar degrees of freedom, *Continuum Mech. Thermodyn.*, **11**, 247-262.
- [Sve2001] Svendsen, B. (2001). On the continuum modeling of materials with kinematic structure, *Acta Mech.*, **152**, 49-80.
- [Sve2002] Svendsen, B.; Reusch, F.; Klingbeil, D.: *Local and Non-Local Gurson-Based Damage and Failure Modeling*, Proceedings of the *Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V)*, July 7-12, 2002, Vienna, Austria, Editors: Mang, H.A.; Rammerstorfer, F.G.; Eberhardsteiner, J., eds., Vienna University of Technology, Austria.
- [Sza1992] Szabó, L., Balla, M. (1992). Comparison of some stress rates. *Int. J. Solids Structures*, **25**, 279-297.
- [Sza2000] Szabó, L. (2000). Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, **37**, 3775-3806.
- [Tru1960] Truesdell C, Toupin R (1960). The classical field theories of mechanics, in: *Handbuch der Physik*, V. III/1, Springer Verlag, Berlin.
- [Tru1992] Truesdell C., Noll, W. (1992). *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Springer Verlag, Berlin.

- [Tsa1989] Tsakmakis, C., Haupt, P. (1989). On the hypoelastic-idealplastic model, *Acta Mech.*, **80**, 273-285.
- [Tve1981] Tvergaard, V. (1981). Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Fracture*, **17**, 389-407.
- [Tve1982a] Tvergaard, V. (1982a). Material failure by void coalescence in localized shear bands, *Int. J. Solids Structures*, **18**, 659-672.
- [Tve1982b] Tvergaard, V. (1982b). On localization in ductile materials containing spherical voids, *Int. J. of Fracture*, **18**, 237-252.
- [Tve1984] Tvergaard, V., Needleman, A. (1984). Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta Metall.*, **32**, No. 1, 157-169.
- [Tve1992] Tvergaard, V., Huang, Y., Hutchinson, J. W. (1992). Cavitation instabilities in a power hardening elasto-plastic solid, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **11**, 215-231.
- [Tve1995] Tvergaard, V., Needleman, A. (1995). Effects of non-local damage in porous plastic solids, *Int. J. Solids Structures*, **32**, 1063-1077.
- [Web1990] Weber, G.G., Anand, L. (1990). Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **79**, 173-202.
- [Wil1964] Wilkins, M. L. (1964). Calculation of elastic-plastic flow, in: *Methods in Computational Physics*, **3**, B. Alder et al., eds., pp. 211-263, Academic Press, New York.
- [Wil1991] Willis, J. R. (1991). On methods for bounding the overall properties of nonlinear composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **39**, 73-86.
- [Xia1999] Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A. (1999). A natural generalization of hypoelasticity and Eulerian rate-type formulation of hyperelasticity, *J. Elasticity*, **56**, 59-93.
- [Zar1903] Zaremba, S. (1903). Le Principe des mouvements relatifs et les equations de la mecanique physique. *Bull. Int. Acad. Sci.*, Krakau, 614-621.
- [Zbi1988] Zbib, H.M., Aifantis, E.C. (1988). On the localization and postlocalization behaviour of plastic deformation. I., II. und III, *Res Mechanica* **23**, 261-277, 279-292 und 293-305.
- [Zie1989] Zienkiewicz, O. C, Taylor, R. L. (1989). The Finite Element Method, 4<sup>th</sup> edition, McGraw-Hill, London.
- [Zha1994] Zhang, Ch., Gross, D. (1994). Ductile crack analysis by a cohesive damage zone model, *Engrg. Fract. Mech.*, **47**, 237-248.

