# Qualitätskontrolle in der Industrie anhand von Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes - Anwendungsfeld Lagerverwaltung -

## Dissertation

zur Erlangung des Grades einer
Doktorin der Naturwissenschaften
der Universität Dortmund

Dem Fachbereich Statistik der Universität Dortmund
vorgelegt von

**Heike Trautmann**

aus Dortmund

Dortmund, 24. Februar 2004

1. Gutachter: Prof. Dr. Claus Weihs
2. Gutachter: PD Dr. Christian Kleiber

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juni 2004

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# Verzeichnis der wichtigsten Abkürzungen und Begriffe

| **Abkürzung** | **Bedeutung** | **Englischer Begriff** |
|---|---|---|
| $k$ | Anzahl Qualitätsmerkmale | Number of Quality Measures |
| $Q_\alpha$ | $\alpha \cdot 100\% - Quantil$ | $\alpha \cdot 100\% - Quantile$ |
| $X$ | Einflussgröße | Design Variable |
| $Y$ | Qualitätsmerkmal / Zielgröße | Quality Measure / Target Variable |

*Theorie der Wünschbarkeit*:

| | | |
|---|---|---|
| $b_0$, $b_1$ | Krümmungsparameter der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington | Parameters for the Curtosis of Harrington's one-sided Desirability Function |
| $d$ | Wünschbarkeitsfunktion / Wünschbarkeit | Desirability Function / Desirability |
| $D$ | Wünschbarkeitsindex | Desirability Index |
| $n$ | Krümmungsparameter der zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington | Parameter for the Curtosis of Harrington's two-sided Desirability Function |
| $LSL$ | Untere Spezifikationsgrenze | Lower Specification Limit |
| $T$ | Zielwert | Target Value |
| $USL$ | Obere Spezifikationsgrenze | Upper Specification Limit |
| $l$ | Linksseitiger Krümmungsparameter der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer | Lower Exponent of Derringer's Desirability Function |
| $r$ | Rechtsseitiger Krümmungsparameter der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer | Upper Exponent of Derringer's Desirability Function |

*Kontrollkarten*:

| | | |
|---|---|---|
| $ARL$ | Mittlere Lauflänge | Average Run Length |
| $g$ | Stichprobengröße der Qualitätsmerkmale | Sample Size of Quality Measures |
| $LCL$ | Untere Kontrollgrenze | Lower Control Limit |
| $LWL$ | Untere Warngrenze | Lower Warning Limit |
| $OC$ | Operations-Charakteristik | Operating Characteristic |
| $UCL$ | Obere Kontrollgrenze | Upper Control Limit |
| $UWL$ | Obere Warngrenze | Upper Warning Limit |

# 1 Einleitung

Dem unternehmensinternen Qualitätsmanagement kommt heutzutage aufgrund des immer stärker werdenden Konkurrenzdruckes zwischen den Unternehmen verstärkte Bedeutung zu, sodass ein effizientes Qualitätsmanagementsystem ein entscheidender Wettbewerbsfaktor geworden ist.

Ein auf statistischen Methoden beruhender **Qualitätssicherungsprozess** lässt sich in Anlehnung an [WEI99] (S. 2 ff.) im Wesentlichen in die Phasen Qualitätsschwachstellenanalyse, Qualitätsoptimierung und -stabilisierung sowie Qualitätskontrolle einteilen. Soll beispielsweise die Qualität eines Produktes verbessert werden, werden im ersten Schritt Daten des laufenden Produktionsprozesses über einen längeren Zeitraum gesammelt und auf Schwachstellen sowie Verbesserungspotenziale untersucht. Im Anschluss stellt der Bereich der statistischen Versuchsplanung effiziente Methoden bereit, einzelne Qualitätsmerkmale des Produktes zu Einflussgrößen des Produktionsprozesses in Beziehung zu setzen und Modelle zu entwickeln, die das Auffinden optimaler Niveaus der Einflussgrößen und somit der maximalen Prozessqualität ermöglichen. Sind die optimalen Niveaus ermittelt, wird der Produktionsprozess mit diesen Einstellungen gestartet. In der laufenden Produktion erlauben dann regelmäßige Stichprobenentnahmen eine statistische Prozesskontrolle, die es ermöglicht, Abweichungen von der qualitativ optimalen Produktion zeitnah aufzudecken und sofortige Gegenmaßnahmen zu ergreifen.

Ist ein einzelnes Qualitätsmerkmal zur Charakterisierung der Prozessqualität ausreichend, können die optimalen Niveaus der Einflussgrößen mit Hilfe der Ergebnisse der Versuchsplanung und nichtlinearer mathematischer Optimierungsmethoden zumeist recht einfach bestimmt werden. Die praktischen Anforderungen gehen von der Komplexität her jedoch fast immer über diesen Fall hinaus. Die Beurteilung der Qualität eines Prozesses geschieht zumeist anhand vieler verschiedener Qualitätsmerkmale, wobei nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Optima all dieser Merkmale unter denselben Niveaus der Einflussgrößen erreicht werden. Problematisch sind vor allem Zielkonflikte zwischen einzelnen Qualitätsmerkmalen, d.h. eine Verbesserung des einen Qualitätsmerkmals kann eine Verschlechterung eines oder mehrerer anderer Qualitätsmerkmale zur Folge haben und umgekehrt. Wenn die Anzahl der Qualitätsmerkmale relativ groß ist, liegt fast immer mindestens ein solcher Zielkonflikt vor, sodass eine separate Optimierung der Merkmale nicht zielführend ist und nach Kompromissen gesucht werden muss.

Der Wünschbarkeitsindex ist eine Methode zur **multikriteriellen Qualitätsoptimierung** und erlaubt die Beurteilung und Optimierung der Gesamtprozessqualität anhand einer einzelnen Kennzahl. Ist mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes die Qualitätsoptimierung des Prozesses erfolgt, wird der Prozess mit den ermittelten optimalen Niveaus der Einflussfaktoren gestartet, und die Qualitätsmerkmale werden in der Praxis über die Zeit mittels univariater oder multivariater Kontrollkarten kontrolliert. An dieser Stelle setzt die vorliegende Arbeit an. Da der Prozess bereits hinsichtlich maximaler Werte des Wünschbarkeitsindexes optimiert wird, liegt es nahe, den Wünschbarkeitsindex auch im Anschluss zur Prozesskontrolle zu verwenden. So lässt sich auch in diesem Bereich eine Dimensionsreduktion erreichen, da die Gesamtqualität des Prozesses anhand einer einzelnen Kontrollkarte überwacht werden kann.

Kapitel 2 stellt das Vorgehen zur Qualitätsoptimierung mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes vor und gibt einen Überblick über verschiedene Ansätze zur Definition und Optimierung des Wünschbarkeitsindexes und von Wünschbarkeitsfunktionen, die der Anwendung des Wünschbarkeitsindexes vorgeschaltet sind. Im Anschluss liefert Kapitel 3 eine Übersicht über die Anwendungsfelder des Wünschbarkeitsindexes in der Praxis und zeigt anhand einer detaillierten Literaturübersicht, dass diese Methodik vor allem in den letzten Jahren starke Verbreitung im praktischen Einsatz gefunden hat.

Der theoretische Hintergrund für die Aufstellung von Kontrollkarten wird in Kapitel 4 bereitgestellt. Hier werden neben dem testtheoretischen Hintergrund Klassifikationsmöglichkeiten von Kontrollkarten sowie die wichtigsten univariaten, verteilungsfreien und multivariaten Kontrollkarten vorgestellt. In Kapitel 5 werden schließlich spezielle Kontrollkarten für den Wünschbarkeitsindex aufgestellt. Von zentraler Bedeutung ist diesbezüglich die Kenntnis der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes, die für verschiedene Arten von Wünschbarkeitsfunktionen und Wünschbarkeitsindizes hergeleitet wird. Des Weiteren wird ein Vorgehen für die Ursachenanalyse von Prozessstörungen eingeführt.

Die hergeleiteten Kontrollkarten wurden in Zusammenarbeit mit dem *Fraunhofer Institut für Materialfluss und Logistik (IML)* zur Prozesskontrolle der Steuerung eines automatischen Multishuttle-Lagers verwendet. Die diesbezüglichen Ergebnisse enthält Kapitel 6 und stellt die grundsätzlichen Problemfelder bei der Kontrolle von Lagerprozessen vor. Zum Abschluss fasst Kapitel 7 die Ergebnisse der Arbeit zusammen und zeigt Perspektiven für die weitere Forschungsarbeit auf.

# 2 Wünschbarkeitsindizes in der Qualitätssicherung

Der Wünschbarkeitsindex ist eine Methode zur multikriteriellen Qualitätsoptimierung und erlaubt die Beurteilung der Qualität eines Prozesses anhand einer einzelnen univariaten Kennzahl.

Harrington (vgl. [HAR65]) führte 1965 als erster das Konzept der Wünschbarkeit ein. Das Vorgehen bei Verwendung des Wünschbarkeitsindexes zur Qualitätsoptimierung ist in Abbildung 1 skizziert. Das multikriterielle Optimierungsproblem wird durch Transformation aller Qualitätsmerkmale in das Optimierungsproblem einer univariaten Zielgröße umgewandelt. Nachdem die Beziehung zwischen den Qualitätsmerkmalen und Einflussgrößen mittels Versuchsplanungsmethoden in Form polynomialer Modelle abgebildet worden ist, werden für jedes Qualitätsmerkmal durch Experten Spezifikationsgrenzen und damit akzeptable Bereiche bestimmt. Für jedes Qualitätsmerkmal wird dann eine Funktion aufgestellt, die angibt, wie gewünscht die Annahme eines bestimmten Wertes ist. Diese **Wünschbarkeitsfunktion** variiert zwischen 0 und 1 und stellt eine Skalentransformation der Originalwerte dar. So werden die Werte der Wünschbarkeitsfunktionen (**Wünschbarkeiten**) direkt vergleichbar, unterschiedliche Maßeinheiten der Qualitätsmerkmale sind nicht mehr relevant. Im Anschluss erfolgt eine Kombination der Wünschbarkeiten mittels des geometrischen Mittelwertes zu dem sogenannten **Wünschbarkeitsindex**. Dieser Ansatz wurde in den folgenden Jahrzehnten erweitert und modifiziert. Alternativ kann demnach auch der arithmetische Mittelwert oder das Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen Verwendung finden. Die wichtigste Modifikation jedoch stellt [DER80] bereit, die zu einer erhöhten Flexibilität der Wünschbarkeitsfunktion führt und sich in den meisten praktischen Anwendungen durchgesetzt hat (vgl. dazu auch Kapitel 3). Eine detaillierte Beschreibung des Ansatzes ist in Kapitel 2.1 zu finden.

Zur Optimierung der Prozessqualität werden die funktionalen Zusammenhänge zwischen den Einflussgrößen des Prozesses und den betrachteten Qualitätsmerkmalen benötigt. Durch diese Zusammenhänge lässt sich der Wünschbarkeitsindex nicht nur als Funktion der Qualitätsmerkmale, sondern vielmehr als Funktion der Einflussgrößen ausdrücken. Gesucht wird dann diejenige Kombination der Niveaus der Einflussgrößen, die zu einer Maximierung des Wünschbarkeitsindexes und somit zu einer Qualitätsoptimierung des Prozesses führt. Die Wahl der mathematischen Optimierungsmethode hängt stark von der gewählten Wünschbarkeitsfunktion ab. Details sind in Kapitel 2.3 beschrieben.

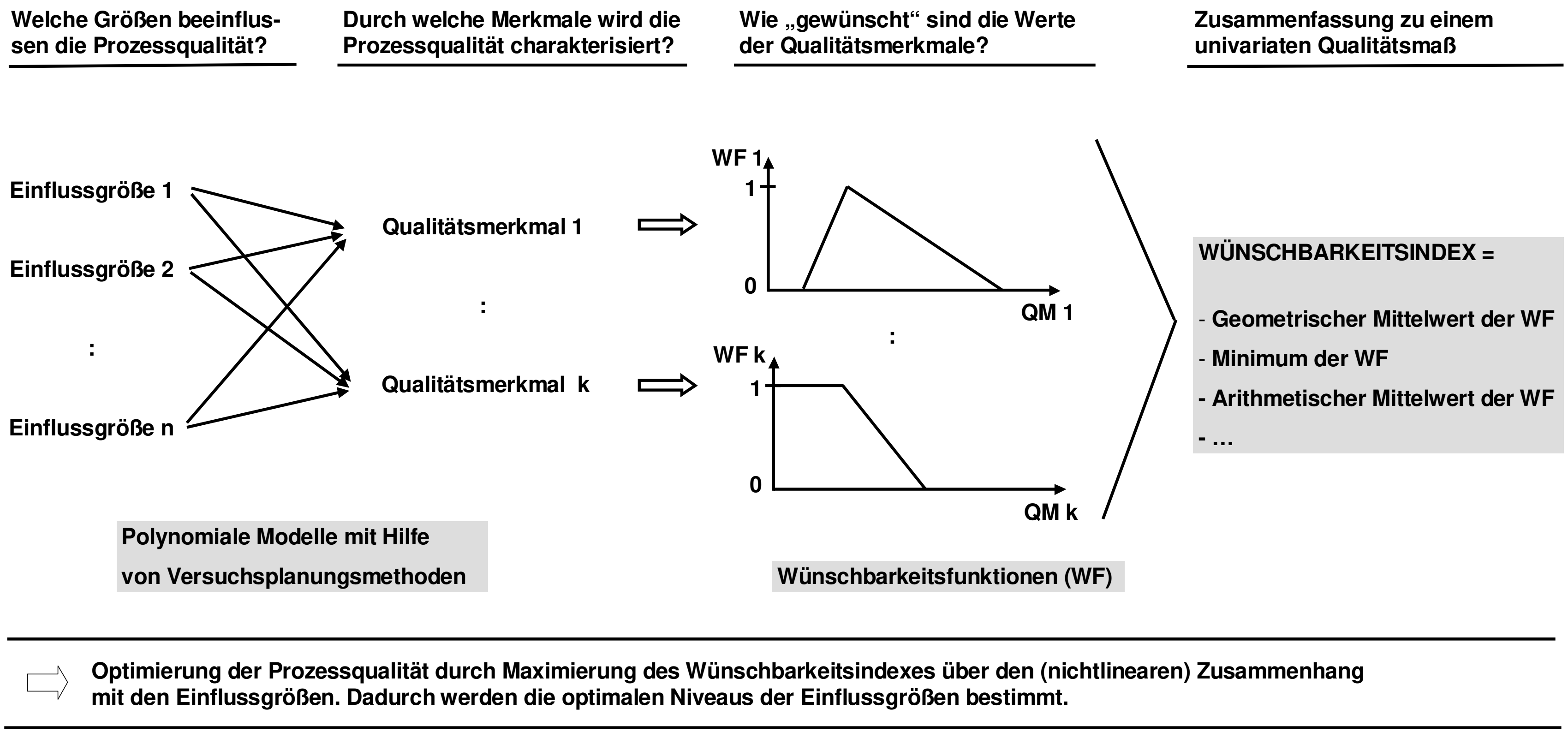



Abbildung 1: Der Wünschbarkeitsindex als Mittel zur Qualitätsoptimierung

## 2.1 Die Wünschbarkeitsfunktionen

Bei der Beurteilung der Qualität eines Prozesses anhand verschiedener Qualitätsmerkmale (Zielgrößen) tritt zumeist die Schwierigkeit der Vergleichbarkeit aufgrund unterschiedlicher Maßeinheiten (z.B. $m$, °) sowie das Problem der Interpretation der Niveaus dieser Zielgrößen hinsichtlich der Prozessqualität auf. Zum Beispiel muss eine Vergrößerung einer Zielgröße nicht unbedingt proportional zum Ausmaß der Qualitätsveränderung des Prozesses sein, des Weiteren können sich die Auswirkungen auf die Qualität in unterschiedlichen Wertebereichen der Zielgröße unterscheiden.

Die Verwendung von Wünschbarkeitsfunktionen bietet den Vorteil der automatischen Skalierung der Zielgrößen in dimensionslose, also vergleichbare Werte auf das Intervall $[0, 1]$ und einer simultanen Integration einer Gewichtung der möglichen Zielgrößenausprägungen. Dabei werden für jede Zielgröße durch Experten Spezifikationsgrenzen und ein Zielwert festgelegt. Werte der Zielgrößen außerhalb der Spezifikationsgrenzen führen i. Allg. zu Wünschbarkeiten von Null, sind also inakzeptabel; der maximale Wert von 1 wird im Zielwert erreicht. Durch entsprechende Wahl der Parameter der Wünschbarkeitsfunktion lassen sich flexible Verläufe der Wünschbarkeitsfunktion erreichen. Dadurch wird insbesondere die Wichtigkeit der Erreichung des Zielwertes spezifiziert. Zum Beispiel kann es bei einer Zielgröße sehr wichtig sein, dass diese in einem möglichst kleinen Intervall um den Zielwert variiert, bei einer anderen hingegen können Überschreitungen des Zielwertes dramatische, Unterschreitungen jedoch minimale Auswirkungen auf die Prozessqualität haben. Allen Zielgrößen gemein ist jedoch die Interpretation der Wünschbarkeitsfunktion. Je näher ihr Wert an dem maximalen Wert 1 liegt, desto gewünschter, also besser ist er hinsichtlich der Optimierung der Prozessqualität.

### 2.1.1 Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington

Die Arbeit von Harrington ([HAR65]) führte das Konzept der Wünschbarkeiten 1965 ein. Jede Zielgröße wird in das Intervall $(0, 1]$ auf eine dimensionslose Skala transformiert, wobei sich je nach Optimierungsziel der betrachteten Zielgröße das Vorgehen zur Aufstellung der Wünschbarkeitsfunktion unterscheidet. Bei einseitiger Spezifikation besteht das Optimierungsziel in der Minimierung bzw. Maximierung der Zielgröße, bei zweiseitiger Spezifikation ist die Erreichung eines bestimmten Zielwertes gewünscht.

**1. Fall: Zweiseitige Spezifikation**

Im Falle der gewünschten Erreichung eines Zielwertes werden für $k$ Zielgrößen $Y_1, \ldots, Y_k$ jeweils eine untere und obere Spezifikationsgrenze $(LSL_i, USL_i)$ angegeben, die mit der Wünschbarkeit $0,37 \approx 1/e$ assoziiert werden. Diese Grenzen müssen symmetrisch um den gewünschten Zielwert gewählt werden. Dann wird die Wünschbarkeitsfunktion $d_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ definiert als:

$$d_i(Y_i') = e^{-|Y_i'|^{n_i}}, \qquad i = 1, \ldots, k;\ 0 < n_i < \infty \quad \text{mit} \tag{1}$$

$$Y_i' = \frac{2Y_i - (USL_i + LSL_i)}{USL_i - LSL_i}, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{2}$$

Der Parameter $n_i$ bestimmt die Krümmung der Funktion. Abbildung 2 zeigt beispielhafte Verläufe. Die Werte einer Wünschbarkeitsfunktion werden allgemein auch Wünschbarkeiten genannt und im Folgenden synonym zum Begriff Wünschbarkeitsfunktion verwendet. Eine feinere Unterscheidung wird aus dem jeweiligen Kontext deutlich.

Die so definierte Wünschbarkeitsfunktion $d_i$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Für $Y_i = LSL_i$ gilt: $Y_i' = -1$.
- Für $Y_i = USL_i$ gilt: $Y_i' = 1$.
- Für Werte von $|Y_i'| \to \infty$ strebt $d_i$ asymptotisch gegen Null.
- Für $Y_i' = 1$ gilt: $d_i = 1/e$.
- Der Wert $d_i = 1$ wird in der Mitte der Spezifikationsgrenzen erreicht (symmetrische Spezifikation).

**2. Fall: Einseitige Spezifikation**

Für einseitige Optimierungsprobleme wird zur Transformation der Zielgrößenausprägungen eine spezielle Form der Gompertz-Kurve verwendet:

$$d_i(Y_i') = e^{-e^{-Y_i'}}, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{3}$$

Der Exponent $n_i$ wird nicht benötigt, die Form der Funktion wird durch die Transformation von $Y_i$ in $Y_i'$ spezifiziert. Für zwei gegebene Werte von $Y_i$ und korrespondierende gewünschte Werte von $d_i$ berechnet sich $Y_i'$ durch:

$$Y_i' = -[\ln(-\ln d_i)], \qquad i = 1, \ldots, k \quad \text{mit} \tag{4}$$

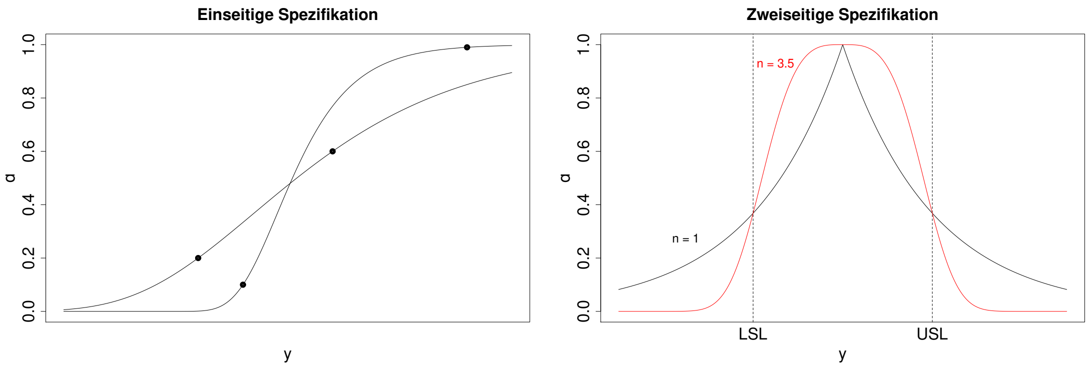



Abbildung 2: Beispielhafte Verläufe der Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington (Ein- und zweiseitige Spezifikation), Vorgaben der einseitigen Spezifikation durch Punkte markiert

$$Y_i' = b_{0i} + b_{1i}Y_i, \qquad i = 1, \ldots, k. \tag{5}$$

Die Konstanten $b_{0i}$ und $b_{1i}$ ergeben sich durch Auflösung des resultierenden Gleichungssystems (5).

Die Interpretation der Werte der Wünschbarkeitsfunktion entspricht nach [HAR65] dem folgenden Schema:

| | |
|---|---|
| $d_i = 1$ : | Maximale Wünschbarkeit |
| $0.8 \leq d_i < 1$ : | Exzellente Wünschbarkeit |
| $0.63 \leq d_i < 0.8$ : | Gute Wünschbarkeit |
| $0.4 \leq d_i < 0.63$ : | Akzeptable, aber relativ schlechte Wünschbarkeit |
| $0.3 \leq d_i < 0.4$ : | Grenzwertige Wünschbarkeit |
| $0 < d_i < 0.3$ : | Inakzeptable Wünschbarkeit |

Die Wünschbarkeitsfunktion von Harrington besitzt den Vorteil, in geschlossener Form dargestellt werden zu können und außerdem differenzierbar zu sein, was im Zuge bestimmter Optimierungsmethoden benötigt wird (vgl. Kapitel 2.3). Allerdings ist sie durch die implizierte Symmetrie nicht uneingeschränkt flexibel.

Beispielhafte Darstellungen für verschiedene Parametereinstellungen sind in Abbildung 2 zu finden.

### 2.1.2 Wünschbarkeitsfunktionen nach Derringer

Die Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer ([DER80]) stellt eine Verallgemeinerung des Ansatzes von Harrington (vgl. Kap. 2.1.1) dar. Sie ist flexibler in der Parameterwahl und erlaubt die Verwendung von asymmetrischen Funktionsverläufen.

**1. Fall: Zweiseitige Spezifikation**

Eine zweiseitige Spezifikation einer Zielgröße wird relevant, wenn sowohl eine untere als auch eine obere Spezifikationsgrenze existiert, Werte außerhalb dieser Grenzen also komplett inakzeptabel sind. In diesem Fall ergibt sich die Wünschbarkeitsfunktion wie folgt:

$$d_i(Y_i) = \begin{cases} 0, & Y_i < LSL_i \\ (\frac{Y_i - LSL_i}{T_i - LSL_i})^{l_i}, & LSL_i \leq Y_i \leq T_i \\ (\frac{Y_i - USL_i}{T_i - USL_i})^{r_i}, & T_i < Y_i \leq USL_i \\ 0, & Y_i > USL_i \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, k \qquad \text{mit} \tag{6}$$

$LSL_i$ : untere Spezifikationsgrenze der Zielgröße $i$, $T_i$ : Zielwert der Zielgröße $i$,

$USL_i$ : obere Spezifikationsgrenze der Zielgröße $i$.

Die Parameter $l_i$ und $r_i$ liefern die links- bzw. rechtsseitige Krümmung der Funktion in Bezug auf den Zielwert, d.h. große Parameterwerte ergeben hohe Wünschbarkeiten nur in der näheren Umgebung des Zielwertes. Durch entsprechende Parameterwahl werden so im Gegensatz zu [HAR65] auch asymmetrische Spezifikationen möglich. Des Weiteren lassen sich die Verläufe der Wünschbarkeitsfunktion von Harrington durch geschickte Wahl der Parameter hinreichend genau approximieren.

**2. Fall: Einseitige Spezifikation**

Die einseitige Spezifikation resultiert in ein Maximierungsproblem bei gegebener unterer Spezifikationsgrenze und gegebenem Zielwert, ab dem alle Werte mit Wünschbarkeit 1 belegt werden. Ab diesem Zielwert wird durch eine weitere Erhöhung des Wertes keine Qualitätsverbesserung mehr erreicht. Das entsprechende Minimierungsproblem ergibt sich durch Maximierung der negativen Werte.

Die Werte der jeweiligen Zielgröße $Y_i$ werden über die folgende Wünschbarkeitsfunktion $d_i$ in das Intervall $[0, 1]$ transformiert:

$$d_i(Y_i) = \begin{cases} 0, & Y_i \leq LSL_i \\ (\frac{Y_i - LSL_i}{T_i - LSL_i})^{l_i}, & LSL_i < Y_i < T_i \\ 1, & Y_i \geq T_i \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, k \qquad \text{mit} \tag{7}$$

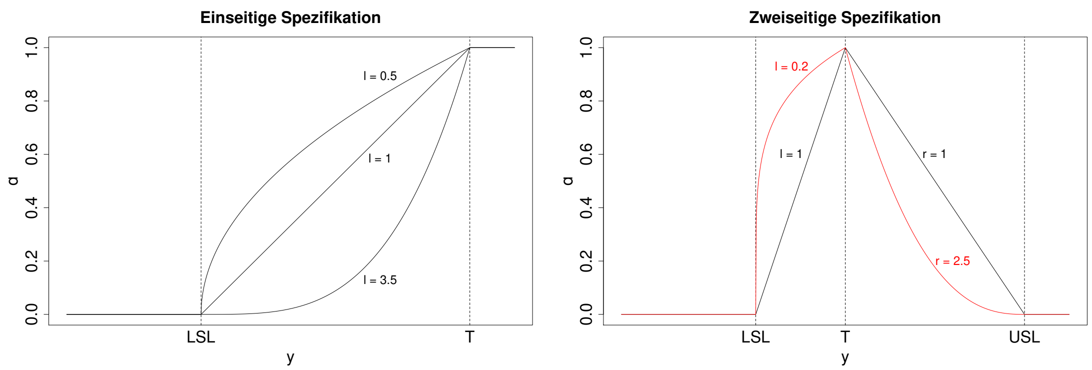



Abbildung 3: Beispielhafte Verläufe der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer (Ein- und zweiseitige Spezifikation)

$$LSL_i : \text{untere Spezifikationsgrenze der Zielgröße } i, T_i : \text{Zielwert der Zielgröße } i.$$

Der Parameter $l_i$ spezifiziert wie im zweiseitigen Fall die Krümmung der Funktion. Abbildung 3 stellt verschiedene Verläufe der Wünschbarkeitsfunktion bei unterschiedlicher Wahl der Parametereinstellungen dar. Das Vorgehen wird in [DER80] an einem Praxisbeispiel illustriert, weitere Anwendungsbeispiele sind in [DER94] zu finden.

### 2.1.3 Weitere Ansätze zur Konstruktion von Wünschbarkeitsfunktionen

Neben den in den beiden vorangegangen Kapiteln vorgestellten gebräuchlichsten Wünschbarkeitsfunktion finden sich in der Literatur weitere modifizierte Ansätze, die sich zumeist um effizientere Optimierungsmöglichkeiten des Wünschbarkeitsindexes (vgl. Kapitel 2.2) bemühen.

Eine Modifikation des Ansatzes von Harrington ist bei [GAT72] beschrieben. Hier werden ebenfalls Exponentialfunktionen verwendet, für inakzeptable Werte der Zielgrößen resultieren jedoch negative Werte der Wünschbarkeitsfunktion.

Aufgrund der lokalen Nichtdifferenzierbarkeit der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer entstehen Probleme bei der (nichtlinearen) Optimierung des Wünschbarkeitsindexes (vgl. Kapitel 2.3). In [CAS96] werden stückweise lineare Wünschbarkeitsfunktionen vorgestellt, die an den Bruchstellen zur Sicherung der Differenzierbarkeit durch Polynome vierten Grades approximiert werden. Das Vorgehen wird beispielhaft anhand der Optimierung eines Halbleiterkonstruktionsprozesses illustriert.

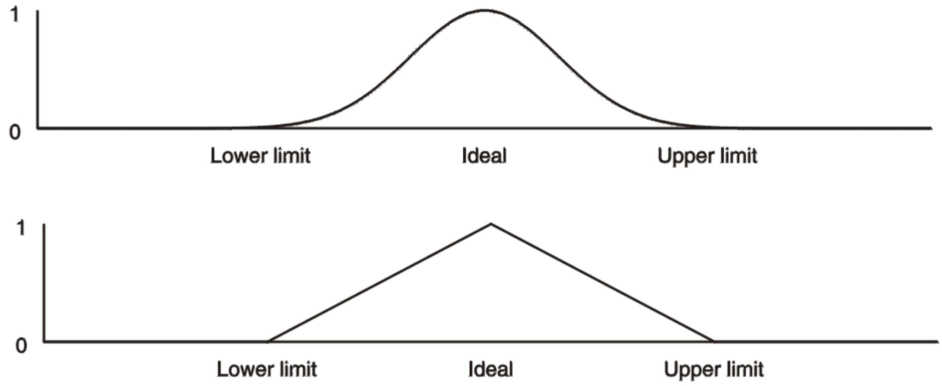



Abbildung 4: Vergleich der Wünschbarkeitsfunktionen nach Noble (oben) und Derringer (unten), Lower Limit: LSL, Upper Limit: USL, Ideal: T, Quelle: [NOB00]

Ebenso zur Umgehung der lokalen Nichtdifferenzierbarkeit stellt [NOB00] eine Wünschbarkeitsfunktion vor, die durch Verwendung der Exponentialfunktion sowie quadratischer Abweichungsterme vom Zielwert an den Bruchstellen eine Glättung hervorruft. Als Optimierungsmethode wird die Methode des steilsten Abstiegs empfohlen, auf die die Funktion zugeschnitten ist. Das zweiseitige Spezifikationsproblem ergibt sich wie folgt (vgl. auch Abb. 4):

$$d_i(Y_i) = \begin{cases} \exp(-4.5(\frac{Y_i - T_i}{T_i - LSL_i})^2), & Y_i \leq T_i \\ \exp(-4.5(\frac{Y_i - T_i}{USL_i - T_i})^2), & Y_i > T_i \end{cases}, \qquad i = 1, \ldots, k \qquad \text{mit} \tag{8}$$

$LSL_i$ : untere Spezifikationsgrenze der Zielgröße $i, T_i$ : Zielwert der Zielgröße $i$,

$USL_i$ : obere Spezifikationsgrenze der Zielgröße $i$.

Einen Ansatz zur simultanen Betrachtung des gewünschten Erwartungswertes der Zielgröße sowie der Varianz im Zuge der "Six-Sigma"-Methodik (vgl. [HAR94]) stellt [RIB01] vor. Die Wünschbarkeitsfunktion lässt sich hier als Prozessertrag interpretieren. Vorausgesetzt wird jedoch die Normalverteilung der Zielgrößen.

Darüberhinaus können prinzipiell jede Art von Funktionen verwendet werden, die eine Transformation in das Intervall $[0, 1]$ hervorrufen. Allerdings sollte die Interpretierbarkeit in der Form von Wünschbarkeiten gewährleistet sein. [OUT98] verwenden z.B. eine logistische Funktion, in [BEN02] erfolgt eine spezielle Normierung der Zielgrößenwerte unter Verwendung der maximal und minimal angenommenen Niveaus.

## 2.2 Der Wünschbarkeitsindex

Nach Transformation der betrachteten Qualitätsmerkmale des zugrundeliegenden Prozesses durch eine Wünschbarkeitsfunktion in das Intervall $[0, 1]$ werden die Wünschbarkeiten über den sogenannten Wünschbarkeitsindex zusammengefasst. Dadurch wird eine Beurteilung der Gesamtqualität des betrachteten Prozesses anhand einer einzelnen Kennzahl möglich.

Als gebräuchlichste Methode zur Berechnung des Wünschbarkeitsindexes wird der geometrische Mittelwert verwendet, der von [HAR65] zur Kombination der Wünschbarkeiten eingeführt und auch von [DER80] weiterverwendet wurde. Daher wird hier der Wünschbarkeitsindex zunächst als geometrisches Mittel definiert, alternative Ansätze sind jedoch im Weiteren dargestellt.

**Definition 2.2.1 (Der Wünschbarkeitsindex als geometrischer Mittelwert)** *Seien $d_1, \ldots, d_k$ die Wünschbarkeitsfunktionen der $k$ Qualitätsmerkmale (Zielgrößen) des betrachteten Prozesses. Dann ist der Wünschbarkeitsindex $D$ definiert als*

$$D := (\prod_{i=1}^{k} d_i)^{1/k}.$$

*Zur Integration einer unterschiedlichen Gewichtung der Wünschbarkeitsfunktionen kann das gewichtete geometrische Mittel verwendet werden:*

$$D := (\prod_{i=1}^{k} d_i^{w_i})^{1/\sum_{i=1}^{k} w_i} \quad \textit{mit } w_i > 0 \quad \forall\, i \in 1, \ldots, k.$$

Die Verwendung des geometrischen Mittelwertes führt zu folgenden Interpretationen des Wünschbarkeitsindexes:

- Falls eine der kombinierten Wünschbarkeitsfunktionen den Wert Null annimmt, gilt dies auch für den Wünschbarkeitsindex. Wenn also ein Qualitätsmerkmal ein inakzeptables Niveau aufweist, wird der gesamte Prozess unabhängig von den Niveaus der anderen Qualitätsmerkmale als inakzeptabel betrachtet. Dies ist insbesondere für die Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer der Fall. Die Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington konvergiert lediglich asymptotisch gegen Null.

- Der Wert des Wünschbarkeitsindexes wird stärker durch kleine Werte der Wünschbarkeitsfunktionen beeinflusst. Dies entspricht dem realen Verhalten, dass die Beurteilung eines Prozesses stärker auf denjenigen Qualitätsmerkmalen basiert, die geringe Niveaus aufweisen, da hier Folgeprobleme entstehen können.
- Der Wünschbarkeitsindex nimmt nur dann den Wert Eins an, wenn dies für alle kombinierten Wünschbarkeitsfunktionen gilt. Eine maximale Qualität des Gesamtprozesses wird also nur dann erreicht, wenn sämtliche Zielgrößen ihren Zielwert annehmen.

In Fällen, in denen geringen Werten der Wünschbarkeitsfunktion ein noch höheres Gewicht zugesprochen werden soll, kann als Wünschbarkeitsindex das Produkt der einzelnen Wünschbarkeitsfunktionen verwendet werden (vgl. [AVE01]).

Einen alternativen Ansatz stellt die Verwendung der Summation dar. Der Wünschbarkeitsindex ergibt sich als Mittelwert der einzelnen Wünschbarkeitsfunktionen (vgl. [FUL98]):

$$D := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} d_i \quad i = 1, \ldots, k. \tag{9}$$

Hier geht allerdings die Eigenschaft verloren, dass ein Nullwert einer Wünschbarkeitsfunktion einen Wert von Null des Wünschbarkeitsindexes bewirkt. Dementsprechend wird in der Praxis zumeist dem geometrischen Mittelwert der Vorzug gegeben.

Für Fälle, in denen eine hohe Korrelation zwischen den abhängigen Variablen vorliegt, schlagen [KIM00] einen "Maximin-Ansatz" vor, um Verzerrungen zu vermeiden. Dabei werden die Wünschbarkeitsfunktionen als Ertragsschätzungen aufgefasst. Der Wünschbarkeitsindex entspricht dann dem Minimum dieser Erträge, das es zu maximieren gilt:

$$D := \min_{i=1,\ldots,k} d_i. \tag{10}$$

Dieser Ansatz ist zwar robust gegenüber möglichen Abhängigkeiten zwischen den Zielgrößen, hat aber den Nachteil, dass die Niveaus der Wünschbarkeitsfunktionen der restlichen Zielgrößen komplett außer Acht gelassen werden, was zu suboptimalen Entscheidungen in der Praxis führen kann.

## 2.3 Optimierung des Wünschbarkeitsindexes

Primäres Ziel der Verwendung des Wünschbarkeitsindexes in der Qualitätssicherung ist derzeit die Qualitätsoptimierung eines interessierenden Prozesses. Gesucht werden diejenigen Niveaus der Einflussgrößen, die zu einer Optimierung der Gesamtqualität des Prozesses führen. Betrachtet wird ein durch $k$ Qualitätsmerkmale $Y_1, ..., Y_k$ charakterisierter Prozess, wobei für die einzelnen Qualitätsmerkmale durch Versuchsplanungsmethoden funktionale Zusammenhänge linearer oder quadratischer Form zu den Einflussgrößen $X_1, \ldots, X_n$ des Prozesses bestimmt werden, d.h.

$$Y_i = f_i(X_1, ..., X_n, \varepsilon_i) \text{ für } i = 1, \ldots, k \text{ und i. Allg. } \varepsilon_i \text{ unabh. } \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2). \tag{11}$$

Die Gesamtprozessqualität wird demnach durch den Vektor $Y := (Y_1, .., Y_k)'$ ausgedrückt, sodass ein multivariates Optimierungsproblem resultiert. Im allgemeinen wird eine getrennte univariate Optimierung der einzelnen Qualitätsmerkmale nicht zum Ziel führen, da zumeist Zielkonflikte zwischen den einzelnen Qualitätsmerkmalen vorliegen. Für den Vergleich zweier Realisationen von $Y$ wird ein Ansatz benötigt, der die Bildung einer Rangfolge im multivariaten Raum erlaubt. Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten, die unter den Begriffen MDCM (<u>M</u>ulticriteria <u>D</u>e<u>c</u>ision <u>M</u>aking) oder MCO (<u>M</u>ulti<u>c</u>riteria <u>O</u>ptimization) zusammengefasst werden. Ansätze wie Dominanz oder Pareto-Optimalität haben den Nachteil, dass je nach Komplexität des Problems keine oder mehrere Lösungen existieren können ([STE99], S. 3 ff.). Graphische Methoden wie beispielsweise überlagerte Konturplots können generell nur bei niedrigdimensionalen Optimierungsproblemen angewendet werden und führen selten zu exakten Lösungen. Ein Überblick über diese und weitere Verfahren wie Prometee oder Nutzenfunktionen ist in [HEN92] dargestellt.

Der Wünschbarkeitsindex lässt sich ebenso für ein multivariates Optimierungsverfahren verwenden. Er bietet als eindimensionale Kennzahl den Vorteil, dass er im Zuge einer Komplexitätsreduktion das multivariate Optimierungsproblem in ein univariates Optimierungsproblem überführt und gleichzeitig Präferenzen bzgl. einzelner Qualitätsmerkmale einbezieht:

$$D = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} d_i(Y_i)} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} d_i(f_i(X_1, ..., X_n, \varepsilon_i))}. \tag{12}$$

Harrington drückte dies 1965 in seinem einführenden Artikel ([HAR65]) zur Theorie der Wünschbarkeit wie folgt aus:

*"[The Desirability Index] D ... is completeley analogous to any other measure of quality, and is subject to mathematical and statistical analysis, optimization by response surface techniques, and the like, as though it were a measure of a single property."*

| **Gradientenbasierte Verfahren** | **Ableitungsfreie Verfahren** |
|---|---|
| Verfahren mit Schrittweitensteuerung: | numerisch: |
| - Newton-Verfahren | - Nelder-Mead-Verfahren |
| - Gradientenverfahren | - Genetische Algorithmen (siehe auch [GOL89]), insbes. Mutations-Selektions-Verfahren |
| - gedämpfte Newton-Verfahren | - Gittersuche |
| - Variable-Metrik und Quasi-Newton-Verfahren | - Simulated Annealing (siehe [SAL02]) |
| - Verfahren konjugierter Richtungen | - Tabu-Suche (siehe [GLO90]) |
| Trust-Region-Verfahren: | graphisch: |
| - Trust-Region-Newton-Verfahren | - Konturplot |

Tabelle 1: Übersicht: Bekannteste nichtlineare Optimierungsverfahren für unrestringierte Optimierungsprobleme, in Anlehnung an [ALT02].

Wie allerdings bei Betrachtung des Ausdrucks (12) ersichtlich wird, ist dieses univariate Optimierungsproblem zum einen nichtlinear und zweitens bei direkter Modellierung, d.h. wenn der Wünschbarkeitsindex direkt in Abhängigkeit der Einflussfaktoren ausgedrückt wird, sehr kompliziert. Bei Verwendung der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington ergeben sich beispielsweise Polynome von sehr hoher Ordnung im Exponenten der e-Funktion. In [STE99] und [STE00] wird von der direkten Modellierung komplett abgeraten. Im Standardvorgehen in der Praxis werden im ersten Schritt optimale Werte der Qualitätsmerkmale berechnet, um dann im zweiten Schritt über die Modellgleichungen $f_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ die zugehörigen optimalen Niveaus der Einflussfaktoren zu bestimmen.

Die Fehlerterme der Modellgleichungen werden in der Praxis durch ihren Erwartungswert 0 ersetzt, die Modelle werden also stellvertretend für die Wirklichkeit verwendet. Wird die Realität jedoch nicht hinreichend genau abgebildet, d.h. liegen hohe Varianzen der Fehlerterme vor, sind die resultierenden optimalen Niveaus der Einflussfaktoren im späteren Prozessverlauf u.U. nicht mehr geeignet. [STE00] entwickelte deshalb ein auf Monte-Carlo-Simulation basiertes Optimierungsverfahren für den Wünschbarkeitsindex, das die Modellunsicherheiten durch Integration des Fehlerterms in die Optimierung miteinbezieht und so zu robusteren Resultaten kommt. Zur Anwendung kommen jedoch sowohl in dieser wie auch in der Standardprozedur nichtlineare Optimierungsmethoden. Tabelle 1 bietet einen Überblick über die wichtigsten Verfahren für unrestringierte Optimierungsprobleme. Verfahren, die Restriktionen an die Einflussfaktoren miteinbeziehen, sind im Detail in [ALT02] aufgeführt. Die weiteren Ausführungen sind ebenfalls in Anlehnung an [ALT02] erstellt.

Zu lösen ist bei einer nichtlinearen Optimierungsaufgabe allgemein ein Problem der Art

$$\min_{x \in F} f(x) \tag{13}$$

mit $f : M \to \mathbb{R}^n$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $F \subset M$. Die Funktion $f$ wird **Zielfunktion** genannt, die Menge $F$ ist die **zulässige Menge**. Elemente aus $F$ heißen **zulässige Punkte**. Da ein Maximierungsproblem äquivalent ist zur Minimierung der Funktion $\tilde{f} = -f$, wird es nicht gesondert betrachtet.

Im konkreten Fall der Optimierung des Wünschbarkeitsindexes ergibt sich somit

$$\min_{X_1,\ldots,X_n \in F} -D(X_1,\ldots,X_n) = -\sqrt[k]{\prod_{i=1}^{k} d_i(f_i(X_1,...,X_n,\varepsilon_i))} \text{ gemäß (12),} \tag{14}$$

wobei die Menge $F$ den zulässigen Wertebereich der Einflussfaktoren $X_1,\ldots,X_n$ spezifiziert.

Die größte Klasse der numerischen Optimierungsverfahren für das Problem (14) bilden die **gradientenbasierten Verfahren**, auch Abstiegsverfahren genannt. Diese setzen Differenzierbarkeit der Zielfunktion voraus. Ausgehend von einem Startpunkt wird eine Folge von weiteren Punkten erzeugt, die gegen einen Grenzwert konvergiert, der im Idealfall eine lokale Lösung von (14) darstellt. Dabei wird in jedem Iterationsschritt der Funktionswert der Zielfunktion unter Auswahl einer geeigneten Abstiegsrichtung vermindert. Verfahren mit Schrittweitensteuerung bestimmen in jedem Iterationspunkt ausgehend von dieser Abstiegsrichtung eine optimale Schrittweite, die die Zielfunktion möglichst stark verringert. Trust-Region-Verfahren verwenden hingegen in jedem Iterationspunkt ein lokales Modell für die Zielfunktion, das in einem gewissen Vertrauensbereich um diesen Punkt Gültigkeit besitzt. Für diesen Bereich wird dann eine optimale Abstiegsrichtung bestimmt, in die mit Schrittweite Eins abgestiegen wird.

Aufgrund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit der Zielfunktion sind gradientenbasierte Verfahren jedoch nur eingeschränkt zur Optimierung des Wünschbarkeitsindexes geeignet. Während die Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington diese Eigenschaft besitzt, ist dies bei der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer aufgrund der abschnittsweisen Definition nicht der Fall. Zur Herstellung der Differenzierbarkeit schlagen beispielsweise [CAS96] polynomiale Approximationen an den Bruchstellen vor (siehe auch 2.1.3). Ferner kann die Verwendung der gradientenbasierten Verfahren aufgrund der zumeist gegebenen Existenz lokaler Extrema des Wünschbarkeitsindexes in Abhängigkeit der Einflussfaktoren je nach

Wahl des Startpunktes fehlschlagen ([STE99], S. 12). Wird die Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer unmodifiziert verwendet, müssen **ableitungsfreie Methoden** eingesetzt werden. Hier kommt dem heuristisch begründeten Nelder-Mead-Verfahren erhöhte Bedeutung zu. Es wird ein Simplex durch Reflektion, Expansion oder Kontraktion iterativ in Richtung der optimalen Lösung verschoben. Das Mutations-Selektionsverfahren gehört zu den biologisch motivierten evolutionären Algorithmen. Die Abstiegsrichtung wird hier in Anlehnung an die Genetik stochastisch durch zufällige "Mutationen" des aktuellen Iterationspunktes bestimmt. Eine weiterführende Übersicht, auch über verwandte Verfahren, liefern [GOL89] oder [MIT98]. Wenn die zulässige Menge und die Dimension des Raumes nicht allzu groß sind, bietet sich auch eine einfache Gittersuche an. Auf einem Raster um den Startpunkt herum wird die Zielfunktion an jedem Rasterpunkt ausgewertet und als optimale Lösung der Rasterpunkt mit dem geringsten Zielfunktionswert selektiert. Eine beispielhafte Anwendung ist in [WEI99] (S.178 f.) dargestellt.

Der Begriff "Simulated Annealing" (SA) ([SAL02]) steht für ein physikalische Prozesse nachahmendes Verfahren, um globale Minima oder Maxima einer Funktion zu finden. Beim langsamen Abkühlen eines Metallstückes ordnen sich die einzelnen Atome so an, dass sie einen Zustand möglichst niedriger Energie einnehmen, wobei SA dies in ein abstraktes Modell übersetzt. Die Tabu-Suche hingegen ist ein Ansatz zur Vermeidung von Zyklen bei diskreten Optimierungsproblemen. Bereits verwendete Punkte werden für die nächsten Optimierungsschritte für "tabu" erklärt, sodass die Wahrscheinlichkeit der Überwindung lokaler Optima erhöht wird ([GLO90]).

Die ableitungsfreien Verfahren werden in der praktischen Anwendung des Wünschbarkeitsindexes verstärkt eingesetzt (siehe auch Kapitel 3). Es werden jedoch auch häufiger Kontur- oder Oberflächenplots als verwendete Optimierungsmethode genannt. Diese stellen in einer dreidimensionalen Grafik den Wünschbarkeitsindex in Abhängigkeit zweier Einflussfaktoren dar. Bei Vorliegen von mehr als zwei Einflussfaktoren müssen die verbleibenden jeweils auf einen konstanten Wert gesetzt werden. So lassen sich Bereiche mit hohen Werten des Wünschbarkeitsindexes optisch selektieren. Exakte Lösungen sind schwierig bzw. bei mehr als zwei Einflussfaktoren nahezu unmöglich.

Zur softwaretechnischen Umsetzung der Optimierung bieten sich verschiedene Möglichkeiten. Zum einen gibt es auf C oder FORTRAN basierende numerische Programmbibliotheken wie die NAG-Bibliothek ([WEB1]), zum anderen aber auch interaktive Programmsysteme wie die "Optimization Toolbox" von Matlab ([MAT00]). Die wichtigsten

Verfahren sind außerdem in R implementiert [IHA96]. Eine umfassende Übersicht über verfügbare Optimierungssoftware wird im Internet in [WEB2] bereitgestellt.

## 2.4 Wichtige Implikationen für die praktische Anwendung

Das Konzept der Wünschbarkeit hat seit seiner Einführung große Akzeptanz in der Praxis gefunden, die Methodik wurde sogar in einige bedeutende Sofwarepakete wie z.B. Design Expert von StatEase ([WEB5]), STAVEX ([AIC00]), in SAS/ADX ([WEB3]) und in JMP ([WEB2]) implementiert.

Die Methodik kann jedoch dem Anwender nur dann optimalen Nutzen bringen, wenn ihre Voraussetzungen und vor allem auch ihre Grenzen bekannt sind. Beachtet werden müssen insbesondere die folgenden Aspekte (vgl. [FUL98]):

- Es muss sichergestellt werden, dass die Parametereinstellungen der Wünschbarkeitsfunktionen die realen Präferenzen der Experten hinreichend genau widerspiegeln, da das Resultat der Optimierung des Wünschbarkeitsindexes von dieser Wahl beeinflusst wird und ansonsten keine optimalen Einstellungen der Einflussfaktoren des Prozesses bestimmt werden können. Demzufolge sollte der Wahl der Spezifikationsgrenzen, Zielwerte und Funktionsverläufe erhöhte Aufmerksamkeit geschenkt werden, vgl. dazu z.B. [YOU91]:

  "*Engineering judgement is an important part of the process of arriving at an optimal solution.*"

- Der zweite zentrale Faktor ist die Genauigkeit der Modellierung des Zusammenhangs zwischen den Einfluss- und Zielgrößen des Prozesses, insbesondere muss die Varianz des Modellfehlers klein gehalten werden. Dies dient zum einen dazu, die Realität möglichst genau abzubilden. Zum anderen muss aber auch garantiert werden können, dass unter Normalbedingungen die Werte der Qualitätsmerkmale innerhalb der Spezifikationsgrenzen varriieren und somit nicht durch eine zu hohe Varianz des Modellfehlers zu Nullwerten der Wünschbarkeitsfunktion führen. Der Prozess kann dann unter Normalbedingungen nicht als stabil betrachtet werden. Zur Überprüfung empfiehlt sich die Erstellung von Prognoseintervallen für die Qualitätsmerkmale.

Ein Prozess, der die zweite Bedingung nicht erfüllt, findet sich z.B. in [DER80]. Details sind Kapitel 5.3.1 zu entnehmen.

# 3 Wünschbarkeitsindizes in der Praxis - Anwendungsfelder

## 3.1 Überblick

Die Verwendung von Wünschbarkeitsfunktionen und Wünschbarkeitsindizes hat in der Praxis, vor allem seit den 90er Jahren, eine hohe Akzeptanz und auch starke Verbreitung gefunden. Anhang A gibt einen Überblick über diesbezügliche Publikationen seit 1990. Dieser erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, deckt jedoch die relevanten Einsatzbereiche ab.

Verwendung findet der Wünschbarkeitsindex verstärkt im Bereich der Chemie und Verfahrenstechnik sowie im weitesten Sinne im Maschinenbau. Hier erfolgt zumeist eine Optimierung von Fertigungs-, Produktions- oder chemischen Prozessen. Vor allem im Bereich der Luft- und Raumfahrttechnik lassen sich seit 1998 eine Vielzahl von wissenschaftlichen Publikationen finden, die fast ausschließlich aus dem Umfeld des *American Institute of Aeronautics and Astronautics* in Nevada (AIAA) und des *NASA Langley Research Centers* in Virginia ([WEB6]) stammen ([TUC98], [SHY99], [SHY00], [PAP00] [SHY01],[PAR02]). Kapitel 3.2 greift demzufolge einen diesbezüglichen Artikel detaillierter auf und stellt das Vorgehen beispielhaft dar.

Auffällig ist die überwiegende Verwendung der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer. Unterschiede sind jedoch in der Art und Weise der Optimierung des Wünschbarkeitsindexes auffällig. Es liegt ein in etwa ausgeglichenes Verhältnis zwischen der Verwendung graphischer sowie numerischer Optimierungsmethoden vor. Sehr oft werden noch immer Konturplots verwendet, die jedoch zumeist nur Bereiche der Einflussfaktoren selektieren können, in denen ein hoher bis optimaler Wert des Wünschbarkeitsindexes erzielt werden kann. Im Zuge der numerischen Optimierung kommen unterschiedliche nichtlineare Optimierungsmethoden (vgl. Kapitel 2.3) wie z.B. das Nelder-Mead-Verfahren zum Einsatz. Verwendet wird hierzu, falls genannt, zumeist die Software Design-Expert von StatEase ([WEB5]) oder der Solver von Microsoft Excel.

Neben der klassischen Verwendung des Wünschbarkeitsindexes werden Wünschbarkeitsfunktionen auch vereinzelt abgewandelt benutzt. In [MCF95] werden Wünschbarkeitsfunktionen nach Derringer und der Wünschbarkeitsindex z.B. zur Modellierung der gewünschten Erfüllungsgrade der Nebenbedingungen einer Zielfunktion verwendet.

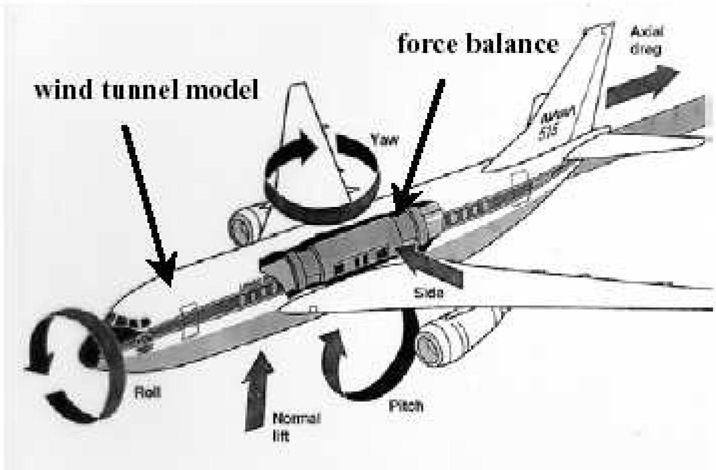



Abbildung 5: Kräftewaage im Windkanalmodell, Quelle: [PAR02]

In den Bereich der Logistik und im Speziellen in die Lager- und Materialflusssteuerung hat der Wünschbarkeitsindex bisher noch keinen Einzug gehalten. Hier liegen zum einen keine produzierenden Prozesse vor, zum anderen ist die Materialflusssteuerung von einer hohen Dynamik und sich ändernden Rahmenbedingungen geprägt. Die vorliegende Arbeit zeigt in Kapitel 6 auf, wie der Wünschbarkeitsindex in diesem Bereich effizient genutzt werden kann. Hier steht jedoch im Vergleich zu obigen Anwendungen nicht die Qualitätsoptimierung, sondern die Qualitätskontrolle im Vordergrund.

## 3.2 Beispiel: Strukturelle Optimierung einer Kräftewaage für Windkanaltests

Windkanaltests an Flugzeugmodellen konzentrieren sich vor allem auf die direkte Messung von Kräften und Momenten der auftretenden aerodynamischen Belastung. Zur Messung dieser Lasten wird eine sogenannte Kräftewaage (Force Balance) verwendet (vgl. Abbildung 5), die im Wesentlichen durch Dehnungsmessstreifen an bestimmten Federelementen gemessene Last in elektrische Signale umformt.

[PAR02] vom NASA Langley Research Center beschreibt einen Ansatz, der unter Zuhilfenahme von Versuchsplanungsmethoden, insbesondere auch unter Verwendung von Wünschbarkeitsfunktionen und des Wünschbarkeitsindexes, den strukturellen Aufbau der Kräftewaage hinsichtlich möglichst genauer Messbarkeit der auftretenden Kräfte optimiert.

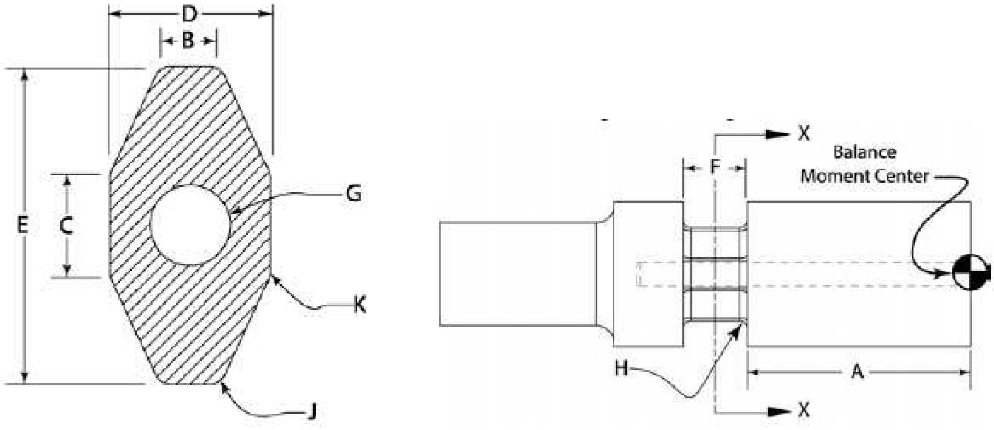



Abbildung 6: Übersicht Einflussgrößen, Quelle: [PAR02]

Das Problem liegt in dem Zielkonflikt der Qualitätsmerkmale begründet, die die Güte des Designs der Kräftewaage ausmachen: Einerseits muss die Kräftewaage zur Erreichung einer maximalen Messsensitivität über eine hohe Elastizität verfügen, andererseits wird zur Minimierung einer strukturellen Verfälschung eine möglichst hohe Steifigkeit benötigt. Des Weiteren sind die globalen mechanischen Spannungen zu minimieren, an den Messstellen ist jedoch eine maximale Auslenkung zu gewährleisten.

Eine Kräftewaage ist symmetrisch um ihren Schwerpunkt und besteht aus einem mittleren Teil für die Messung der Axialkräfte sowie aus zwei Käfig-Sektionen, die durch Federelemente die restlichen Kräfte messen. Im Hinblick auf eine Komplexitätsreduktion des Problems werden die Axialkräfte außen vorgelassen, sodass sich das Optimierungsproblem auf das Design der Federelemente konzentriert. Aufgrund einfacher Herstellbarkeit sowie Messbarkeit der Kräfte wurden bis zu dem Zeitpunkt der vorliegenden Untersuchung mehrere rechteckige Federelemente verwendet, die jedoch mechanisch nicht optimal sind. Parker und de Loach ([PAR02]) verwenden für die strukturelle Optimierung aus mess- und herstellungstechnischen Gründen nur noch ein Federelement, das den als optimal angesehenen elliptischen Querschnitt durch ein Oktagon annähert. Die sich daraus ergebenden Einflussgrößen sind Tabelle 2 zu entnehmen, eine Veranschaulichung findet sich in Abbildung 6.

Die Qualitätsmerkmale für die Optimierung ergeben sich dann wie in Tabelle 3 aufgeführt, wobei sich der geschilderte Zielkonflikt aus der gewünschten Maximierung der ersten vier Größen sowie der gewünschten Minimierung der Variablen *zdisp* und *ydisp* ergibt. Der Von-Mises-Stress ist eine Vergleichsspannung, die sowohl Schub-, Zug- und Druckspan-

| Einflussgröße | Beschreibung |
|---|---|
| A | Entfernung des Federelementes vom Schwerpunkt der Kräftewaage |
| B | Innere Breite |
| C | Innere Höhe |
| D | Gesamtbreite |
| E | Gesamthöhe |
| F | Länge des Federelementes |
| G | Durchmesser des Loches |
| H | Rundungsradius am Übergang vom Federelement zum Hauptkörper |
| J | Rundungsradius an den äußeren Kanten des Federelementes |
| K | Rundungsradius an den seitlichen Kanten des Federelementes |

Tabelle 2: Beschreibung der Einflussgrößen

| Qualitätsmerkmal | Beschreibung |
|---|---|
| NF_Out | Normalkraftintensität |
| PM_Out | Sensitivität bzgl. des Nickmomentes |
| YM_Out | Sensitivität bzgl. des Giermomentes |
| SF_Out | Querkraftssensitivität |
| zdisp | Ablenkung in der Normalkraftebene |
| ydisp | Ablenkung in der Querkraftebene |
| max_Stress | Maximaler Von-Mises-Stress |

Tabelle 3: Beschreibung der Qualitätsmerkmale

nungen als auch Biegespannungen berücksichtigt.

Unter Verwendung eines dreistufigen, zentral-zusammengesetzten Designs wurden mathematische Modelle für jedes der Qualitätsmerkmale gewonnen, wobei die Daten aus einem durch Finite-Elemente-Methoden erstellten Festkörpermodell generiert wurden. Mit Hilfe dieser Modelle lassen sich dann unter Einbeziehung des Wünschbarkeitsindexes die Niveaus der Einflussgrößen bestimmen, die die Qualität der gefundenen Struktur der Kräftewaage optimieren.

Die Aufstellung von Wünschbarkeitsfunktionen nach Derringer für jedes der Qualitätsmerkmale resultiert in ein Maximierungsproblem für die Merkmale $NF\_Out$, $PM\_Out$, $YM\_Out$ und $SF\_Out$, die mindestens 1000 Microvolt/Volt übersteigen müssen, die Merkmale $zdisp$, $ydisp$ und $max\_Stress$ hingegen sind zu minimieren mit Obergrenzen von 0.002 inches, 0.005 inches bzw. 75.000 Pounds/$Inch^2$. Für alle Qualitätsmerkmale werden bei den Wünschbarkeitsfunktionen lineare Gewichte verwendet, d.h. die Exponenten der

Wünschbarkeitsfunktionen werden auf den Wert Eins gesetzt.

Für jeden Versuch innerhalb des erstellten Designs ergibt sich durch die Verwendung der so definierten Wünschbarkeitsfunktionen ein Wert für den Wünschbarkeitsindex, der die Gesamtqualität der konstruierten Kräftewaage widerspiegelt. Als Startpunkt für eine weitere Optimierung werden die Niveaus der Einflussgrößen desjenigen Versuchs verwendet, der den maximalen Wert des Wünschbarkeitsindexes besitzt.

Die optimale Einstellung der Einflussgrößen wird mittels graphischer Optimierung gewonnen. Jeweils für Zweier-Kombinationen der Einflussgrößen wird ein Konturplot erstellt, der unter Konstanthaltung der restlichen Einflussgrößen die sich aus den Spezifikationsgrenzen der Qualitätsmerkmale ergebenden Wertebereiche der Einflussgrößen visualisiert. Nach Überlagerung dieser Plots ergibt sich ein zulässiger Bereich, in dem die dargestellten Einflussgrößen variiert werden können. Daraus werden unter herstellungstechnischen Gesichtspunkten die Einstellungen der Variablen vom Startwert aus variiert, bis ein optimaler Wert für den Wünschbarkeitsindex gefunden worden ist. Ein Beispielplot ist in Abbildung 7 dargestellt. Die resultierende Geometrie der Kräftewaage zeigt Abbildung 8.

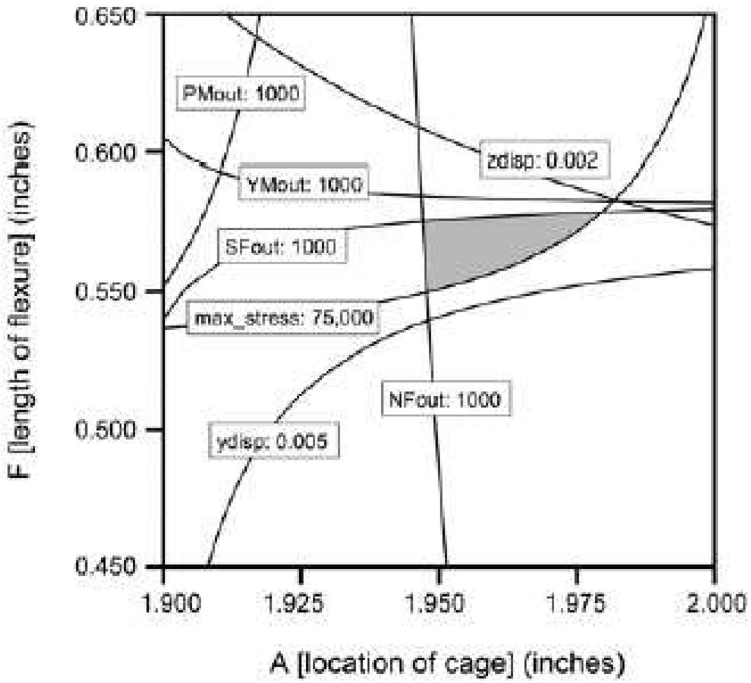



Abbildung 7: Graphische Optimierung, Bsp., Quelle: [PAR02]

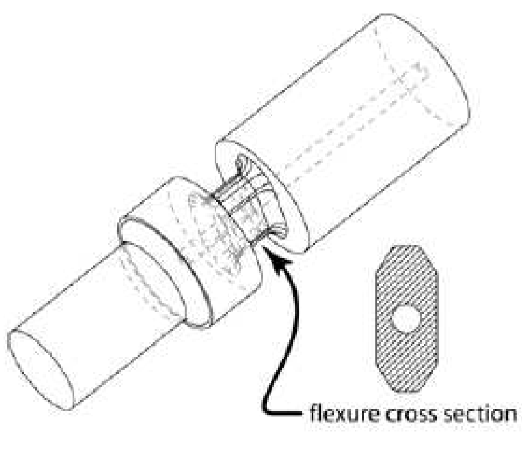



Abbildung 8: Resultierende Geometrie der Kräftewaage, Quelle: [PAR02]

# 4 Kontrollkarten als Mittel zur Prozesskontrolle

Kontrollkarten stellen einen wesentlichen Teil der statistischen Qualitätssicherung dar. Sie wurden im Jahre 1924 von Walter Andrew Shewhart erstmalig im Zuge einer Prozesskontrolle bei der Western Electric Corporation eingeführt. Noch heute gilt seine 1931 diesbezüglich veröffentlichte Arbeit ([SHE31]) als Standardwerk in der statistischen Qualitätssicherung.

Bei einer Prozessüberwachung gilt es zu beurteilen, ob der betrachtete Prozess „normal" läuft, oder ob zur Wiederherstellung eines solchen Verlaufes Eingriffe in den Prozess notwendig sind. Dabei wird der Prozess anhand bestimmter (messbarer) Qualitätsmerkmale über die Zeit während der laufenden Produktion kontrolliert. Produktion wird hier o.B.d.A. verwendet, da die Kontrollkarte ihren Ursprung und ihr Hauptanwendungsfeld in der teilefertigenden Industrie besitzt ([WEI99], S. 283). Auch wenn ein fester Produktionsprozess unter konstanten Rahmenbedingungen betrachtet wird, ist nicht zwangsläufig mit konstanten Werten der Qualitätsmerkmale zu rechnen. Prozesse unterliegen vielmehr einer natürlichen Variation, die auf nichtkontrollierbare Faktoren zurückzuführen ist. Im Gegensatz zu kontrollierbaren Faktoren wie z.B. die Stellgrößen der Fertigungseinrichtungen sind diese auf ein Zusammenspiel meist nicht identifizierbarer Größen zurückzuführen. Bei korrekter Einstellung der kontrollierbaren Faktoren und einem gut geplanten Prozess sind die so entstehenden Schwankungen jedoch klein und der Prozess verläuft **statistisch unter Kontrolle**. Ergeben sich jedoch Änderungen in den kontrollierbaren Faktoren wie z. B. Verschleiß der Fertigungseinrichtungen, kann dies zu systematischen Prozessänderungen wie Verschiebungen der Sollwerte der Qualitätsmerkmale oder Erhöhung der Prozessvarianz führen. Shewhart prägte diesbezüglich den Begriff **assignable cause**, der im ökonomischen Sinne Trends, Zyklen oder Saisonfiguren beinhaltet ([GOH96], S. 4). Der Prozess ist dann **außer statistischer Kontrolle**, da sich die Verteilung des Qualitätsmerkmals durch eine systematische Verlaufsverschiebung ändert.

Neben dem primären Zweck der ständigen Prüfung, ob der betrachtete Prozess statistisch unter Kontrolle ist, erfüllt eine Kontrollkarte weitere wichtige Aufgaben im Qualitätssicherungsprozess. Diese sind zum einen die **Erhöhung der Produktivität** durch Verringerung des Ausschussanteils, die **Dokumentation der betriebsinternen Qualitätssicherung** gemäß der Normenreihe ISO bzw. DIN 9000-9004 sowie die **Beurteilung der Prozessfähigkeit**, d.h. ob über die Zeit eine konstant spezifikationskonforme Produktion

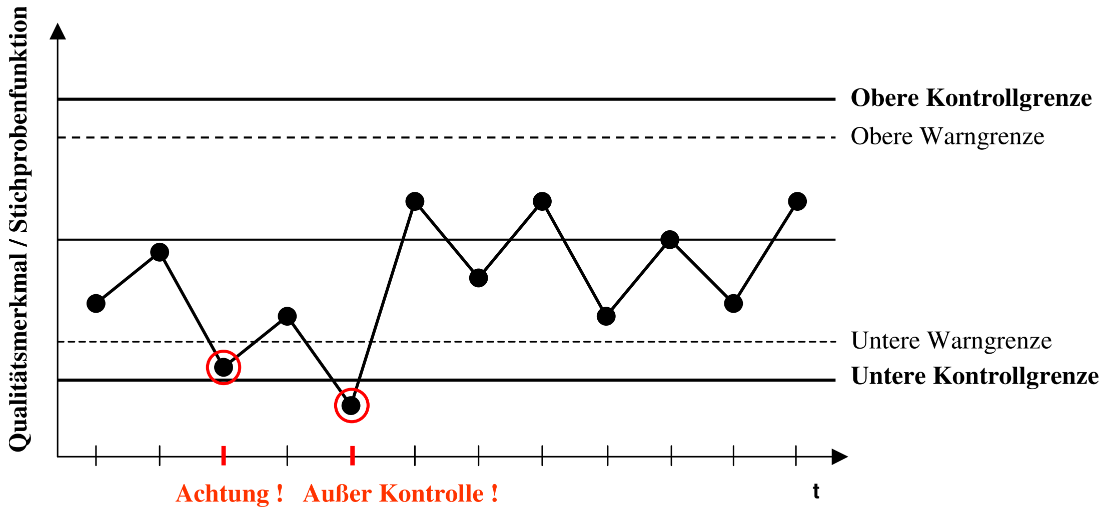



Abbildung 9: Exemplarische Kontrollkarte

gewährleistet werden kann (vgl. [RIN89], S. 337 und [MIT93], S. 42).

Die Kontrollkarte stützt sich auf in der Regel äquidistant entnommene Stichproben mit festem Umfang aus dem laufenden Prozess. Die so ermittelten Werte des zu kontrollierenden Qualitätsmerkmals werden entweder direkt oder nach Verdichtung zu einer Stichprobenfunktion wie z.B. Mittelwert, Median oder Standardabweichung in der Kontrollkarte gegen die Zeit aufgetragen und verbunden. Von zentraler Bedeutung sind die obere und untere Kontrollgrenze, die auf Basis der Verteilung des zugrundeliegenden Qualitätsmerkmals bestimmt werden. Diese werden abszissenparallel in die Kontrollkarte eingezeichnet. Die Berechnung erfolgt dahingehend, dass einerseits die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines blinden Alarms, andererseits aber auch die Wahrscheinlichkeit für ein Nichteingreifen bei einem sich außer Kontrolle befindlichen Prozess möglichst klein gehalten wird. Werte des Qualitätsmerkmals außerhalb der Kontrollgrenzen zeigen an, dass der Prozess nicht mehr unter Kontrolle ist. Des Weiteren wird zumeist eine Orientierungslinie für den Sollwert eingezeichnet. Neben den genannten Kontrollgrenzen können zusätzlich sogenannte Warngrenzen eingezogen werden, die enger um den Sollwert liegen. Liegt eine Realisierung zwischen Warn- und Kontrollgrenze, kann z.B. zur detaillierteren Kontrolle eine zusätzliche Stichprobe gezogen werden. Eine exemplarische Kontrollkarte ist in Abbildung 9 dargestellt.

Die Anwendung einer Kontrollkarte lässt sich über die Testtheorie begründen. Diesbezügliche Details sowie die Beurteilung der Güte einer Kontrollkarte sind in Kapitel 4.1 beschrieben.

| **Typen von Kontrollkarten** | **Klassifikationskriterium** |
|---|---|
| Für die zählende / messende Prozesskontrolle | Art der Erfassung des Qualitätsmerkmals (diskret / stetig) |
| Für die Prozesslage / Prozessstreuung / gesamte Verteilung | Art der kontrollierten Verteilungsparameter eines Qualitätsmerkmals (Lage- / Streuungsparameter / Urwerte) |
| Einseitige / Zweiseitige | Anzahl der Kontrollgrenzen (eine / zwei) |
| Einspurige / Zweispurige | Anzahl der überwachten Verteilungsparameter eines Qualitätsmerkmals (Lageparameter oder / und Streuungsparameter) |
| Ohne / Mit Gedächtnis | Berücksichtigung früherer Stichprobenbefunde (nein / ja) |
| Univariate / Multivariate | Anzahl der mit einer Kontrollkarte überwachten Qualitätsmerkmale (eins / mehrere) |
| Normalverteilungsannahme / Spezielle Vtlg. oder verteilungsunabhängig | Annahme eines normalverteilten Qualitätsmerkmals (ja / nein) |

Tabelle 4: Klassifikationsmöglichkeiten von Kontrollkarten, in Anlehnung an [MIT93], S. 44

Kontrollkarten lassen sich anhand ihres Verwendungszweckes nach verschiedenen Kriterien klassifizieren, die in Tabelle 4 dargestellt sind. Grundsätzlich lassen sich zwei generelle Typen unterscheiden. Ist das zu überwachende Qualitätsmerkmal diskret (typischerweise die Anzahl der fehlerhaften Einheiten), wird von **zählender Prozesskontrolle** oder auch **attributiver Fertigungsprüfung** gesprochen. In der Praxis haben sich allerdings Kontrollkarten für die **messende Prozesskontrolle** durchgesetzt, die als zugrundeliegendes Qualitätsmerkmal jede Art von stetigen Variablen besitzen können. Die weiteren Kapitel konzentrieren sich demzufolge auf diese Art von Kontrollkarten, detailliertere Ausführungen zur attributiven Fertigungsüberwachung sind in [MON01] zu finden.

Nahezu sämtliche Kontrollkarten basieren auf der Normalverteilungsannahme für die zu kontrollierenden Qualitätsmerkmale. Da die vorliegende Arbeit sich auf die Konstruktion von Kontrollkarten für den Wünschbarkeitsindex konzentriert und dieser schon aufgrund des beschränkten Wertebereiches auf $[0, 1]$ keine Normalverteilung annehmen kann, wird in Kapitel 4.2 nur ein Überblick über die wichtigsten dieser Kontrollkarten gegeben, die in der Praxis weit verbreitet sind. Kapitel 4.3 widmet sich verteilungsfreien Kontrollkarten, die universell, also auch für den Wünschbarkeitsindex, eingesetzt werden können. Dabei erfolgt eine Beschränkung auf den univariaten Fall, da der Wünschbarkeitsindex als eine Verdichtung von mehreren Qualitätsmerkmalen in eine univariate Kennzahl entsteht. Eine mögliche Alternative zur Verwendung des Wünschbarkeitsindexes im Falle einer multivariaten Qualitätskontrolle ist generell das Führen von multivariaten Kontrollkarten. Aus diesem Grunde stellt Kapitel 4.4 kurz das diesbezügliche Prinzip vor und gibt ferner einen Überblick über die hier durchführbare Ursachenanalyse für Phasen, in denen der betrachtete Prozess außer Kontrolle ist. Dies bietet die Grundlage für den Vergleich mit der in Kapitel 5.3 hergeleiteten Ursachenanalyse bei der Qualitätskontrolle mit Hilfe von Wünschbarkeitsindizes.

## 4.1 Theorie der Kontrollkarten

Aus statistischer Sicht werden die gezogenen Stichproben aus der laufenden Produktion mit festem Umfang $n$ als Realisationen von Zufallsvariablen aufgefasst. Für diese werden im Zuge der sinnvollen Anwendung einer Kontrollkarte die folgenden Basisannahmen getroffen (vgl. [MIT93]):

1. Die Stichprobenvariablen jeder gezogenen Einzelstichprobe sind unabhängig identisch verteilt mit endlicher Varianz.
2. Stichprobenvariablen, die zu unterschiedlichen Zeitpunkten erhoben werden, sind unabhängig bzw. bei einem sich unter Kontrolle befindlichen Prozessverlauf sogar unabhängig identisch verteilt (stationärer stochastischer Prozess).
3. Die Verteilung der Stichprobenvariablen ist bekannt.
4. Messfehler in den Stichprobenvariablen können vernachlässigt werden.

Ist der Prozess statistisch unter Kontrolle, sind die obigen Basisannahmen erfüllt. Treten hingegen systematische Änderungen in den kontrollierbaren Faktoren auf, ändern sich die Verteilungsparameter des Qualitätsmerkmals über die Zeit. Der Prozess ist dann insbesondere nicht mehr stationär. In der Testtheorie findet dies seine Entsprechung im folgenden Testproblem:

$H_0$ : Der Prozess ist statistisch unter Kontrolle (ungestört) vs.

$H_1$ : Der Prozess ist statistisch außer Kontrolle (gestört).

Dieses Testproblem führt auf einen zumeist parametrischen Signifikanztest auf Basis der verwendeten Stichprobenfunktion, der sukzessive an jedem Zeitpunkt der Stichprobenentnahme durchgeführt wird. Der Prozess wird auf Basis dieser Überlegungen als außer

Kontrolle betrachtet, wenn $H_0$ abgelehnt werden kann. Wenn also der Prozess statistisch unter Kontrolle ist, muss die betrachtete Stichprobenfunktion als Schätzer für den entsprechenden theoretischen Parameter im Annahmebereich des Tests liegen. Die Grenzen des Annahmebereiches und damit die untere und obere Kontrollgrenze bestimmen sich demnach durch die Grenzen des $(1-\alpha)$- Konfidenzintervalles für den interessierenden Parameter.

Dem zu wählenden Niveau $\alpha$ des durchgeführten Tests kommt zentrale Bedeutung zu. Wird der Abstand der Kontrollgrenzen zum Sollwert vergrößert, verringert sich zwar die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art, allerdings wird simultan die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art erhöht und umgekehrt. In der Praxis haben sich diesbezüglich bestimmte Konventionen entwickelt. Im deutschsprachigen Raum wird i. Allg. für die Kontrollgrenzen $\alpha = 0.01$ und für die Warngrenzen $\alpha = 0.05$ gewählt. Im angelsächsischen Bereich hingegen werden die Kontrollgrenzen bei einer Kontrollkarte für die Prozesslage mit Hilfe der sogenannten „Six-Sigma-Methodik“ bestimmt. Bei ungestörtem Prozessverlauf mit Erwartungswert $\mu_0$ und Standardabweichung $\sigma$ ergeben sich hier die Kontrollgrenzen zu $\mu_0 \pm 3\sigma$ und die Warngrenzen zu $\mu_0 \pm 2\sigma$ ([WEI99], S. 306).

Durch die Wahl des Testniveaus $\alpha$ ist der Fehler 1. Art unter Kontrolle. Die Beurteilung der Güte einer Kontrollkarte stützt sich demzufolge auf die Bestimmung des Fehlers 2. Art, d.h. auf die Wahrscheinlichkeit, den Prozess irrtümlicherweise als in Kontrolle anzusehen. Hierzu wird die **Operations-Charakteristik (OC-Funktion)** verwendet ([WEI99], S. 306 f.):

$$\begin{aligned} &OC(\theta) := P(\text{Schätzer liegt innerhalb der Kontrollgrenzen}|\mu = \theta) \text{ mit} \qquad (15)\\ &\mu: \text{ Interessierender Prozessparameter, } \theta: \text{ Wert aus dem Wertebereich von } \mu. \end{aligned}$$

Eine ideale OC-Funktion besitzt demnach an der Stelle des Sollwertes den Wert 1 und ansonsten den Wert 0. Dieser ideale Verlauf ist jedoch durch die existierenden Kontrollkarten nicht erfüllbar, die zugehörigen OC-Funktionen weisen i. Allg. einen glockenförmigen Verlauf auf. Durch den spezifizierten Fehler 1. Art kann die Funktion im Sollwert ferner nur einen Wert von $(1-\alpha)$ annehmen. Die Güte einer Kontrollkarte ist dann umso besser, je näher ihre OC-Funktion dem idealen Verlauf dieser Funktion kommt.

Die Wahrscheinlichkeitsaussage der OC-Funktion bezieht sich auf einen festen Zeitpunkt. Von Interesse ist in der Praxis aber auch, mit welcher Zeitspanne zu rechnen ist, um eine auftretende Prozessstörung zu erkennen. Hierzu wird die **Lauflänge (RL)** einer Kontrollkarte herangezogen, die eine diskrete Zufallsvariable darstellt und die Anzahl der benötigten Stichproben von einem Prozesseingriff bis zum nächsten spezifiziert. Als Vergleichsmaß für Kontrollkarten wird dann der Erwartungswert der Lauflänge, d.h. die **mittlere Lauflänge (ARL)** verwendet, die funktional mit der OC-Funktion zusammenhängt (vgl. [MIT93], S. 34):

$$ARL(\theta) := E(RL|\mu = \theta) = 1/(1 - OC(\theta)) \text{ mit} \tag{16}$$

$\mu$ : Interessierender Prozessparameter, $\theta$ : Wert aus dem Wertebereich von $\mu$,

$RL$ : Lauflänge.

Analog zur OC-Funktion sollte die ARL am Sollwert des Prozesses möglichst hohe Werte aufweisen, ansonsten möglichst kleine. An der Stelle des Sollwertes wird die Funktion **In-Control-ARL** genannt. Zum Vergleich zweier Kontrollkarten anhand des ARL-Kriteriums werden i. Allg. die Parameter für die Kontrollkarten so gesetzt, dass die Werte der In-Control-ARL in etwa übereinstimmen. Bevorzugt werden sollte dann diejenige Kontrollkarte, die eine vorgegebene Prozessstörung schneller erkennt.

Beachtet werden sollte jedoch allgemein, dass ein Prozessverlauf innerhalb der Kontrollgrenzen nicht zwangsläufig einen vollkommen störungsfreien Verlauf indiziert. Bei einer Kontrollkarte für die Prozesslage werden die Grenzen durch einen diesbezüglichen Signifikanztest für den Sollwert bestimmt. Ergibt sich eine andere Störung als eine Lageverschiebung, wird sie nicht unbedingt durch die Kontrollkarte erkannt. Insbesondere können nichtzufällige Verläufe wie Zyklen, Sprünge oder Varianzveränderungen entstehen, auch innerhalb der Kontrollgrenzen. Daher ist eine optische kritische Prüfung des Prozessverlaufes in der Kontrollkarte unerlässlich.

## 4.2 Überblick: Univariate Kontrollkarten auf Basis der Normalverteilung

Die Normalverteilungsannahme für die Qualitätsmerkmale eines Prozesses bildet die grundlegende Voraussetzung für nahezu sämtliche univariate Kontrollkarten. Tabelle 5 gibt eine Übersicht über die bekanntesten Kontrollkarten (KK) in der messenden Prozesskontrolle.

| **KK für die Prozesslage** | **KK für die Prozessstreuung** | **KK für Prozesslage und Prozessstreuung** | **KK für die gesamte Verteilung** |
|---|---|---|---|
| Mittelwert-Karte (OG)<br>Median-Karte (OG)<br>CUSUM-Karte (MG)<br>EWMA-$\bar{Y}$-Karte (MG) | R-Karte (OG)<br>S-Karte (OG)<br>EWMA-S-Karte (MG) | $\bar{Y}$-R-Karte (OG)<br>$\tilde{Y}$-R-Karte (OG)<br>$\bar{Y}$-S-Karte (MG)<br>EWMA-$\bar{Y}$-S-Karte (MG) | Einzelwert-Karte<br>Extremwert-Karte |

Tabelle 5: Univariate Kontrollkarten (KK) auf Basis der Normalverteilung; OG / MG: Ohne / Mit Gedächtnis. Details in [WEI99], S. 289 ff.

Die Darstellung beruht auf den in Tabelle 4 aufgeführten Klassifikationsmöglichkeiten von Kontrollkarten. Innerhalb der einzelnen Spalten unterscheiden sich die aufgeführten Kontrollkarten einerseits dahingehend, welcher Schätzer für den interessierenden Prozessparameter verwendet wird und andererseits hinsichtlich der Verwendung vergangener Stichprobeninformationen.

Bei den **Kontrollkarten für die Prozesslage** verwendet die Mittelwertkarte als Schätzer für den Erwartungswert des Qualitätsmerkmals den Stichprobenmittelwert, die Mediankarte den Stichprobenmedian. Die OC-Funktion der Mittelwertkarte kommt dem in Kapitel 4.1 beschriebenen idealen Verlauf einer OC-Funktion näher als die entsprechende Funktion der Mediankarte. Eine Auswahlentscheidung hängt jedoch auch davon ab, wie anfällig der Prozess für Ausreißerwerte in den Daten ist. In solchen Fällen wäre dann trotzdem die Mediankarte der Mittelwertkarte vorzuziehen, um verlässlichere Resultate zu erhalten. Die CUSUM-(Urwert)-Karte basiert auf den kumulierten Summen aller Abweichungen vom Sollwert und besitzt ein gleichmäßiges Gedächtnis, d.h. die vergangenen Abweichungen gehen mit gleichem Gewicht in die Berechnung ein. Die EWMA-$\bar{Y}$-Karte hingegen gibt durch eine exponentielle Glättung zeitlich näheren Beobachtungen höheres Gewicht als länger vergangenen.

Alternativ zu Kontrollkarten für die Prozesslage können auch **Kontrollkarten für die Prozessstreuung** von Interesse sein. Die R-Karte stützt sich auf die Spannweite der Realisationen einer Stichprobe als Schätzer für die Standardabweichung des Qualitätsmerkmals, die S-Karte basiert auf der Stichprobenstandardabweichung.

Die EWMA-S-Karte verwendet analog zur S-Karte die Stichprobenstandardabweichung als Schätzer für die Prozessstreuung. Hier kommt wie bei der EWMA-$\bar{Y}$-Karte das Verfahren der exponentiellen Glättung zum Einsatz. Sie ist zwar komplizierter zu bestimmen als die beiden vorangegangenen Karten, mit Ihrer Hilfe lassen sich jedoch geringe, schleichende Veränderungen in der Prozessstreuung schneller aufdecken. Am robustesten bzgl. Ausreißern und Fehlmessungen ist die S-Karte. Zu beachten ist ferner, dass symmetrische Kontrollgrenzen im Falle der R-Karte aufgrund der Unsymmetrie der Verteilung der Spannweite lediglich eine Approximation darstellen ([MON01]).

Sollen **Prozesslage und Prozessstreuung** simultan betrachtet werden, empfiehlt sich eine zweispurige Kontrollkarte. Hier werden jeweils eine Kontrollkarte für Prozesslage und Prozessstreuung parallel geführt. Der Prozess ist immer dann als statistisch außer Kontrolle anzusehen, wenn mindestens eine der beiden Kontrollkarten eine Prozessstörung anzeigt. Je nach Kombination der Kontrollkarten ergeben sich die Namen der in Tabelle 5 aufgeführten Karten. Dabei ist jedoch zu beachten, dass in diesem Fall beide Kontrollkarten auf denselben Stichprobendaten beruhen, also ein multipler Test durchgeführt wird. Hier sind die Signifikanzniveaus der einzelnen Tests so zu adjustieren, dass das multiple Signifikanzniveau $\alpha$ eingehalten wird. Sind die beiden verwendeten Schätzer voneinander unabhängig, ergibt sich das adjustierte Niveau $\tilde{\alpha}$ für die beiden einzelnen Kontrollkarten zu $\tilde{\alpha} = 1 - \alpha^2$. Diese Unabhängigkeit ist bei den aufgeführten Kontrollkarten gegeben. Bei einer Kombination der Median-Karte mit der S-Karte wäre dies nicht der Fall.

Eine Alternative zu zweispurigen Kontrollkarten stellen **Kontrollkarten für die gesamte Verteilung** dar, die im Folgenden exemplarisch vorgestellt werden, um in Kapitel 5 Vergleiche mit den dort vorgestellten Kontrollkarten für den Wünschbarkeitsindex ziehen zu können. Betrachtet wird ein normalverteiltes Qualitätsmerkmal $Y$ mit Erwartungswert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$. Hier werden die Realisationen der gezogenen Stichprobe nicht zu einer Stichprobenfunktion verdichtet, sondern direkt in die Kontrollkarte eingetragen. Dies ist immer dann sinnvoll, wenn eine Gruppenbildung aufgrund zu hoher Variabilität in den Daten nicht sinnvoll ist, das Prozessergebnis so sensibel ist, dass jeder einzelne Wert überwacht werden soll oder der zeitliche Abstand zwischen den Stichproben extrem groß ist:

- **Shewhart-Einzelwertkarte:** Pro Stichprobe werden die Realisationen einzeln in die Kontrollkarte eingetragen. Die Kontroll- und Warngrenzen sind hier nicht mehr Grenzen des Konfidenzintervalls für eine bestimmte Prozesskenngröße, sondern die Grenzen des Prognoseintervalls für die Realisationen des Qualitätsmerkmals. Zentral ist hier die Schätzung der Standardabweichung des Prozesses. Entweder kann die empirische Standardabweichung $s$ des Qualitätsmerkmals über den Anfangszeitraum des Prozesses oder zur Abbildung der lokalen Variabilität die gleitende Spannweite $s_q$ mit Fensterbreite $q$ (siehe [WEI99], S. 299) verwendet werden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} UCL/LCL &= \mu \pm 3 \cdot \sigma, \\ UWL/LWL &= \mu \pm 2 \cdot \sigma \qquad \text{bei bekannten Verteilungsparametern,} \\ UCL/LCL &= \bar{y} \pm 3 \cdot s \text{ [oder } s_q\text{]}, \\ UWL/LWL &= \bar{y} \pm 2 \cdot s \text{ [oder } s_q\text{] bei unbekannten Verteilungsparametern,} \end{aligned}$$

mit $s$ : empirische Standardabweichung des Qualitätsmerkmals,
$s_q$ : Gleitende Standardabweichung des Qualitätsmerkmals.

Die Sollwertlinie entspricht dem Wert $\mu$ bzw. $\bar{y}$. Es besteht die Möglichkeit, die Einzelwertkarte mit einer direkten Kontrollkarte für die gleitende Spannweite mit Fensterbreite 1 (erste Differenzen) zu kombinieren (vgl. [MON01], S. 250 ff.). Dies bietet vor allem Unterstützung zur Lokalisation des genauen Zeitpunktes, an dem eine Verschiebung der Prozesslage stattfindet, kann jedoch zur Aufdeckung von Änderungen der Prozessvariabilität kaum Informationen beisteuern.

- **Extremwertkarte:** Die Realisationen des Qualitätsmerkmals einer Stichprobe werden sämtlich zu einem Zeitpunkt in die Kontrollkarte eingetragen, sie erscheinen übereinander. Der Prozess ist nur dann als statistisch unter Kontrolle anzusehen, wenn sämtliche Realisationen und insbesondere die Extremwerte der Stichprobe innerhalb der Kontrollgrenzen liegen. Die Gruppenbildung bleibt also trotz der Betrachtung der Urwerte erhalten, die Karte weist jedoch eine größere Abweichung vom idealen Verlauf der OC-Funktion auf als die Mittelwert- oder Mediankarte. Ist die Basisannahme 1 aus Kapitel 4.1 erfüllt, d.h. die Realisationen innerhalb einer Stichprobe sind unabhängig identisch verteilt, ergeben sich nach [WEI99] (S. 301) die Grenzen aus der Forderung, dass bei ungestörtem Prozess eine Beobachtung mit einer Wahrscheinlichkeit von $100 \cdot \sqrt[g]{0.9973}$ % bzw. $100 \cdot \sqrt[g]{0.9545}$ % innerhalb dieser Grenzen liegt:

$$\begin{aligned} UCL/LCL &= \mu \pm m_{cg} \cdot \sigma, \\ UWL/LWL &= \mu \pm m_{wg} \cdot \sigma \qquad \text{bei bekannten Verteilungsparametern,} \\ UCL/LCL &= \bar{\bar{y}} \pm m_{cg} \cdot \bar{s} \text{ [oder } s*\text{]}, \\ UWL/LWL &= \bar{\bar{y}} \pm m_{wg} \cdot \bar{s} \text{ [oder } s*\text{] bei unbekannten Verteilungsparametern,} \end{aligned}$$

mit $\bar{\bar{y}}$ : Arithmetisches Mittel aller Stichprobenmittelwerte,

$\bar{s}$ : Arithmetisches Mittel der Stichprobenstandardabweichungen,

$s*$ : Globale Variabilität, Standardabweichung aller Realisationen aus der Anfangsphase des Prozesses,

$m_{cg}, m_{wg}$ : gemäß nachstehender Tabelle:

| g | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_{cg}$ | 3.22 | 3.32 | 3.4 | 3.46 | 3.51 | 3.55 | 3.58 | 3.61 | 3.64 |
| $m_{wg}$ | 2.27 | 2.42 | 2.53 | 2.6 | 2.66 | 2.71 | 2.76 | 2.8 | 2.83 |

Als Sollwertlinie kommt $\mu$ bzw. $\bar{\bar{y}}$ zur Anwendung.

Welche Kontrollkarte für einen vorliegenden Prozess geeignet ist, muss im Einzelfall anhand des interessierenden Prozessparameters und der beschriebenen Eigenschaften der Kontrollkarten entschieden werden. Geprüft werden sollte allerdings in jedem Fall, ob die Grundannahme der Normalverteilung des Qualitätsmerkmals wirklich erfüllt ist. Je nach Art der verwendeten Kontrollkarte kann eine Verletzung dieser Annahme zu ungeeigneten Kontrollgrenzen und somit zu starken Fehleinschätzungen bzgl. der Qualität des Prozesses führen. Während die Mittelwertkarte nach ([MON91], s. 232 f.) relativ robust ist gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung, ist dies bei der R-Karte nicht mehr der Fall. Außerdem wird auf die starke Sensitivität der Einzelwertkarte auf Abweichungen von der Normalverteilung hingewiesen (S. 254 f.). Liegt beispielsweise eine Gammaverteilung vor, liegt die In-Control-ARL je nach Parameterwahl nur bei 12 % bis 26 % von der In-Control-ARL, die bei einer Normalverteilung erzielt wird. Bei Verwendung der t-Verteilung werden ebenfalls nur Werte von 21 % bis 76 % erreicht. Hier sollte die Normalverteilungsannahme demnach genau geprüft werden. Andere Resultate ergeben sich für die EWMA-$\bar{Y}$-Karte (S. 432). Diese ist im Vergleich zur Einzelwertkarte sehr viel robuster gegenüber einer Verletzung der Normalverteilungsannahme. Die CUSUM-Karte stellt zwar auch eine Kontrollkarte mit Gedächtnis dar, ist allerdings nach [RYA01] nicht robust gegenüber Nichtnormalität, problematisch sind vor allem sehr schiefe Verteilungen und Verteilungen mit schweren Rändern.

Von der Anwendung der vorgestellten Kontrollkarte bei Nichtvorliegen der Normalverteilungsannahme wird also abgeraten. In diesen Fällen kann entweder eine verteilungsfreie

Kontrollkarte zum Einsatz kommen (vgl. Kapitel 4.3), oder es müssen spezielle Kontrollgrenzen für die vorliegende Verteilung hergeleitet werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, das Qualitätsmerkmal mittels einer geeigneten Transformation in ein normalverteiltes Qualitätsmerkmal zu überführen, um im Anschluss eine der vorgestellten Kontrollkarten anzuwenden. Hierzu bietet sich beispielsweise die Inverse Normalmethode an, die in [SHO01] speziell für den Zweck der Prozesskontrolle in verschiedenen Varianten bereitgestellt wird.

Des Weiteren sollte immer geprüft werden, ob die errechneten Kontrollgrenzen innerhalb der Spezifikationsgrenzen des Prozesses liegen, die z.B. aus technischer Sicht akzeptable Wertebereiche für das Qualitätsmerkmal darstellen. Sind diese enger als die Kontrollgrenzen, kann ihre Einhaltung auf Dauer nicht garantiert werden. Zur Beurteilung können Prozessfähigkeitsindizes ([WEI99], S. 350 ff.) herangezogen werden.

## 4.3 Verteilungsfreie univariate Kontrollkarten

Verteilungsfreie Kontrollkarten kommen immer dann zum Einsatz, wenn das betrachtete Qualitätsmerkmal entweder nicht normalverteilt ist und keine spezielle Kontrollkarte für die vorliegende Verteilung existiert, oder wenn die Verteilung des Qualitätsmerkmals im Vorfeld nicht bekannt ist und auch nicht durch eine Prozessbeobachtung über einen längeren Zeitraum geschätzt werden soll. Diese Kontrollkarten werden ohne Ansicht der Verteilung des Qualitätsmerkmals immer auf dieselbe Art und Weise bestimmt und basieren auf nichtparametrischen statistischen Methoden. Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, entspricht eine Kontrollkarte der sukzessiven Anwendung eines statistischen Tests bzgl. des interessierenden Prozessparameters. Im Fall von normalverteilten Qualitätsmerkmalen werden hierzu auf der Normalverteilung basierende Tests herangezogen, beispielsweise der Einstichproben-t-Test bei der Mittelwert-Karte. Verteilungsfreie Kontrollkarten verwenden nach analogem Prinzip nichtparametrische Tests, die zumeist auf Rangstatistiken beruhen. Eine zentrale Rolle kommt dabei dem klassischen Vorzeichentest und dem Vorzeichen-Rangtest nach Wilcoxon (siehe dazu [BUE94] S. 69 ff. / S. 97 ff.) zu, deren Teststatistiken direkt oder in modifizierter Form in einer Reihe von Kontrollkarten Verwendung finden. Die formale Definition einer verteilungsfreien Kontrollkarte erfolgt nach [CHA01] über die mittlere Lauflänge (ARL):

**Definition 4.3.1 (Verteilungsfreie Kontrollkarte)** *Eine Kontrollkarte heißt verteilungsfrei, wenn die Verteilung der mittleren Lauflänge bei ungestörtem Prozessverlauf (In-Control-ARL) für alle stetigen Verteilungen identisch ist.*

Liegt keine Normalverteilung zugrunde, verringert sich bei Anwendung einer verteilungsfreien Karte die In-Control-ARL nicht, wie es gemäß Kapitel 4.2 bei Anwendung einer auf der Normalverteilung basierenden Kontrollkarte im allgemeinen der Fall wäre. Zusammenfassend bieten sich die folgenden **Vorteile**:

- Die Verteilung des zugrundeliegenden Qualitätsmerkmals muss nicht spezifiziert werden.
- Die Verteilung der In-Control-ARL sowie der Rate für Fehlalarme ist für alle stetigen Verteilungen gleich.
- Verteilungsfreie Kontrollkarten sind sehr robust und ausreißerresistent.
- Für Fälle, in denen die Verteilung nicht normal ist, vor allem bei Verteilungen mit schweren Rändern, sind verteilungsfreie Kontrollkarten effizienter in der Erkennung von Prozessveränderungen. Bei Normalverteilung sind sie ähnlich effizient, jedoch meist etwas unterlegen.

Trotz dieser ersichtlichen Vorteile ist der Forschung in diesem Bereich und vor allem der praktischen Verwendung der Kontrollkarten lange kein verstärktes Interesse beigemessen worden. Allzu oft wird dem Zentralen Grenzwertsatz vertraut und einfach die Normalverteilung angenommen, was schon bei moderaten Abweichungen von der Normalverteilung zu extremen Fehleinschätzungen der Prozessqualität führen kann (vgl. Kapitel 4.2). Insbesondere gibt es bisher keine Arbeit, die eine vergleichende Analyse der Güte der verteilungsfreien Kontrollkarten liefert. Die existierenden Gütevergleiche werden lediglich im Vergleich zu den parametrischen, auf der Normalverteilung beruhenden Kontrollkarten durchgeführt. Eine allgemeingültige Empfehlung, welche verteilungsfreie Kontrollkarte zu bevorzugen ist, kann daher nicht gegeben werden. Anhang B gibt ein Überblick über die bekanntesten verteilungsfreien Kontrollkarten, die sich fast ausnahmslos auf die Kontrolle der Prozesslage konzentrieren. Die Notation der Tabelle bezieht sich dabei auf die Situation, dass $n$ Realisationen eines Qualitätsmerkmals $Y$, d.h. $y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vorliegen, die in Gruppen der Größe $g$ zusammengefasst werden. Die angegebenen Teststatistiken werden für jede Stichprobe bestimmt und zur laufenden Prozesskontrolle verwendet.

Ein Großteil der Referenzen entstammt einem Übersichtsartikel von [CHA01], der neben der Darstellung der einzelnen Ansätze auch eine gute Einführung in die Thematik liefert. Es erfolgt hier eine Einschränkung auf Kontrollkarten ohne Gedächtnis, da nur das Konstruktionsprinzip dargestellt und ein Überblick über nichtparametrische Kontrollkarten gegeben werden soll. Einen umfassenden Überblick über nichtparametrische CUSUM- und EWMA-Karten bietet ebenfalls [CHA01]. Diese Karten basieren auf denselben Ansätzen wie ihre parametrischen Gegenstücke. Bewusst außen vorgelassen ist ferner auch der Bereich der nichtparametrischen Kontrolle von Finanzmarktzeitreihen (z.B. [SCH00], [STE02]), da hier ein anderer Fokus vorliegt.

Wie aus Tabelle 18 ersichtlich, existieren verschiedene nichtparametrische Kontrollkarten für die Prozesslage, die zumeist auf die Kontrolle des Prozessmedians ausgerichtet sind. Im Folgenden wird exemplarisch im Zuge eines kurzen Überblickes lediglich die Zaunkarte aufgeführt, die nicht auf Rangstatistiken, sondern auf Quantilen beruht. Diese wird zudem in Kapitel 5 im Vergleich mit den hergeleiteten Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes betrachtet sowie zur Illustration der Ursachenanalyse von Prozessstörungen in Kapitel 5.3.1 herangezogen. Außerdem wird sie in Kapitel 6.2.5 zur Prozesskontrolle eines automatischen Multishuttle-Lagers verwendet.

- **Zaunkarte:** Die Zaunkarte stellt eine Urwertkarte dar, d.h. die Realisationen des Qualitätsmerkmals werden nicht pro Stichprobe verdichtet, sondern sukzessiv in die Kontrollkarte eingetragen. Sie beruht auf der theoretischen (nicht notwendigerweise Normalverteilung) oder empirischen Verteilung der Merkmalswerte und weist eine Analogie zu Box-Plots auf, die in der deskriptiven Datenanalyse Anwendung finden. Bei einem Box-Plot werden alle Beobachtungen, die außerhalb der inneren Zäune (Oberes Quartil + 1.5·Quartilsdifferenz, Unteres Quartil - 1.5·Quartilsdifferenz) liegen, als Ausreißer betrachtet. Diese Idee findet sich in der Zaunkarte wieder. Die beobachteten Werte $y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ des Qualitätsmerkmals $Y$ werden in die Zaunkarte eingezeichnet und verbunden. Die unteren und oberen Kontrollgrenzen (LCL, UCL) werden dann wie folgt bestimmt:

$$LCL = Q_{0.25} - 1.5 \cdot (Q_{0.75} - Q_{0.25}) \text{ und } UCL = Q_{0.75} + 1.5 \cdot (Q_{0.75} - Q_{0.25})$$
$$\text{bei bekannter Verteilung des Qualitätsmerkmals bzw.}$$
$$LCL = q_{0.25} - 1.5 \cdot (q_{0.75} - q_{0.25}) \text{ und } UCL = q_{0.75} + 1.5 \cdot (q_{0.75} - q_{0.25})$$
$$\text{bei unbekannter Verteilung des Qualitätsmerkmals.}$$

Dabei bezeichnet $Q_\alpha$ das theoretische $\alpha$-Quantil der Verteilung von $Y$ und $q_\alpha$ das empirische $\alpha$-Quantil sämtlicher Beobachtungen einer Referenzstichprobe. Zusätzlich wird der Median als Orientierungslinie eingetragen. Die Kontrollkarte bietet den Vorteil, dass evtl. vorhandenes Wissen über die Verteilung des Qualitätsmerkmals über die theoretischen Quartile miteinbezogen werden kann und dann keine Referenzstichprobe oder Rangstatistiken benötigt werden. Im Fall der Normalverteilung führt dieses Vorgehen allerdings zu weiteren Grenzen als bei der Mittelwertkarte.

Auf derselben Idee wie die Zaunkarte beruht die Boxplot-Karte (vgl. [WEI99], S. 303). Pro Zeitpunkt der Stichprobenentnahme wird ein Boxplot dieser Stichprobe in die Kontrollkarte eingezeichnet. Diese ist allerdings rein deskriptiv zu verstehen, da keine Kontrollgrenzen eingezeichnet werden. Zur Gewinnung eines Überblicks über die Daten kann eine solche Karte jedoch durchaus hilfreich sein.

## 4.4 Ursachenanalyse bei multivariaten Kontrollkarten

Zur Beurteilung der Qualität eines Prozesses werden in der Praxis zumeist mehrere Qualitätsmerkmale herangezogen, für die i. Allg. separate univariate Kontrollkarten geführt werden. Dieses Vorgehen hat jedoch entscheidende Nachteile. Zum einen werden Abhängigkeiten zwischen einzelnen Merkmalen nicht berücksichtigt, zum anderen wird durch das parallele Führen der Kontrollkarten das multiple Signifikanzniveau nicht eingehalten. Im seltenen Fall der Unabhängigkeit aller Qualitätsmerkmale kann zwar eine Bonferroni-Adjustierung der Signifikanzniveaus verwendet werden ([LIU95], S. 1386), dennoch ist die Übersichtlichkeit bei Vorliegen sehr vieler Qualitätsmerkmale stark eingeschränkt. Multivariate Kontrollkarten begegnen diesen Problemen durch die Einbeziehung der Kovarianzstruktur der Qualitätsmerkmale sowie durch die Bildung von univariaten Teststatistiken, die bei ungestörtem Prozess lediglich die Betrachtung einer Kontrollkarte erfordern.

Für die meisten der in Kapitel 4.2 vorgestellten Kontrollkarten gibt es eine multivariate Verallgemeinerung. Eine Übersicht über diese sowie spezielle multivariate Kontrollkarten gibt Anhang C. Es wird deutlich, dass zum einen sehr viele Modifikationen existierender Kontrollkarten für bestimmte Fragestellungen vorhanden sind und zum anderen gerade in den letzten Jahren sehr viel Forschungsarbeit auf diesem Gebiet geleistet worden ist. Die wohl bekannteste multivariate Kontrollkarte ist die **$\mathbf{T}^2$- Karte**, die von Hotelling 1947 vorgestellt wurde ([HOT47]) und als direkte Verallgemeinerung der univariaten Mittelwertkarte zu verstehen ist ([MON01], S. 515). Eine Beschreibung der $T^2$-Karte für Einzelwerte findet sich ab S. 522.

Ein großes Problem bei der Anwendung multivariater Kontrollkarten ist allgemein die schwierige Interpretation von Überschreitungen der Kontrollgrenzen. Durch Verdichtung der multivariaten Stichprobenbeobachtungen in univariate Teststatistiken ist die konkrete Ursachenanalyse zumeist nur schwer oder gar nicht möglich. Prozessstörungen können entweder direkt durch Verschiebungen einzelner Qualitätsmerkmale entstehen oder aber durch Änderungen in der Kovarianzstruktur zwischen den Merkmalen. Wird beispielsweise die $T^2$-Einzelwertkarte für zwei positiv korrelierte Qualitätsmerkmale betrachtet, kann entweder eine Kontrollkarte für $T^2$ herangezogen werden oder aber ein Scatterplot der beiden Merkmale mit elliptischem Kontrollbereich (vgl. Abbildung 10). Hier sind zusätzlich die überlagerten univariaten Kontrollgrenzen eingezeichnet, die bei Anwendung zweier univariater Mittelwertkarten entstehen würden. Die Verwendung dieser Grenzen hätte einen rechteckigen Kontrollbereich zur Folge. Eine Prozessstörung, die von einer Beobachtung außerhalb der Ellipse und außerhalb des Rechteckes verursacht wird, lässt sich durch Veränderungen in einer einzelnen Variablen begründen (Punkt A). Liegt die Beobachtung zwar außerhalb der Ellipse, aber innerhalb des Rechteckes (Punkt B), würden die univariaten Kontrollkarten keine Störung anzeigen. Es liegt also eine Veränderung der Abhängigkeitsstruktur der beiden Merkmale vor.

Die Analyse wirkt zwar in diesem Fall recht einfach, sie ist jedoch für größere Anzahlen von Qualitätsmerkmalen nicht mehr grafisch durchführbar. Außerdem wird die Interpretation immer schwieriger, je komplizierter die verwendete Teststatistik ist (z.B. bei Kontrollkarten mit Gedächtnis), und die zeitliche Ordnung der Beobachtungen geht verloren. Daher konzentrieren sich die meisten Ansätze der Ursachenanalyse auf die $T^2$-Statistik. Diese werden im Folgenden skizziert, um die Problematik zu verdeutlichen und Vergleiche zur Ursachenanalyse bei der Kontrolle des Wünschbarkeitsindexes ziehen zu können (vgl.

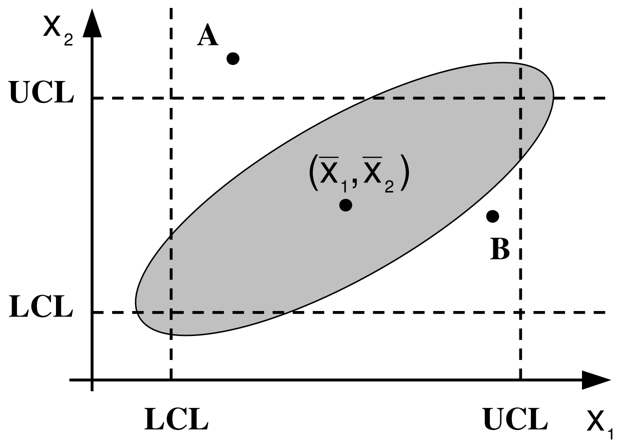



Abbildung 10: Kontrollellipse auf Basis der $T^2$-Statistik (A, B: Prozessstörungen)

Kapitel 5.3). Der Wünschbarkeitsindex entsteht auch durch Verdichtung der Qualitätsmerkmale in eine univariate, allerdings interpretierbare Größe und ist als Alternative zur Prozesskontrolle mit Hilfe multivariater Kontrollkarten zu sehen.

Die populärsten Methoden zur Interpretation von Prozessstörungen bei Verwendung der $T^2$-Karte stützen sich auf eine Zerlegung der $T^2$-Statistik in orthogonale Komponenten, die voneinander unabhängige Beiträge zur Größe der $T^2$- Statistik liefern. Ein Ansatz ist die Transformation der Qualitätsmerkmale in **Hauptkomponenten**, d.h. in neue unkorrelierte Variablen, die Linearkombinationen der Qualitätsmerkmale darstellen. Die $T^2$-Statistik lässt sich dann durch eine gewichtete Summe der quadrierten Hauptkomponenten ausdrücken. Im Falle der Überschreitung der Kontrollgrenze wird als Ursache diejenige Hauptkomponente selektiert, die den größten Beitrag zur $T^2$-Statistik besitzt. Allerdings kommen die Hauptkomponenten wiederum durch ein Zusammenspiel mehrerer Qualitätsmerkmale zustande, sodass auch hier die Interpretation nicht einfach ist. Es ist jedoch möglich, durch Bestimmung der Beiträge der Qualitätsmerkmale zu den Hauptkomponenten eine Bestimmung der verantwortlichen Qualitätsmerkmale vorzunehmen ([WEI99], S. 334 f.).

Alternativ kann eine Transformation der Qualitätsmerkmale in Hauptkomponenten nicht nur im Nachhinein zur Ursachenanalyse, sondern vor der Bildung der $T^2$-Karte erfolgen. So kann durch Auswahl derjenigen Hauptkomponenten, die etwa 95% der Variation der Daten ausmachen, eine Dimensionsreduktion des Problems erreicht werden. Es erfolgt eine Approximation der $T^2$-Statistik durch eine gewichtete Summe dieser Hauptkomponenten, wobei zusätzlich der quadrierte Näherungsfehler (SPE) dieser Approximation betrachtet wird. Die Prozesskontrolle erfolgt dann durch die Führung einer Kontrollkarte für die angenäherte $T^2$-Statistik sowie durch eine Kontrollkarte für den SPE, mit deren Hilfe die weitere Gültigkeit dieser Approximation geprüft wird ([WEI99], S. 337 f.). Auch hier wird dann im Falle einer Prozessstörung nach obigem Vorgehen nach den verantwortlichen Qualitätsmerkmalen gesucht. Ein Problem ist jedoch neben der u. U. problematischen Interpretation, dass zwar Verschiebungen entlang der Hauptkomponenten sehr gut, aber beispielsweise Verschiebungen, die nahezu orthogonal dazu auftreten, schlecht oder gar nicht erkannt werden ([MON01], S. 541).

Eine andere Form der **orthogonalen Zerlegung** schlägt [MAS95] vor. Bei Betrachtung von $k$ Qualitätsmerkmalen wird die $T^2$-Statistik in eine Summe von $k$ unabhängigen Komponenten zerlegt, die aus einer Mischung von univariaten $T^2$-Statistiken für einzelne Qualitätsmerkmale (unbedingte Terme) und $T^2$-Statistiken für standardisierte Residuen der Regression eines einzelnen Qualitätsmerkmals auf eine Teilmenge der anderen Residuen entsteht (bedingte Terme). Signifikante Werte für einen unbedingten Term indizieren eine Verschiebung dieser Variable, signifikante Werte der bedingten Terme weisen auf Veränderungen im Zusammenspiel der beteiligten Variablen hin. Sind signifikante Terme gefunden, können diese mit derselben Methodik weiter zerlegt werden. Diese Art der Zerlegung ist allerdings recht kompliziert und vor allem nicht eindeutig. So müssen unter Umständen sehr viele Zerlegungen ausprobiert werden, um zu einem Ergebnis der Ursachenanalyse zu gelangen. In [MAS97] wird ein diesbezüglicher Algorithmus vorgestellt. Die Methodik der **Regressionsanpassung** kann auch losgelöst von der $T^2$-Kontrollkarte verwendet werden ([MON01], S. 529 ff.). Zur Aufdeckung von Änderungen in der Abhängigkeitsstruktur der Qualitätsmerkmale wird in der Analysephase des Prozesses eine Regression eines Qualitätsmerkmals auf die restlichen Qualitätsmermale durchgeführt, im laufenden Prozess werden dann univariate Kontrollkarten für die Residuen aufgestellt.

Einen einfacheren Ansatz beschreibt [RUN96]. Der Ausdruck $m_i = T^2 - T^2_{(i)}$ stellt den relativen Beitrag des $i$-ten Qualitätsmerkmals zur $T^2$-Statistik dar, wobei $T^2_{(i)}$ den Wert der Teststatistik bei Ausschluss des $i$- ten Qualitätsmerkmals bezeichnet. Im Fall der Überschreitung der oberen Kontrollgrenze durch die $T^2$-Statistik werden die Werte $m_1, ..., m_k$ berechnet. Alle Qualitätsmerkmale, für die der entsprechende Ausdruck das $\alpha$-Quantil der $\chi^2$-Verteilung mit einem Freiheitsgrad ($\chi^2_{\alpha,1}$) überschreitet, werden als Verursacher der Prozessstörung identifiziert. Neben den dargestellten Methoden für die $T^2$-Karte gibt es einige wenige weitere wie z.B. die Verwendung der Diskriminanzanalyse zur Interpretation von Prozessstörungen ([CHU92]) oder das simultane Führen von univariaten Kontrollkarten mit exakten simultanen Konfidenzintervallen ([HAY94]).

Trotz der Vielzahl der existierenden multivariaten Kontrollkarten wird der Ursachenanalyse außer bei der $T^2$-Karte zumeist wenig Beachtung geschenkt. Zwar ist eine Dimensionsreduktion durch Bildung von Hauptkomponenten prinzipiell bei allen parametrischen Kontrollkarten denkbar, wird aber nicht fokussiert. Lediglich [SPIR98] schlagen für ihre T-MSE-$S^2$-Karte (vgl. Tabelle 19 in Anhang C) eine Ursachenanalyse durch Ausprobieren verschiedener Gewichtungen der Qualitätsmerkmale vor. Unterstützung liefern können allerdings Karten für spezielle Fragestellungen wie beispielsweise die $U^2$-Karte, die Erwartungswertverschiebungen in Teilmengen der Qualitätsmerkmale untersucht.

Die in Kapitel 5.3 entwickelte Methodik zur Ursachenanalyse bei der Prozesskontrolle mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes und Urwertkarten basiert auf einer Rückrechnung der unteren Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex auf Kontrollgrenzen für die zugehörigen Wünschbarkeitsfunktionen und Qualitätsmerkmale. Die so entstehenden Kontrollgrenzen spiegeln die Abhängigkeiten zwischen den Qualitätsmerkmalen wider, sind einfach zu verstehen und anzuwenden. Durch genaue optische Betrachtung lässt sich ferner die Art der Veränderung des jeweiligen Qualitätsmerkmals (Trend, Varianzveränderung) bestimmen. Eine beispielhafte Darstellung des Vorgehens wird in den Kapiteln 5.3.1 und 5.3.2 bereitgestellt.

# 5 Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes

Der Wünschbarkeitsindex wird derzeit primär zur Optimierung von Prozessen verwendet. Wie in Kapitel 2 beschrieben, werden durch Versuchsplanungsmethoden für die interessierenden Qualitätsmerkmale in Abhängigkeit bestimmter Einflussgrößen mathematische Modelle aufgestellt. Durch Bildung des Wünschbarkeitsindexes lässt sich dieser ebenfalls als Funktion der Einflussgrößen darstellen, die mittels graphischer oder numerischer Methoden optimiert wird. Alle in Kapitel 3 aufgeführten Publikationen benutzen den Wünschbarkeitsindex im Zuge dieses Vorgehens.

Sind auf diese Art und Weise optimale Einstellungen der Einflussgrößen gefunden worden, wird der Prozess unter Verwendung dieser Einstellungen fortgeführt. Zur Überwachung des Prozesses wird dann jedoch nicht der zur Optimierung verwendete Wünschbarkeitsindex, sondern werden direkt die Qualitätsmerkmale herangezogen, für die entweder separate univariate oder multivariate Kontrollkarten aufgestellt werden. Hier lassen sich zwar direkt Störungen in den Verläufen einzelner Qualitätsmerkmale erkennen, die Beurteilung der Gesamtprozessqualität wird jedoch je nach Anzahl der betrachteten Qualitätsmerkmale beliebig komplex. Werte außerhalb der Kontrollgrenzen können bei einem Qualitätsmerkmal fatale Auswirkungen auf die Gesamtqualität besitzen, bei einem anderen Merkmal können diese über kurze Zeiträume durchaus zu verkraften sein. Eine Gewichtung der Merkmale erfolgt letztendlich im Kopf der Person, die den Prozess überwacht.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich demzufolge auf die Verwendung des Wünschbarkeitsindexes nicht nur zur Prozessoptimierung, sondern vielmehr auch zur Prozesskontrolle. So kann anhand einer einzelnen dimensionslosen Kennzahl die Gesamtprozessqualität beurteilt werden. Diese Kennzahl nimmt der für die Qualitätskontrolle verantwortlichen Person die Priorisierung der Qualitätsmerkmale ab und bezieht ferner Präferenzen bzgl. der Wertebereiche der einzelnen Merkmale mit ein. Die für die Aufstellung der Kontrollkarten benötigte Verteilung des Wünschbarkeitsindexes wird in Kapitel 5.1 bereitgestellt, geeignete Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes finden sich in Kapitel 5.2.

Liegt ein Wert des Wünschbarkeitsindexes außerhalb der Kontrollgrenzen, kann mit Hilfe einer Rückrechnung der Kontrollgrenzen für den Wünschbarkeitsindex auf entsprechende Grenzen für die Wünschbarkeitsfunktionen oder auch die Qualitätsmerkmale selbst eine Ursachenanalyse durchgeführt werden. Das diesbezügliche Vorgehen wird in Kapitel 5.3 beschrieben.

## 5.1 Die Verteilung von Wünschbarkeitsfunktionen und -indizes

Die Aufstellung einer Kontrollkarte für ein interessierendes Qualitätsmerkmal basiert nach Kapitel 4 auf dessen Verteilung. Idealerweise sollten dabei vor Start der Prozesskontrolle Informationen über diese Verteilung vorliegen, um z.B. direkt mit Hilfe der zugehörigen Quantile Kontrollgrenzen aufstellen zu können. Müssen die Parameter der Verteilung oder gar die Verteilungsform selbst aus der Analysephase bestimmt werden, tritt der Nachteil auf, dass zum einen die wirkliche Prozesskontrolle erst nach der Analysephase starten kann und zum anderen zumeist in diesen Fällen eine relativ geringe Datenbasis vorliegt, um den Start der Prozesskontrolle nicht allzu lange zu verzögern. So können durch Verwendung der empirischen Verteilung der Daten aus der Analysephase Verzerrungen entstehen, da u.U. das reale Prozessverhalten nicht vollständig abgebildet wird.

Im Folgenden wird bei Verwendung der Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes sukzessive hergeleitet. Im ersten Schritt wird unter Normalverteilungsannahme der Qualitätsmerkmale die Verteilung der resultierenden Wünschbarkeitsfunktion für den ein- und zweiseitigen Fall inklusive ihrer Eigenschaften bestimmt. Daran schließt sich die Bestimmung der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes an. Diese wird getrennt für den ein- und zweiseitigen Fall der Wünschbarkeitsfunktionen hergeleitet. Eine allgemeingültige Formel lässt sich aufgrund der beliebigen Kombinationsmöglichkeiten von ein- und zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktionen nicht angeben.

Die Herleitung der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes erfolgt sowohl für den Fall, in dem der geometrische Mittelwert gemäß Definition 2.2.1 zur Bildung des Wünschbarkeitsindexes verwendet wird als auch für den Fall, in dem das Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen gemäß (10) aus Kapitel 2.2 zur Anwendung kommt.

### 5.1.1 Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington

Betrachtet wird im Folgenden ein durch $k$ normalverteilte Qualitätsmerkmale charakterisierter Prozess. Die Präferenzen bzgl. der Wertebereiche dieser Qualitätsmerkmale werden über Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington gemäß Kapitel 2.1.1 ausgedrückt. Unter diesen Annahmen wird zunächst die Dichtefunktion der resultierenden Wünschbarkeitsfunktion hergeleitet.

**Satz 5.1.1 (Dichte der Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington )** *Gegeben sei ein Qualitätsmerkmal $Y_i$ mit $i \in \{1, \dots, k\}$ und $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Dann besitzt die Wünschbarkeitsfunktion $d_i$ ($d_i \in (0,1]$) nach Harrington aus Kapitel 2.1.1 die folgende Dichte:*
***1. Einseitige Spezifikation:***

$$f_{D_i}(d_i) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \log(d_i) \cdot d_i} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(-\log(d_i)) - \tilde{\mu}_i)^2\right]$$

*mit*

$$\tilde{\mu}_i = -(b_{0i} + b_{1i} \cdot \mu_i), \qquad \tilde{\sigma}_i^2 = (b_{1i})^2 \cdot \sigma_i^2, \qquad \tilde{\mu}_i \in \mathbb{R}, \tilde{\sigma}_i^2 \in \mathbb{R}_0^+.$$

*Es ergibt sich demnach die Doppelt-Lognormal-Verteilung ([MEI87],[HOL89]) mit Parametern $\tilde{\mu}_i$ und $\tilde{\sigma}_i^2$ ($\mathcal{DLN}(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i^2)$).*

***2. Zweiseitige Spezifikation:***

$$f_{D_i}(d_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i}(-\log(d_i))^{1/n_i - 1} \cdot \left[e^{-((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2/2\tilde{\sigma}_i^2} + e^{-((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2/2\tilde{\sigma}_i^2}\right]$$

*mit*

$$\tilde{\mu}_i = \tfrac{2}{USL_i - LSL_i} \cdot \mu_i - \tfrac{USL_i + LSL_i}{USL_i - LSL_i}, \qquad \tilde{\sigma}_i^2 = (\tfrac{2}{USL_i - LSL_i})^2 \cdot \sigma_i^2, \qquad \tilde{\mu}_i \in \mathbb{R}, \tilde{\sigma}_i^2 \in \mathbb{R}_0^+.$$

**Beweis:**
**1. Einseitige Spezifikation:**
Gegeben ist $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} Y_i' &\sim \mathcal{N}(b_{0i} + b_{1i} \cdot \mu_i, (b_{1i})^2 \cdot \sigma_i^2) \\ \Rightarrow -Y_i' &\sim \mathcal{N}(-(b_{0i} + b_{1i} \cdot \mu_i), (b_{1i})^2 \cdot \sigma_i^2) \\ \Rightarrow Z_i := e^{-Y_i'} &\sim \mathit{Lognormal}(-(b_{0i} + b_{1i} \cdot \mu_i), (b_{1i})^2 \cdot \sigma_i^2). \end{aligned}$$

Die Dichte von $Z_i$ hat demnach die folgende Form:

$$f_{Z_i}(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}_i z_i} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(z_i) - \tilde{\mu}_i)^2\right]$$

mit $\tilde{\mu}_i = -(b_{0i} + b_{1i} \cdot \mu_i)$ und $\tilde{\sigma}_i^2 = (b_{1i})^2 \cdot \sigma_i^2$.

**Lemma 5.1.2 (Transformationssatz für Dichten )** *Sei $X$ eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(\cdot)$ sowie $\Psi = \{x : f_X(x) > 0\}$. Unter den Annahmen*
*(i) $y = g(x)$ definiert eine eineindeutige Abbildung von $\Psi$ nach $\Omega$,*
*(ii) $x = g^{-1}(y)$ ist stetig in $y$ und ungleich Null für alle $y \in \Omega$,*
*gilt: $Y = g(X)$ ist eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte*

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| f_X(g^{-1}(y)) \cdot I_\Omega(y) \text{ mit } I_\Omega(y): \text{ Indikatorfunktion von } y \text{ über } \Omega.$$

***Beweis:*** *siehe [MOO74], S. 200.*

Für $W_i := \exp(Z_i)$ gilt nach Lemma 5.1.2:

$$\begin{aligned}
f_{W_i}(w_i) &= f_{Z_i}(\log(w_i)) \cdot \frac{1}{w_i}, \quad \text{d.h.} \\
f_{W_i}(w_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \log(w_i) \cdot w_i} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(\log(w_i)) - \tilde{\mu}_i)^2\right].
\end{aligned}$$

Genauso gilt für $D_i = W_i^{-1} = \exp[-\exp(-Y_i')]$:

$$\begin{aligned}
f_{D_i}(d_i) &= f_{W_i}(1/d_i) \cdot \frac{1}{d_i^2}, \quad \text{d.h.} \\
f_{D_i}(d_i) &= \frac{d_i}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \log(1/d_i) \cdot d_i^2} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(\log(1/d_i)) - \tilde{\mu}_i)^2\right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot \log(d_i) \cdot d_i} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(-\log(d_i)) - \tilde{\mu}_i)^2\right].
\end{aligned}$$

**2. Zweiseitige Spezifikation:**
Gegeben ist $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Dann folgt analog zum einseitigen Fall:

$$Y_i' \sim \mathcal{N}\left(\tfrac{2}{USL_i - LSL_i} \cdot \mu_i - \tfrac{USL_i + LSL_i}{USL_i - LSL_i}, \left(\tfrac{2}{USL_i - LSL_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2\right).$$

Nach [JOH94], S. 170:

$$|Y_i'| \sim FoldedNormal\left(\tfrac{2}{USL_i - LSL_i} \cdot \mu_i - \tfrac{USL_i + LSL_i}{USL_i - LSL_i}, \left(\tfrac{2}{USL_i - LSL_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2\right) \quad \text{([LEO61])},$$

d.h. mit $X_i := |Y_i'|$ und $\tilde{\mu}_i = \tfrac{2}{USL_i - LSL_i} \cdot \mu_i - \tfrac{USL_i + LSL_i}{USL_i - LSL_i}, \quad \tilde{\sigma}_i^2 = \left(\tfrac{2}{USL_i - LSL_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2$ :

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i} \cdot \left[\exp(-(x_i - \tilde{\mu}_i)^2/(2\tilde{\sigma}_i^2)) + \exp(-(x_i + \tilde{\mu}_i)^2/(2\tilde{\sigma}_i^2))\right].$$

Die Funktion $g(x) = x^n$ definiert auf dem Intervall $[0,1]$ durch ihre strenge Monotonie eine eineindeutige Abbildung. Daher gilt mit Lemma 5.1.2 und $Z_i = X_i^{n_i}$:

$$\begin{aligned} f_{Z_i}(z_i) &= f_{X_i}(z_i^{1/n_i}) \cdot \frac{1}{n_i} \cdot z_i^{1/n_i - 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot n_i} \cdot z_i^{1/n_i - 1} \cdot \left[ \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (z_i^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2) + \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (z_i^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2) \right]. \end{aligned}$$

Analog mit $W_i := \exp(Z_i)$:

$$\begin{aligned} f_{W_i}(w_i) &= f_{Z_i}(\log(w_i)) \cdot \frac{1}{w_i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot n_i \cdot w_i} \cdot \log(w_i)^{1/n_i - 1} \cdot \Bigg[ \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(w_i)^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2) \\ &\quad + \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(w_i)^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2) \Bigg]. \end{aligned}$$

Ebenso mit $D_i := W_i^{-1}$:

$$\begin{aligned} f_{D_i}(d_i) &= f_{W_i}(1/d_i) \cdot \frac{1}{d_i^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot n_i \cdot \frac{1}{d_i}} \cdot \frac{1}{d_i^2} \cdot (\log(1/d_i)^{1/n_i - 1}) \cdot \Bigg[ \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(1/d_i)^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2) \\ &\quad + \exp(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2} \cdot (\log(1/d_i)^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2) \Bigg] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i} (-\log(d_i))^{1/n_i - 1} \cdot \left[ \exp(-((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2 / 2\tilde{\sigma}_i^2) \right. \\ &\quad \left. + \exp(-((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2 / 2\tilde{\sigma}_i^2) \right]. \end{aligned}$$

□

Im Folgenden werden die wesentlichen Eigenschaften dieser Dichten für die einseitige Spezifikation dargestellt, insbesondere die zugehörige Verteilungsfunktion sowie die r-ten Momente. Ferner werden Aussagen über mögliche Funktionsverläufe getroffen.

**Satz 5.1.3 (Eigenschaften der Verteilung bei einseitiger Spezifikation )** *Die durch die Dichtefunktion in Satz 5.1.1 beschriebene Doppelt-Lognormalverteilung bei einseitiger Spezifikation besitzt die folgenden Charakteristika:*

- *Die Verteilungsfunktion besitzt die Form*

  $$F_{D_i}(d_i) = 1 - \Phi[(\log(-\log(d_i)) - \tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i] \text{ für } 0 < d_i < 1$$

  *mit* $\Phi(x)$*: Standardnormalverteilung an der Stelle* $x$*.*

- $Q_\alpha = \exp(-\exp(\tilde{\sigma}_i \cdot z_{1-\alpha} + \tilde{\mu}_i))$ *mit* $med(f_{D_i}(d_i)) = \exp[-\exp(\tilde{\mu}_i)]$,
  $Q_\alpha, z_\alpha$*:* $\alpha \cdot 100\%$*-Quantil von* $F_{\mathcal{D}}(D)$ *bzw.* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

- *Die r-ten Momente der Verteilung berechnen sich durch*

  $$E(D_i^r) = \int_0^1 d_i^r f_{D_i}(d_i)\ d(d_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-r \cdot \exp(\tilde{\mu}_i + \tilde{\sigma}_i \cdot t] \cdot (2\pi)^{-0.5} \cdot \exp(-0.5t^2) dt.$$

  *Das Integral besitzt keine allgemeine analytische Lösung, für* $r > 0$ *kann der Wert bei gegebenem* $\tilde{\mu}_i$ *und* $\tilde{\sigma}_i$ *numerisch bestimmt werden. Der Wert des r-ten Momentes ist jedoch für* $r > 0$ *nach unten beschränkt durch*

  $$E(D_i^r) \geq \exp(-r) \cdot \Phi(-\tilde{\mu}_i/\tilde{\sigma}_i).$$

*Die Dichte kann in Abhängigkeit von* $\tilde{\mu}_i$ *und* $\tilde{\sigma}_i$ *eine Vielzahl von Verläufen annehmen. Diese lassen sich z.B. für den Bereich* $-0.2 < \tilde{\mu}_i < 4$ *und* $0 < \tilde{\sigma}_i^2 < 2.4$ *charakterisieren durch die folgenden Aussagen:*

- *Falls* $\tilde{\mu}_i > \tilde{\sigma}_i^2 - \log(\tilde{\sigma}_i) - 1$*:* $f_{D_i}(d_i)$ *besitzt keinen Modus, keinen oder zwei Wendepunkte und ist monoton fallend.*

- *Falls* $\tilde{\mu}_i = \tilde{\sigma}_i^2 - \log(\tilde{\sigma}_i) - 1$*:* $f_{D_i}(d_i)$ *besitzt keinen Modus, einen stationären und einen nichtstationären Wendepunkt und ist monoton fallend.*

- *Falls* $\tilde{\mu}_i < \tilde{\sigma}_i^2 - \log(\tilde{\sigma}_i) - 1$*:* $f_{D_i}(d_i)$ *besitzt einen Modus, einen Antimodus und zwei Wendepunkte.*

**Beweis:**[OAK91], [HOL89]
Das $\alpha \cdot 100\%$-Quantil $Q_\alpha$ der Verteilung bestimmt sich durch die Gleichung

$$1 - \Phi\left[\frac{\log(-\log(Q_\alpha)) - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right] = \alpha \Leftrightarrow z_{1-\alpha} = \frac{\log(-\log(Q_\alpha)) - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}$$
$$\Leftrightarrow \quad \log(-\log(Q_\alpha)) = \tilde{\sigma}_i \cdot z_{1-\alpha} + \tilde{\mu}_i \quad \Leftrightarrow Q_\alpha = \exp(-\exp(\tilde{\sigma}_i \cdot z_{1-\alpha} + \tilde{\mu}_i)), \text{ wobei}$$

$z_\alpha : \alpha \cdot 100\%$-Quantil der Standardnormalverteilung.

Für den Median $M$, d.h. für $Q_\alpha = M$, $\alpha = 0.5$ und $z_{0.5} = 0$, ergibt sich:

$$M = \exp(-\exp(\tilde{\mu}_i)).$$ □

In Abbildung 11 sind beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion für die in Abbildung 2 flacher verlaufende Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington illustriert, wobei die erste Abbildung genau die drei in Satz 5.1.3 aufgeführten Fälle für die möglichen Funktionsverläufe aufführt. Es wird die extreme Variabilität der möglichen Dichteverläufe deutlich.

Analog zum einseitigen Fall lässt sich die zugehörige Verteilungsfunktion als Funktion von Standardnormalverteilungen darstellen. Der folgende Satz stellt diese Funktion bereit.

**Satz 5.1.4 (Eigenschaften der Verteilung bei zweiseitiger Spezifikation)**
*Die durch die Dichtefunktion in Satz 5.1.1 beschriebene Verteilung bei zweiseitiger Spezifikation besitzt die folgenden Charakteristika:*

- *Die Verteilungsfunktion besitzt die Form*

$$F_{D_i}(d_i) = 2 - \Phi\left[\frac{((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right] - \Phi\left[\frac{((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]$$

*mit $\Phi(x)$: Standardnormalverteilung an der Stelle $x$.*

**Beweis:**
Seien $d_i$, $i = 1, \ldots, k$ Realisierungen der Zufallsvariablen $D_i$ der zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington. Es gilt mit Satz 5.1.1 und $0 < d < 1$:

$$\begin{aligned}
P(D_i \le d) &= \int_0^d \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i} (-\log(d_i))^{1/n_i - 1} \cdot \left[\exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2}((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2\right)\right. \\
&\quad \left. + \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2}((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2\right)\right] d\,(d_i) \\
&= \int_0^d \frac{(-\log(d_i))^{1/n_i - 1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2}((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)^2\right) d\,(d_i) \\
&\quad + \int_0^d \frac{(-\log(d_i))^{1/n_i - 1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_i^2}((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)^2\right) d\,(d_i) \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

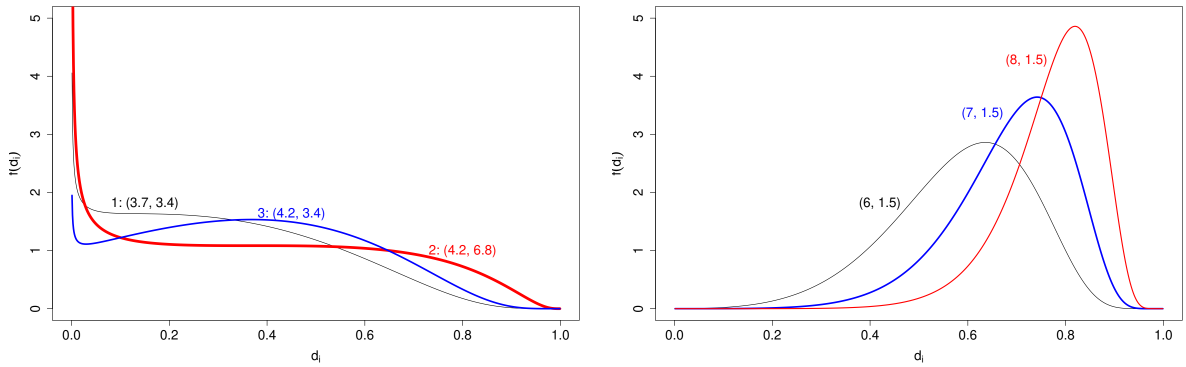



Abbildung 11: Beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion $(\mu_i, \sigma_i^2)$ der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington, links: Fälle 1-3 aus Satz 5.1.3, rechts: weitere Verläufe bei steigendem $\mu_i$

1. Bestimmung von $I_1$: Setze $x_i := ((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i$ , d.h.

$$
\begin{aligned}
d\,x_i &= -\frac{(-\log(d_i))^{1/n_i-1}}{\tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i}\, d\,(d_i) \Leftrightarrow d\,(d_i) = -\frac{\tilde{\sigma}_i \cdot d_i \cdot n_i}{(-\log(d_i))^{1/n_i-1}}\, d\,x_i. \\
\Rightarrow I_1 &= -\int_{\infty}^{((-\log(d))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{1}{2}x_i^2)\, d\,x_i \\
&= \int_{((-\log(d))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{1}{2}x_i^2)\, d\,x_i \\
&= 1 - \int_{0}^{((-\log(d))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\frac{1}{2}x_i^2)\, d\,x_i \\
&= 1 - \Phi[((-\log(d))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i].
\end{aligned}
$$

2. Bestimmung von $I_2$: Nach analogem Schema gilt mit $x_i := ((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i$:

$$
I_2 = 1 - \Phi[((-\log(d))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)/\tilde{\sigma}_i].
$$

Die gesuchte Verteilungsfunktion besitzt demnach die folgende Form:

$$
F_{D_i}(d_i) = I_1 + I_2 = 2 - \Phi\left[\frac{((-\log(d_i))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right] - \Phi\left[\frac{((-\log(d_i))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]. \qquad \square
$$

Auch die Dichtefunktion im zweiseitigen Fall weist eine Vielzahl von denkbaren Verläufen auf. Abbildung 12 zeigt mögliche Verläufe der Dichtefunktion für zweiseitige Spezifikationen, wobei der linken Graphik eine Wünschbarkeitsfunktion mit Parametern $LSL = 3$, $USL = 7$ und $n = 1$ zugrunde liegt. Die rechte Graphik hingegen basiert auf einer Wünschbarkeitsfunktion mit Parametern $LSL = 3$, $USL = 7$ und $n = 3.5$. Die zugehörigen Funktionsverläufe der Wünschbarkeitsfunktionen sind in Abbildung 2 zu finden.

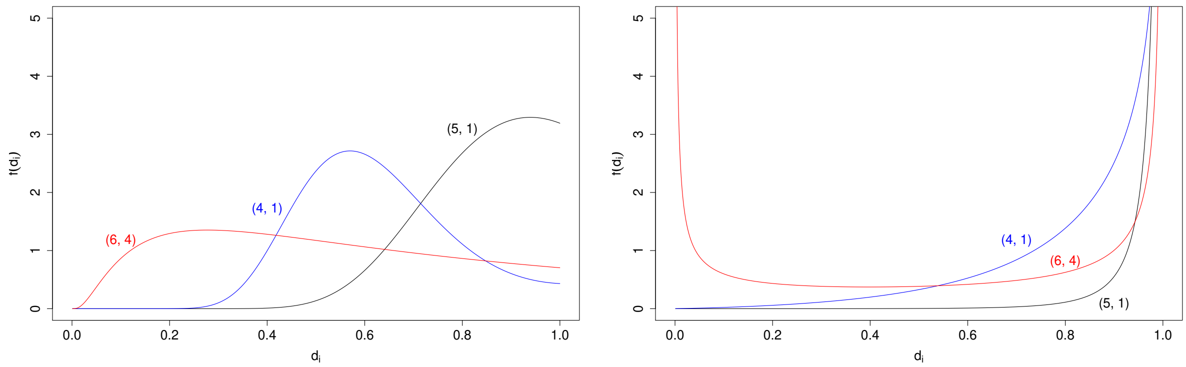



Abbildung 12: Beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion $(\mu_i, \sigma_i^2)$ der zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington, links: $LSL = 3, USL = 7$ und $n = 1$, rechts: $LSL = 3, USL = 7$ und $n = 3.5$

### 5.1.2 Wünschbarkeitsindex auf Basis der WF nach Harrington

An die Bestimmung der Verteilung der Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington schließt sich die Frage nach der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes gemäß Definition 2.2.1 an. Diese wird getrennt für die einseitige und zweiseitige Spezifikation der Wünschbarkeitsfunktionen hergeleitet, da sich für beliebige Kombinationen von einseitigen und zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktionen keine allgemeingültige Aussage treffen lässt.

Im einseitigen Fall besitzen die Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington gemäß Satz 5.1.1 eine Doppelt-Lognormal-Verteilung. Da sich die Dichte von Produkten von Zufallsvariablen aus dieser Verteilung nicht explizit in geschlossener Form angeben lässt, wird das Vorgehen in Teilschritte zerlegt. Da gilt

$$D := (\prod_{i=1}^{k} d_i)^{1/k} = (\prod_{i=1}^{k} e^{-e^{-Y_i'}})^{1/k} = (e^{-\sum_{i=1}^{k} e^{-Y_i'}})^{1/k} \tag{17}$$

und nach Satz 5.1.1

$$e^{-Y_i'} \sim Lognormal(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i),$$

lässt sich das Problem auf die Herleitung der Verteilung von Summen lognormal-verteilter Zufallsvariablen zurückführen.

Zwar existiert auch hier keine explizite analytische Lösung (vgl.[JOH94], S. 217 f.), die resultierende Verteilung lässt sich jedoch hinreichend genau approximieren:

$$e^{-Y_i'} \sim Lognormal(\tilde{\mu_i}, \tilde{\sigma_i}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} e^{-Y_i'} \overset{approx.}{\sim} Lognormal(\mu^*, \sigma^{*2}). \tag{18}$$

Die unterstellte Summationsstabilität der Lognormalverteilung ist nach [SCH82] gültig für den Wertebereich der Verteilungsfunktion von 0.01 bis 0.99. Lediglich in den Rändern der Verteilung lassen sich gelegentlich etwas größere Abweichungen beobachten. In der konkreten praktischen Anwendung sollte die Güte der Approximation überprüft werden.

Der Bestimmung der Parameter der approximierenden Lognormalverteilung gilt verstärktes Interesse in der Fachliteratur. Es haben sich im Wesentlichen drei Ansätze durchgesetzt:

1. **Der Ansatz von Wilkinson ([SCH82]):**
   Ausgehend von unabhängigen, lognormal-verteilten Variablen $e^{X_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ wird ebenso für die Summe $L$ dieser Variablen eine Lognormalverteilung angenommen, d.h.

   $$L = e^{X_1} + e^{X_2} + \cdots + e^{X_k} \approx e^Z \text{ mit } Z \sim \mathcal{N}(\mu^*, \sigma^{*2}).$$

   Dieser (klassische) Ansatz verwendet die Momentenmethode zur Bestimmung der gesuchten Parameter $\mu^*$ und $\sigma^{*2}$. Dabei werden die ersten beiden Momente beider Seiten obiger Gleichung gleichgesetzt. Die gesuchten Parameterwerte ergeben sich dann durch Lösung des entstehenden linearen Gleichungssystems. Allgemein gilt für das r-te Moment einer lognormalverteilten Zufallsvariablen $e^{X_i}$ mit Parametern $\mu_i$ und $\sigma_i^2$:

   $$E(re^{X_i}) = e^{r \cdot \mu_i + 1/2 \cdot r^2 \sigma_i^2}.$$

   Der Ansatz besitzt den Vorteil der einfachen Anwendbarkeit, allerdings auf der anderen Seite auch ein beschränktes Einsatzgebiet. Er ist nur für kleine Varianzen der einzelnen lognormalen Zufallsvariablen sinnvoll anwendbar.

2. **Der Ansatz von Farley:**
   Die Verteilungsfunktion der Summe $L$ von $k$ unabhängig identisch verteilten lognormalen Zufallsvariablen $e^{X_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ mit Parametern $\mu$ und $\sigma^2$ wird approximiert durch den Ausdruck

   $$P(L \leq l) \approx [\Phi((\log(l) - \mu)/\sigma)]^k$$

mit $\Phi(x)$ : Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle x.

Nach [SCH82] ist die Methodik insbesondere geeignet für große Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen. Des Weiteren wird in einer Simulationsstudie von [BEA95] nachgewiesen, dass Farley's Approximation an den Rändern der Verteilung, d.h. im Wertebereich der Verteilungsfunktion größer 0.9, im Vergleich zu den Ansätzen von Wilkinson und von Schwartz und Yeh (s.u.) die besten Resultate liefert. Eine Verallgemeinerung auf den Fall nicht identisch verteilter Zufallsvariablen findet sich in [SLI01].

3. **Der Ansatz von Schwartz und Yeh ([SCH82]):**
Die von [SCH82] vorgeschlagene Methodik hat starke Verbreitung in der Praxis gefunden und besitzt die folgenden Charakteristika:

   - Gute Approximation für kleine und mittlere Varianzbereiche der einzelnen lognormalen Zufallsvariablen.
   - Bestes Abschneiden im Wertebereich 0 bis 0.9 der approximierenden Verteilungsfunktion in Simulationsstudien ([BEA95]).
   - Die Parameter der approximierenden Lognormalverteilung können als Funktion der Parameter der einzelnen Lognormalverteilungen dargestellt werden. Dabei werden exakte Formeln für die Verteilung der Summe zweier lognormaler Zufallsvariablen gegeben. Bei höheren Anzahlen kommt ein iteratives Vorgehen zur Anwendung.
   - Der Ansatz besitzt auch für korrelierte Zufallsvariablen Gültigkeit.

Die Methodik deckt sich somit am besten mit den Anforderungen bzgl. der späteren praktischen Anwendung. Die für eine Zaunkarte benötigten Quantile fallen beispielsweise in den Wertebereich der approximierenden Verteilungsfunktion, in dem die Methodik von Schwartz und Yeh die besten Resultate liefert. Des Weiteren können Korrelationen betrachtet werden, dadurch können im praktischen Einsatz verzerrte Ergebnisse vermieden werden. Dementsprechend findet die Methodik im Weiteren Verwendung und wird im Folgenden detaillierter skizziert.

Betrachtet werden zwei lognormale Zufallsvariablen $e^{X_1}$ und $e^{X_2}$ mit Parametern $\mu_i$ und $\sigma_i$ $(i = 1, 2)$. Gesucht werden die entsprechenden Parameter der Verteilung von

$$L = e^Z = e^{X_1} + e^{X_2} \text{ bzw. } Z = \log(e^{X_1} + e^{X_2}).$$

Der Erwartungswert der Variablen Z lässt sich mit Hilfe der Transformation

$$W = X_2 - X_1, \quad \mu_W = \mu_2 - \mu_1 \text{ und } \sigma_w^2 = \sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \text{ mit } \rho_{12} = corr(X_1, X_2)$$

schreiben als

$$E(Z) = E[\log(e^{X_1} + e^{X_2})] = E[\log(e^{X_1}(1 + e^{X_2 - X_1}))] = E(X_1) + E[\log(1 + e^W)].$$

Durch geschickte Umformung des zweiten Terms in

$$\begin{aligned} E[\log(1+e^W)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \log(1+e^W) f(w)\,dw \\ &= \int_{-\infty}^{0} \log(1+e^W) f(w)\,dw + \int_{0}^{\infty} [\log(1+e^{-W}) + w] f(w)\,dw \end{aligned}$$

kann die folgende Reihenentwicklung verwendet werden:

$$\log(1+x) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j x^j \text{ mit } C_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j} \text{ und } |x| < 1.$$

Mit Hilfe dieses Ansatzes ergibt sich nach intensiver Rechnung für die gesuchten Parameter:

$$\begin{aligned} \mu^* &= \mu_1 + G_1(\sigma_w, \mu_w), && (19) \\ \sigma^{*2} &= \sigma_1^2 - G_1^2(\sigma_w, \mu_w) - 2\rho^2 G_3(\sigma_w, \mu_w) + G_2(\sigma_w, \mu_w) && (20) \\ &\quad \text{mit } \rho = -\sigma_1/\sigma_w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{\sigma_w}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu_w^2/2\sigma_w^2} + \mu_w \cdot \mathbf{\Phi}\left(\frac{\mu_w}{\sigma_w}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{k^2\sigma_w^2/2} \\ &\quad \cdot \left[ e^{k\mu_w} \cdot \mathbf{\Phi}\left(\frac{-\mu_w - k\sigma_w^2}{\sigma_w}\right) + e^{-k\mu_w} \cdot \mathbf{\Phi}\left(\frac{\mu_w - k\sigma_w^2}{\sigma_w}\right)\right], && (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{[(k+1)\mu_w + (k+1)^2\sigma_w^2/2]} \cdot \mathbf{\Phi}\left[\frac{-\mu_w - \sigma_w^2(k+1)}{\sigma_w}\right] \\ &\quad + \mu_w^2 \left[1 - \mathbf{\Phi}\left(\frac{-\mu_w}{\sigma_w}\right)\right] + \sqrt{2/\pi}\,\mu_w \sigma_w e^{-\mu_w^2/2\sigma_w^2} \\ &\quad + \sigma_w^2 \left[1 - \mathbf{\Phi}\left(\frac{-\mu_w}{\sigma_w}\right)\right] \frac{-\mu_w\sigma_w}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mu_w^2/2\sigma_w^2} \\ &\quad - 2\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-\mu_w k + k^2\sigma_w^2/2} \left[\mu_k \cdot \mathbf{\Phi}\left(\frac{\mu_w - k\sigma_w^2}{\sigma_w}\right) - \frac{\sigma_w}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-\mu_w + k\sigma_w^2)^2/2\sigma_w^2}\right] \end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(k+1)\mu_w+(k+1)^2\sigma_w^2/2} \cdot \mathbf{\Phi}\left[\frac{\mu_w-\sigma_w^2(k+1)}{\sigma_w}\right] \tag{22}$$

$$\text{mit } b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k+1}\sum_{j=1}^{k} j^{-1},$$

$$\begin{aligned} G_3 \quad &= \quad \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{\mu_w(k+1)+(k+1)^2\sigma_w^2/2} \cdot \mathbf{\Phi}\left[\frac{-\mu_w-\sigma_w^2(k+1)}{\sigma_w}\right] \\ &\quad +\sigma_w^2 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-k\mu_w+k^2\sigma_w^2/2} \cdot \mathbf{\Phi}\left[\frac{\mu_w-\sigma_w^{2k}}{\sigma_w}\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Die Konvergenz der Reihenentwicklungen ist garantiert, nach Angabe der Autoren reicht eine Summationsgrenze von 40 zur Erreichung einer vierstelligen Genauigkeit. Trotz dieser Vereinfachung ist die numerische Berechnung sehr aufwendig. Aus diesem Grund finden sich in [SCH82] für bestimmte Bereiche von $\sigma_w$ und $\mu_w$ polynomiale Approximationen für die Ausdrücke $G_i$ $(i = 1, \ldots, 3)$ der Form

$$\log_{10} G_i(\sigma_w, \mu_w) = \sum_{j=0}^{4}\sum_{k=0}^{4} A_{jk}(i)\sigma_w^{j/2}|\mu_w|^{k/2}, \qquad i = 1, \ldots, 3. \tag{24}$$

Der maximale Fehler in $\sigma^*$ und $\mu^*$ im Vergleich zur Verwendung der exakten Ausdrücke für $G_i$ bewegt sich im Bereich von 1%. Daher werden für die praktische Anwendung die Polynomapproximationen verwendet, die für den diesbezüglich relevanten Bereich in Tabelle 6 dargestellt sind.

Bei Produkten von mehr als zwei unabhängigen lognormalen Zufallsvariablen wird ein geschachteltes Vorgehen verwendet. Im ersten Schritt wird mit Hilfe des obigen Vorgehens die approximierende Lognormalverteilung für das Produkt berechnet. Im Anschluß wird dieses Produkt mit der nächsten lognormalen Zufallsvariablen nach selbigem Schema zusammengeführt usw.. Das Verfahren ist nach Angabe der Autoren robust bzgl. der Reihenfolge der Kombination, es ergeben sich lediglich minimale Unterschiede in den resultierenden Parametern $\mu^*$ und $\sigma^{*2}$.

Unter Verwendung des Verfahrens von Schwartz und Yeh lässt sich nun die Dichte des Wünschbarkeitsindexes auf Basis der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion (WF) nach Harrington approximativ angeben. Dabei wird nicht notwendigerweise die Unabhängigkeit der

| $A_{jk}$ | $G_1$ | $G_2$ | $G_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_{00}$ | -0.1153239 E00 | 0.4012876 E-01 | -0.3958699 E01 |
| $A_{01}$ | -0.5667912 E01 | -0.4483259 E01 | -0.5454983 E01 |
| $A_{02}$ | 0.1151279 E02 | 0.7391760 E01 | 0.1139280 E02 |
| $A_{03}$ | -0.7162489 E01 | -0.3772190 E01 | -0.7116366 E01 |
| $A_{04}$ | 0.1312986 E01 | 0.5262268 E00 | 0.1315218 E01 |
| $A_{10}$ | -0.1611385 E00 | -0.1579114 E01 | 0.6839918 E01 |
| $A_{11}$ | 0.2084215 E02 | 0.1637249 E02 | 0.1962529 E02 |
| $A_{12}$ | -0.4499768 E02 | -0.2994901 E02 | -0.4314091 E02 |
| $A_{13}$ | 0.2756210 E02 | 0.1337812 E02 | 0.2647795 E02 |
| $A_{14}$ | -0.5109783 E01 | -0.1747459 E01 | -0.4940592 E01 |
| $A_{20}$ | 0.1345124 E00 | 0.2174588 E01 | -0.4717296 E01 |
| $A_{21}$ | -0.2670183 E02 | -0.2114152 E02 | -0.2486802 E02 |
| $A_{22}$ | 0.5919191 E02 | 0.3976749 E02 | 0.5618572 E02 |
| $A_{23}$ | -0.3695334 E02 | -0.1776890 E02 | -0.3501815 E02 |
| $A_{24}$ | 0.6912766 E01 | 0.2195322 E01 | 0.6560938 E01 |
| $A_{30}$ | 0.8057054 E-01 | -0.7525302 E00 | 0.1819360 E01 |
| $A_{31}$ | 0.1429709 E02 | 0.1147157 E02 | 0.1323538 E02 |
| $A_{32}$ | -0.3225969 E02 | -0.2189501 E02 | -0.3050022 E02 |
| $A_{33}$ | 0.2055628 E02 | 0.1006767 E02 | 0.1937757 E02 |
| $A_{34}$ | -0.3888684 E01 | -0.1224983 E01 | -0.3658379 E01 |
| $A_{40}$ | -0.3145306 E-01 | 0.8447987 E-01 | -0.2817493 E00 |
| $A_{41}$ | -0.2730047 E01 | -0.2222839 E01 | -0.2518272 E01 |
| $A_{42}$ | 0.6244253 E01 | 0.4289557 E01 | 0.4289557 E01 |
| $A_{43}$ | -0.4048245 E01 | -0.2035757 E01 | -0.3809492 E01 |
| $A_{44}$ | 0.7746786 E00 | 0.2499568 E00 | 0.7260144 E00 |

Tabelle 6: Polynomkoeffizienten $A_{jk}$ aus (24) für $-20 < \mu_w < 0$ und $0 < \sigma_w < 15$

Realisationen der betrachteten Wünschbarkeitsfunktionen gefordert, was zu einer breiten Anwendungsmöglichkeit in der Praxis führt.

**Satz 5.1.5 (Dichte des Wünschbarkeitsindexes nach Harrington, WF einseitig)**
*Gegeben seien $k$ Qualitätsmerkmale $Y_i$ mit einseitigen Wünschbarkeitsfunktionen $d_i$ ($d_i \in (0,1]$) nach Harrington gemäß Kapitel 2.1.1 und Dichten $f_{D_i}(d_i)$ nach Satz 5.1.1 mit Parametern $\tilde{\mu_i}$ und $\tilde{\sigma_i}^2$. Dann besitzt der Wünschbarkeitsindex $D$ aus Definition 2.2.1 die approximative Dichte*

$$f_{\mathcal{D}}(D) \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^*\cdot\log(D)\cdot D}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{*2}}(\log(-k\cdot\log(D))-\mu^*)^2\right]$$

*mit $\mu^*$ und $\sigma^{*2}$ gemäß (19) und (20).*

**Beweis:**
Gesucht ist die Verteilung des geometrischen Mittelwertes von $k$ einseitigen Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington. Nach (17) und (18) gilt

$$D := (e^{-\sum_{i=1}^k e^{-Y_i'}})^{1/k} \text{ mit } \sum_{i=1}^k e^{-Y_i'} \overset{approx.}{\sim} Lognormal(\mu^*, \sigma^{*2}),$$

wobei die Parameter $\mu^*$ und $\sigma^{*2}$ unter Verwendung der Methodik von Schwartz und Yeh nach (19) und (20) bestimmt werden. Nach analogem Vorgehen zum Beweis von Satz 5.1.1 gilt:

$$Z := e^{-\sum_{i=1}^k e^{-Y_i'}} \approx \mathcal{DLN}(\mu^*, \sigma^{*2}).$$

Mit Satz 5.1.2 besitzt $D = Z^{1/k}$ die approximative Dichte

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(D) &\approx -k\cdot D^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^*\cdot\log(D^k)\cdot D^k}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{*2}}(\log(-\log(D^k))-\mu^*)^2\right] \\ &= -k\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^*\cdot k\cdot\log(D)\cdot D}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{*2}}(\log(-k\cdot\log(D))-\mu^*)^2\right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma^*\cdot\log(D)\cdot D}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^{*2}}(\log(-k\cdot\log(D))-\mu^*)^2\right]. \qquad \square \end{aligned}$$

Zur späteren Aufstellung von Kontrollgrenzen für den Wünschbarkeitsindex wird jedoch nicht die Dichte, sondern die Verteilungsfunktion zur Bestimmung von Quantilen benötigt.

Des Weiteren ist die Güte der Approximation in den beschriebenen Simulationsstudien an einer möglichst guten Approximation der Verteilungsfunktion ausgerichtet worden. Die resultierende Verteilungsfunktion wird im folgenden Satz hergeleitet. Die Berechnungsformel für den Median lässt sich explizit angeben.

**Satz 5.1.6 (Eigenschaften der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes)** *Die durch die Dichtefunktion in Satz 5.1.5 beschriebene Verteilung des Wünschbarkeitsindexes auf Basis von einseitigen Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington besitzt die folgenden Charakteristika:*

- *Die Verteilungsfunktion besitzt die Form*
$$F_{\mathcal{D}}(D) = 1 - \Phi\left[\frac{\log(k) + \log(-\log(D)) - \mu^*}{\sigma^*}\right]$$
*mit* $\Phi(x)$*: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle* $x$*.*

- $Q_\alpha = \exp(-\exp(\sigma^* \cdot z_{1-\alpha} - \log(k) + \mu^*))$ *mit*
*med*$(f_{\mathcal{D}}(D)) = \exp[-\exp(\mu^*)/k]$,
$Q_\alpha, z_\alpha$*:* $\alpha \cdot 100\%$*-Quantil von* $F_{\mathcal{D}}(D)$ *bzw.* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

**Beweis:**
Für die gesuchte Verteilungsfunktion gilt:

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{D}}(D) &= P(\mathcal{D} \leq D) \\
&= P\left(\left(e^{-\sum_{i=1}^{k} e^{-Y_i'}}\right)^{1/k} \leq D\right) \\
&\approx P\left(\left(e^{-e^T}\right)^{1/k} \leq D\right) \qquad \text{mit } T \overset{approx.}{\sim} \mathcal{N}(\mu^*, \sigma^{*2}) \\
&= P\left(-e^T \leq \log(D^k)\right) \\
&= P\left(T > \log(-\log(D^k))\right) \\
&= 1 - F_T\left(\log(-\log(D^k))\right) \\
&= 1 - \Phi\left[\frac{\log(-\log(D^k)) - \mu^*}{\sigma^*}\right] \\
&= 1 - \Phi\left[\frac{\log(k) + \log(-\log(D)) - \mu^*}{\sigma^*}\right].
\end{aligned}$$

Das $\alpha \cdot 100\%$-Quantil $Q_\alpha$ der Verteilung bestimmt sich durch die Gleichung

$$\begin{aligned}
& 1 - \Phi\left[\frac{\log(k) + \log(-\log(Q_\alpha)) - \mu^*}{\sigma^*}\right] = \alpha \\
\Leftrightarrow\quad & \Phi^{-1}(1-\alpha) = \frac{\log(k) + \log(-\log(Q_\alpha)) - \mu^*}{\sigma^*} \\
\Leftrightarrow\quad & z_{1-\alpha} = \frac{\log(k) + \log(-\log(Q_\alpha)) - \mu^*}{\sigma^*} \\
\Leftrightarrow\quad & \log(-\log(Q_\alpha)) = \sigma^* \cdot z_{1-\alpha} - \log(k) + \mu^* \\
\Leftrightarrow\quad & Q_\alpha = \exp(-\exp(\sigma^* \cdot z_{1-\alpha} - \log(k) + \mu^*)),\ \text{wobei}
\end{aligned}$$

$z_\alpha : \alpha \cdot 100\%$-Quantil der Standardnormalverteilung.

Für den Median $M$, d.h. für $Q_\alpha = M$, $\alpha = 0.5$ und $z_{0.5} = 0$, ergibt sich:

$$M = \exp(-\exp(\mu^* - \log(k))) = \exp(-\exp(\mu^*)/k). \qquad \square$$

Abbildung 13 zeigt verschiedene Verläufe der Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes auf Basis von einseitigen Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington. Dabei liegen die in Abbildung 11 dargestellten unterschiedlichen Verlaufstypen der Dichtefunktionen zugrunde. Kombiniert werden jeweils zwei Wünschbarkeitsfunktionen, die in der Graphik oben links beide aus der rechten Graphik von Abbildung 11 entstammen. In der Graphik oben rechts wird jeweils auf eine Wünschbarkeitsfunktion aus der rechten und linken Graphik aus Abbildung 11 zurückgegriffen, und die dritte Graphik zeigt eine Kombination zweier Wünschbarkeitsfunktionen aus der linken Graphik von Abbildung 11. Tabelle 7 enthält die zugehörigen Parametereinstellungen der Wünschbarkeitsfunktionen. Es wird ersichtlich, dass sich auch hier stark variierende Verlaufstypen der Dichtefunktionen ergeben.

Ferner illustriert die Abbildung die Güte der Approximation der Verteilungsfunktion. Für die Parametereinstellung (8) aus Tabelle 7 werden die empirische und die approximierte Verteilungsfunktion gegenübergestellt, wobei sich nur minimale Abweichungen ergeben. Ein weiteres Beispiel hierzu ist in Kapitel 6.2.5 zu finden, in dem der Wünschbarkeitsindex zur Qualitätskontrolle eines automatischen Multishuttle-Lagers eingesetzt wird. Auch in diesem Fall wird im Vergleich zur empirischen Verteilungsfunktion eine sehr hohe Approximationsgüte erreicht (vgl. Abbildung 48).

Nach Herleitung der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes auf Basis der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington wird im Folgenden die Situation betrachtet,

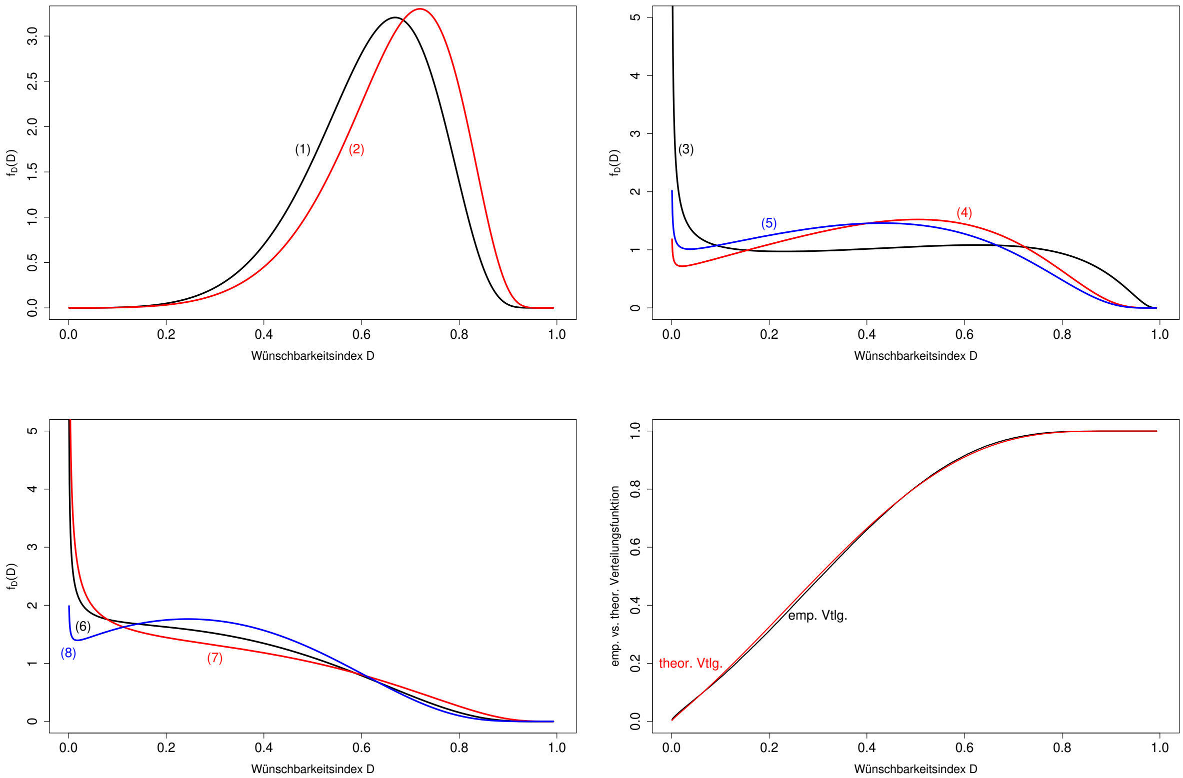



Abbildung 13: Beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes auf Basis der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington, unten rechts: Vergleich empirische vs. approximierte Verteilungsfunktion. Erläuterungen siehe Tabelle 7.

| Funktion | Parameter 1. WF | Parameter 2. WF |
|---|---|---|
| (1) | [6,1.22] | [7,1.22] |
| (2) | [6,1.22] | [8,1.22] |
| (3) | [4.2,2.61] | [6,1.22] |
| (4) | [4.2,1.84] | [6,1.22] |
| (5) | [3.7,1.84] | [6,1.22] |
| (6) | [3.7,1.84] | [4.2,1.84] |
| (7) | [3.7,1.84] | [4.2,2.61] |
| (8) | [4.2,1.84] | [4.2,2.61] |

Tabelle 7: Parametereinstellungen der Dichtefunktionen aus Abbildung 13 der Form $[\mu, \sigma]$, WF: Wünschbarkeitsfunktion. WF definiert über die Zuordnungen ($y = 3 \rightarrow d = 0.2$, $y = 6 \rightarrow d = 0.6$), Parameter der empirischen Verteilungsfunktion gemäß (8).)

dass Qualitätsmerkmale miteinander mittels des Wünschbarkeitsindexes gemäß Definition 2.2.1 kombiniert werden sollen, für die jeweils eine zweiseitige Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington spezifiziert worden ist. Hierzu kommt analog zum einseitigen Fall ein schrittweises Vorgehen zur Anwendung. Der Wünschbarkeitsindex lässt sich schreiben als

$$D := (\prod_{i=1}^{k} d_i)^{1/k} = (\prod_{i=1}^{k} e^{-|Y_i'|^{n_i}})^{1/k} = (e^{-\sum_{i=1}^{k}|Y_i'|^{n_i}})^{1/k}. \tag{25}$$

Für $n_i = 1$ $(i = 1, ..., k)$ und $k = 2$ kann also zunächst die Verteilung der Summe zweier folded-normalverteilter Variablen berechnet werden, da nach Satz 5.1.1

$$|Y_i'| \sim FoldedNormal(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i^2). \tag{26}$$

Die vereinfachten Annahmen werden getroffen, da u. a. aufgrund der fehlenden Multiplikationsstabilität der Verteilung der zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington die Herleitung eines analytischen Ausdruckes für die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes nicht mehr allgemeingültig möglich ist. Das hier dargestellte Herleitungsschema lässt sich jedoch als Anhaltspunkt verwenden, um für spezielle Anwendungsfälle die konkrete Form der Verteilung abzuleiten.

**Lemma 5.1.7 (Dichte der Summe zweier folded-normalverteilter ZVen)** *Gegeben seien zwei Qualitätsmerkmale $Y_i$ mit zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktionen $d_i$ ($d_i \in (0,1]$) nach Harrington gemäß Kapitel 2.1.1 und Dichten $f_{|Y_i'|}(|y_i'|)$ nach Satz 5.1.1 mit Parametern $\tilde{\mu}_i$ und $\tilde{\sigma}_i{}^2$. Dann gilt für die Dichte der Zufallsvariablen $Z := |Y_1'| + |Y_2'|$:*

$$\begin{aligned}
f_Z(z) \quad = \quad & \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)}} \cdot \left( \exp\left( -\frac{(z-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{(z\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \right. \\
& + \exp\left( -\frac{(z-\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{(z\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(z+\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{(z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(z+\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{(z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(z-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{(z\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(z-\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{(z\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\exp\left(-\frac{(z+\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)}\right) erf\left(\frac{(z\tilde{\sigma_1}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}}\right)\\
&+\exp\left(-\frac{(z+\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)}\right) erf\left(\frac{(z\tilde{\sigma_1}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}}\right)\Bigg)\\
&mit
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
erf(x) &= 2\cdot\Phi(\sqrt{2}x)-1 \qquad \textit{(Gausssches Fehlerintegral)},\\
\Phi(x) &= \textit{Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle } x.
\end{aligned}
$$

**Beweis:**
Berechnet wird die Faltung der Zufallsvariablen $X := |Y_1'|$ und $Y := |Y_2'|$, d.h. für $Z := X + Y$ unter den Restriktionen $Y \geq 0$ und $Z \geq Y$ der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy\\
&= \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\exp\left(-\frac{(z-y-\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)+\exp\left(-\frac{(z-y+\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.\cdot\left(\exp\left(-\frac{(y-\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)+\exp\left(-\frac{(y+\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)\right)\, dy\right]\\
&= \underbrace{\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z-y-\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)\exp\left(-\frac{(y-\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)\, dy}_{(I)}\\
&\quad+\underbrace{\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z-y-\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)\exp\left(-\frac{(y+\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)\, dy}_{(II)}\\
&\quad+\underbrace{\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z-y+\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)\exp\left(-\frac{(y-\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)\, dy}_{(III)}\\
&\quad+\underbrace{\frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(z-y+\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)\exp\left(-\frac{(y+\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)\, dy}_{(IV)}.
\end{aligned}
$$

Zu (I):

$$
\exp\left(-\frac{(z-y-\tilde{\mu_1})^2}{2\tilde{\sigma_1}^2}\right)\exp\left(-\frac{(y-\tilde{\mu_2})^2}{2\tilde{\sigma_2}^2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left[-\frac{(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)(\tilde{\sigma_2}^2(z-y-\tilde{\mu_1})^2+\tilde{\sigma_1}^2(y-\tilde{\mu_2})^2)}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right] \\
&= \exp\left[-\left(\frac{(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)(\tilde{\sigma_2}^2z^2-2\tilde{\sigma_2}^2zy-2\tilde{\sigma_2}^2\tilde{\mu_1}z+\tilde{\sigma_2}^2y^2+2\tilde{\sigma_2}^2y\tilde{\mu_1}+\tilde{\sigma_2}^2\tilde{\mu_1}^2)}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.+\frac{(\tilde{\sigma_1}^2y^2-2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\mu_2}y+\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\mu_2}^2)}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right)\right] \\
&= \ldots \\
&= \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(z^2+\tilde{\mu_1}^2-2\tilde{\mu_1}z+\tilde{\mu_2}^2-2\tilde{\mu_2}z+2\tilde{\mu_1}\tilde{\mu_2})+2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2\tilde{\mu_2}z-2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2\tilde{\mu_1}\tilde{\mu_2}}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right.\right. \\
&\qquad +\frac{-2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2zy+\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2y^2+2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2y\tilde{\mu_1}+\tilde{\sigma_1}^4y^2-2\tilde{\sigma_1}^4\tilde{\mu_2}y+\tilde{\sigma_1}^4\tilde{\mu_2}^2+\tilde{\sigma_2}^4z^2}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)} \\
&\qquad \left.\left.+\frac{-2\tilde{\sigma_2}^4zy-2\tilde{\sigma_2}^4\tilde{\mu_1}z+\tilde{\sigma_2}^4y^2+2\tilde{\sigma_2}^4y\tilde{\mu_1}+\tilde{\sigma_2}^4\tilde{\mu_1}^2+\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2y^2-2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2\tilde{\mu_2}y}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right)\right] \\
&= \exp\left[-\frac{(z-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right]\exp\left[-\frac{(y\tilde{\sigma_1}^2+y\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2-z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2)^2}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right].
\end{aligned}
$$

Aufgrund der angegebenen Restriktionen gilt für den Wertebereich von Y: $0 \leq Y \leq Z$, d.h. gesucht ist das Integral

$$
\begin{aligned}
(I) &= \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\exp\left[-\frac{(z-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right] \\
&\quad \cdot\int_0^z \exp\left[-\frac{(y\tilde{\sigma_1}^2+y\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2-z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2)^2}{2\tilde{\sigma_1}^2\tilde{\sigma_2}^2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right] dy.
\end{aligned}
$$

Setze $U := \dfrac{(Y\tilde{\sigma_1}^2+Y\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2-Z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2)}{\sqrt{2}\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}$, d.h. $du = \dfrac{\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}{\sqrt{2}\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}dy$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
(I) &= \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}\exp\left[-\frac{(z-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right]\frac{\sqrt{2}\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}}{\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&\quad \cdot erf\left[\frac{(y\tilde{\sigma_1}^2+y\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2-z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2)}{\sqrt{2}\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right]\Bigg|_0^z
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}} \exp\left[-\frac{(z-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right]$$

$$\cdot \left( erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right] + erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right]\right),$$

wobei

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt.$$

Nach analogem Schema ergibt sich für die restlichen Teilintegrale:

$$(II) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}} \exp\left[-\frac{(z-\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right]$$

$$\cdot \left( erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right] + erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right]\right),$$

$$(III) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}} \exp\left[-\frac{(z+\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right]$$

$$\cdot \left( erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right] + erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_1}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right]\right),$$

$$(IV) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}} \exp\left[-\frac{(z+\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2)}\right]$$

$$\cdot \left( erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right] + erf\left[\frac{z\tilde{\sigma_1}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2}{\tilde{\sigma_1}\tilde{\sigma_2}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\sigma_2}^2}}\right]\right).$$

Durch Addition der Teilintegrale (I) - (IV) folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas und des Transformationssatzes für Dichten (Lemma 5.1.2) kann nun die Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes hergeleitet werden.

**Satz 5.1.8 (Dichte des Wünschbarkeitsindexes nach Harrington, WF 2-seitig)** *Gegeben seien k Qualitätsmerkmale $Y_i$ mit zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktionen $d_i$ ($d_i \in (0,1]$) nach Harrington gemäß Kapitel 2.1.1 und Dichten $f_{D_i}(d_i)$ nach Satz 5.1.1 mit Parametern $\tilde{\mu_i}$ und $\tilde{\sigma_i}^2$. Dann besitzt der Wünschbarkeitsindex D aus Definition 2.2.1 für k=2 und $n_i = 1$ (i=1,2) die Dichte*

$$
\begin{aligned}
f_{\mathcal{D}}(D) \;=\; & \frac{\sqrt{2}}{2D\sqrt{\pi(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)}} \cdot \left( \exp\left( -\frac{(-2\log(D)-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) \right. \\
& \cdot erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)-\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)+\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)+\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)-\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)-\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_1}^2+\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)+\tilde{\mu_1}-\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_1}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2-\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \\
& \left. + \exp\left( -\frac{(-2\log(D)+\tilde{\mu_1}+\tilde{\mu_2})^2}{2(\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2)} \right) erf\left( \frac{((-2\log(D))\tilde{\sigma_1}^2-\tilde{\mu_1}\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\mu_2}\tilde{\sigma_1}^2)}{\tilde{\sigma_2}\tilde{\sigma_1}\sqrt{2}\sqrt{\tilde{\sigma_2}^2+\tilde{\sigma_1}^2}} \right) \right) \\
& \text{mit} \\
erf(x) \;=\; & 2 \cdot \Phi(\sqrt{2}x) - 1 \qquad \textit{(Gausssches Fehlerintegral)}, \\
\Phi(x) \;=\; & \textit{Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle } x.
\end{aligned}
$$

**Beweis:**

Sei $Z := |Y_1'| + |Y_2'|$ mit zugehöriger Dichtefunktion $f_Z(z)$ aus Lemma 5.1.7. Mit $W := \exp(Z)$ gilt nach Lemma 5.1.2:

$$f_W(w) = f_Z(\log(w)) \cdot \frac{1}{w}.$$

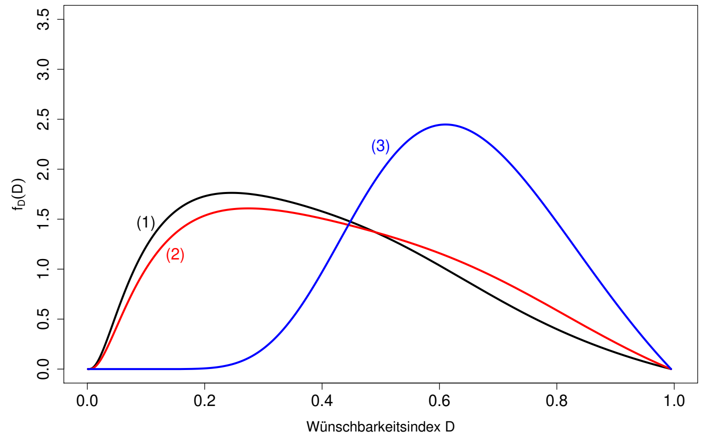



Abbildung 14: Beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes auf Basis der zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington, Erläuterungen siehe Tabelle 8.

Für $X := W^{-1}$ ergibt sich die Dichte

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= f_W\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2 \cdot 1/x} f_Z(\log(1/x)) \\
&= \frac{1}{x} \cdot f_Z(-\log(x)),
\end{aligned}
$$

und für die Dichtefunktion von $D := X^{1/2}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f_{\mathcal{D}}(D) &= 2 \cdot D \cdot f_X(D^2) = 2\dot{D} \cdot \frac{1}{D^2} \cdot f_Z(-\log(D^2)) \\
&= \frac{2}{D} \cdot f_Z(-2 \cdot \log(D)).
\end{aligned}
$$

Mit dieser Transformation der Dichtefunktion von $Z$ folgt die Behauptung. □

Zur Illustration des Verlaufes der resultierenden Dichtefunktion sind in Abbildung 14 jeweils zwei zweiseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington kombiniert worden, deren Dichteverläufe der linken Graphik aus Abbildung 12 zu entnehmen sind. Die zugehörigen Parametereinstellungen sind in Tabelle 8 zu finden.

Die Herleitung eines allgemeingültigen analytischen Ausdruckes für die zugehörige Verteilungsfunktion ist aufgrund der komplizierten Struktur der Dichtefunktion nicht möglich. Im konkreten Anwendungsfall, d.h. beispielsweise bei der Aufstellung einer Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex, können die benötigten Quantile jedoch unter Verwendung

| Funktion | Parameter 1. WF | Parameter 2. WF |
|---|---|---|
| (1) | (3,7,1)[4,1] | (3,7,1)[6,4] |
| (2) | (3,7,1)[5,1] | (3,7,1)[6,4] |
| (3) | (3,7,1)[4,1] | (3,7,1)[5,1] |

Tabelle 8: Parametereinstellungen der Dichtefunktionen aus Abbildung 14 der Form (LSL,USL,n)[$\mu, \sigma$], WF: Wünschbarkeitsfunktion.

der Dichtefunktion aus Satz 5.1.8 numerisch bestimmt werden. Das $\alpha$-Quantil ($0 \leq \alpha \leq 1$) ergibt sich aus der Gleichung

$$\int_0^\alpha f_{\mathcal{D}}(D)\, d(D). \tag{27}$$

Die vorangegangenen Verteilungsaussagen bzgl. des Wünschbarkeitsindexes basieren auf der Annahme, dass zur Bildung des Wünschbarkeitsindexes der geometrische Mittelwert verwendet wird. Kommt stattdessen das **Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen** gemäß (10) aus Kapitel 2.2 zur Anwendung, resultiert eine andere Verteilung für den Wünschbarkeitsindex, die im Folgenden dargestellt ist.

**Satz 5.1.9 (Verteilungsfunktion des Wünschbarkeitsindexes (Minimum WF))**
*Gegeben seien $k$ Qualitätsmerkmale $Y_i$ mit Wünschbarkeitsfunktionen $d_i$ ($d_i \in (0,1]$) nach Harrington gemäß Kapitel 2.1.1 und Dichten $f_{D_i}(d_i)$ nach Satz 5.1.1 mit jeweiligen Parametern $\tilde{\mu}_i$ und $\tilde{\sigma_i}^2$. Dann besitzt der Wünschbarkeitsindex $D$ gemäß (10) aus Kapitel 2.2 die folgende Verteilungsfunktion:*

***1. Einseitige Spezifikation:***

$$F_{\mathcal{D}}(D) = 1 - \prod_{i=1}^{k} \Phi\left[\frac{(\log(-\log(D)) - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right] \quad mit$$

$\Phi(x):$ *Standardnormalverteilung an der Stelle $x$.*

***2. Zweiseitige Spezifikation:***

$$F_{\mathcal{D}}(D) = 1 - \prod_{i=1}^{k} \left(-1 + \Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right] + \Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\right).$$

**Beweis:**
Für $D = min(d_1, \ldots, d_k)$ gilt nach [MOO74](S. 184):

1. Einseitige Spezifikation:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{D}}(D) &= 1 - \prod_{i=1}^{k}[1 - F_{D_i}(D)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \left(1 - \Phi\left[\frac{(\log(-\log(D)) - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}\Phi\left[\frac{(\log(-\log(D)) - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]. \end{aligned}$$

2. Zweiseitige Spezifikation:

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{D}}(D) &= 1 - \prod_{i=1}^{k}[1 - F_{D_i}(D)] \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(1 - \left(2 - \Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right] + \Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\right)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{k}\left(-1 + \Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i} - \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right] + \Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i} + \tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\right). \qquad \square \end{aligned}$$

Die spezifizierte Verteilungsfunktion wird für die Aufstellung der Kontrollkarte bzw. insbesondere der Kontrollgrenzen benötigt. Die zugehörige Dichtefunktion wird im Folgenden bereitgestellt.

**Satz 5.1.10 (Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes (Minimum WF))** *Unter Gültigkeit der Voraussetzungen aus Satz 5.1.9 besitzt der Wünschbarkeitsindex D gemäß (10) aus Kapitel 2.2 die folgende Dichtefunktion:*

***1. Einseitige Spezifikation:***

$$f_{\mathcal{D}}(D) = -\frac{1}{D \cdot \log(D)} \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_i}\phi\left(\frac{\log(-\log(D)) - \tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right)\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k}\Phi\left(\frac{\log(-\log(D)) - \tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right)\right) \quad \textit{mit}$$

*$\phi(x)$: Dichtefunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle $x$,*

*$\Phi(x)$: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung an der Stelle $x$.*

***2. Zweiseitige Spezifikation***

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(D) &= -\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{(-\log(D))^{1/n_i}}{n_i\cdot D\cdot\log(D)\tilde{\sigma}_i}\left(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]+\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}+\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]\right)\right.\\ &\left.\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\left(-1+\Phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_j}-\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right]+\Phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_j}+\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right]\right)\right). \end{aligned}$$

**Beweis:**

1. Einseitige Spezifikation (Vollständige Induktion):

Die Behauptung gilt für k=2 (Induktionsanfang). Es ergibt sich mit Satz 5.1.9:

$$F_{\mathcal{D}}(D) = 1-\underbrace{\Phi\left[\frac{(\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_1)}{\tilde{\sigma}_1}\right]}_{I}\cdot\underbrace{\Phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_2)}{\tilde{\sigma}_2}\right]}_{II},\ \text{d.h.}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(D) &= F'_{\mathcal{D}}(D) = -\left(\frac{\partial I}{\partial D}\cdot II+\frac{\partial II}{\partial D}\cdot I\right)\\ &= -\frac{1}{D\cdot\log(D)}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_1}\cdot\phi\left(\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_1}{\tilde{\sigma}_1}\right)\Phi\left(\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}_2}\right)\right.\\ &\left.+\frac{1}{\tilde{\sigma}_2}\cdot\phi\left(\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_2}{\tilde{\sigma}_2}\right)\Phi\left(\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_1}{\tilde{\sigma}_1}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{D\cdot\log(D)}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_i}\phi\left(\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{2}\Phi\left(\frac{\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right)\right). \qquad (*) \end{aligned}$$

Die Behauptung gelte für $k = n$. Induktionsschluss "$n \to n+1$":

$$F_{\mathcal{D}}(D) = 1-\underbrace{\prod_{i=1}^{n}\Phi\left[\frac{(\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]}_{I}\cdot\underbrace{\Phi\left[\frac{(\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_{n+1})}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]}_{II}.\ \text{Dann gilt:}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{D}}(D) &= -\left(\frac{\partial I}{\partial D}\cdot II+\frac{\partial II}{\partial D}\cdot I\right)\\ &= -\left(-(*)\cdot\Phi\left[\frac{(\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_{n+1})}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]+\frac{1}{D\cdot\log(D)\cdot\tilde{\sigma}_{n+1}}\right.\\ &\left.\cdot\phi\left[\frac{(\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_{n+1})}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]\cdot\prod_{i=1}^{n}\Phi\left[\frac{(\log(-\log(D))-\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{D\cdot\log(D)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\tilde\sigma_i}\phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde\mu_i}{\tilde\sigma_i}\right]\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}\Phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde\mu_j}{\tilde\sigma_j}\right]\right)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{\tilde\sigma_{n+1}}\phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde\mu_{n+1}}{\tilde\sigma_{n+1}}\right]\cdot\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}\Phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde\mu_j}{\tilde\sigma_j}\right]\right)\\
&= -\frac{1}{D\cdot\log(D)}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1}{\tilde\sigma_i}\phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde\mu_i}{\tilde\sigma_i}\right]\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}\Phi\left[\frac{\log(-\log(D))-\tilde\mu_j}{\tilde\sigma_j}\right]\right).
\end{aligned}
$$

Mit Induktionsanfang und Induktionsschluss folgt die Behauptung.

<u>2. Zweiseitige Spezifikation (Vollständige Induktion):</u>

Die Behauptung gilt für k=2 (Induktionsanfang). Es ergibt sich mit Satz 5.1.9:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathcal{D}}(D) &= 1-\underbrace{\left(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_1}-\tilde\mu_1)}{\tilde\sigma_1}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_1}+\tilde\mu_1)}{\tilde\sigma_1}\right]\right)}_{I}\\
&\quad\cdot\underbrace{\left(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_2}-\tilde\mu_2)}{\tilde\sigma_2}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_2}+\tilde\mu_2)}{\tilde\sigma_2}\right]\right)}_{II},\\
f_{\mathcal{D}}(D) &= -\left(\frac{\partial I}{\partial D}\cdot II+\frac{\partial II}{\partial D}\cdot I\right)\\
&= -\left(\frac{(-\log(D))^{1/n_1}}{n_1 D\log(D)\tilde\sigma_1}\cdot\left(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_1}-\tilde\mu_1}{\tilde\sigma_1}\right]+\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_1}+\tilde\mu_1}{\tilde\sigma_1}\right]\right)\right.\\
&\quad\cdot\left(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_2}-\tilde\mu_2)}{\tilde\sigma_2}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_2}+\tilde\mu_2)}{\tilde\sigma_2}\right]\right)\\
&\quad+\frac{(-\log(D))^{1/n_2}}{n_2 D\log(D)\tilde\sigma_2}\cdot\left(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_2}-\tilde\mu_2}{\tilde\sigma_2}\right]+\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_2}+\tilde\mu_2}{\tilde\sigma_2}\right]\right)\\
&\quad\left.\cdot\left(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_1}-\tilde\mu_1)}{\tilde\sigma_1}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_1}+\tilde\mu_1)}{\tilde\sigma_1}\right]\right)\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{(-\log(D))^{1/n_i}}{n_i D\log(D)\tilde\sigma_i}\cdot\left(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}-\tilde\mu_i}{\tilde\sigma_i}\right]\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
+\,\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}+\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]\Bigg)\cdot\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{2}\Bigg(-1+\Phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_j}-\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right]
$$

$$
+\,\Phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_j}+\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right]\Bigg)\Bigg).
$$

Die Behauptung gelte für $k=n$, d.h.

$$
\begin{aligned}
f_{\mathcal{D}}(D) &= -\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\frac{(-\log(D))^{1/n_i}}{n_i D\log(D)\tilde{\sigma}_i}\cdot\Bigg(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]+\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}+\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]\Bigg)\\
&\quad\cdot\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Bigg(-1+\Phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_j}-\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right]+\Phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_j}+\tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right]\Bigg)\Bigg). \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Induktionsschluss “$n\to n+1$“:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathcal{D}}(D) &= 1-\underbrace{\prod_{i=1}^{n}\Bigg(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i}+\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\Bigg)}_{I}\\
&\quad\underbrace{\cdot\Bigg(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_{n+1}}-\tilde{\mu}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_{n+1}}+\tilde{\mu}_{n+1})}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]\Bigg)}_{II},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{\mathcal{D}}(D) &= -\left(\frac{\partial I}{\partial D}\cdot II+\frac{\partial II}{\partial D}\cdot I\right)\\
&= -(-(**)\cdot\Bigg(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_{n+1}}-\tilde{\mu}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]\\
&\quad+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_{n+1}}+\tilde{\mu}_{n+1})}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]\Bigg)+\frac{(-\log(D))^{1/n_{n+1}}}{n_{n+1}\cdot D\cdot\log(D)\cdot\tilde{\sigma}_{n+1}}\\
&\quad\cdot\Bigg(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_{n+1}}-\tilde{\mu}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]+\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_{n+1}}+\tilde{\mu}_{n+1}}{\tilde{\sigma}_{n+1}}\right]\Bigg)\\
&\quad\cdot\prod_{i=1}^{n}\Bigg(-1+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]+\Phi\left[\frac{((-\log(D))^{1/n_i}+\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\sigma}_i}\right]\Bigg)\\
&= -\sum_{i=1}^{n+1}\Bigg(\frac{(-\log(D))^{1/n_i}}{n_i D\log(D)\tilde{\sigma}_i}\cdot\Bigg(\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}-\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]+\phi\left[\frac{(-\log(D))^{1/n_i}+\tilde{\mu}_i}{\tilde{\sigma}_i}\right]\Bigg)
\end{aligned}
$$

| Funktion | Parameter 1. WF | Parameter 2. WF |
|---|---|---|
| (1) | (3,7,1)[4,1] | (3,7,1)[6,4] |
| (2) | (3,7,1)[5,1] | (3,7,1)[6,4] |
| (3) | (3,7,1)[4,1] | (3,7,1)[5,1] |
| (4) | (3,7,3.5)[4,1] | (3,7,3.5)[5,1] |
| (5) | (3,7,3.5)[4,1] | (3,7,3.5)[6,4] |
| (6) | (3,7,3.5)[5,1] | (3,7,3.5)[6,4] |
| (7) | (3,7,1)[4,1] | (3,7,3.5)[5,1] |
| (8) | (3,7,1)[5,1] | (3,7,3.5)[4,1] |
| (9) | (3,7,1)[5,1] | (3,7,3.5)[6,4] |

Tabelle 9: Parametereinstellungen der Dichtefunktionen aus Abbildung 15 der Form (LSL,USL,n)[$\mu, \sigma$], WF: Wünschbarkeitsfunktion.

$$\cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \left( -1 + \Phi \left[ \frac{(-\log(D))^{1/n_j} - \tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j} \right] + \Phi \left[ \frac{(-\log(D))^{1/n_j} + \tilde{\mu}_j}{\tilde{\sigma}_j} \right] \right) \Bigg) .$$

Mit Induktionsanfang und Induktionsschluss folgt die Behauptung. □

Die Form der hergeleiteten Dichtefunktionen varriiert stark in Abhängigkeit der Parameterniveaus $(\tilde{\mu}_i, \tilde{\sigma}_i, n_i)$. In den Abbildungen 11 und 12 wurden für verschiedene Parametereinstellungen die Dichteverläufe der ein- und zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington dargestellt und zu verschiedenen Verlaufstypen zusammengefasst. Zur Illustration der Dichteverläufe des Wünschbarkeitsindexes werden im Folgenden diese Einstellungen aufgegriffen.

Im Fall einer zweiseitigen Spezifikation ergibt sich beispielsweise eine Art glockenförmiger Verlauf, falls zwei Wünschbarkeitsfunktionen aus der linken Graphik aus Abbildung 12 mittels des Wünschbarkeitsindexes verdichtet werden. Andererseits erhält man eine U-förmige Funktion bei Verdichtung zweier Wünschbarkeitsfunktion aus der rechten Graphik und einen geschwungenen Verlauf bei Kombination zweier Wünschbarkeitsfunktionen aus unterschiedlichen Graphiken. Abbildung 15 zeigt die beschriebenen Fälle, Tabelle 9 enthält die zugehörigen Parametereinstellungen der Wünschbarkeitsfunktionen.

Auch die Dichtefunktion im Falle einseitig spezifizierter Wünschbarkeitsfunktionen kann eine Vielzahl verschiedener Verläufe annehmen. Analog zum zweiseitigen Fall werden die

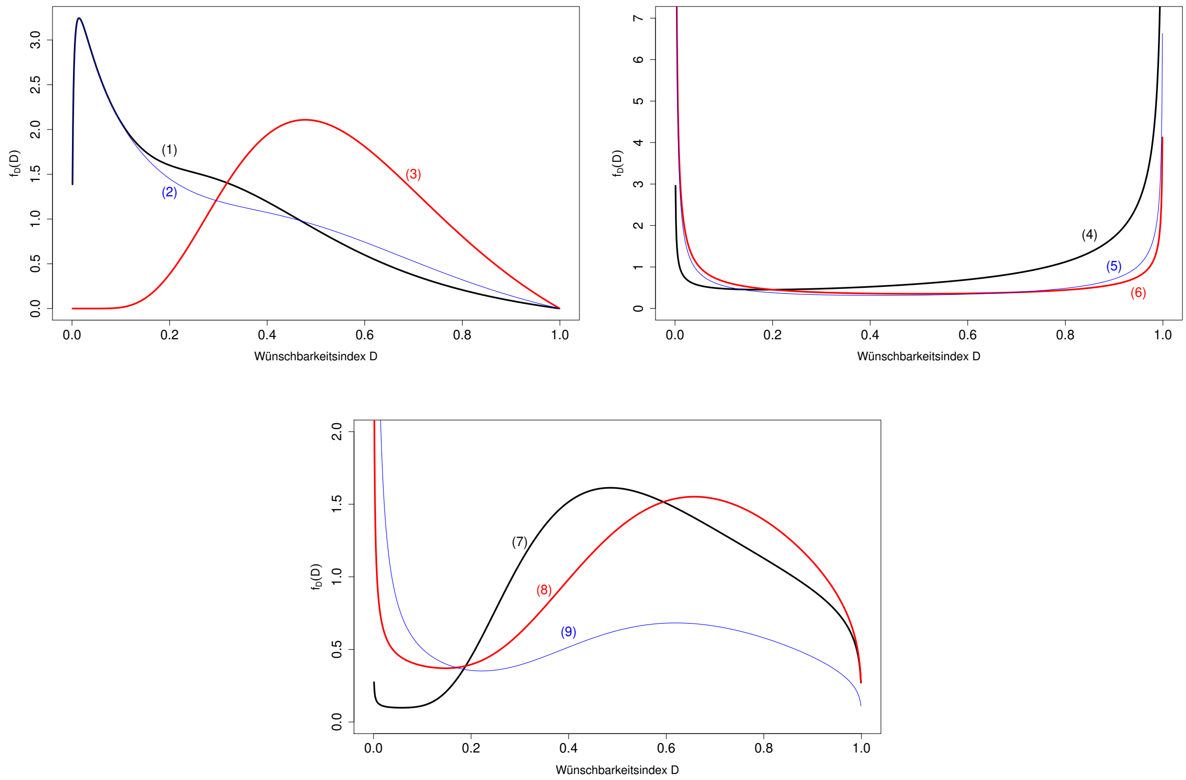



Abbildung 15: Beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes (Minimum WF) auf Basis der zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington, Erläuterungen siehe Tabelle 9.

in Abbildung 11 verwendeten Parametereinstellungen verwendet und je zwei Wünschbarkeitsfunktionen mittels des Wünschbarkeitsindexes, der das Minimum dieser Wünschbarkeitsfunktionen bildet, zusammengefasst. Abbildung 16 zeigt drei verschiedene Graphiken. Die Graphik oben links entsteht durch Verwendung zweier Wünschbarkeitsfunktionen mit Parametereinstellungen der rechten Graphik aus Abbildung 11, wobei die resultierende Dichtefunktion für den Wünschbarkeitsindex einen glockenförmigen Verlauf annimmt. Kombiniert man zwei Wünschbarkeitsfunktionen mit Parametereinstellungen aus der linken und rechten Graphik, d.h. aus verschiedenen Verlaufsklassen der Dichten der Wünschbarkeitsfunktionen, erhält man ein komplett anderes Bild, das den Dichten der Wünschbarkeitsfunktionen ähnelt. Dies ist in Abbildung 10 oben rechts dargestellt. Verwendet wird hier zwar dieselbe Art der Parametereinstellung aus der rechten Graphik von Abbildung 11, allerdings mit einem geringeren Erwartungswert, da ansonsten die Dichte des Wünschbarkeitsindexes nahezu identisch zur Dichte der Wünschbarkeitsfunktion aus der linken Graphik wäre. Die untere Graphik aus Abbildung 16 zeigt die Verläufe

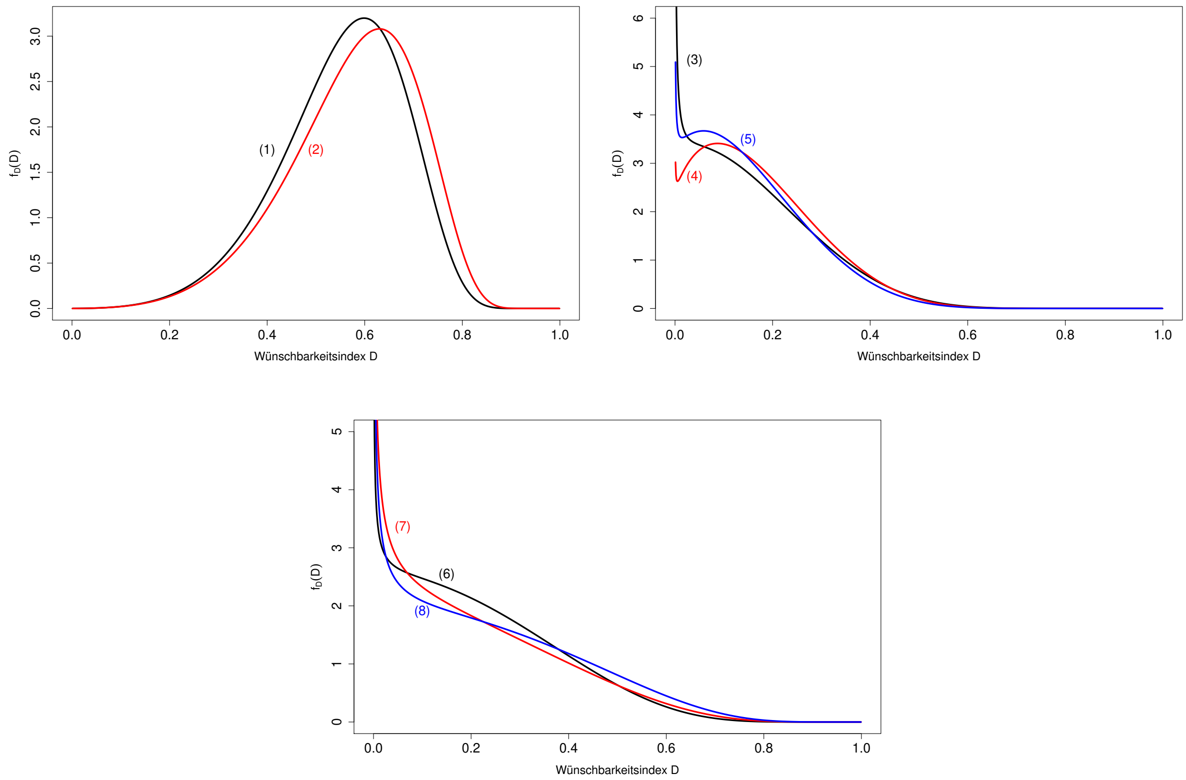



Abbildung 16: Beispielhafte Verläufe der Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes (Minimum WF) auf Basis der einseitigen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington, Erläuterungen siehe Tabelle 10.

der Dichtefunktionen, wenn der Wünschbarkeitsindex auf zwei Wünschbarkeitsfunktionen mit Parametereinstellungen aus der linken Graphik von Abbildung 11 basiert, d.h. wenn die Fallklassen 1 - 3 aus Satz 5.1.3 miteinander kombiniert werden. Tabelle 10 fasst die verwendeten Parametereinstellungen zusammen.

## 5.2 Geeignete Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes

Bei der Auswahl einer geeigneten Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex wird der Wünschbarkeitsindex so behandelt, als ob ein Prozess mit nur einem Qualitätsmerkmal vorliegt, das es zu kontrollieren gilt. Der Wünschbarkeitsindex fungiert als übergeordnetes Qualitätsmerkmal für den gesamten Prozess. Zur Verfügung stehen demnach grundsätzlich sämtliche univariaten Kontrollkarten (siehe Kapitel 4.2 und 4.3). Welche Kontrollkarte letztendlich am geeignetsten ist, kann allerdings allgemeingültig nicht beantwortet werden. Dies muss vielmehr im Einzelfall anhand des vorliegenden Prozesses entschieden werden.

| Funktion | Parameter 1. WF | Parameter 2. WF |
|---|---|---|
| (1) | [6,1.22] | [7,1.22] |
| (2) | [6,1.22] | [8,1.22] |
| (3) | [4.2,2.61] | [3,1.22] |
| (4) | [4.2,1.84] | [3,1.22] |
| (5) | [3.7,1.84] | [3,1.22] |
| (6) | [3.7,1.84] | [4.2,1.84] |
| (7) | [3.7,1.84] | [4.2,2.61] |
| (8) | [4.2,1.84] | [4.2,2.61] |

Tabelle 10: Parametereinstellungen der Dichtefunktionen aus Abbildung 16 der Form $[\mu, \sigma]$, WF: Wünschbarkeitsfunktion. WF definiert über die Zuordnungen ($y = 3 \rightarrow d = 0.2$, $y = 6 \rightarrow d = 0.6$).

Grundsätzlich ist allerdings zu beachten, dass die meisten der existierenden univariaten Kontrollkarten auf der Normalverteilungsannahme des zu kontrollierenden Qualitätsmerkmals beruhen. Diese kann jedoch bei Betrachtung des Wünschbarkeitsindexes schon allein durch den beschränkten Wertebereich auf das Intervall $[0, 1]$ nicht auftreten. Entweder muss die Idee der entsprechenden Kontrollkarte auf die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes übertragen werden (siehe beispielsweise Kapitel 5.2.1), was nicht immer in einfacher Art und Weise durchzuführen ist, oder die Wahl fällt auf eine Kontrollkarte, die allgemeingültig für jede Art von Verteilung angewendet werden kann (d.h. sie ist verteilungsunabhängig). Dies ist z.B. bei der in Kapitel 4.3 beschriebenen Zaunkarte der Fall.

Ferner ist es empfehlenswert, als Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex eine Urwertkarte zu verwenden. Die klassischen Kontrollkarten für die Prozesslage davon aus, dass die Prozessstreuung über die Zeit konstant ist und nur Verschiebungen in der Prozesslage entstehen können. Kontrollkarten für die Prozessstreuung gehen analog von konstanter Prozesslage aus. Diese Voraussetzungen sind jedoch bei der Prozesskontrolle mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes nicht gewährleistet. Ändert sich die Verteilung eines oder mehrerer Qualitätsmerkmale dahingehend, dass die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes modifiziert wird, wirkt sich dies i. Allg. automatisch auf den **Erwartungswert und die Varianz** des Wünschbarkeitsindexes aus. Dies liegt in der Anwendung einer nichtlinearen Wünschbarkeitsfunktion auf die Qualitätsmerkmale begründet und ist auch anschaulich klar. Durch den beschränkten Wertebereich des Wünschbarkeitsindexes auf das Intervall $[0, 1]$ muss sich die Varianz verkleinern, wenn sich der Erwartungswert den Intervallgrenzen nähert, da diese nicht überschritten werden können. Kapitel 5.2.2 illustriert dies in

Form von Fallbeispielen und zeigt ferner ARL - Verläufe verschiedener Kontrollkarten auf.

Neben dieser theoretisch begründeten Empfehlung sprechen auch inhaltliche Gründe für die Verwendung von Urwertkarten. Da der Wünschbarkeitsindex über die Bildung des geometrischen Mittelwertes bereits eine Verdichtung von verschiedenen Qualitätsmerkmalen zu einem bestimmten Zeitpunkt darstellt, würde eine zusätzliche zeitliche Mittelung bzw. Zusammenfassung die Interpretation und anschließende Ursachenanalyse erschweren oder gar unmöglich machen, wenn nicht zusätzlich Urwert-Kontrollkarten für die einzelnen Qualitätsmerkmale mitgeführt werden. Dies ist jedoch nicht das Ziel einer Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex. Diese fokussiert gerade die Dimensionsreduktion bei der Beurteilung der Prozessqualität, ein solches zusätzliches Mitführen würde die Vorteile der einfachen Qualitätsbeurteilung wieder zunichte machen. Die Verwendung von Urwertkarten ist außerdem immer dann zu empfehlen, wenn die Distanzen zwischen den Beobachtungen relativ groß sind, um eine möglichste zeitnahe Prozesskontrolle zu ermöglichen. Liegt z.B. eine tageweise Betrachtung vor und würde eine Mittelwertkarte mit Gruppengröße 5 verwendet, würde nur einmal pro Arbeitswoche rückwirkend ein Wert für die Qualitätskontrolle zur Verfügung stehen, was in den meisten Fällen zu wenig sein wird.

Wird eine Verdichtung der Werte des Wünschbarkeitsindexes gewünscht, kann prinzipiell alternativ eine zweispurige Kontrollkarte verwendet werden. Bei paralleler Führung einer Kontrollkarte für die Prozesslage und die Prozessstreuung kann immer dann von einer Störung der Gesamtprozessqualität ausgegangen werden, wenn mindestens eine der beiden Kontrollkarten eine Prozessstörung signalisiert. Zentral ist hier allerdings die Wahl des Signifikanzniveaus der beiden zugrundeliegenden statistischen Tests, da hier ein multiples Testproblem vorliegt. Sind die beiden Schätzer für den Erwartungswert und die Varianz des Prozesses voneinander unabhängig, wird das multiple Testniveau mit Hilfe der Bonferroni - Methode adjustiert. Diese Unabhängigkeit ist jedoch bei den in der Literatur am häufigsten verwendeten zweispurigen Kontrollkarten (Kapitel 4.2) nur bei Vorlage der Normalverteilung gegeben (vgl. [WEI99], S. 327 f.). Wie im vorigen Absatz beschrieben, weist insbesondere die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes keine Unabhängigkeit von Erwartungswert und Varianz auf, sodass auf den klassischen Bonferroni-Ansatz nicht zurückgegriffen werden kann.

Ferner sollten in einer ersten Analysephase des Prozesses immer die Grundvoraussetzungen an die Anwendbarkeit einer Kontrollkarte geprüft werden. Dies entspricht der Prüfung auf Unabhängigkeit der einzelnen Beobachtungen und auf eine zeitunabhängige Verteilung. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, muss entweder der gesamte Prozess neu eingestellt werden oder z. B. ein etwaiger Zeittrend oder eine saisonale Schwankung vorher aus den Daten entfernt werden, um eine sinnvolle Prozesskontrolle zu gewährleisten.

Kapitel 5.2.1 stellt das Konstruktionsprinzip von Urwertkarten vor, die speziell auf die jeweilige Verteilung des Wünschbarkeitsindexes zugeschnitten sind. Diese Verteilungen wurden für Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington und verschiedene Formen des Wünschbarkeitsindexes (geometrischer Mittelwert, Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen) in Kapitel 5.1 bereitgestellt.

### 5.2.1 Urwert- und Extremwertkarten für Wünschbarkeitsindizes

Betrachtet wird im Folgenden der Anwendungsfall, in dem der Prozess derartige Charakteristika aufweist, dass eine Urwertkarte zur Prozesskontrolle herangezogen wird. Dabei wird vorausgesetzt, dass eine Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex erstellt werden soll. Das Vorgehen zur Konstruktion einer Urwertkarte unterscheidet sich primär dahingehend, ob die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes bekannt ist oder nicht.

Die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes hängt von verschiedenen Faktoren ab, d.h. von der Verteilung der Qualitätsmerkmale, von der Art der verwendeten Wünschbarkeitsfunktionen für die einzelnen Qualitätsmerkmale (siehe dazu Kapitel 2.1) sowie von der Art des Wünschbarkeitsindexes (beispielsweise geometrischer Mittelwert). Kapitel 5.1 stellt für normalverteilte Qualitätsmerkmale die Dichte- bzw. Verteilungsfunktionen des Wünschbarkeitsindexes für die folgenden Fälle bereit:

- Einseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington und geometrischer Mittelwert als Wünschbarkeitsindex,
- zweiseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington (k=2, $n_i$=1 $\forall i$) und geometrischer Mittelwert als Wünschbarkeitsindex,
- einseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington und Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen als Wünschbarkeitsindex und
- zweiseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington und Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen als Wünschbarkeitsindex.

Zur Konstruktion der Kontrollkarte ist ein Intervall gesucht, das jede Realisation des Wünschbarkeitsindexes mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit enthält. Die Kontrollgrenzen resultieren bei Verwendung einer 99-prozentigen Wahrscheinlichkeit, die Warngrenzen entsprechen den Intervallgrenzen bei einer Wahrscheinlichkeit von 95%. Detailliertere Ausführungen zur Theorie der Kontrollkarten sind Kapitel 4 zu entnehmen. Nach [HAR99] (S. 132) liegt jede einzelne Beobachtung mit der Wahrscheinlichkeit $p$ in dem Intervall, das als untere Grenze das $(1-p)/2$-Quantil und als obere Grenze das $(1+p)/2$-Quantil der Verteilung besitzt. Das führt zu nachstehendem Konstruktionsprinzip einer Urwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex.

**Definition 5.2.1 (Urwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex)** *Gegeben sei ein Prozess mit k Qualitätsmerkmalen, die mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes D aus Kapitel 2.2 in ein univariates Qualitätsmerkmal überführt worden sind. Die Dichtefunktion $f_{\mathcal{D}}(D)$ bzw. die Verteilungsfunktion $F_{\mathcal{D}}(D)$ sei bekannt. Eine Kontrollkarte wird Urwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex genannt, wenn die Kontroll (LCL, UCL)- und Warngrenzen (LWL, UWL) wie folgt bestimmt werden:*

- $LCL = Q_{0.005}$ *bzw.* $UCL = Q_{0.995}$ *und*
- $LWL = Q_{0.025}$ *bzw.* $UWL = Q_{0.975}$.

*Dabei bezeichnet $Q_\alpha$ das $\alpha$-Quantil der Verteilung von D. Als Sollwertlinie wird der Median ($Q_{0.5}$) oder auch der Erwartungswert der Verteilung eingetragen.*

Die Quantile werden je nach Komplexität der vorliegenden Verteilungsfunktion analytisch durch Bildung der Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion oder durch numerische Lösung der Gleichung $F_{\mathcal{D}}(Q_\alpha) = \alpha$ bestimmt. Ebenso wird eine numerische Berechnung des Erwartungswertes benötigt, da sich für die oben genannten Fälle aus Kapitel 5.1 die Erwartungswerte der resultierenden Verteilungen nicht allgemeingültig analytisch angeben lassen. Unter Verwendung der jeweiligen Parametereinstellungen ergibt sich der Erwartungswert von $D$ wie folgt (vgl. [MOO74], S. 65):

$$E(D) = \int_0^1 D \cdot f_{\mathcal{D}}(D)\, d(D) \text{ bzw. } E(D) = \int_0^1 (1 - F_{\mathcal{D}}(D))\, d(D).$$

Zu beachten ist, dass aufgrund der Schiefe der Verteilungen die Kontrollgrenzen im Gegensatz zur Normalverteilungsannahme zumeist nicht symmetrisch um den Erwartungswert oder Median liegen.

Nach analogem Vorgehen wird eine **Extremwertkarte** für den Wünschbarkeitsindex definiert. Der Unterschied zur Urwert-Kontrollkarte besteht darin, dass die auf Stichprobenentnahmen aus dem laufenden Prozess zurückgehende Gruppenbildung der Realisationen des Wünschbarkeitsindexes erhalten bleibt, aber trotzdem die Urwerte über die Zeit kontrolliert werden. Diese werden pro Zeitpunkt der Stichprobenentnahme übereinander in der Kontrollkarte abgetragen. Der Prozess wird nur dann als statistisch unter Kontrolle deklariert, wenn sämtliche Realisationen und insbesondere die Extremwerte dieser Stichprobe innerhalb der Kontrollgrenzen liegen. Analog zur Extremwertkarte bei Vorliegen einer Normalverteilung (siehe Kapitel 4.2) basieren die Kontroll- und Warngrenzen auf der Forderung, dass im Falle eines sich statistisch unter Kontrolle befindlichen Prozesses eine Realisation einer Gruppe der Größe $g$ mit einer Wahrscheinlichkeit von $100 \cdot \sqrt[g]{0.99}$ % bzw. $100 \cdot \sqrt[g]{0.95}$ % innerhalb der Kontroll- bzw. Warngrenzen liegt. Dem Vorteil der Beibehaltung der Gruppengröße steht jedoch gegenüber, dass dieses Vorgehen zu breiteren Kontrollgrenzen führt als die Urwertkarte.

**Definition 5.2.2 (Extremwertkarte für den Wünschbarkeitsindex)** *Unter den Voraussetzungen von Definition 5.2.1 und Stichprobenentnahmen der Gruppengröße $g$ wird eine Kontrollkarte Extremwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex genannt, wenn die Kontroll (LCL, UCL)- und Warngrenzen (LWL, UWL) wie folgt bestimmt werden:*

- $LCL = Q_{(1-\sqrt[g]{0.99})/2}$ *bzw.* $UCL = Q_{(1+\sqrt[g]{0.99})/2}$ *und*
- $LWL = Q_{(1-\sqrt[g]{0.95})/2}$ *bzw.* $UWL = Q_{(1+\sqrt[g]{0.95})/2}$.

*Dabei bezeichnet $Q_\alpha$ das $\alpha$-Quantil der Verteilung von $D$. Als Sollwertlinie wird der Erwartungswert der Verteilung eingetragen.*

Grundsätzlich kann natürlich immer auch eine nichtparametrische Kontrollkarte zur Anwendung finden, bei unbekanntem Verteilungstyp des Qualitätsmerkmals ist dies sogar zwingend, falls sich eine Normalverteilungsannahme nicht vertreten lässt. Diese Kontrollkarten werden unabhängig von der zugrundeliegenden Verteilung des zu kontrollierenden Merkmals immer auf dieselbe Art und Weise bestimmt. Verschiedene Arten nichtparametrischer Kontrollkarten werden in Kapitel 4.3 vorgestellt. Hier bietet sich insbesondere die Zaunkarte an, die auf der Grundidee eines Box-Plots beruht. Diese Kontrollkarte wird zur

Illustration am Beispiel eines Fruchtsaftherstellungsprozesses in Kapitel 5.3.1 verwendet. Falls die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes bekannt ist, kann die Zaunkarte durch Berechnung der theoretischen anstelle empirischer Quantile speziell für die vorliegende Verteilung bestimmt werden. Eine beispielhafte Anwendung der (empirischen) Urwert-Kontrollkarte aus Definition 5.2.1 wird anhand eines modifizierten Fruchtsaftherstellungsprozesses in Kapitel 5.3.2 vorgestellt. Hier werden auch die in Kapitel 5.3 vorgestellten verschiedenen Möglichkeiten der Ursachenanalyse für Situationen, in denen der Prozess statistisch nicht mehr unter Kontrolle ist, exemplarisch dargestellt. Diese Möglichkeiten hängen primär von der Art des Wünschbarkeitsindexes sowie der verwendeten Kontrollkarte ab.

### 5.2.2 Vergleichende Betrachtungen mit existierenden Kontrollkarten

Im Folgenden wird ein Vergleich zwischen der vorgestellten Urwert- und Extremwertkarte (UK, EKWI) mit anderen existierenden Kontrollkarten gezogen. Dabei werden insbesondere die Probleme aufgezeigt, die bei Anwendung von Kontrollkarten entstehen können, die nicht auf die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes zugeschnitten sind. Zu diesem Zweck wurden zunächst für die Urwertkarte für jeweils zwei normalverteilte Qualitätsmerkmale Simulationen durchgeführt. Dabei wird diese Kontrollkarte mit der Shewhart-Einzelwertkarte (Kapitel 4.2) und der Zaunkarte (Kapitel 4.3) hinsichtlich der Kontrollgrenzen und des ARL-Verhaltens verglichen, wobei zur Bestimmung der Kontrollgrenzen der Zaunkarte keine Referenzstichprobe, sondern die theoretische Verteilung des Wünschbarkeitsindexes verwendet wird.

Die Simulationsergebnisse (30.000 Durchläufe) für ein- und zweiseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington, jeweils kombiniert mit dem geometrischen Mittelwert oder dem Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen, sind in den Tabellen 11 bis 14 bzw. in den Abbildungen 17 bis 20 dargestellt. Die Tabellen enthalten die Kontrollgrenzen sowie die Werte der In-Control-ARL für die drei betrachteten Kontrollkarten bei verschiedenen Parametereinstellungen, die zum Großteil den Einstellungen entsprechen, die in Kapitel 5.1 zur Darstellung möglicher Verläufe der Dichte- und Verteilungsfunktion des Wünschbarkeitsindexes verwendet werden. Die Abbildungen greifen jeweils eine der Parametereinstellungen aus der zugehörigen Tabelle auf und illustrieren den gesamten ARL-Verlauf bei Erwartungswertverschiebungen eines oder beider Qualitätsmerkmale sowie die Auswirkungen auf den Mittelwert und die Varianz der simulierten Werte des Wünschbarkeitsindexes.

Um die ARL - Werte vergleichen zu können, wurden die Kontrollgrenzen der Shewhart-Einzelwertkarte und der Zaunkarte so adjustiert, dass ihre In-Control-ARL-Werte mit dem In-Control-ARL-Wert der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex übereinstimmen.

Die vorgestellten Urwert- und Extremwertkarten für Wünschbarkeitsindizes sind so konstruiert, dass ihre theoretische In-Control-ARL einen Wert von 100 aufweist (vgl. (16) in Kapitel 4.1). Dies findet sich in den Simulationsergebnissen bestätigt, lediglich im Fall einseitiger Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington in Kombination mit dem geometrischen Mittelwert treten teilweise extrem höhere Werte auf. Das liegt darin begründet, dass hier die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes nur approximativ bestimmt wird und in diesen Fällen nicht exakt genug ist. Daher sollte vor Verwendung dieser Verteilung immer die Güte der Approximation kontrolliert werden.

Im Vergleich mit der Shewhart-Einzelwertkarte (SH) und der Zaunkarte (ZA) wird ferner folgendes deutlich:

- Bei relativ hohen Standardabweichungen der Qualitätsmerkmale und bzw. oder Erwartungswerten des Wünschbarkeitsindexes nahe der Wertebereichsgrenzen kann es passieren, dass die **Kontrollgrenzen bei der SH und ZA außerhalb des Wertebereiches des Wünschbarkeitsindexes** von $(0, 1]$ liegen. Diese Situationen sind in den Tabellen mit kursiven Werten dargestellt. Dies führt zwar zu einer sehr großen In-Control-ARL (oft $\infty$), aber auch zu einer sehr hohen Out-Of-Control-ARL, die in Extremfällen, wenn beide Kontrollgrenzen außerhalb des Wertebereiches liegen, auch $\infty$ annimmt. Die Begründung ist bei der SH in der implizierten Symmetrie der zugrundeliegenden Verteilung um den Erwartungswert zu suchen, da sie auf die Normalverteilung zugeschnitten ist. Ohne Berücksichtigung des Wertebereiches des Wünschbarkeitsindexes werden (wie hier im Fall unbekannter Parameter) dem simulativ bestimmten Mittelwert das dreifache der geschätzten Standardabweichung hinzuaddiert bzw. abgezogen. Die ZA verwendet zwar die theoretische Verteilung des Wünschbarkeitsindexes zur Bestimmung der benötigten Quartile, geht aber von symmetrischen Verteilungsrändern außerhalb der Quartilsgrenzen aus. Das kann genauso wie bei der SH zu Problemen führen.
- Allgemein gesehen wird die **Anwendung der ZA und SH immer problematischer, je schiefer die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes ist**, auch wenn die Kontrollgrenzen innerhalb des Wertebereiches sind. Betrachtet man beispielswei-

se das letzte Beispiel aus Tabelle 14, sieht man, dass die In-Control-ARL der ZA und SH extrem niedrig sind. Die zugehörige Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes zeigt (4) in Abbildung 21.

- Die **In-Control-ARL-Werte der ZA und SH liegen fast immer oberhalb des In-Control-Wertes der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex**. Auf den ersten Blick erscheint dies nicht problematisch oder gar gut, ein Vergleich muss jedoch auch hinsichtlich des Out-Of-Control-Verhaltens gezogen werden.

Die Verläufe der Out-Of-Control-ARL hängen stark von den Parametereinstellungen der Wünschbarkeitsfunktionen ab. Zum Gütevergleich wurden die Kontrollgrenzen der Zaunkarte und Shewhart-Einzelwertkarte dahingehend modifiziert, dass die In-Control-ARL mit der In-Control-ARL der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex übereinstimmt. Die Adjustierung erfolgt über den Parameter $z$ und ist jeweils in den Tabellenbeschriftungen angegeben:

$$\begin{array}{llcll} SH: & UCL/LCL & = & \bar{y} \pm z \cdot s & \text{mit Standard } z = 3, \\ ZA: & UCL/LCL & = & Q_{0.75/0.25} \pm z \cdot (Q_{0.75} - Q_{0.25}) & \text{mit Standard } z = 1.5. \end{array}$$

Die dargestellten ARL-Verläufe resultieren aus Erwartungswertverschiebungen der Qualitätsmerkmale. Diese werden so gewählt, dass sich sowohl Verschiebungen des Erwartungswertes des Wünschbarkeitsindexes nach oben als auch nach unten ergeben. Dabei bedeutet die Beschriftung $(a, b)$ der Abbildungen folgende Veränderung der Verteilung der Qualitätsmerkmale:

$$\begin{array}{lcl} (0,0) & : & Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2); \\ (a,b) & : & Y_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + a \cdot \sigma_1, \sigma_1^2), Y_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2 + b \cdot \sigma_2, \sigma_2^2). \end{array}$$

Bei Betrachtung der Abbildungen wird zunächst deutlich, dass die **Erwartungswertveränderungen der Qualitätsmerkmale Auswirkungen auf den Erwartungswert und die Varianz des Wünschbarkeitsindexes** haben. In der linken Graphik der Abbildungen sind jeweils die Erwartungswert- und Varianzveränderungen aufgetragen. Nähert sich der Erwartungswert den Grenzen des Wertebereiches des Wünschbarkeitsindexes, wird die Standardabweichung des Wünschbarkeitsindexes geringer. Dies ist eine logische Konsequenz, da die Grenzen des Wertebereiches nicht überschritten werden können.

Die ARL der betrachteten Kontrollkarten wurde für jede Einstellung von $(a, b)$ bestimmt und in den Abbildungen 17 bis 20 rechts visualisiert. Eine Verbindung der Punkte ist grundsätzlich nicht korrekt, wird aber zur Erleichterung des optischen Vergleiches der einzelnen ARL-Verläufe eingezeichnet. Neben der Mittelwertverschiebung der simulierten Werte des Wünschbarkeitsindexes muss nämlich als weiterer Faktor die zugehörige Standardabweichung betrachtet werden. Diese ist in der Graphik zur Orientierung mit eingetragen. So lassen sich auch die "Zacken" in den ARL-Verläufen erklären. Liegt in etwa dieselbe Mittelwertverschiebung des Wünschbarkeitsindexes vor, aber eine geringere Standardabweichung, ist die Wahrscheinlichkeit für ein Überschreiten der Kontrollgrenzen geringer. Demzufolge ist die ARL an dieser Stelle höher als an den benachbarten.

Auch bzw. gerade bei Betrachtung der Werte der Out-Of-Control-ARL zeigt sich die Problematik bei sehr schiefen Verteilungen. Je schiefer die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes, desto extremere ARL-Verläufe zeigen sich bei der Shewhart-Einzelwertkarte und der Zaunkarte (Abbildungen 17, 19 und 20). Die zugehörigen Dichtefunktionen des Wünschbarkeitsindexes sind in Abbildung 21 unten dargestellt. Zusätzlich sind zur Illustration Normalverteilungsdichten mit den geschätzten Erwartungswerten und Varianzen des Wünschbarkeitsindexes dargestellt, um das Ausmaß der Abweichung von der Normalverteilung zu verdeutlichen. Jeweils in der Richtung der Erwartungswertveränderung des Wünschbarkeitsindexes, in der die Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes steiler ist als die dargestellte Normalverteilungsdichte, sind extrem hohe ARL-Werte der Shewhart-Einzelwertkarte und der Zaunkarte auffällig, da hier die Shewhart-Einzelwertkarte und die Zaunkarte die identischen additiven Konstanten anwenden wie an der flacheren Seite der Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes und somit Prozessstörungen nicht schnell genug erkennen können.

Lediglich im Beispiel zweier einseitiger Wünschbarkeitsfunktionen, die mittels des geometrischen Mittelwertes kombiniert werden, ergibt sich ein ähnlicher ARL-Verlauf aller drei Kontrollkarten. In diesem Fall ist die Dichtefunktion des Wünschbarkeitsindexes relativ symmetrisch (vgl. Abbildung 21 oben) und ähnelt stark der eingezeichneten Normalverteilungsdichte. Als Beispiel wurden hier diejenigen Parametereinstellungen der Qualitätsmerkmale und Wünschbarkeitsfunktionen ausgewählt, die in Kapitel 6.2 zur Kontrolle eines automatischen Multishuttle-Lagers verwendet werden. Bei Betrachtung der Abbildung wird deutlich, warum in der späteren Anwendung die Zaunkarte zur Prozesskontrolle ausgewählt wird.

| | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Par. Kontroll-karte \ Par. WF | (3,7,1)[4,1] (3,7,1) [5,1] | | | (3,7,1) [4,1] (3,7,1) [6,4] | | | (3,7,1) [5,1] (3,7,1) [6,4] | | | (3,7,1)[5,0.3](◇) (2,9,1)[3,0.8] | | |
| LCL | 0.2886 | 0.1768 | 0.1958 | 0.03913 | *-0.2349* | *-0.2514* | 0.0440 | *-0.2318* | *-0.2674* | 0.4772 | 0.4167 | 0.4431 |
| UCL | 0.9605 | *1.0851* | *1.0648* | 0.9215 | *1.01704* | *1.0138* | 0.9382 | *1.0895* | *1.10402* | 0.8982 | 0.9133 | 0.8802 |
| In-Control-ARL | 100.19 | *3368.30* | *3138.37* | 101.4186 | $\infty$ | $\infty$ | 100.50 | $\infty$ | $\infty$ | 99.89 | 299.07[1)] | 110.18[2)] |

Tabelle 11: Simulierte In-Control-ARL-Werte der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex (UK), der Shewhart-Einzelwertkarte (SH) sowie der Zaunkarte (ZA) unter verschiedenen Parametereinstellungen (LSL,USL,n)[$\mu_i$,$\sigma_i$] zweier zweiseitiger Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington. [1)]: Nach Adjustierung: LCL = 0.4520, UCL = 0.8780, In-Control-ARL = 99.25, z = 2.628; [2)]: Nach Adjustierung: LCL = 0.4465, UCL = 0.8768, In-Control-ARL = 99.58, z = 1.469.

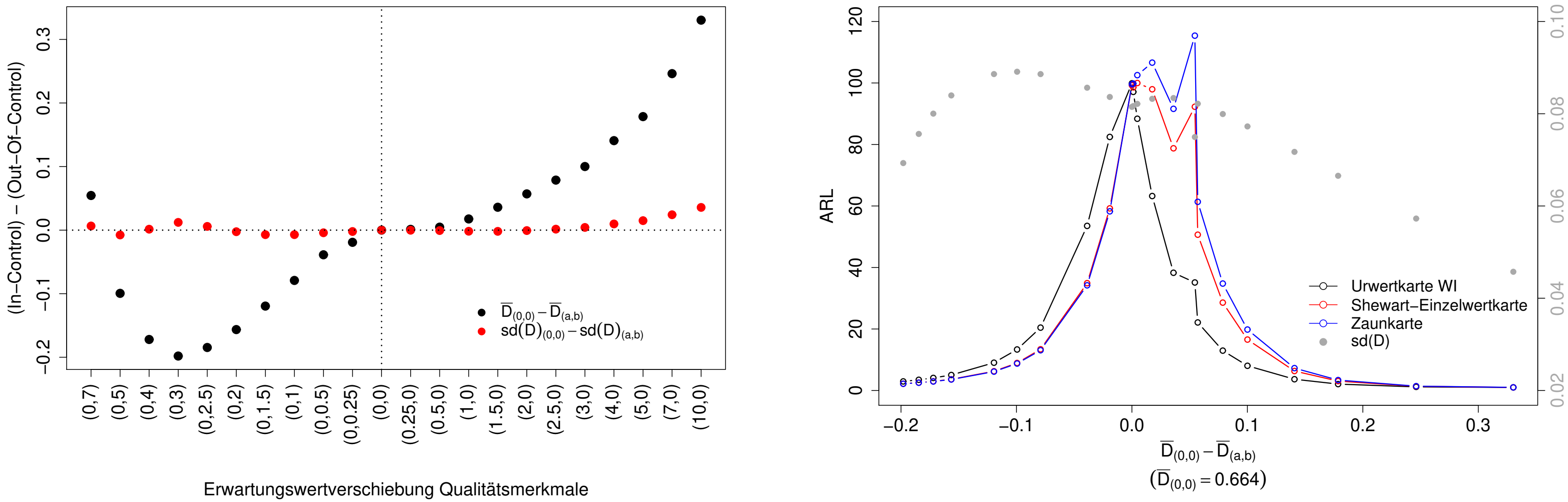
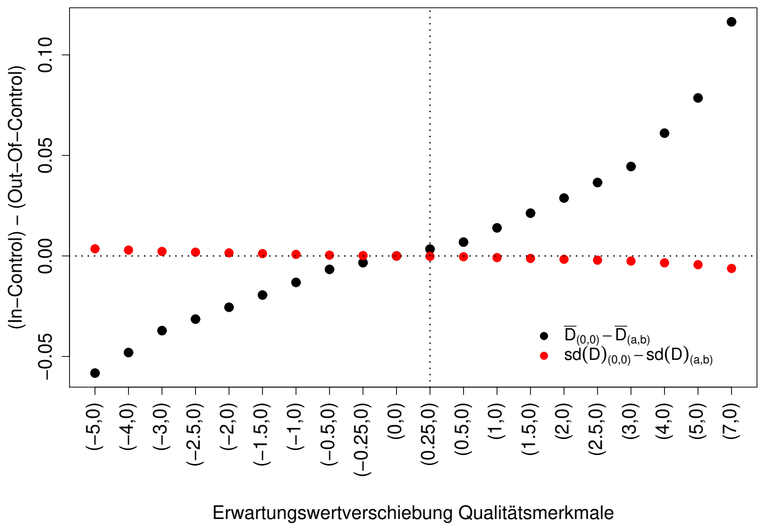



Abbildung 17: Links: Mittelwert- und Varianzveränderung des Wünschbarkeitsindexes in Abhängigkeit von Erwartungswertverschiebungen der Qualitätsmerkmale, Rechts: ARL-Verläufe der UK, SH und ZA, Wünschbarkeitsfunktionen gemäß (◇).

| | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Par. Kontroll-karte \ Par. WF | [6,1.22] [7,1.22] | | | [4.2,1.84] [3,1.22] | | | [6.41,0.2] (∗) (♢) [-0.98,0.53] (∗∗) | | |
| LCL | 0.2278 | 0.3367 | 0.2734 | 0.0028 | *-0.1316* | *-0.2451* | 0.7632 | 0.7598 | 0.7642 |
| UCL | 0.8720 | 0.9225 | 0.9866 | 0.7097 | 0.6405 | 0.7484 | 0.8349 | 0.8426 | 0.8392 |
| In-Control-ARL | 1583.61 | 168.5 | 732.20 | 1048.95 | *503.76* | *3328.11* | 99.43 | 307.49[3)] | 136.22[4)] |

Tabelle 12: Simulierte In-Control-ARL-Werte der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex (UK), der Shewhart-Einzelwertkarte (SH) sowie der Zaunkarte (ZA) unter verschiedenen Parametereinstellungen $[\mu_i,\sigma_i]$ zweier einseitiger Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington. WF's definiert über die Zuordnung ($y = 3 \rightarrow d = 0.2$, $y = 6 \rightarrow d = 0.6$), (($*$):$y = 2.7 \rightarrow d = 0.9$, $y = 9.8 \rightarrow d = 0.2$) bzw. (($**$):$y = -1 \rightarrow d = 0.997$, $y = 3.5 \rightarrow d = 0.0001$). [3)]: Nach Adjustierung: LCL = 0.7651, UCL = 0.8373, In-Control-ARL = 107.03, z = 2.61; [4)]: Nach Adjustierung: LCL = 0.7654, UCL = 0.8379, In-Control-ARL = 107.82, z = 1.433.



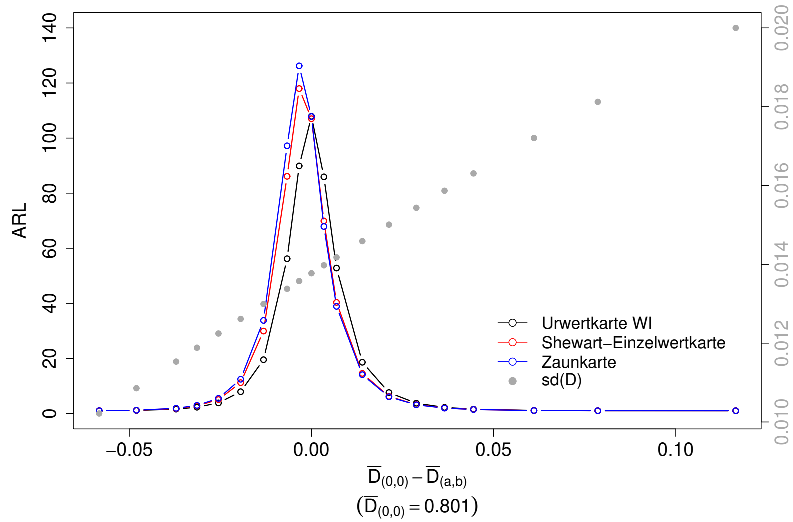




Abbildung 18: Links: Mittelwert- und Varianzveränderung des Wünschbarkeitsindexes in Abhängigkeit von Erwartungswertverschiebungen der Qualitätsmerkmale, Rechts: ARL-Verläufe der UK, SH und ZA, Wünschbarkeitsfunktionen gemäß (♢).

| | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Par. Kontroll-karte \ Par. WF | (3,7,1)[4,1] (3,7,1) [5,1] | | | (3,7,1) [4,1] (3,7,3.5) [5,1] | | | (4,6,1.5)[4,0.2] (◊) (3,7,1)[5,0.5] | | |
| LCL | 0.1654 | 0.0053 | 0.0120 | 0.0378 | *-0.0783* | *-0.0972* | 0.1549 | 0.0417 | 0.0755 |
| UCL | 0.9446 | *1.0538* | *1.0356* | 0.9880 | *1.2131* | *1.2366* | 0.7043 | 0.7129 | 0.6701 |
| In-Control-ARL | 100.28 | ∞ | ∞ | 100.49 | ∞ | ∞ | 99.21 | 240.09 [5)] | 101.49 |

Tabelle 13: Simulierte In-Control-ARL-Werte der Urwertkarte (UK) für den Wünschbarkeitsindex (Minimum WF), der Shewhart-Einzelwertkarte (SH) sowie der Zaunkarte (ZA) unter verschiedenen Parametereinstellungen (LSL,USL,n)[$\mu_i$,$\sigma_i$] zweier zweiseitiger Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington. [5)]: Nach Adjustierung: LCL = 0.0857, UCL = 0.6702, In-Control-ARL = 101.64, z = 2.655.

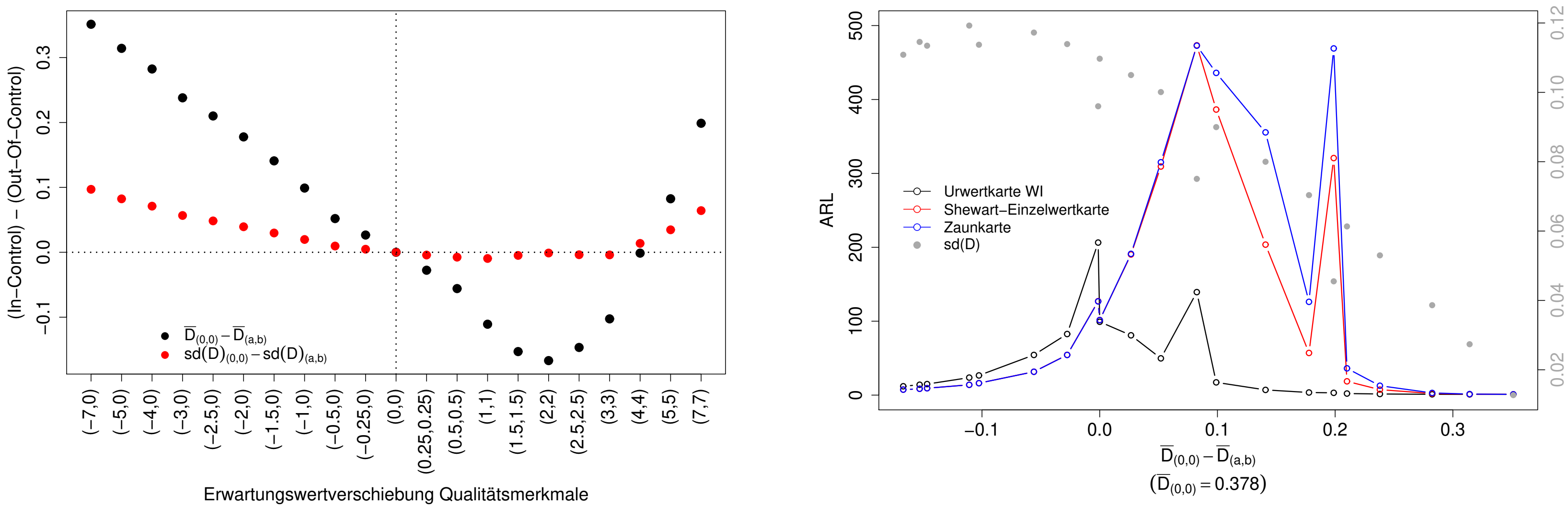



Abbildung 19: Links: Mittelwert- und Varianzveränderung des Wünschbarkeitsindexes in Abhängigkeit von Erwartungswertverschiebungen der Qualitätsmerkmale, Rechts: ARL-Verläufe der UK, SH und ZA, Wünschbarkeitsfunktionen gemäß (◊).

| | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA | UK | SH | ZA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Par. Kontroll- | [6,1.22] (◊) | | | [4.2,1.84] | | | [9,1](∗∗) | | |
| karte \ Par. WF | [7,1.22] | | | [4.2,2.61] | | | [6.1,0.5](∗) | | |
| LCL | 0.1780 | 0.1754 | 0.2143 | 0.0012 | *-0.1844* | *-0.1759* | 0.2496 | 0.3728 | 0.4830 |
| UCL | 0.8061 | 0.9331 | 0.9068 | 0.5383 | 0.5335 | 0.5064 | 0.8255 | 0.9634 | 0.8832 |
| In-Control-ARL | 100.23 | 211.38 [6)] | 99.55 | 100.71 | *180.84* | *105.97* | 99.71 | 56.10 | 21.09 |

Tabelle 14: Simulierte In-Control-ARL-Werte der Urwertkarte (UK) für den Wünschbarkeitsindex (Minimum WF), der Shewhart-Einzelwertkarte (SH) sowie der Zaunkarte (ZA) unter verschiedenen Parametereinstellungen $[\mu_i,\sigma_i]$ zweier einseitiger Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington. WF's definiert über die Zuordnung $(y = 3 \rightarrow d = 0.2,\ y = 6 \rightarrow d = 0.6)$, $((*){:}y = 3 \rightarrow d = 0.2,\ y = 6 \rightarrow d = 0.7)$ bzw. $((**){:}y = 7 \rightarrow d = 0.4,\ y = 10 \rightarrow d = 0.9)$. [6)]: Nach Adjustierung: LCL = 0.2143, UCL = 0.8941, In-Control-ARL = 100.54, z = 2.67.

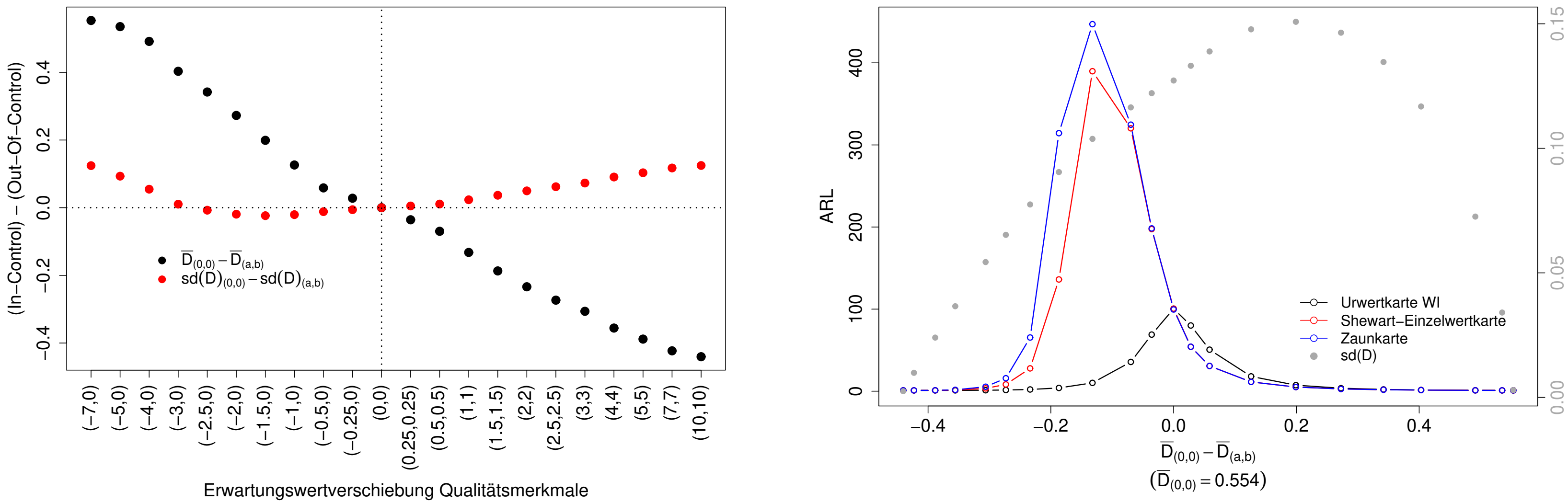



Abbildung 20: Links: Mittelwert- und Varianzveränderung des Wünschbarkeitsindexes in Abhängigkeit von Erwartungswertverschiebungen der Qualitätsmerkmale, Rechts: ARL-Verläufe der UK, SH und ZA, Wünschbarkeitsfunktionen gemäß (◊).

Ihre ARL weist einen ähnlichen Verlauf zur ARL der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex auf, erkennt aber Erwartungswertverringerungen des Wünschbarkeitsindexes, die in dem Fall von primärem Interesse sind, etwas schneller als die Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex. Die Zaunkarte zeigt zwar einen fast identischen ARL-Verlauf zur Shewhart-Einzelwertkarte, basiert aber auf den theoretischen Quartilen der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes und wird daher bevorzugt. Bei in etwa symmetrischer Verteilung des Wünschbarkeitsindexes (und nicht allzu hoher Varianz der Qualitätsmerkmale) kann also durchaus die Zaunkarte oder gar die Shewhart-Einzelwertkarte leichte Vorteile für eine bestimmte Richtung der Prozessstörung bieten. Dies kann durch eine solche ARL-Simulation ermittelt werden.

Äquivalente Aussagen lassen sich für die Extremwertkarte für den Wünschbarkeitsindex im Vergleich zur Shewhart-Extremwertkarte (Kapitel 4.2) treffen, da sich an der grundlegenden Problematik bei schiefen Verteilungen des Wünschbarkeitsindexes nichts ändert. Die Shewhart-Extremwertkarte geht genauso wie die Shewhart-Einzelwertkarte von einer symmetrischen Verteilung, nämlich der Normalverteilung, aus und schenkt den Wertebereichsgrenzen des Wünschbarkeitsindexes keine Beachtung. Aus diesem Grunde zeigt Tabelle 15 lediglich einen Überblick über einzelne Werte der In-Control-ARL pro Kombinationsart von Wünschbarkeitsfunktion und Wünschbarkeitsindex, und es wird auf eine Simulation des Out-Of-Control-Verhaltens der Kontrollkarten verzichtet. Bei relativ symmetrischen Dichteverläufen des Wünschbarkeitsindexes (Zeile 2) und leicht schiefen Verläufen (Zeile 1) ergeben sich in etwa gleiche Werte der In-Control-ARL und ähnliche Kontrollgrenzen. Bei hohen Varianzen der Qualitätsmerkmale (Zeile 3) liegen die Kontrollgrenzen außerhalb des Wertebereiches des Wünschbarkeitsindexes, und im Fall einer extrem schiefen Verteilung des Wünschbarkeitsindexes (Zeile 4) ergeben sich für die Shewhart-Extremwertkarte derartige Kontrollgrenzen, dass die In-Control-ARL inakzeptabel klein ist.

## 5.3 Ursachenanalyse bei Prozessstörungen

Der Wünschbarkeitsindex bietet die Möglichkeit der Beurteilung der Gesamtprozessqualität anhand einer einzelnen Kennzahl. Mit Hilfe einer solchen Kontrollkarte lassen sich der betrachtete Prozess simultan überwachen und Prozessverschiebungen erkennen, die dazu führen, dass der Prozess statistisch nicht mehr unter Kontrolle ist. Dies liegt immer dann

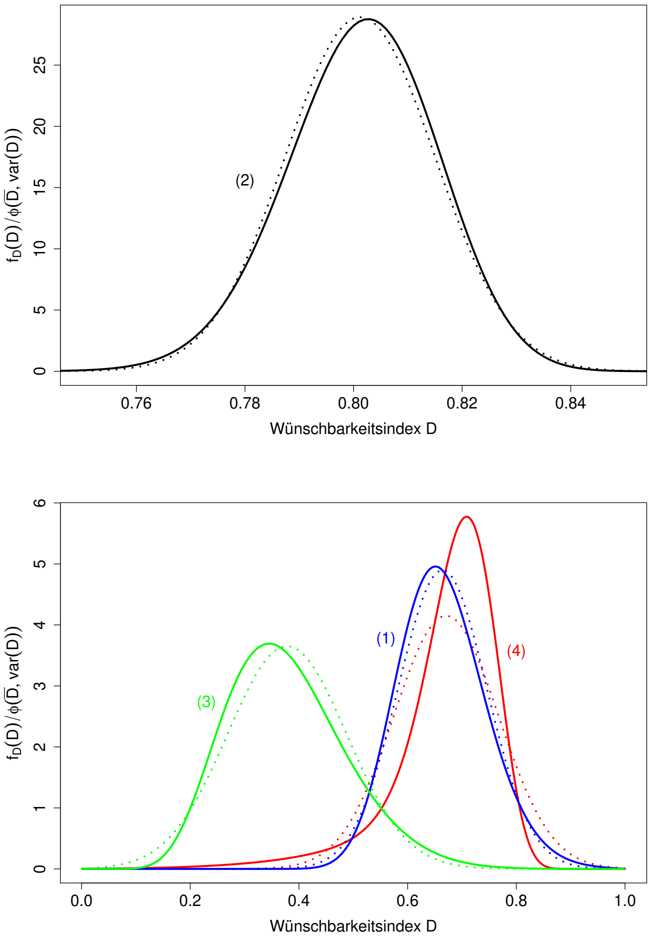



Abbildung 21: Dichteverläufe des Wünschbarkeitsindexes sowie der Normalverteilung mit Parametern $\bar{D}$ und $var(D)$ (gepunktet) der Beispiele aus den Abbildungen 17 ((1)) bis 20 ((4)).

| Art WF / Art WI | Parameter WF | Kontrollgrenzen / In-Control-ARL EKWI | Kontrollgrenzen / In-Control-ARL EKSH |
|---|---|---|---|
| zweiseitig / Geom. Mittel | (3,7,1)[5,0.3] (2,9,1)[3,0.8] | (0.4465, 0.9455) 100.83 | (0.3938, 0.9325) 120.22 |
| einseitig / Geom. Mittel | [6.41,0.2] [-0.98,0.53] | (0.7573, 0.8452) 107.20 | (0.7547, 0.8409) 104.94 |
| zweiseitig / Minimum WF | (3,7,1)[4,1] (3,7,1)[5,1] | (0.1286, 0.9748) 100.65 | *(-0.0540, 1.1054)* $\infty$ |
| einseitig / Minimum WF | [9,1] [6.1,0.5] | (0.1341, 0.8446) 99.53 | (0.3800, 0.9631) 10.91 |

Tabelle 15: Simulierte In-Control-ARL-Werte der Extremwertkarte für den Wünschbarkeitsindex (EKWI) sowie der Shewhart-Extremwertkarte (EKSH), Stichprobengröße $g = 5$.

vor, wenn eine Realisierung des Wünschbarkeitsindexes bzw. regelmäßig entsprechende Realisierungen außerhalb der Kontrollgrenzen liegen.

In diesen Fällen wird ein Eingriff in den Prozess nötig, um eine dauerhaft schlechte Prozessqualität zu vermeiden. Der Wünschbarkeitsindex zeigt jedoch nur global an, dass die Prozessqualität nicht mehr im gewünschten Rahmen liegt. Im Folgenden wird eine Methodik vorgestellt, die es erlaubt, eine Ursachenanalyse anhand einer Rückrechnung der Kontrollgrenze des Wünschbarkeitsindexes in Kontrollgrenzen für die zugehörigen Wünschbarkeitsfunktionen und Qualitätsmerkmale durchzuführen.

Die Kontrollgrenze für eine bestimmte Wünschbarkeitsfunktion hängt durch die Bildung des Wünschbarkeitsindexes, d.h. durch die Anwendung des geometrischen Mittelwertes über alle Wünschbarkeiten, von den Werten der anderen Wünschbarkeitsfunktionen ab. Dementsprechend verläuft die Kontrollgrenze nicht horizontal, sondern wird für jede Realisierung der betrachteten Wünschbarkeitsfunktion in Abhängigkeit der Realisationen der restlichen Wünschbarkeitsfunktionen neu bestimmt. Die Anwendung der Kontrollkarte für die Wünschbarkeitsfunktion entspricht der Bestimmung desjenigen Niveaus, das, gegeben die Niveaus der Realisierungen der restlichen Wünschbarkeitsfunktionen, die Überschreitung der unteren Kontrollgrenze des Wünschbarkeitsindexes garantiert. Dabei können Kompensationseffekte entstehen: Wenn z.B. bei $k$ betrachteten Wünschbarkeitsfunktionen die Funktionen 2 bis $k$ relativ niedrige Werte aufweisen, kann dies unter Umständen durch ein hohes Niveau der ersten Wünschbarkeitsfunktion wieder ausgeglichen werden.

Durch optische Betrachtung lässt sich dann eine Ursachenanalyse vornehmen. Ist der Verlauf der betrachteten Wünschbarkeitsfunktion stabil, der Verlauf der Kontrollgrenze weist jedoch offensichtliche Störungen wie einen Trend oder eine erhöhte Streuung auf, kann die primäre Ursache der Prozessverschiebung bei einer anderen Wünschbarkeitsfunktion, d.h. bei einem anderen Qualitätsmerkmal, gesucht werden. So lassen sich besonders kritische oder störanfällige Qualitätsmerkmale gezielt überwachen. Es wird i. Allg. nicht nötig sein, sämtliche Qualitätsmerkmale simultan zu betrachten. Außerdem müssen durch mögliche Kompensationseffekte der Qualitätsmerkmale hinsichtlich der Gesamtprozessqualität für die Ursachenanalyse bei $k$ Qualitätsmerkmalen maximal $k-1$ Kontrollkarten der Wünschbarkeitsfunktionen betrachtet werden.

**Satz 5.3.1 (Untere Kontrollgrenze für Wünschbarkeitsfunktionen)** *Gegeben sei ein durch die Qualitätsmerkmale $Y_1, \ldots, Y_k$ und zugehörige Wünschbarkeitsfunktionen*

*$d_1, \ldots, d_k$ beschriebener Prozess. Ferner sei $LCL$ die untere Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex $D$. Dann gilt für die untere Kontrollgrenze einer bestimmten Wünschbarkeitsfunktion $d_i$, $i \in \{1, \ldots, k\}$:*

$$LCL_{d_i} = \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} d_j}, \qquad i \in \{1, \ldots, k\}.$$

**Beweis:**
Sei $D$ der Wünschbarkeitsindex des betrachteten Prozesses und $LCL$ die zugehörige untere Kontrollgrenze mit o.B.d.A. $LCL > 0$. Werte für $LCL \leq 0$ stellen keine sinnvollen Kontrollgrenzen dar. Es muss gelten:

$$\begin{aligned}
& D \geq LCL \\
\Leftrightarrow \quad & \Big(\prod_{i=1}^{k} d_i\Big)^{1/k} \geq LCL \qquad \text{mit } d_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}. \\
\Leftrightarrow \quad & \prod_{i=1}^{k} d_i \geq LCL^k \\
\Leftrightarrow \quad & d_i \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} d_j}.
\end{aligned}$$

□

Die Betrachtung der Kontrollkarten für bestimmte Wünschbarkeitsfunktionen dient als Hilfestellung zur Ursachenanalyse von Prozessstörungen. Sie ist vor allem in den Fällen geeignet, in denen eine Prozessverschiebung primär durch ein bestimmtes Qualitätsmerkmal begründet ist. In Fällen, in denen sich die Prozessverschiebung durch Störungen in mehreren Qualitätsmerkmalen ergibt und keine eindeutige Aussage getroffen werden kann, muss eine differenziertere Analyse durchgeführt werden.

Durch analoges Vorgehen lässt sich die untere Kontrollgrenze für eine Wünschbarkeitsfunktion in eine entsprechende Kontrollgrenze für das zugehörige Qualitätsmerkmal übertragen. Diese hängt vor allem von der Wahl der Wünschbarkeitsfunktion ab. Bei der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer differenziert sich die Berechnung dahingehend, in welchem Wertebereich der Wert des Qualitätsmerkmals liegt. Die Interpretation erfolgt analog wie bei der Kontrollgrenze der Wünschbarkeitsfunktion. Die Auswahlentscheidung zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen (Kontrollgrenze für Wünschbarkeitsfunktion oder Qualitätsmerkmal) hängt von der Präferenz des Entscheiders ab. Die Berechnung der Kontrollgrenze für einzelne Qualitätsmerkmale ist im Folgenden dargestellt.

**Satz 5.3.2 (Untere Kontrollgrenze für Qualitätsmerkmale, WF Derringer)** *Gegeben sei ein durch die Qualitätsmerkmale $Y_1, \ldots, Y_k$ und zugehörige Wünschbarkeitsfunktionen nach Derringer (siehe Kapitel 2.1.2) $d_1, \ldots, d_k$ beschriebener Prozess. Ferner sei $LCL$ die untere Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex $D$. Dann gilt für die untere Kontrollgrenze eines bestimmten Qualitätsmerkmals $Y_i, i \in \{1, \ldots, k\}$, mit Realisierungen $y_1, \ldots, y_k$:*
*1. Fall: Einseitige Spezifikation von $d_i$ (o.B.d.A. Maximierungsproblem):*

$$LCL_{y_i} = \begin{cases} \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j} \right)^{1/l_i} (T_i - LSL_i) + LSL_i, & 0 < d_i < 1 \\ T_i, & d_i = 1 \end{cases} .$$

*2. Fall: Zweiseitige Spezifikation von $d_i$:*

$$LCL_{y_i} = \begin{cases} \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j} \right)^{1/l_i} (T_i - LSL_i) + LSL_i, & 0 < d_i < 1 \text{ mit } LSL_i \leq y_i \leq T_i \\ \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j} \right)^{1/r_i} (T_i - USL_i) + USL_i, & 0 < d_i < 1 \text{ mit } T_i < y_i \leq USL_i \\ T_i, & d_i = 1 \end{cases} .$$

**Beweis:**
Sei $D$ der Wünschbarkeitsindex des betrachteten Prozesses und $LCL$ die zugehörige untere Kontrollgrenze mit o.B.d.A. $LCL > 0$. Seien ferner $d_i$, $(i = 1, \ldots, k)$, die Wünschbarkeitsfunktionen der Qualitätsmerkmale $Y_1, \ldots, Y_k$ mit Realisierungen $y_1, \ldots, y_k$ und $LCL_{d_i}$, $(i = 1, \ldots, k)$, die entsprechenden unteren Kontrollgrenzen gemäß Satz 5.3.1. Dann muss für die Wünschbarkeitsfunktion $d_i$ gelten:

$$d_i \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j}.$$

Dann gilt im 1. Fall mit $d_i < 1 \Leftrightarrow LSL_i \leq y_i \leq T_i$ und Kapitel 2.1.2:

$$d_i \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j} \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{y_i - LSL_i}{T_i - LSL_i} \right)^{l_i} \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j} \quad \text{mit } l_i > 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_i - LSL_i) \geq \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} \right)^{1/l_i} (T_i - LSL_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_i \geq \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} \right)^{1/l_i} (T_i - LSL_i) + LSL_i.$$

Für Werte von $d_i = 1$ gilt nach Kapitel 2.1.2 $y_i \geq T_i$, d.h. das Qualitätsmerkmal liegt bereits im optimalen Bereich, kann also durch Erhöhung nicht mehr zur Verbesserung der Prozessqualität führen. Satz 5.3.1 stellt in diesem Fall keine Restriktion an $y_i$. Daher wird $LSL_i = T_i$ gesetzt, d.h. auf den Rand des Bereiches, in dem die Funktion $d_i$ den Wert 1 annimmt.

Im 2. Fall ergeben sich für $0 < d_i < 1$ mit $LSL_i \leq y_i \leq T_i$ und für $d_i = 1$ die Ausdrücke der einseitigen Spezifikation. Für $0 < d_i < 1$ mit $T_i < y_i \leq USL_i$ muss gelten:

$$d_i \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} \quad \Leftrightarrow \quad \left( \frac{y_i - USL_i}{T_i - USL_i} \right)^{r_i} \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} \quad \text{mit } r_i > 0,$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_i - USL_i) \geq \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} \right)^{1/r_i} (T_i - USL_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad y_i \geq \left( \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} \right)^{1/r_i} (T_i - USL_i) + USL_i.$$

□

Nach selbigem Schema lassen sich Kontrollgrenzen für Qualitätsmerkmale angeben, wenn Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington (Kapitel 2.1.1) verwendet werden. In diesem Fall resultiert allerdings die Rückrechnung der unteren Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex nicht zwangsläufig auch in eine untere Kontrollgrenze für die Qualitätsmerkmale. Dies gilt uneingeschränkt lediglich für Maximierungsprobleme bei einseitiger Spezifikation, für das entsprechende Minimierungsproblem ergibt sich eine obere Kontrollgrenze. Durch die symmetrische Definition und Verwendung der Betragsfunktion bei zweiseitiger Spezifikation erhält man eine untere Kontrollgrenze für Realisationen der Qualitätsmerkmale linksseitig des Zielwertes sowie eine obere Kontrollgrenze für rechtsseitige Realisationen. Dementsprechend wird hier die Kontrollgrenze nur in Form von Punkten dargestellt, um Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Außerdem wird eine Orientierungslinie auf Höhe des Zielwertes mit eingetragen.

**Satz 5.3.3 (Kontrollgrenze für Qualitätsmerkmale, WF nach Harrington)** *Gegeben sei ein durch die Qualitätsmerkmale $Y_1, \ldots, Y_k$ und zugehörige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington (Kapitel 2.1.1) $d_1, \ldots, d_k$ beschriebener Prozess. Ferner sei $LCL$ die untere Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex $D$. Dann gilt für die untere Kontrollgrenze eines bestimmten Qualitätsmerkmals $Y_i, i \in \{1, \ldots, k\}$, mit Realisierungen $y_1, \ldots, y_k$:*

*<u>1. Fall:</u> Einseitige Spezifikation von $d_i$:*

$$\frac{1}{b_{1i}}\left[-\log\left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)-b_{0i}\right]=\begin{cases} UCL_{y_i} & \text{für } b_{1i}<0\\ LCL_{y_i} & \text{für } b_{1i}>0\end{cases}.$$

*Für Werte von $\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j} > 1$ ist der äußere Logarithmus nicht definiert. Das kann an Stellen vorkommen, an denen der Wünschbarkeitsindex die untere Kontrollgrenze unterschreitet. Hier wird die Kontrollgrenze für $b_{1i} < 0$ auf einen festen Wert oberhalb der maximalen Beobachtung gesetzt, bei $b_{1i} > 0$ auf einen Wert unterhalb der minimalen Beobachtung.*

*<u>2. Fall:</u> Zweiseitige Spezifikation von $d_i$:*

$$\begin{aligned} LCL_{y_i} &= -\frac{1}{2}\left[(USL_i - LSL_i)\cdot\left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i} - (USL_i + LSL_i)\right], \; Y_i < T_i,\\ UCL_{y_i} &= \frac{1}{2}\left[(USL_i - LSL_i)\cdot\left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i} + (USL_i + LSL_i)\right], \; Y_i \geq T_i.\end{aligned}$$

**Beweis:**

Unter denselben Voraussetzungen wie im Beweis von Satz 5.3.2 muss gelten:

$$d_i \geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}.$$

**1. Einseitige Spezifikation:**

$$\begin{aligned} \exp\left[-\exp(-(b_{0i}+b_{1i}\cdot y_i))\right] &\geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\\ \Leftrightarrow -\exp(-(b_{0i}+b_{1i}\cdot y_i)) &\geq \log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad -(b_{0i} + b_{1i} \cdot y_i) &\leq \log\left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)\\
\Leftrightarrow \quad b_{1i} \cdot y_i &\geq -\log\left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right) - b_{0i}.
\end{aligned}$$

Je nach Vorzeichen von $b_{1i}$ erhält man die angegebene untere bzw. obere Kontrollgrenze.

**2. Zweiseitige Spezifikation:**

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\left|\frac{2y_i - (USL_i + LSL_i)}{USL_i - LSL_i}\right|^{n_i}\right) &\geq \frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\\
\Leftrightarrow \left|\frac{2y_i - (USL_i + LSL_i)}{USL_i - LSL_i}\right| &\leq \left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i}\\
\Leftrightarrow |2y_i - (USL_i + LSL_i)| &\leq (USL_i - LSL_i) \cdot \left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i}.
\end{aligned}$$

<u>1. Fall: $2y_i \geq (USL_i + LSL_i) \Leftrightarrow y_i \geq T_i$</u>

$$\begin{aligned}
2y_i &\leq (USL_i - LSL_i) \cdot \left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i} + USL_i + LSL_i\\
\Leftrightarrow y_i &\leq \frac{1}{2}\left[(USL_i - LSL_i) \cdot \left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i} + USL_i + LSL_i\right].
\end{aligned}$$

<u>2. Fall: $2y_i < (USL_i + LSL_i) \Leftrightarrow y_i < T_i$</u>

$$\begin{aligned}
-2y_i &\leq (USL_i - LSL_i) \cdot \left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i} - (USL_i + LSL_i)\\
\Leftrightarrow y_i &\geq -\frac{1}{2}\left[(USL_i - LSL_i) \cdot \left(-\log\left(\frac{LCL^k}{\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^k d_j}\right)\right)^{1/n_i} - (USL_i + LSL_i)\right]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Ein Beispiel für eine solche Kontrollkarte für Qualitätsmerkmale bei zweiseitiger Spezifikation zeigt Abbildung 22. Für zwei normalverteilte Qualitätsmerkmale $Y_1$ und $Y_2$ werden

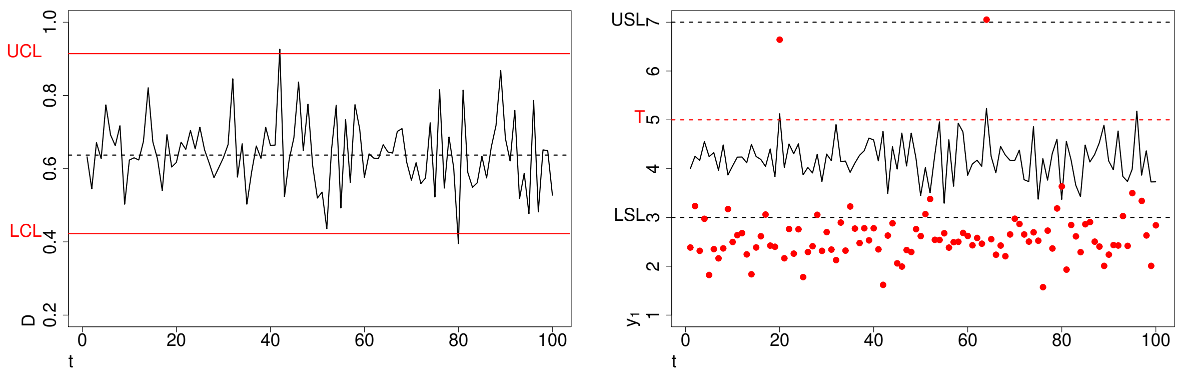



Abbildung 22: Bsp.: Ursachenanalyse im Falle einer Prozessstörung bei zweiseitig spezifizierten Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington, rechts: Kontrollgrenze durch Punkte dargestellt.

zweiseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington spezifiziert, und mit Hilfe der mit Satz 5.1.8 bestimmten Verteilungsfunktion des Wünschbarkeitsindexes wird zunächst eine Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex aufgestellt. Das diesbezügliche Konstruktionsprinzip ist in Satz 5.2.1 zu finden. An zwei Zeitpunkten werden die Kontrollgrenzen überschritten, jedoch nur einmal die untere Kontrollgrenze (Zeitpunkt 80). Nach Rückrechnung der unteren Kontrollgrenze in eine Kontrollgrenze für das Qualitätsmerkmal $Y_1$ wird ersichtlich, dass die Ursache für diese Prozessstörung beim Merkmal $Y_2$ zu suchen ist, da zum Zeitpunkt 80 der Wert von $Y_1$ keine Unregelmäßigkeit aufweist.

Wird zur Bildung des Wünschbarkeitsindexes nicht der geometrische Mittelwert, sondern das **Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen** (vgl. (10) in Kapitel 2.2) verwendet, ist im Zuge einer Ursachenanalyse für Prozessstörungen eine Rückrechnung der Kontrollgrenze nach obigem Schema nicht sinnvoll. Zum einen würde die Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex mit der Kontrollgrenze für Wünschbarkeitsfunktionen übereinstimmen, und ferner ließe sich keine Dimensionsreduktion des Problems erzielen, da keine Kompensationseffekte zwischen den Qualitätsmerkmalen entstehen können. Das Ziel bei der Ursachenanalyse besteht in diesem Fall in der Identifikation desjenigen Qualitätsmerkmals, das im konkreten Fall der Überschreitung der Kontrollgrenzen des Wünschbarkeitsindexes die minimale Wünschbarkeit hervorruft. Eine Rückrechnung der Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex würde bedeuten, bei allen Qualitätsmerkmalen nachzusehen, ob der Wert der Wünschbarkeitsfunktion die Kontrollgrenze des Wünschbarkeitsindexes überschreitet oder nicht.

Zur Vereinfachung des Vorgehens wird ein alternativer Ansatz vorgestellt. Dieser beruht

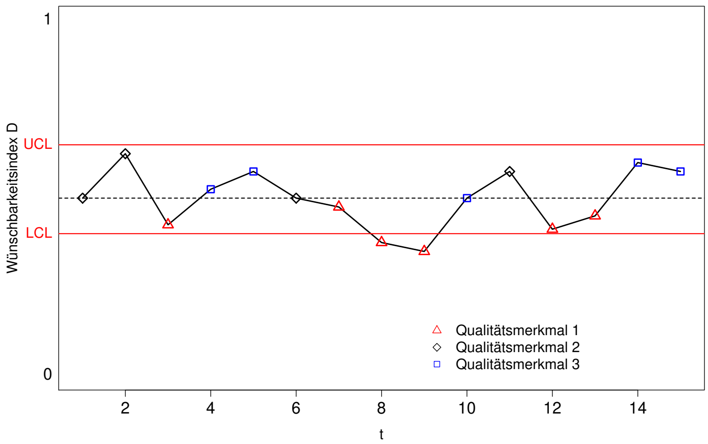



Abbildung 23: Bsp.: Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex (Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen) mit Möglichkeit der Ursachenanalyse für Prozessstörungen

auf der Idee der Markierung der Realisationen des Wünschbarkeitsindexes zur Zuordnung des Minimums der Wünschbarkeitsfunktionen zu einem Qualitätsmerkmal. Dazu wird für jedes Qualitätsmerkmal ein Symbol ausgewählt. In der Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex wird dann jede Realisation des Wünschbarkeitsindexes unter Verwendung des jeweiligen Symbols eingetragen. Eine solche beispielhafte Kontrollkarte zeigt Abbildung 23. Als Verursacher für die Prozessstörung zu den Zeitpunkten 8 und 9 lässt sich durch die Verwendung der Symbole eindeutig das erste Qualitätsmerkmal ausmachen.

Der Ansatz bietet die folgenden Vorteile:

- Die Ursachenanalyse kann direkt in der Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex durchgeführt werden.
- Es ist auf einen Blick ersichtlich, welches Qualitätsmerkmal die minimale Wünschbarkeit hervorruft.
- Das Vorgehen ist unabhängig von der Art der verwendeten Wünschbarkeitsfunktion.
- Durch die Analyse der Abfolge der Symbole lassen sich Tendenzen bzgl. einzelner Qualitätsmerkmale erkennen. Taucht beispielsweise primär ein Symbol auf, wäre zu prüfen, ob sich hinsichtlich dieses Merkmals Verbesserungen erzielen lassen. Eine solche Kontrollkarte entspräche beispielsweise der Darstellung in Abbildung 24. Hier lässt sich ab dem Zeitpunkt 8 eine Lageverschiebung des Wünschbarkeitsindexes beobachten, die auf einer Lageverschiebung des dritten Qualitätsmerkmals beruht, da

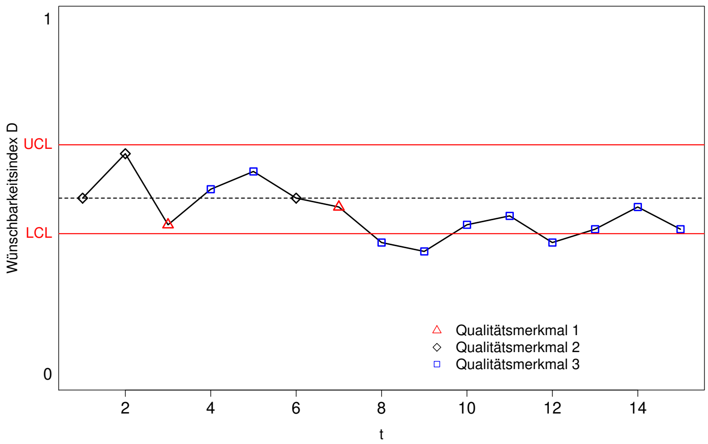



Abbildung 24: Bsp.: Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex (Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen), Lageverschiebung durch ein Qualitätsmerkmal

ab diesem Zeitpunkt alle Minima der Wünschbarkeiten auf dieses Qualitätsmerkmal zurückzuführen sind. Wechseln die Symbole ständig, wäre dies u.U. ein Anzeichen für große Prozessschwankungen, falls die Erwartungswerte der Wünschbarkeiten nicht extrem eng beieinander liegen.

Wird anstatt einer Urwertkarte wie bisher beschrieben eine **Extremwertkarte zur Prozesskontrolle** verwendet (vgl. Kapitel 5.2.1), bleiben die in diesem Kapitel angegebenen Formeln zur Rückrechnung der Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex ebenso gültig. Die resultierenden Kontrollkarten für die Wünschbarkeitsfunktionen und Qualitätsmerkmale weisen dann allerdings ebenso die Struktur einer Extremwertkarte auf. Wird das Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen verwendet, kommt in der Extremwertkarte ebenfalls die symbolische Kennzeichnung der Qualitätsmerkmale zum Einsatz.

Eine Illustration des Vorgehens zur Ursachenanalyse ist in Kapitel 5.3.1 anhand der Überwachung eines Produktionsprozesses von Fruchtsaft dargestellt. Dabei ist die zugrundeliegende Verteilung der Qualitätsmerkmale als auch des Wünschbarkeitsindexes nicht bekannt, daher werden die Kontrollgrenzen für eine Zaunkarte über die Quantile der empirischen Verteilung des Wünschbarkeitsindexes aus der Analysephase bestimmt. Zur Anwendung kommt die Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer. Die Ursachenanalyse bei Verwendung der Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington ist zum einen anhand eines weiteren Fruchtsaftherstellungsprozesses in Kapitel 5.3.2 dargestellt als auch im Zuge der Qualitätskontrolle eines Lagersteuerungsprozesses in Kapitel 6.2.5 zu finden.

### 5.3.1 Beispiel: Kontrolle eines Herstellungsprozesses von Fruchtsaft

Ein Fruchtsaft soll hinsichtlich seines Geschmacks ($Y_1$), beurteilt auf einer ganzzahligen Skala von 0 bis 10, und seines Preises ($Y_2$) in DM optimiert werden (vgl. [WEI99]). Dies kann über unterschiedliche Anteile von Wassermelonen- ($X_1$), Ananas- ($X_2$), Orangen- ($X_3$) und Grapefruitsaft ($X_4$) erreicht werden. Dabei dürfen Orangen- und Grapefruitsaft nicht simultan Verwendung finden.

Zur Abbildung der Beziehung zwischen den Anteilen der verschiedenen Fruchtsäfte und den Zielvariablen $Y_1$ und $Y_2$ wurden durch entsprechende Versuchsplanung die folgenden Modelle unter Beachtung der Nebenbedingung $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 100(\%)$ angepaßt:

$$\hat{Y}_1 = 4.713 - 0.0927X_1 + 0.0590X_3 + 0.0933X_4,$$

$$\hat{Y}_2 = 3.797 - 0.0333X_1 + 0.0212X_3 + 0.0585X_4.$$

Die Optimierung erfolgt mit Hilfe von Wünschbarkeitsfunktionen nach Derringer (vgl. Kapitel 2.1.2) und resultiert in ein Maximierungsproblem für das Qualitätsmerkmal Geschmack ($Y_1$) sowie in ein Minimierungsproblem für das Qualitätsmerkmal Preis ($Y_2$). Die entsprechenden Wünschbarkeitsfunktionen sind in Abbildung 25 dargestellt.

Über eine Gittersuche (vgl. Kapitel 2.3) ergeben sich die optimalen Einstellungen der Fruchtsaftanteile zu

$$X_1 = 30, X_2 = 11, X_3 = 0, X_4 = 59\,(\%) \text{ mit}$$

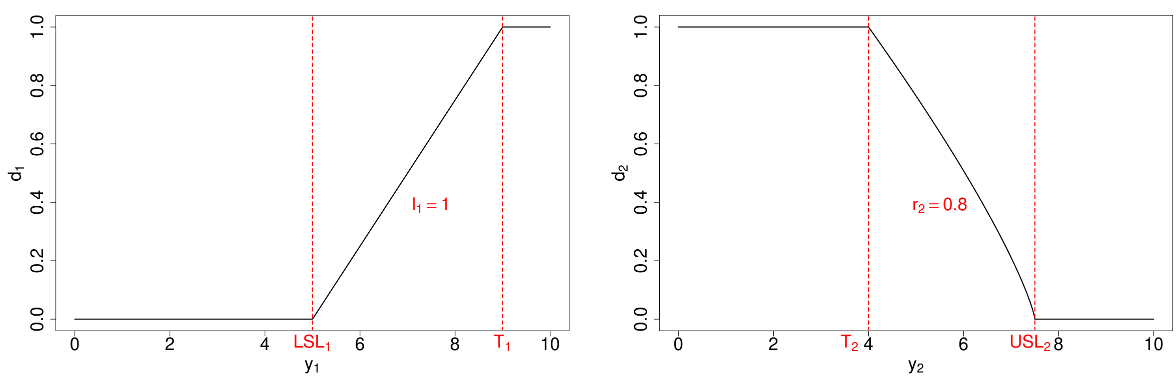



Abbildung 25: Bsp. Fruchtsaftmischung (vgl. [WEI99]), Verlauf der Wünschbarkeitsfunktionen für $Y_1$ (Geschmack) und $Y_2$ (Preis)

$\hat{Y_1} = 7.4, \hat{Y_2} = 6.25$ und dem optimalen Wert für den Wünschbarkeitsindex $D = 0.52$. Der Wert für $X_2$ errechnet sich aus der Summationsbedingung der Anteile zu 100 %.

Zur Illustration der Prozesskontrolle mit Hilfe einer Zaunkarte werden unter Verwendung der Standardfehler obiger Modelle von $sd_{Y_1} = 0.29$ und $sd_{Y_2} = 0.24$ 200 Realisationen von $Y_1$ und $Y_2$ simuliert. Die ersten 100 Realisationen werden für die Analysephase des Prozesses verwendet, d.h. für die Analyse des Prozesses unter Normalbedingungen mit dem Ziel der Ermittlung der Kontrollgrenzen.

Unter Verwendung der Größen $med(D) = 0.525$, $Q_{0.25}(D) = 0.481$, $Q_{0.75}(D) = 0.558$ aus der Analysephase ergeben sich die unteren und oberen Kontrollgrenzen der Zaunkarte zu

$$LCL(D) = 0.366 \text{ und } UCL(D) = 0.674.$$

Die obere Kontrollgrenze dient dabei nur zur Orientierung, da lediglich ein Absinken des Wünschbarkeitsindexes zu einer Verschlechterung des Prozesses führt. Über den Wert von $LCL(D)$ und die Werte der Qualitätsmerkmale lassen sich dann wie in Kapitel 5.3 beschrieben Kontrollgrenzen für die Wünschbarkeitsfunktion $d_1$ und die Zielvariable $Y_1$ bestimmen, die von den Werten von $Y_2$ abhängen.

Der Prozess unter Normalbedingungen ist in Abbildung 26 illustriert. Lediglich an zwei isolierten Stellen in der Kontrollphase unterschreitet der Wert des Wünschbarkeitsindexes die untere Kontrollgrenze minimal. Dies lässt sich ebenso in den Kontrollkarten für $d_1$ und $Y_1$ erkennen.

Die Abbildungen 27 - 29 zeigen den Prozess unter (simulierten) Störfällen. Der Verlauf der Werte des Wünschbarkeitsindexes in Abbildung 27 indiziert einen Strukturbruch, d.h. eine Lageverschiebung um eine Konstante. Es lässt sich außerdem erkennen, dass die Werte von $D$ die untere Kontrollgrenze etwa ab dem Zeitpunkt 120 regelmäßig unterschreiten. Hier wäre es also ein Eingriff in den Prozess nötig. Mit Hilfe der Kontrollkarte für $d_1$ lässt sich eine erste Ursachenanalyse vornehmen (vgl. Kapitel 5.3). Da die Werte von $LCL(d_1)$ stabil aussehen, sich aber ein Strukturbruch im Verlauf von $d_1$ erkennen lässt, ist die Hauptursache der Prozessverschlechterung bei dem Qualitätsmerkmal $Y_1$ (Geschmack) zu suchen. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Betrachtung der Kontrollkarte für $Y_1$, bei Ansicht des Verlaufs von $Y_2$ lassen sich keine offensichtlichen Verschiebungen erkennen.

Der in Abbildung 28 ausgewiesene Störfall liegt in einem Aufwärtstrend des Qualitätsmerkmals $Y_2$ begründet. Dies lässt sich an dem Aufwärtstrend der unteren Kontrollgrenze für $d_1$ bei gleichzeitig stabilem Verlauf von $d_1$, an der Kontrollkarte für $Y_1$ sowie in dem offensichtlichen Trendverlauf bei Betrachtung der Werte von $Y_2$ erkennen. Die entsprechenden Werte des Wünschbarkeitsindexes fallen etwa ab dem Zeitpunkt 170 immer öfter und weiter unter die untere Kontrollgrenze, an einer Stelle nimmt der Wünschbarkeitsindex sogar den Wert Null an. Diese Stelle ist in den anderen Kontrollkarten mit einem senkrechten Strich markiert. Hier überschreitet $Y_2$ seine obere Spezifikationsgrenze.

Auf gleiche Weise ist Abbildung 29 zu interpretieren. Hier ist eine deutliche Zunahme der Variabilität des Wünschbarkeitsindexes zu beobachten, es lassen sich sowohl Über- als auch Unterschreitungen der Kontrollgrenzen feststellen. Die Ursache lässt sich als Varianzvergrößerung des Qualitätsmerkmals $Y_1$ ausmachen.

Die Anwendung von Kontrollkarten im Allgemeinen und von Zaunkarten im Speziellen ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn der Prozess in der Analysephase unter Normalbedingungen stabil läuft. Abbildung 31 zeigt den Verlauf des Wünschbarkeitsindexes des Beispielprozesses, der von [DER80] bei der Einführung seiner Wünschbarkeitsfunktion als Illustration verwendet wurde. Hier wurden unter Zuhilfenahme der Modellgleichungen und angegebenen Standardfehler 200 Realisationen der Qualitätsmerkmale simuliert. Die Analysephase beinhaltet die ersten 100 Realisationen. Es wird ersichtlich, dass der Prozess unter Verwendung der angegebenen optimalen Einstellungen der Einflussgrößen nicht stabil läuft. Es treten sehr viele Nullwerte auf, die untere und obere Kontrollgrenze liegen sogar außerhalb des möglichen Wertebereiches des Wünschbarkeitsindexes (vgl. Kapitel 5.2.2). Eine Fortführung des Prozesses ist mit diesen Einstellungen nicht empfehlenswert.

Die Ursache für diesen Verlauf ist in den hohen Standardfehlern der zugrundegelegten Modelle für die Qualitätsmerkmale, insbesondere für das Qualitätsmerkmal $Y_2$ zu sehen. Die Optimierung der Einstellungen der Einflussgrößen erfolgte unter der Annahme der vollständigen Gültigkeit der Modelle (ohne Einbeziehung der Modellfehler), die sich jedoch im realen Prozessverlauf nicht halten lässt. In Abbildung 30 sind die simulierten Werte der betrachteten Qualitätsmerkmale $Y_1$ bis $Y_4$ sowie die unteren und oberen Spezifikationsgrenzen (LSL, USL) der jeweiligen Wünschbarkeitsfunktion aufgetragen. Es zeigt sich, dass es vor allem bei $Y_2$, aber auch bei $Y_1$ aufgrund der hohen Varianz der Modellfehler nicht gelingt, die Werte innerhalb der Spezifikationsgrenzen zu halten (siehe dazu Kapitel 2.4). Dementsprechend lassen sich die häufigen Nullwerte im Verlauf des Wünschbarkeitsindexes erklären.

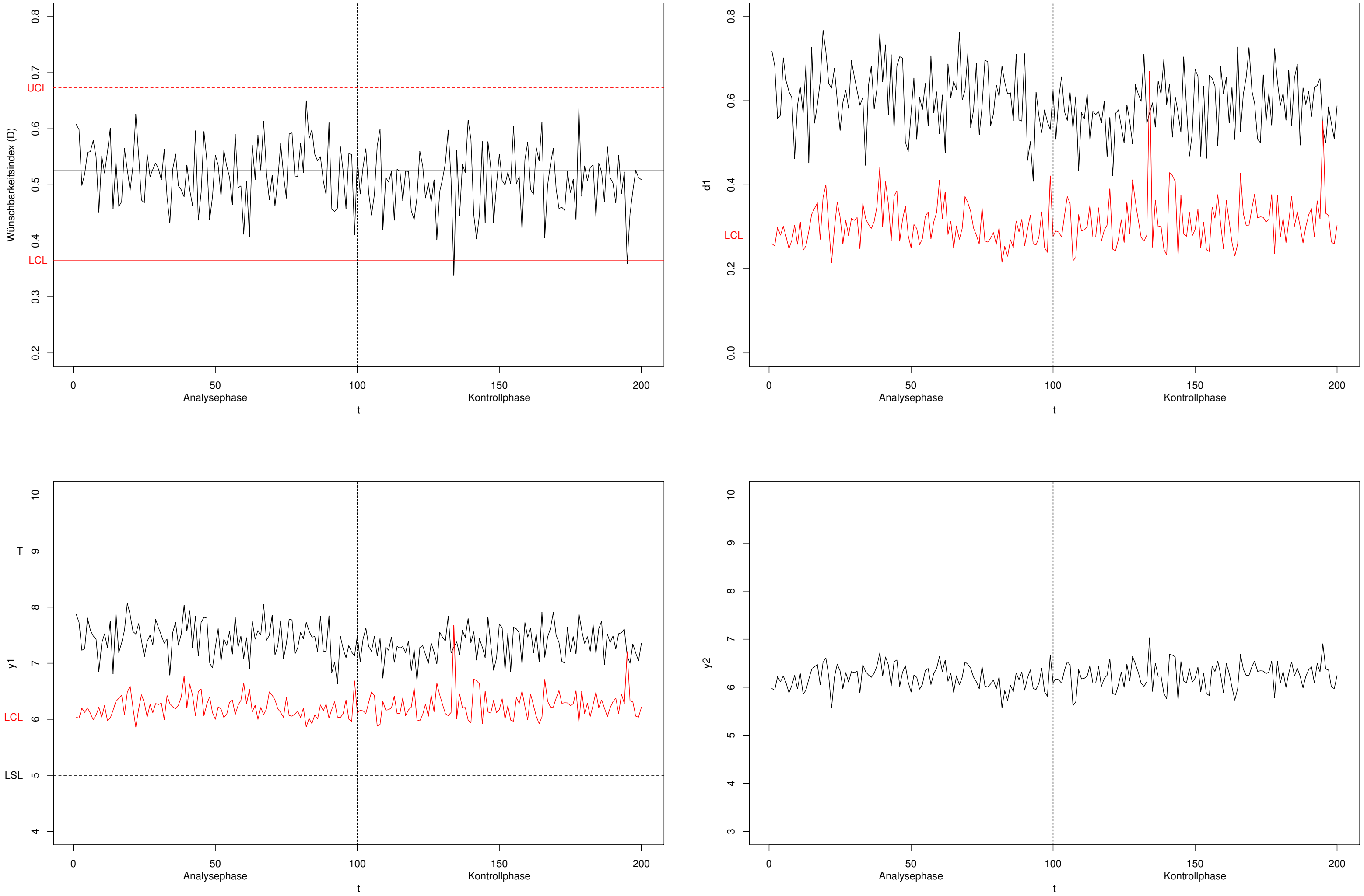



Abbildung 26: Bsp. Fruchtsaftmischung (vgl. [WEI99]), Prozess unter Kontrolle

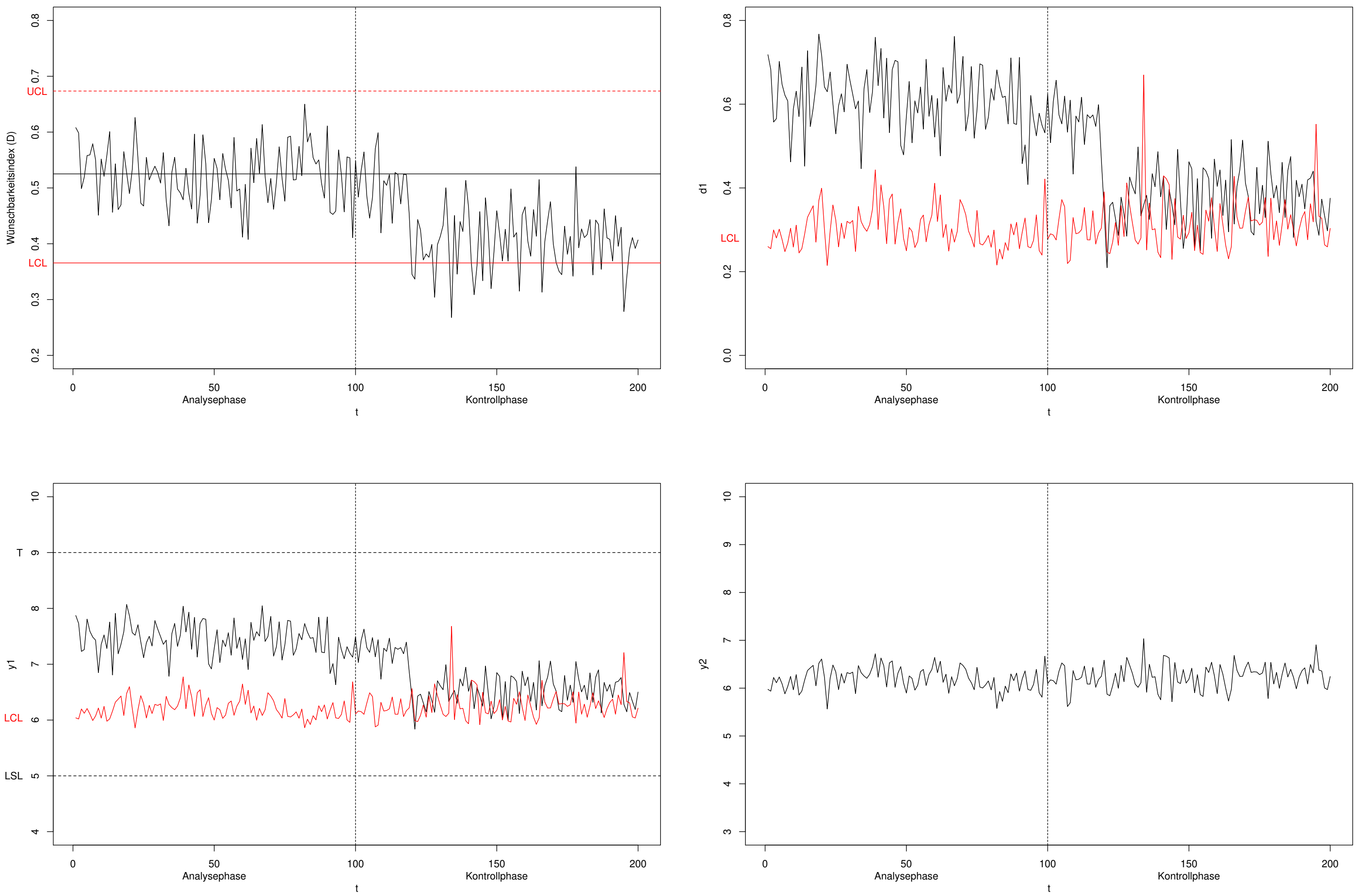



Abbildung 27: Bsp. Fruchtsaftmischung (vgl. [WEI99]), Prozess außer Kontrolle (Strukturbruch in $Y_1$)

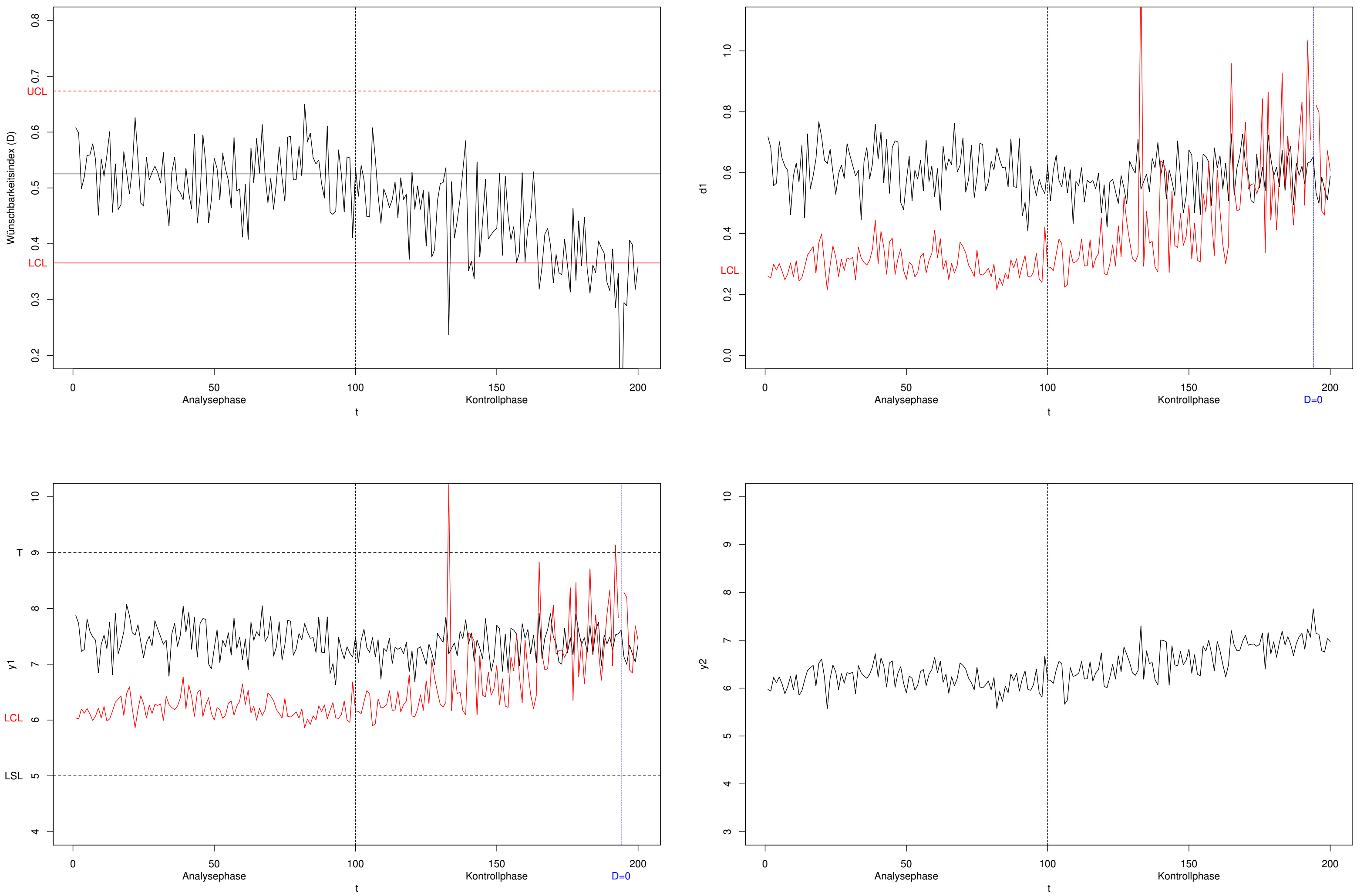



Abbildung 28: Bsp. Fruchtsaftmischung (vgl. [WEI99]), Prozess außer Kontrolle (Trend in $Y_2$)

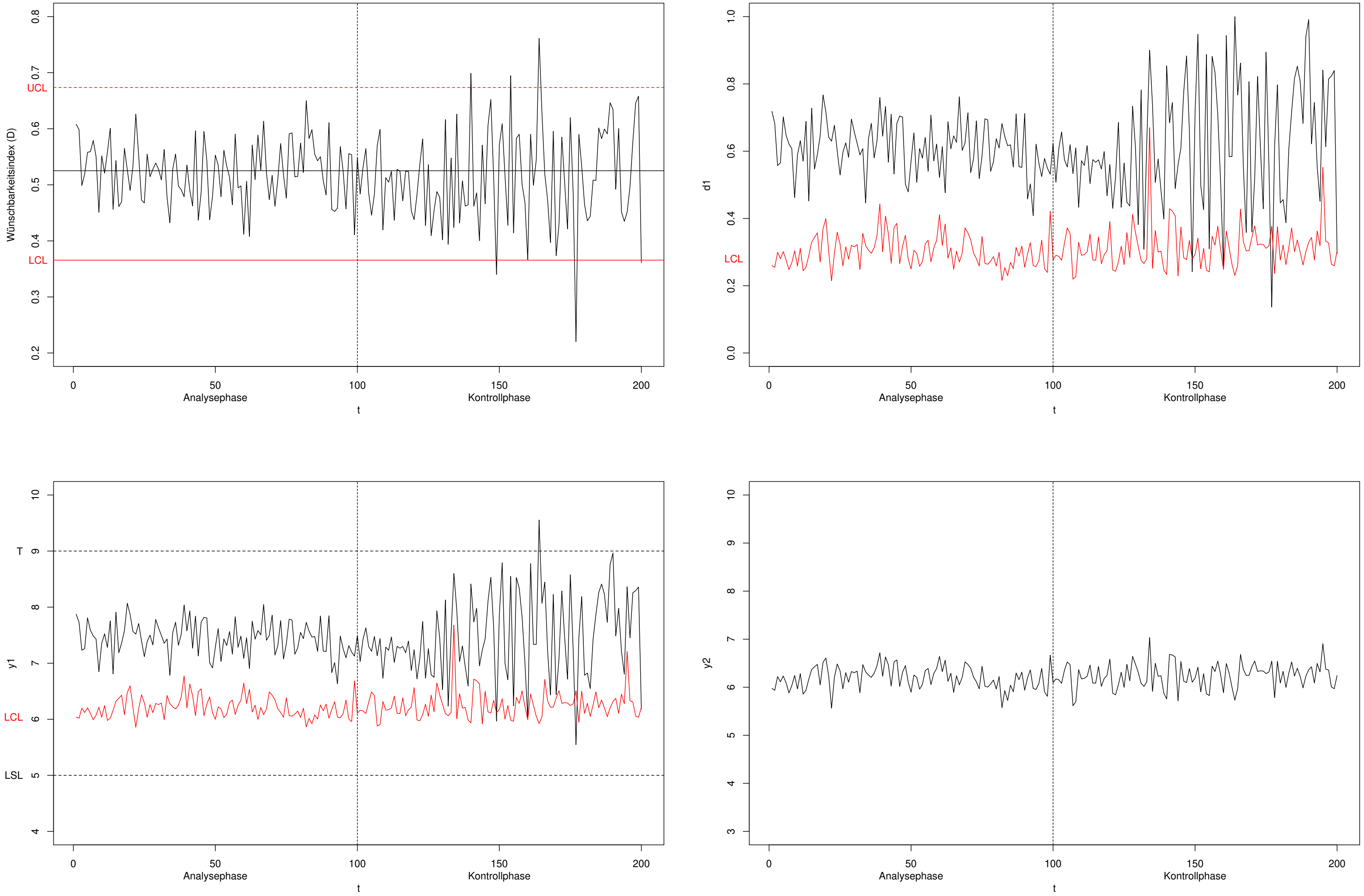



Abbildung 29: Bsp. Fruchtsaftmischung (vgl. [WEI99]), Prozess außer Kontrolle (Varianzvergrößerung von $Y_1$)

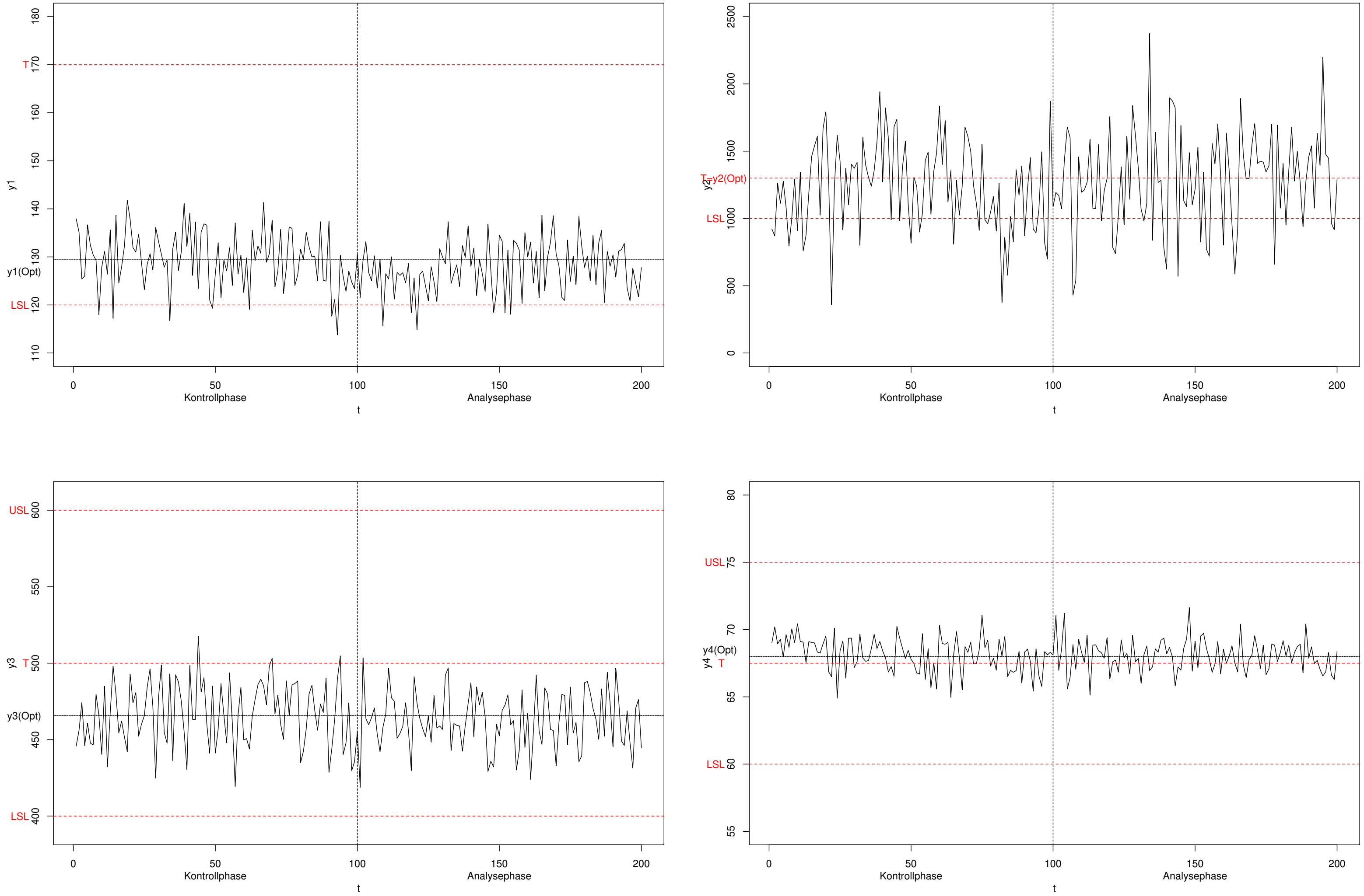



Abbildung 30: Bsp. Derringer (vgl. [DER80]), Prozess schon in Analysephase außer Kontrolle durch schlechte Modellanpassungen

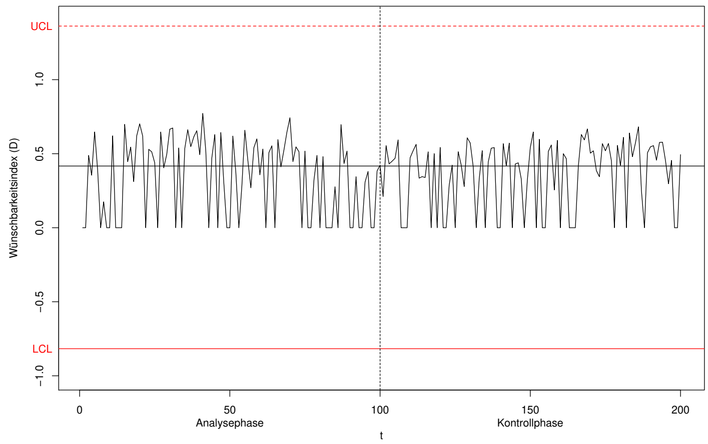



Abbildung 31: Prozessbeispiel nach Derringer (vgl. [DER80]), Verlauf des Wünschbarkeitsindexes)

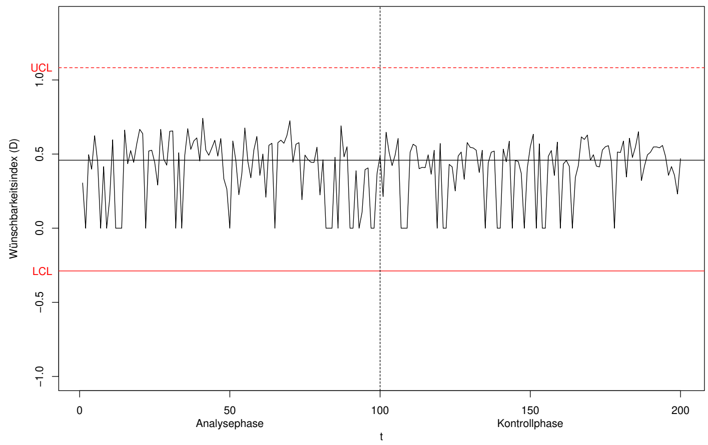



Abbildung 32: Prozessbeispiel nach Derringer (vgl. [DER80]), Verlauf des Wünschbarkeitsindexes nach Optimierung des Wünschbarkeitsindexes gemäß [STE00])

In [STE00] wird eine Optimierungsmethode für den Wünschbarkeitsindex vorgestellt, die die Standardfehler der Modelle der Qualitätsmerkmale miteinbezieht (vgl. auch Kapitel 2.3). Der Standardfehler des Modells für die Variable $Y_2$ ist in diesem Beispielprozess jedoch so hoch, dass auch mit dieser Methode keine Stabilität des Prozesses erreicht werden kann (vgl. Abbildung 32). Die Anzahl der Nullwerte des Wünschbarkeitsindexes kann lediglich etwas reduziert werden, die Kontrollgrenzen liegen jedoch noch immer außerhalb des Wertebereiches.

### 5.3.2 Beispiel: Kontrolle eines Herstellungsprozesses von Fruchtsaft (II)

Betrachtet wird analog zu Kapitel 5.3.1 ein Herstellungsprozess von Fruchtsaft. Der interessierende Fruchtsaft ist in diesem Beispiel ein Multivitaminsaft, bestehend aus Orangen- ($X_1$), Ananas- ($X_2$) und Grapefruitsaft ($X_3$). Angenommen wird, dass eine Optimierung des Multivitaminsaftes mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes hinsichtlich dreier Qualitätsmerkmale erfolgt ist, die in den vom Verbraucherministerium herausgegebenen *Leitsätzen für Fruchtsäfte* ([WEB4]) als von zentraler Bedeutung deklariert werden. Die folgenden Ausführungen zu diesen Merkmalen sind an diese Leitsätze angelehnt und enthalten die Herleitung der verwendeten Wünschbarkeitsfunktionen:

- $Y_1$**: Vitamin-C-Gehalt (mg/l):** Die Zielsetzung bei dem betrachteten Multivitaminsaft besteht in einer speziellen Kennzeichnung des Saftes hinsichtlich eines hohen Vitamin-C-Gehaltes. Die Angabe "reich an Vitamin C" darf nur dann verwendet werden, wenn das Erzeugnis mindestens einen aus der verwendeten Frucht stammenden Gehalt von 300 mg/l L-Ascorbinsäure (Vitamin C) besitzt. Der Hinweis "Vitamin-C-haltig" darf angebracht werden, wenn der Gehalt an L-Ascorbinsäure mindestens 200 mg/l ausmacht. Als optimal wird die Erzielung von "reich an Vitamin C" angesehen, die Kennzeichnung "Vitamin-C-haltig" wäre jedoch auch akzeptabel. Verwendet wird demnach die in Abbildung 33 a) dargestellte einseitige Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington.

- $Y_2$**: Gehalt an Gesamtsäure (g/l):** Hergestellt werden soll ein besonders milder Saft, wobei die einzelnen Saftkomponenten mit dieser Angabe versehen werden dürfen, wenn sie einen Gesamtsäuregehalt von 6 g/l (Orangensaft), 5 g/l (Ananassaft) bzw. 8 g/l (Grapefruitsaft) unterschreiten. Bei dem entstehenden Multivitaminsaft soll ein Wert von 6 g/l unterschritten werden, Werte unter 5 g/l liefern keinen zusätzlichen Mehrwert. Die Abbildung 33 b) zeigt die so spezifizierte Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington.

- $Y_3$**: Relative Dichte aus fruchteigenen Inhaltsstoffen** (Gewichtsverhältnis, festgestellt bei 20 °C und bezogen auf Wasser von 20 °C): Für die einzelnen Saftkomponenten gibt es Richtwerte, die nicht unterschritten werden dürfen. Diese liegen für Orangensaft bei 1.04, für Ananassaft bei 1.045 und bei Grapefruitsaft bei 1.038. Daher wird für den Multivitaminsaft mindestens ein Verhältnis von 1.045 gefordert,

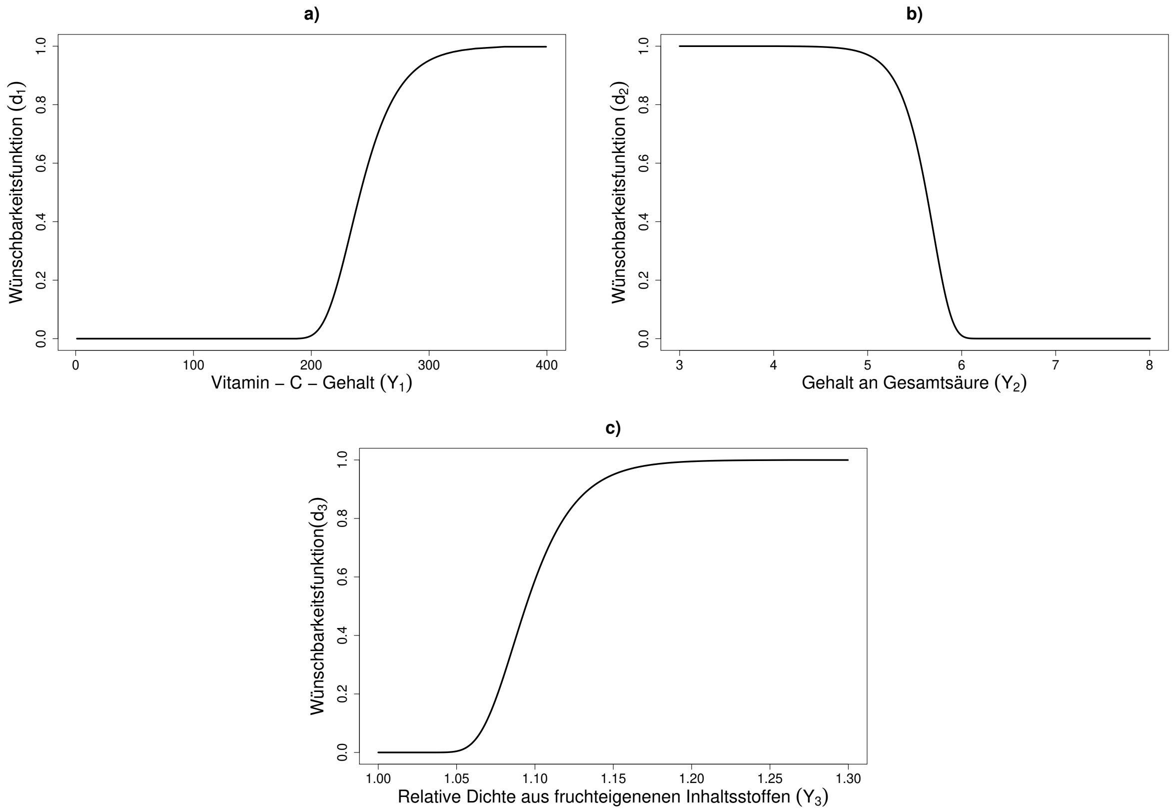



Abbildung 33: Verläufe der Wünschbarkeitsfunktionen für die Qualitätsmerkmale, a): $Y_1$, b): $Y_2$, c) $Y_3$.

Werte ab 1.2 werden als optimal angesehen. Die sich an diesen Angaben orientierende Wünschbarkeitsfunktion zeigt Abbildung 33 c). Es wird ebenso wie bei den anderen beiden Qualitätsmerkmalen eine einseitige Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington verwendet.

Es wird die Annahme getroffen, dass sich bei Verwendung des Minimums der Wünschbarkeitsfunktionen als Wünschbarkeitsindex sowie Versuchsplanungs- und Optimierungsmethoden (vgl. Kapitel 2.3) die folgenden optimalen Einstellungen für die Anteile der Fruchtsaftkomponenten ergeben haben:

$$\text{Orangensaft} : 60\,\%,\ \text{Ananassaft} : 17\,\% \text{ und Grapefruitsaft} : 23\,\%. \tag{28}$$

Diese Anteile liefern mit den über mathematische Modelle aus der Versuchsplanung geschätzten Werten für die Qualitätsmerkmale $\hat{Y}_1 = 270, \hat{Y}_2 = 5.32$ und $\hat{Y}_3 = 1.124$ einen optimalen Wert des Wünschbarkeitsindexes von 0.82. Aus der Optimierungsphase hat sich ferner ergeben, dass für alle Qualitätsmerkmale mit Variabilität zu rechnen ist, die

Qualitätsmerkmale werden normalverteilt angenommen mit folgenden Parametern:

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(270, 25), Y_2 \sim \mathcal{N}(5.32, 0.0003) \text{ und } Y_3 \sim \mathcal{N}(1.124, 0.000036). \tag{29}$$

Mit diesen Einstellungen wird der Herstellungsprozess des Fruchtsaftes simuliert und mit Hilfe der approximierten Verteilungsfunktion des Wünschbarkeitsindexes gemäß Satz 5.1.9 eine Urwertkarte aufgestellt, wobei die Verteilungsfunktion die folgende Form besitzt:

$$F_{\mathcal{D}}(D) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(-\log(D)) + 1.6}{0.22}\right)\Phi\left(\frac{\log(-\log(D)) + 1.9}{0.09}\right)\Phi\left(\frac{\log(-\log(D)) + 1.8}{0.28}\right).$$

Die Kontrollgrenzen werden anhand des Konstruktionsprinzips aus Satz 5.2.1 berechnet und ergeben sich zu

$$LCL = 0.69 \text{ und } UCL = 0.87 \text{ mit } med(D) = 0.81.$$

Abbildung 34 zeigt die Kontrollkarte bei ungestörtem Prozessverlauf. Insgesamt ist zu beobachten, dass das Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen fast ausschließlich auf die Qualitätsmerkmale $Y_1$ und $Y_3$ zurückzuführen ist, der Gesamtsäuregehalt ($Y_2$) liegt also grundsätzlich näher an den optimal gewünschten Werten als die anderen beiden Qualitätsmerkmale. Ferner ist das Merkmal $Y_1$ etwas häufiger vertreten als $Y_3$. Die Wechsel zwischen den Symbolen sind sehr unregelmäßig, sodass keine strukturellen Prozessverschiebungen in einzelnen Phasen auszumachen sind. Lediglich die Zeitpunkte 28 bis 30 sind insoweit auffällig, dass direkt hintereinander sehr hohe Werte des Wünschbarkeitsindexes auftreten. Von einer Prozessstörung wird hier jedoch nicht gesprochen, da zu hohe Wünschbarkeiten im Grunde nicht existieren und auch die obere Kontrollgrenze nicht überschritten wird.

Zur Illustration der Ursachenanalyse bei Prozessstörungen wird im Folgenden eine solche Störung simuliert, die in Abbildung 35 zu erkennen ist. Zwischen den Zeitpunkten 38 und 48 deutet sich die Störung an. Während vorher die Werte des Wünschbarkeitsindexes ausnahmslos auf die Qualitätsmerkmale $Y_1$ und $Y_3$ zurückgehen, tauchen in diesem Bereich auffällig viele Symbole für $Y_2$ auf. In dieser Phase sollte schon im Herstellungsprozess nach Ursachen gesucht werden. Beispielsweise kann es zum einen sein, dass sich die Wünschbarkeit des zweiten Qualitätsmerkmals sehr verschlechtert hat. Andererseits könnte die Ursache aber auch darin begründet sein, dass sich die Wünschbarkeiten der anderen beiden Merkmale konstant so erhöht haben, dass sie fast immer über den Werten

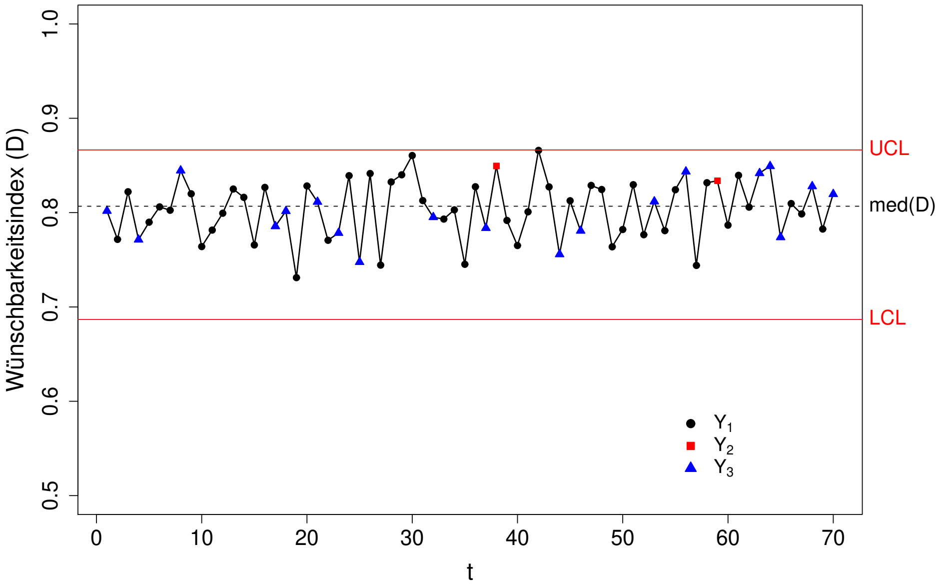



Abbildung 34: Urwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex

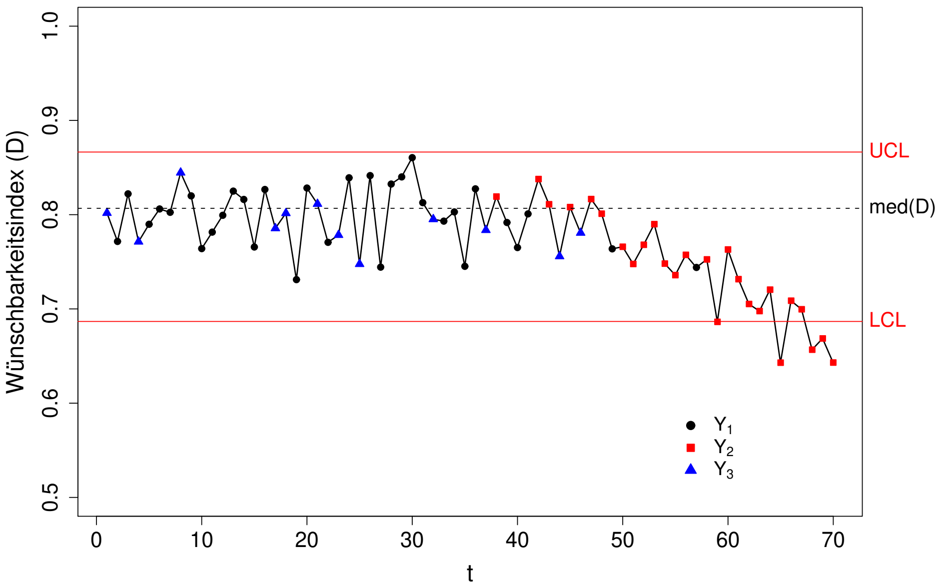



Abbildung 35: Urwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex, Trend in $Y_2$

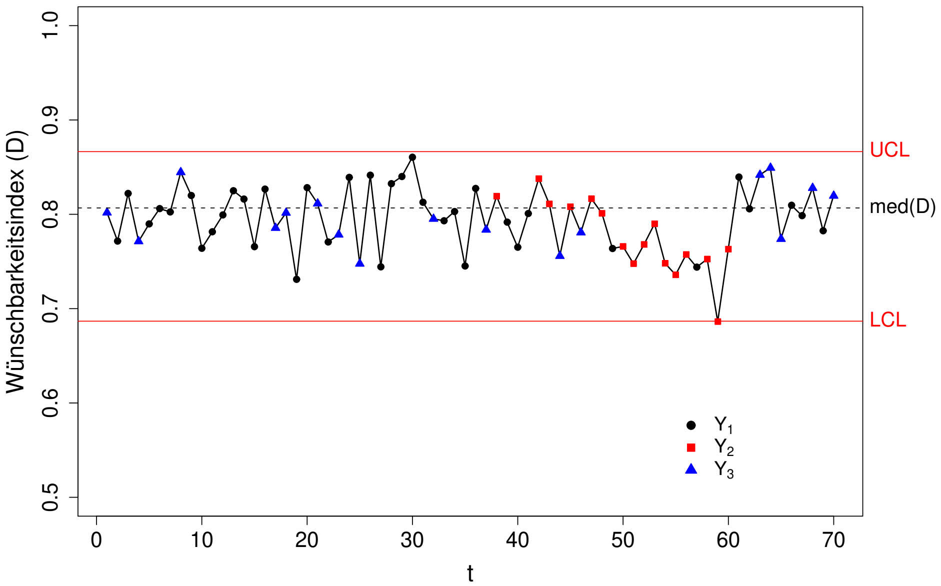



Abbildung 36: Urwert-Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex, Behobener Trendverlauf in $Y_2$

der Wünschbarkeitsfunktion von $Y_2$ liegen. Letzteres würde also einer Prozessverbesserung entsprechen.

Im vorliegenden Beispiel ist dies jedoch nicht der Fall. Betrachtet man den weiteren Prozessverlauf, wird recht schnell ersichtlich, dass es sich um eine systematische Verschlechterung von $Y_2$ handelt. Vom Zeitpunkt 50 an gibt es nur noch eine Stelle, an der ein anderes Symbol, nämlich das Symbol von $Y_1$, erscheint. Die Werte des Wünschbarkeitsindexes fallen vielmehr linear, bis sie am Zeitpunkt 65 erstmals die untere Kontrollgrenze unterschreiten. Im Weiteren liegen die letzten Werte komplett unterhalb der Kontrollgrenze.

Der Prozess ist in diesem Beispiel zur Illustration des Trendverlaufes bis zum Zeitpunkt 70 weitergeführt worden. Im Normalfall müsste in der Praxis jedoch spätestens zum Zeitpunkt 60 die Produktion gestoppt und nach dem Grund für den erhöhten Gesamtsäuregehalt gesucht werden. Beispielsweise kann eine Prozessveränderung in der Herstellung einzelner Saftkomponenten entstanden sein. Falls einzelne Saftkomponenten hinzugekauft werden (Orangen-, Ananas oder Grapefruitsaft), könnte eine mögliche Ursache auch ein Lieferantenwechsel oder eine veränderte Rezeptur des aktuellen Lieferanten sein, die zu einer Qualitätsverschlechterung des Saftes führt. Nach Behebung der Prozessstörung kann der Prozess dann fortgeführt werden, und der Wünschbarkeitsindex findet wieder zu seinem ursprünglichen Verlauf aus Abbildung 34 zurück (vgl. Abbildung 36).

# 6 Prozesskontrolle in der Lagersteuerung

## 6.1 Optimierung und Kontrolle im Lagerbetrieb

In den heutigen Zeiten zunehmenden Wettbewerbsdrucks in der Industrie kommt der effizienten Gestaltung der logistischen Prozesse eines Unternehmens erhöhte Bedeutung zu. Zwar konzentrieren sich moderne Logistikstrategien verstärkt auf eine bedarfssynchrone Bereitstellung der erforderlichen Güter (Just-In-Time-Konzept), in den meisten Firmen stellen Läger und damit verbunden ein effizienter Lagerbetrieb jedoch noch immer einen wesentlichen Bestandteil der Logistikkette dar ([JUE00], S. 41 ff.).

Durch die ständige Weiterentwicklung der Lagersystemtechnik sowie der zugehörigen IT-Komponenten nimmt die Automatisierung der Lagerprozesse ständig zu. Die so entstehenden hochkomplexen Systeme gehen einher mit einem hohen Steueraufwand, der durch Lagerverwaltungssysteme (LVS) geleistet wird. Diese LVS können heutzutage neben den Grundfunktionen wie der Verwaltung der Lagerbestände und Steuerung der Ein- und Auslagerprozesse umfangreiche Optimierungsmaßnahmen im Lagerbetrieb durchführen ([TEN99], S. 3).

Eine Klassifikation der verschiedenen Optimierungsaufgaben eines LVS ist in Abbildung 37 dargestellt. Es erfolgt eine Zuordnung der entstehenden Optimierungsaufgaben zu verschiedenen Stufen des Lagerprozesses, d.h. zur Materialfluss-, zur Lagerplatz- sowie der Bestands- und Auftragsschicht. Zur Lösung der Optimierungsprobleme werden zumeist Methoden des Operations Research herangezogen. Es wird ersichtlich, dass die Komplexität der Probleme von unten nach oben zunimmt, die Zeitanforderung hingegen auf der Materialflussebene am kritischsten ist ([TRA01], S. 31).

Die globale Aufgabe des Lagercontrollings besteht in der Beurteilung, inwieweit durch die im LVS implementierten Optimierungs- und Steuerungsstrategien höchste Lieferbereitschaft und Termintreue bei minimalen Kosten gewährleistet wird. Mögliche Leistungskennzahlen für die Lagerung sind Tabelle 16 zu entnehmen.

Durch Bildung von Hierarchisierungen, d.h. von zusammenhängenden Kennzahlensystemen (z.B. [DIL98], [HEP98]), kann dann die Qualität eines Lagerprozesses beurteilt werden. Je nach Anzahl der einbezogenen Kriterien sowie ihrer Priorisierungen wird eine globale Bewertung jedoch beliebig komplex. Dementsprechend existiert in diesem

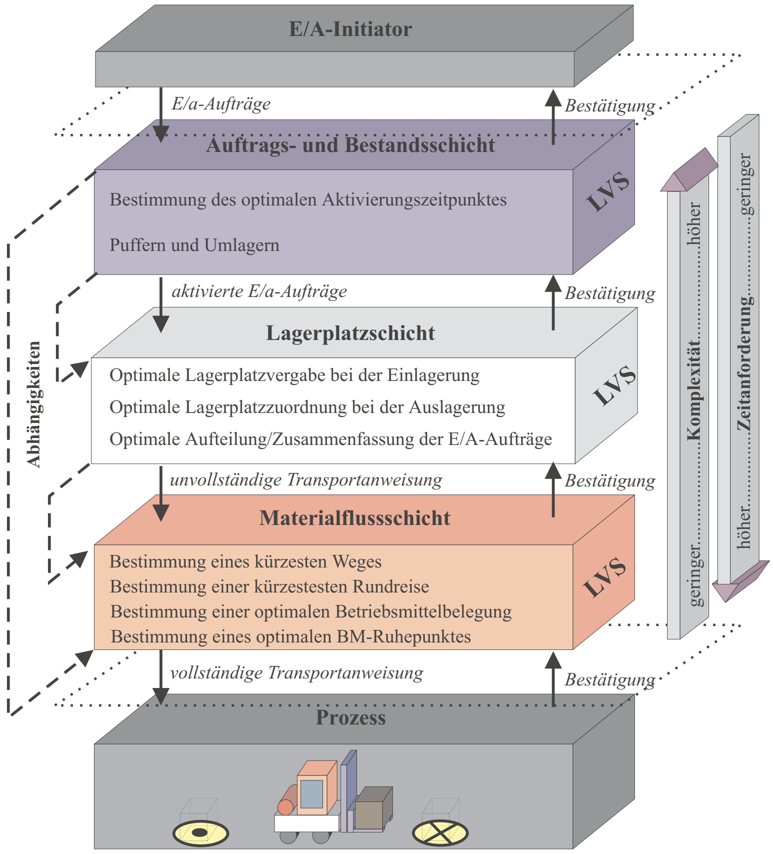



Abbildung 37: Klassifikation der Optimierungsaufgaben eines LVS, entnommen aus [TRA01] (E/a : Einlagerung / Auslagerung)

Bereich keine einheitliche Vorgehensweise. Häufig werden unzusammenhängende Kennzahlen verwendet, deren Beitrag zu einem übergeordneten Ziel wie z.B. Erhöhung der Lieferbereitschaft nur intuitiv bestimmt werden kann ([TRA01], S. 23). Das *Fraunhofer Institut Integrierte Schaltungen* in Nürnberg begegnet diesem Problem im Zuge eines Lager-Benchmarkings dahingehend, dass der gesamte Lagerprozess (Wareneingang, Einlagerung, Lagerung, Kommissionierung, Warenausgang) anhand dreier KPI's (Key Performance Indicators) beurteilt wird ([KRU03],[KLA01]). In einer offenen Lagerhausstudie wird derzeit Unternehmen die Möglichkeit geboten, eine Beurteilung ihres Lagers im Vergleich zu einer Datenbank der bisher 85 beteiligten Unternehmen zu erhalten. Aus der großen Bandbreite möglicher Kennzahlen werden im "Lager-Quick-Check" für das Unternehmen als Produktivitäts-KPI die "Anzahl der Positionen im Warenausgang (WA)", als Qualitäts-KPI der "Anteil der fehlerhaften Positionen im WA" sowie als Kosten-KPI die "Gesamtkosten pro Position im WA" berechnet und zu den abgewickelten Aufträgen

| | |
|---|---|
| Leistungskennzahlen | - Zahl gelagerter Artikel<br>- Zahl eingelagerter Lagereinheiten<br>- Zahl ausgelagerter Lagereinheiten<br>- Zahl wiedereingelagerter Lagereinheiten<br>- Zahl umgelagerter Lagereinheiten<br>- Kapitalbindung der Lagergüter<br>- Ein-, Um- und Auslagerungsdauer<br>- Flächen-, volumnen- oder standplatzbezogene Belegung des Lagers<br>- Teilereichweiten<br>- Reichweitenabweichungen<br>- Anzahl und Dauer von Fehlmengensituationen<br>- Lagerschadenswert |
| Kapazitätsbezogene Kennzahlen | - Geleistete Personalstunden<br>- Anwesenheitsquote<br>- Lagerbereitschaftsgrad<br>- Zahl eingesetzter Stapler (falls relevant)<br>- Geleistete Betriebsstundenzahl der Fahrzeuge<br>- Zahl der Lagerspiele |

Tabelle 16: Mögliche Kennzahlen im Lager (vgl. [WEB95], S. 64)

ins Verhältnis gesetzt. Diese werden dann im Vergleich zu den restlichen Unternehmen mit vergleichbaren Lagercharakteristika in einem KPI-Portfolio aufgetragen (vgl. Abbildung 38). Das Vorgehen dient jedoch nur zu einer Beurteilung der Lagerprozesse an einem bestimmten Zeitpunkt, eine Kontrolle über die Zeit ist damit nicht möglich. Außerdem wird mit dieser Methodik keine Hierarchisierung von Kennzahlen verwendet, die es erlaubt, die Lagerprozesse anhand eines einzelnen Kriteriums zu bewerten.

Die in Kapitel 2 vorgestellte Methodik der Wünschbarkeit bietet die Möglichkeit der Verdichtung aller verwendeten Kennzahlen in eine (dimensionslose) Größe bei gleichzeitiger Priorisierungsmöglichkeit. Dieser Wünschbarkeitsindex erlaubt eine Einschätzung der globalen Lagerprozessqualität anhand einer einzelnen Kennzahl, die über die Zeit unter Verwendung statistischer Prozesskontrolle überwacht werden kann.

Im folgenden Abschnitt wird ein auf Wünschbarkeiten basierendes Kontrollverfahren für ein am *Fraunhofer Institut für Materialfluss und Logistik (IML)* entwickeltes neuartiges Lagersystem aufgezeigt. Dabei geht es um die Betrachtung eines Teilbereiches des gesamten Lagerprozesses, d.h. um die Qualitätskontrolle der Lösung des Zielkonfliktes zwischen möglichst schneller Einlagerung sowie termingerechter Auslagerung. Dieser sollte durch

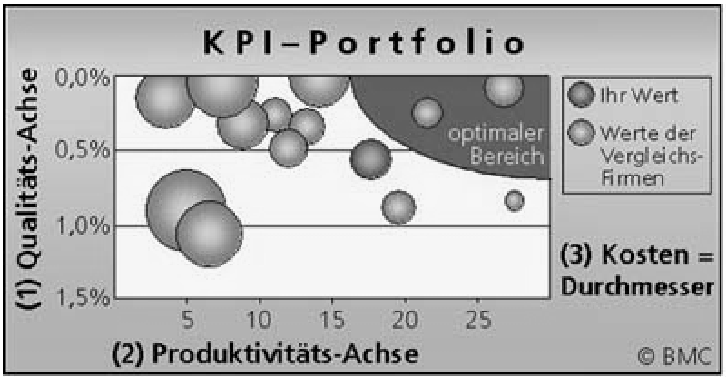



Abbildung 38: KPI-Portfolio zum Lager-Benchmarking, entnommen aus [WEB7]

dynamische Lagersteuerung optimal gelöst werden.

## 6.2 Prozesskontrolle der Steuerung eines automatischen Lagers des Fraunhofer Instituts für Materialfluss und Logistik

Am *Fraunhofer Institut für Materialfluss und Logistik in Dortmund (IML)* wird zur Zeit die dort vorhandene Kompetenz in den Bereichen Konstruktion, Steuerung und Optimierung materialflusstechnischer Systeme gebündelt, um die Entwicklung neuer Materialflusssystemkonzepte voranzutreiben. Zur praktischen Umsetzung der Forschungsergebnisse wird dazu eine Anlage in den Versuchshallen des Instituts aufgebaut, die sehr kompakt sämtliche relevanten Funktionsbereiche und Teilsysteme moderner Materialflusssysteme beinhaltet. Dazu zählen Lager, Rollenförderstrecken und Kommissionierplätze. Das Gesamtsystem ist in Abbildung 39 dargestellt.

Das Gesamtsystem besteht aus zwei Teilsystemen, die getrennt voneinander betrachtet werden können: Zum einen die Kommissionierzelle, die im Wesentlichen aus Rollenförderstrecken und Kommissionierplatz besteht. Dabei dient der innere Kreislauf mit der parallelen Stichstrecke als Sortierkreislauf und der äußere zur Versorgung des Kommissionierers mit Artikeln. Die Artikel werden artikelrein in Kleinteile-Ladungsträgern (KLT-Behältern) transportiert. Bei dieser Art der Lagerung wird ein Lagerplatz nur mit einer Art von Material belegt.

Zum anderen gibt es das Multishuttle-System, eine Neuentwicklung des IML. Bei dem Multishuttle-System handelt es sich um schienengebundene Flurförderzeuge, die innerhalb eines über mehrere Ebenen verteilbaren Schienennetzes verfahren. Durch einen modularen

Aufbau des Multishuttle-Systems wird es möglich, auf Schwankungen des Leistungsbedarfes zu reagieren. Durch Variation der Anzahl der eingesetzten Multishuttles können fein skalierbare Leistungsänderungen erzielt werden, somit auch vorübergehende Bedarfsspitzen abgedeckt werden ([IML02]). Herkömmliche Lagersysteme müssen häufig schon in der Planung überdimensioniert werden, da eine nachträgliche Leistungssteigerung mit hohem Aufwand verbunden wäre. Durch den Einsatz mehrerer Fahrzeuge auf demselben Schienennetz wird eine hohe Flexibilität ermöglicht. Steuerungstechnisch stellt dieser Fall jedoch eine Herausforderung dar, wenn neben der bloßen Kollisionen- oder Deadlockvermeidung ein auf die logistischen Prozesse ausgerichtetes optimales Betriebsverhalten erzielt werden soll. Untersucht werden soll daher im Folgenden gezielt die Qualität der steuerungstechnischen Umsetzung als zentraler Faktor des Multishuttle-Systems.

In der derzeitigen Installation bedienen zwei Multishuttles das Lager und stellen die materialflusstechnische Verbindung zwischen Lager und angrenzender Fördertechnik her. Das Lager besteht aus vier Regalen mit insgesamt 224 Lagerplätzen und ist vom Prinzip vergleichbar mit dem klassischen Hochregal (vgl. Abbildung 40), wie es in größerer Dimension in der Praxis tausendfach im Einsatz ist. Durch Variation einzelner Kanallängen ist es jedoch nicht an quaderförmige Freiräume angewiesen, sodass die fertigungstechnischen Anforderungen geringer sind ([IML02]). Durch das Einziehen von Querstreben kann

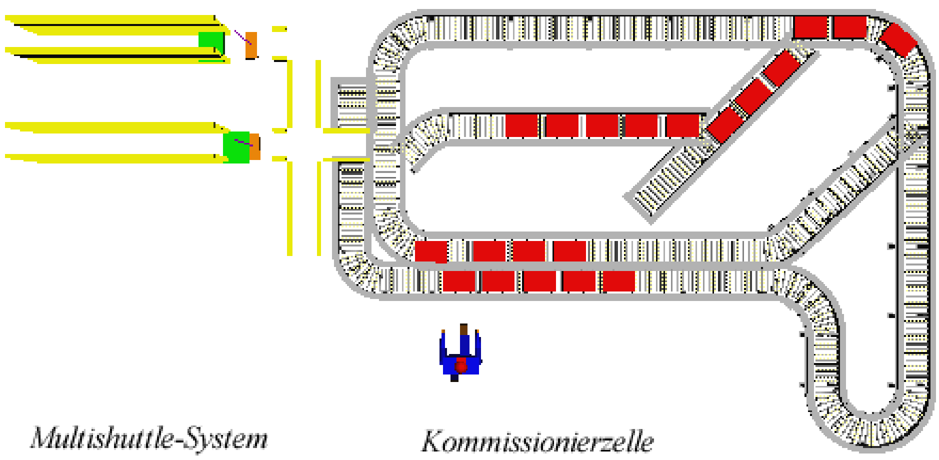



Abbildung 39: Gesamtsystem der Anlage

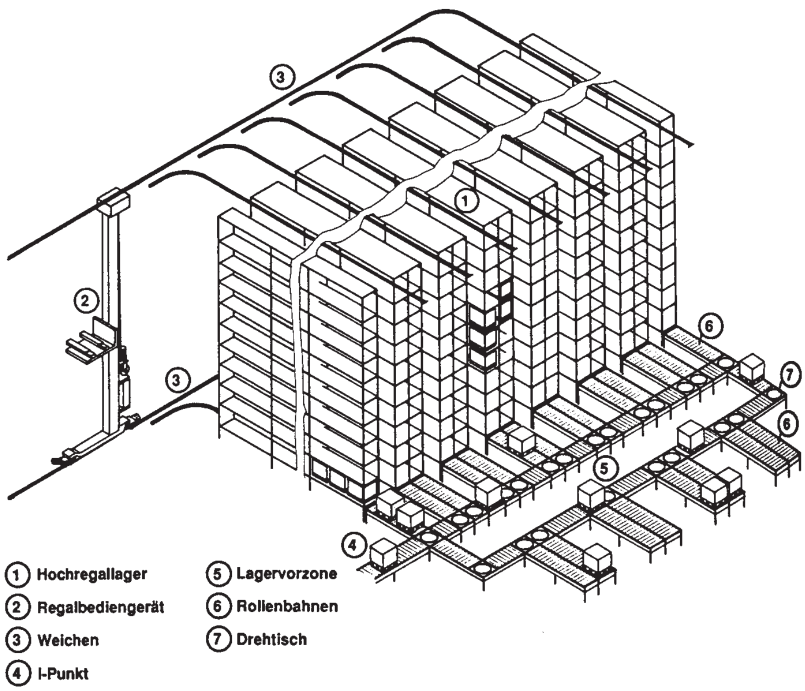



Abbildung 40: Automatisches Hochregallager mit kurvengängigen Regalbediengeräten, entnommen aus [JUE89], S. 642

ferner die Statik für beliebige Höhen ausgelegt werden.

### 6.2.1 Der Ein- und Auslagerungsprozess

Die im Zuge der Qualitätskontrolle betrachteten logistischen Prozesse beschränken sich zunächst auf das Ein- und Auslagern von KLT-Behältern innerhalb des Multishuttle-Systems als die zentralen Vorgänge, die es hinsichtlich eines optimalen Betriebsverhaltens zu steuern gilt. Diese Prozesse sind im Folgenden detailliert aufgeführt. Die Überwachung und Steuerung des Systems und der Prozesse obliegt einem Lagerverwaltungs- und Steuerungsrechner (LVR), der in ein Lagerverwaltungssystem (LVS) integriert ist.

Der Einlagerungsprozess startet für die vorliegende Betrachtung mit der Ankunft des einzulagernden KLT-Behälters am Multishuttle-System, die Vorgänge innerhalb der Kommissionierzelle werden hier nicht näher betrachtet. Der **Einlagerungsvorgang** kann wie folgt beschrieben werden:

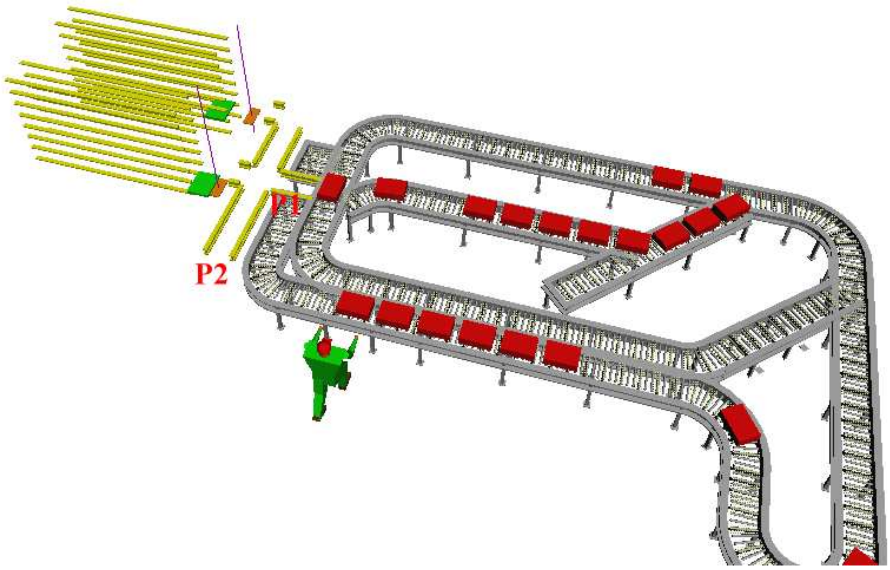



Abbildung 41: Gesamtsystem mit Pufferplätzen P1 (Einlagerung) und P2 (Auslagerung)

- Ein KLT-Behälter erreicht den Pufferplatz P1 (siehe Abbildungen 41 und 42), was die Aktivierung eines Einlagerereignisses im Steuerungsrechner zur Folge hat.
- Der Steuerungsrechner bestimmt daraufhin einen geeigneten Lagerplatz für diesen Behälter und erzeugt einen entsprechenden Transportauftrag von P1 zu dem gewünschten Lagerplatz.
- Der Einlagerauftrag wird rechnerintern in eine Warteschlange eingereiht und zu einem geeigneten Zeitpunkt einem freien Multishuttle zugeordnet, das dann die Einlagerung vollführt.

Ein und dasselbe Multishuttle kann sowohl für die Einlagerung als auch für die Auslagerung verwendet werden. Nach Bekanntwerden eines Auslagerungsauftrages wird durch den LVS eine geeignete Reihenfolge der Ein- und Auslageraufträge sowie eine möglichst zeitoptimale Zuordnung der Aufträge zu den Multishuttles generiert. Der **Auslagerungsprozess** lässt sich in drei Teilschritte zerlegen:

- Von einem übergeordnetem System wird ein Auslagerauftrag in das LVS eingelastet. Ein Auslagerauftrag besteht aus Gründen der Vereinfachung aus nur einer Artikel-Position, die immer mit genau einem KLT-Behälter erfüllt wird.

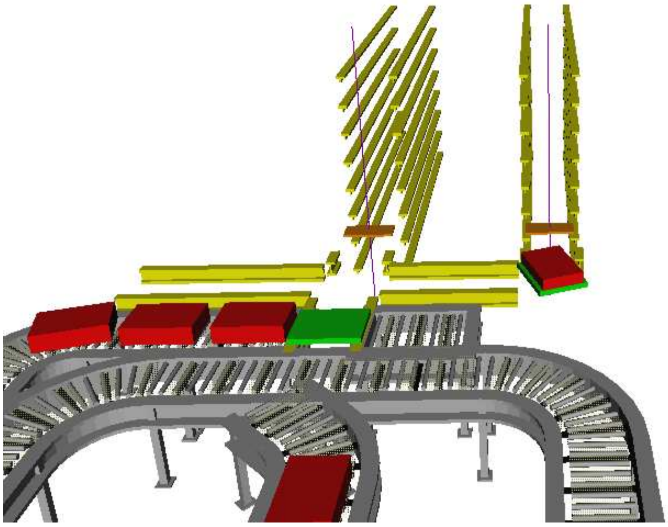


Abbildung 42: Einlagerungsprozess am Pufferplatz P1

- Das LVS bestimmt aus der Menge der möglichen KLT-Behälter, die den gewünschten Artikel enthalten, einen geeigneten und generiert einen Transportauftrag vom jeweiligen Lagerplatz zum Pufferplatz P2.
- Der Auslagerauftrag wird rechnerintern in eine Warteschlange eingereiht und zu einem geeigneten Zeitpunkt einem freien Multishuttle zugeordnet, das dann die Auslagerung vollführt.

### 6.2.2 Qualitätsmerkmale des Ein- und Auslagerungsprozesses

Ein- und Auslagern erfordert Entscheidungen vom LVR, die es so zu treffen gilt, dass das Gesamtsystem optimal gesteuert wird. Dieser Sachverhalt wird durch das Adjektiv „geeignet“ in den in Kapitel 6.2.1 Prozessbeschreibungen ausgedrückt. Was „geeignet“ ist, wird hierbei über bestimmte Heuristiken, die im LVR implementiert sind, entschieden.

Zur Beurteilung der Qualität der Steuerungsprozesse werden in Absprache mit Experten des IML die folgenden übergeordneten **Qualitätsmerkmale** (gemessen über alle Artikel pro Tag) verwendet:

- Die durchschnittliche Einlagerzeit und

- die durchschnittliche Abweichung von dem geforderten Auslagerungszeitpunkt, an dem der Artikel an P2 angelangt sein soll. Als Durchschnittsmaß wird hier im Gegensatz zur Einlagerzeit der Median verwendet, um durch die hier häufiger auftretenden Ausreißerwerte keine Verzerrungen zu erhalten.

Beide Zielgrößen sind durch die Entscheidungen des LVR zu minimieren. Dabei ist zu beachten, dass das Ziel nicht in einer Online-Prozesskontrolle besteht. Vielmehr soll durch eine globale, tageweise Betrachtung eine Möglichkeit der Beurteilung des Steuerungsprozesses geschaffen werden. Im Durchschnitt über alle Artikel pro Tag sollte unter Einbeziehung natürlicher Prozessschwankungen eine in etwa konstante Einlagerzeit sowie eine entsprechend konstante Abweichung vom geforderten Auslagerungszeitpunkt erzielt werden. Diese Werte können als ungefähre „Planungswerte" für zukünftige Aufträge angesehen werden. Pro Artikel können jedoch natürlich aufgrund der dynamischen Struktur eines Lagers sowie durch etwaige Ein- und Auslagerspitzen die Werte dieser Qualitätsmerkmale stärker schwanken.

Pro Auftrag bedient sich der LVR, wie bereits beschrieben, Heuristiken, die dynamisch anhand der aktuell vorliegenden Rahmenbedingungen die Ein- und Auslagerungsprozesse bestimmen. Diese basieren auf bestimmten Entscheidungsregeln, die sich auf die folgenden **Entscheidungsgrößen** stützen:

- Die Entfernung des für die Einlagerung zu wählenden Lagerplatzes in Hinblick auf die Auslagerung. Diese ist kein Längenmaß, sondern beschreibt die Zeit, die ein Multishuttle später bei der Auslagerung benötigt, um einen KLT-Behälter von diesem Lagerplatz zu P2 zu befördern.
- Der Auslastungsgrad der beiden Multishuttles.
- Die Vorlaufzeit eines Auslagerauftrags, die angibt, zu welchem Zeitpunkt ein Auslagerauftrag gestartet werden soll.

Bei der parallelen Bearbeitung von Ein- und Auslageraufträgen kommt es im Betrieb unweigerlich zu Zielkonflikten zwischen den konkurrierenden Zielen „schnelle Einlagerung" und „termingerechte Auslagerung". Beispielsweise muss ein Einlagerauftrag evtl. zurückgestellt werden (was die Einlagerzeit verlängert), weil beide Multishuttle zunächst einen Auslagerauftrag erfüllen müssen, um keine Abweichung vom Auslagertermin zu riskieren.

### 6.2.3 Einsatzmöglichkeiten des Wünschbarkeitsindexes zur Prozesskontrolle

Um bei Forschungsvorhaben nicht auf das reale System und dessen Zeitverhalten angewiesen zu sein, wird ein Simulationsmodell zugrunde gelegt, das zwar das Zeitverhalten der realen Anlage abbildet, aber deutlich beschleunigt abläuft. Zum Einsatz kommt der kommerzielle Simulator *Automod* (vgl. [BAN00]), der speziell für Materialflusssysteme konzipiert ist und neben der Simulation und dem Generieren von Zeitreihen während des Simulationslaufs eine dreidimensionale Animation bietet.

Zur Beurteilung der Qualität des Lagersteuerungsprozesses soll der Wünschbarkeitsindex gemäß Definition 2.2.1 zum Einsatz kommen. Dieser ist hier wegen des vorherrschenden Zielkonfliktes zwischen den beiden Zielgrößen besonders geeignet. Aufgrund der Abhängigkeit der Ein- und Auslagerprozesse sowie gegenläufiger Anforderungen wäre eine getrennte Optimierung beider Zielgrößen nicht zielführend. Es liegen in diesem Fall jedoch spezielle Rahmenbedingungen vor.

Der Prozess der Lagersteuerung stellt keinen statischen, deterministischen Prozess dar, wie er in der Literatur zu Kontrollkarten und Wünschbarkeitsindizes zumeist betrachtet und vorausgesetzt wird. Es werden i. Allg. Produktionsprozesse betrachtet, die feste Einflussgrößen (z.B. Umgebungstemperatur oder Abmessungen bestimmter Fertigungskomponenten) besitzen und bei denen sich ferner der funktionale Zusammenhang zwischen den Einflussgrößen und den Qualitätsmerkmalen analytisch abbilden lässt. Überwacht wird in diesem Fall der identische Prozess über die Zeit, wobei unter Konstanz der Einflussgrößen stabile Werte der betrachteten Qualitätsmerkmale unter Einbeziehung natürlicher Variation erwartet werden.

Der Lagersteuerungsprozess besitzt hingegen aufgrund seiner dynamischen Struktur die folgenden Charakteristika:

- Die Einflussgrößen stellen keine physikalischen Größen dar, die fest gesetzt werden können. Sie werden vielmehr mittels bestimmter Heuristiken bei jedem Ein- und Auslagerauftrag dynamisch angepasst, um unter sich ändernden Rahmenbedingungen Stabilität in den Qualitätsmerkmalen zu erhalten. Diese Stabilitätsannahme wird ferner gestützt durch die stark aggregierte Betrachtungsweise der Qualitätsmerkmale in Form von Tagesdurchschnitten (durchschnittliche Einlagerzeit und durchschnittliche Abweichung vom geforderten Auslagerungszeitpunkt über alle Artikel pro Tag). Wegen der erwarteten Stabilität der Qualitätsmerkmale kann der Wünschbarkeitsindex als Mittel zur Beurteilung der Lagersteuerungsqualität herangezogen werden. Es kann hier jedoch keine Modellierung funktionaler Zusammenhänge und anschließende Optimierung des Wünschbarkeitsindexes erfolgen. Es wird daher zunächst davon ausgegangen, dass die derzeit verwendeten Heuristiken zur Bestimmung der Niveaus der Einflussgrößen zu einem optimal eingestellten Steuerungsprozess führen, der über die Zeit kontrolliert werden soll. Die Beurteilung der Optimalität erfolgt dabei primär durch Experten des *Fraunhofer Instituts für Materialfluss und Logistik (IML)*.

- Im Allgemeinen kann nicht davon ausgegangen werden, dass bei jedem Ein- und Auslagerauftrag dieselben Systemzustände, d.h. z.B. eine identische Verteilung der Artikel über die einzelnen Lagerplätze, der gleiche Füllungsgrad des Lagers oder das gleiche Verhältnis zwischen Ein- und Auslageraufträgen vorliegen. Der gesamte Prozess weist daher eine starke Abhängigkeitsstruktur auf. Durch die Adaption der Einflussgrößen auf die sich ändernden Systemzustände wird jedoch versucht, auf diese Abhängigkeitsstruktur einzugehen, d.h. bei jedem einzelnen Auftrag wird eine neue Entscheidung getroffen. Es bleibt zu prüfen, inwieweit dieses Verhalten trotzdem zu einer (Auto- ) Korrelation der einzelnen Realisationen der Qualitätsmerkmale führt.

Nachfolgend wird das Konzept der Wünschbarkeit auf einen (simulierten) Lagerprozess angewendet. Dabei werden die beschriebenen Prozessannahmen überprüft sowie eine Kontrollkarte für den erstellten Wünschbarkeitsindex generiert. Ferner schließt sich eine Ursachenanalyse bei auftretenden Störfällen an.

### 6.2.4 Beschreibung der Simulation und Analyse der Prozessdaten

Betrachtet wird im Folgenden ein mit Hilfe von *Automod* simulierter Lagerprozess über einen Zeitraum von 553 Tagen im Einschichtbetrieb (8 Std.), um den Prozess über einen langen Zeitraum beobachten und Auffälligkeiten entdecken zu können. Dabei werden bestimmte Parameter verwendet, die die Terminierung von Ein- und Auslagerzeitpunkten maßgeblich bestimmen. Einlagerungsaufträge werden normalverteilt mit einem Erwartungswert von 4 Minuten und einer Standardabweichung von 1.5 in die Kommissionierzelle eingelastet. In Abbildung 39 entspricht dieser Vorgang einem Auflegen eines neuen

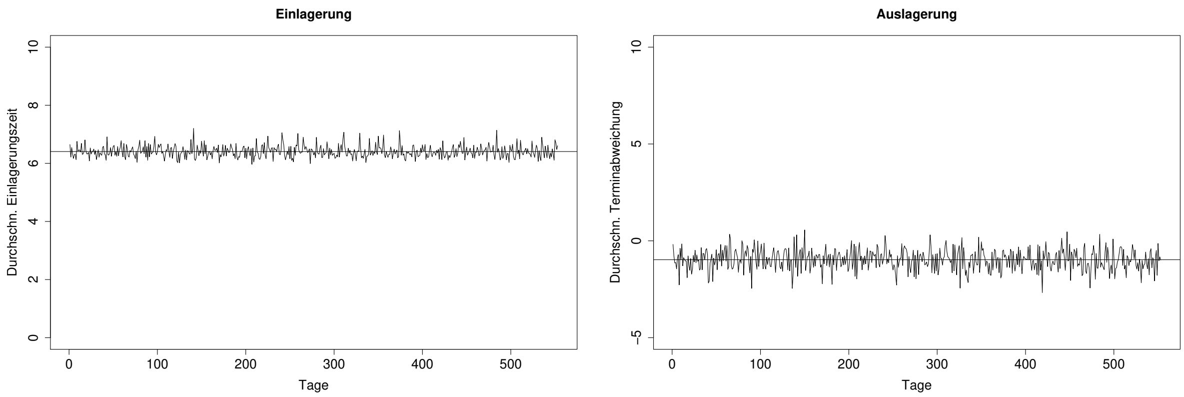



Abbildung 43: Verlauf der betrachteten Qualitätsmerkmale über einen Zeitraum von 553 Tagen

KLT-Behälters auf das Förderband durch die dargestellte Person. Die Verteilungsannahme führt nicht automatisch zu einer Normalverteilung der Einlagerungsstartpunkte, da innerhalb der Kommissionierzelle Sortier- und Puffervorgänge vollzogen werden, bevor der einzulagernde KLT-Behälter am Pufferplatz P1 ankommt. Eine Aktivierung von Auslagerungsaufträgen erfolgt gleichverteilt im Bereich von 2.92 bis 5.92 Minuten.

Der Lagerbetrieb wird mit den beschriebenen Einstellungen simuliert, wobei der LVR die so gewonnenen empirischen Werte der Qualitätsmerkmale zurückgibt. Ihr Verlauf ist in Abbildung 43 dargestellt.

Des Weiteren wurden intensive Simulationsstudien über längere Zeiträume unter selbigen Verteilungsannahmen durchgeführt, um möglichst gesicherte Kenntnisse über die Verteilung der Qualitätsmerkmale zu erlangen. Die Simulationsstudien rechtfertigen eine Normalverteilungsannahme mit Parametern $\mu = 6.4$ und $s = 0.20$ für das Qualitätsmerkmal der Einlagerung sowie $\mu = -0.98$ und $s = 0.53$ für selbiges der Auslagerung. Diese Parameter finden sich in den beobachteten Daten bestätigt (vgl. Abbildung 44), Parameterdifferenzen ergeben sich lediglich ab der dritten Nachkommastelle.

Im Mittel über alle Artikel pro Tag erfolgt die Auslagerung demnach etwa 0.98 Minuten vor dem terminierten Auslagerungszeitpunkt, die mittlere Einlagerungszeit beträgt ca. 6.4 Minuten.

Abbildung 45 visualisiert Zusammenhänge in der Datenstruktur. Es lässt sich eine signifikante negative Korrelation zwischen der Anzahl der Einlageraufträge pro Tag und der entsprechenden Anzahl der Auslageraufträge feststellen. Die Priorität der Steuerung liegt dabei auf den Auslageraufträgen, sodass durch die erhöhte Beanspruchung der Multi-

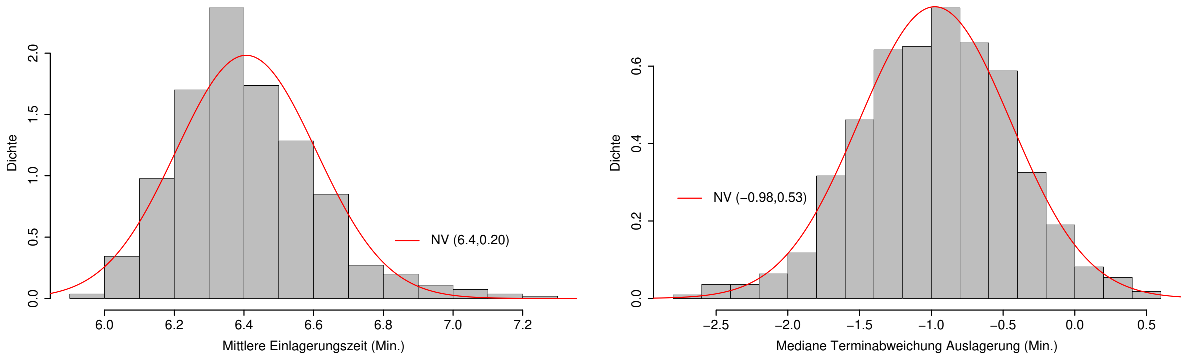



Abbildung 44: Histogramme der betrachteten Qualitätsmerkmale mit zugehörigen Normalverteilungsdichten

shuttles seitens der Auslagerung weniger Kapazität für Einlagerungsaufträge vorliegt. Ferner variieren die Anzahlen der Ein- und Auslagerungsaufträge pro Tag nicht stark. Eine solche Struktur könnte sich z.B. in einem Pufferlager wiederfinden. Pufferläger gleichen Schwankungen zwischen Zu- und Abgängen in kürzeren Zeitintervallen aus und dienen häufig zur Zeitüberbrückung zwischen verschiedenen Arbeitsvorgangsfolgen in der Produktion. Charakteristisches Merkmal ist neben relativ hohen Umschlaghäufigkeiten, die auch hier vorliegen, eine geringe Schwankung in den Anzahlen der Ein- und Auslageraufträge ([JUE00]).

Des Weiteren ist eine leichte positive Korrelation zwischen den beiden Qualitätsmerkmalen auffällig, die sich ebenso anschaulich begründen lässt. Brauchen die Multishuttles länger für einen Auslagerungsauftrag, sind sie erst später für den nächsten Einlagerungsauftrag verfügbar. Dieser erhält somit auch eine verlängerte Einlagerungszeit. Nach Transformation mit Hilfe von Wünschbarkeitsfunktionen (Kapitel 6.2.5) ist diese Korrelation jedoch nicht mehr vorhanden, die transformierten Qualitätsmerkmale sind nahezu unkorreliert.

Die in Kapitel 6.2.3 beschriebene Abhängigkeitsstruktur des Prozesses schlägt sich nicht in den Werten der Qualitätsmerkmale nieder. Der nichtparametrische Runs-Test ergibt für das Qualitätsmerkmal der Einlagerung p-Werte von 0.881 bzw. 0.67 für den Test der Nullhypothese, dass die Beobachtungen zufällig um den Mittelwert bzw. um den Median schwanken. Für das Qualitätsmerkmal der Auslagerung weist der Test p-Werte von 0.807 und 0.932 aus. Die Nullhypothese der Zufälligkeit der Beobachtungen lässt sich demnach nicht ablehnen.

Zusammenfassend sind also die Voraussetzungen für die Anwendung der Methodik der

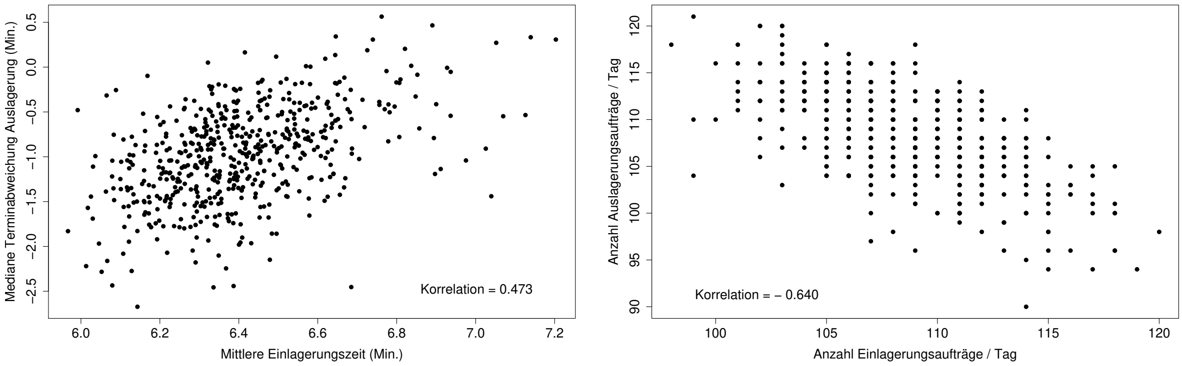



Abbildung 45: Korrelationen der betrachteten Qualitätsmerkmale sowie der Anzahlen der Ein- und Auslageraufträge pro Tag

Wünschbarkeiten gegeben. Neben dem Zielkonflikt zwischen den Qualitätsmerkmalen liegen relativ konstante, zufällige Werte der Qualitätsmerkmale vor. Ferner lässt sich die Normalverteilungsannahme der Merkmale rechtfertigen, sodass sich die in Kapitel 5.1 hergeleiteten Erkenntnisse über die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes anwenden lassen.

### 6.2.5 Prozesskontrolle mit Hilfe von Wünschbarkeiten

Im Zuge der Qualitätskontrolle der Lagersteuerung mit Hilfe von Wünschbarkeiten besteht der erste Schritt in der Formulierung von gewünschten Zielwerten für die beiden Qualitätsmerkmale "Mittlere Einlagerungszeit" und "Mediane Terminabweichung der Auslagerung", berechnet über alle Artikel pro Tag. Zur Abbildung der so formulierten Wünschbarkeiten wird die Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington gemäß Kapitel 2.1.1 verwendet. Diese wird der Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer aus Kapitel 2.1.2 vorgezogen, da sie nur asymptotisch gegen Null konvergiert. Im Gegensatz zu einem Produktionsprozess mit genau spezifiziertem Ergebnis gibt es hier keine Werte, die derart inakzeptabel sind, dass ein sofortiger Abbruch des Steuerungsprozesses vonnöten wäre. Akute Steuerungsprobleme würden im laufenden Betrieb sofort bemerkt und behoben. Das Ziel besteht vielmehr in der Aufdeckung schleichender Veränderungen.

Die konkrete Form der beiden Wünschbarkeitsfunktionen wurde im Dialog mit Experten des IML festgelegt. Wie in Abbildung 46 dargestellt, wurden für beide Qualitätsmerkmale einseitige Wünschbarkeitsfunktionen gewählt. Bei dem Qualitätsmerkmal der Einlagerung ist dies sofort einsichtig. Je geringer die mittlere Einlagerungszeit, desto gewünschter ist sie

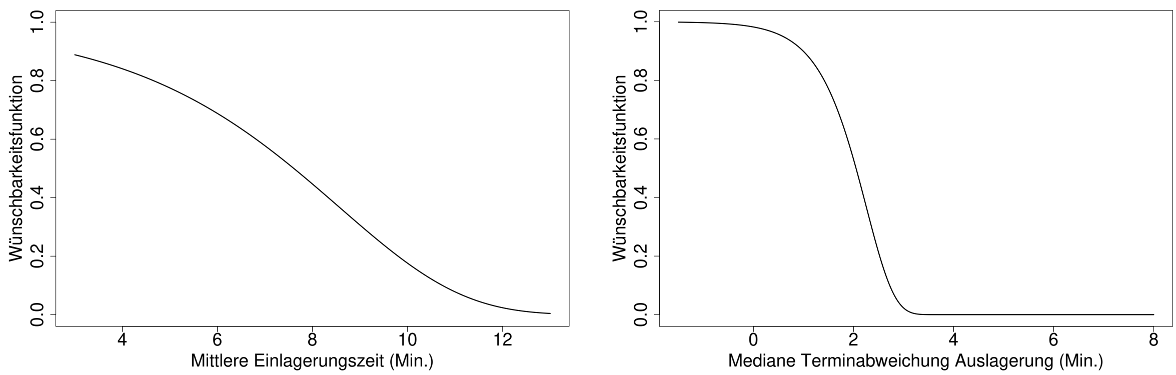



Abbildung 46: Einseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington für die Qualitätsmerkmale

hinsichtlich der Erreichung eines maximalen Durchsatzes im Lager. Der Bereich oberhalb der von Harrington spezifizierten "guten Wünschbarkeit", also oberhalb von 0.63, ist für Werte der mittleren Einlagerungszeit bis zu 8 Minuten gegeben. Schwer akzeptabel werden jedoch Werte größer 12 Minuten, da in diesen Fällen über den Tag gesehen zu wenig Artikel eingelagert werden können.

Intuitiv für das Qualitätsmerkmal der Auslagerung wäre eher die Verwendung einer zweiseitigen Wünschbarkeitsfunktion. Eine viel zu späte Auslagerung würde Lieferverzögerungen nach sich ziehen, eine viel zu frühe Auslagerung würde das Problem der Zwischenlagerung bis zur Auslieferung verursachen. Durch den LVR und die implementierten Entscheidungsregeln bzgl. der Aktivierungszeitpunkte für die Auslagerung wird jedoch sichergestellt, dass viel zu frühe Auslagerungen nicht vorkommen können. Aus diesem Grunde wurde hier auch die einseitige Wünschbarkeitsfunktion gewählt, um zur späteren Herleitung der Kontrollgrenzen für den Wünschbarkeitsindex auf die in Kapitel 5.1.2 hergeleitete Verteilung für den Wünschbarkeitsindex zurückgreifen zu können. Die Spezifikation der Wünschbarkeitsfunktion impliziert ein sogenanntes Zeitfenster. Zwar wird der gewünschte Auslagerungszeitpunkt vorgegeben, dieser ist jedoch als Richtwert zu verstehen, der bis zu drei Minuten unter- bzw. überschritten werden darf. Dabei ist zu beachten, dass eine Überschreitung des Richtwertes um mehr als eine Minute zwar noch akzeptabel ist, die Wünschbarkeit fällt jedoch stark ab. Die Verwendung eines Zeitfensters erleichtert ein praxisgerechteres Modellieren der Entscheidungsregeln im LVR ([TRA01], S. 55). Der späteste Aktivierungszeitpunkt zur genauen Erreichung des Auslagerungszeitpunktes wird bestimmt durch den Auslagerungszeitpunkt, reduziert um die Auftragsdurchlaufzeit, d.h. die benötigte Zeit für die Auslagerung. Diese lässt sich jedoch aufgrund der sich im

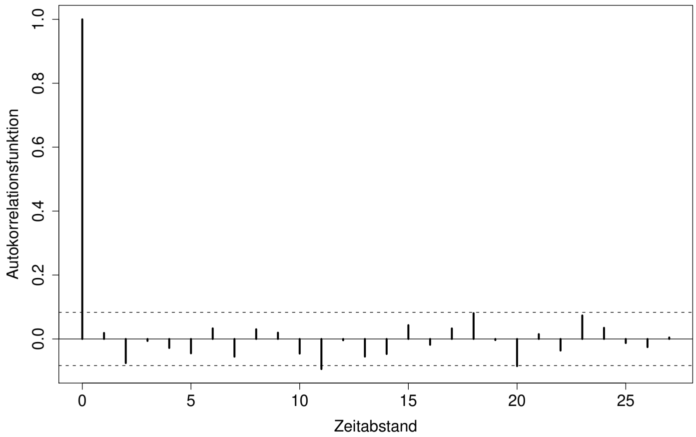



Abbildung 47: Korrelogramm der Zeitreihe des Wünschbarkeitsindexes

Lager dynamisch ändernden Rahmenbedingungen nicht immer exakt prognostizieren, sodass sowohl kleine zeitliche Abweichungen nach vorne als auch nach hinten vorkommen können.

Nach Transformation der beobachteten Werte der Qualitätsmerkmale mit Hilfe der beiden Wünschbarkeitsfunktionen in Wünschbarkeiten erfolgt mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes eine Zusammenfassung dieser dimensionslosen Größen. Dieser wird durch den geometrischen Mittelwert der beiden Wünschbarkeiten gebildet (vgl. Kapitel 2.2) und erlaubt eine globale Beurteilung der Qualität des Lagersteuerungsprozesses, da er eine gewichtete Zusammenfassung der relevanten Qualitätsmerkmale darstellt.

Vor der Aufstellung einer Kontrollkarte ist zu prüfen, ob Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Werten des Wünschbarkeitsindexes vorliegen. Das in Abbildung 47 dargestellte Korrelogramm (vgl. dazu [SCH99]) der Zeitreihe des Wünschbarkeitsindexes zeigt jedoch keine Auffälligkeiten wie Zyklen, Regelmäßigkeiten oder deutliche Spitzen außerhalb der eingezeichneten Konfidenzgrenzen. Die Konfidenzgrenzen werden lediglich bei einem Zeitabstand von 11 minimal überschritten. Für eine solche Autokorrelation lässt sich jedoch kein inhaltlicher Zusammenhang feststellen. Auch bei einem "Weissen Rauschen" liegt ein Anteil von 5 % der Werte außerhalb des Konfidenzgürtels.

Das Ziel besteht nun in der tageweisen Kontrolle des Lagersteuerungsprozesses, wobei hier alle Werte der Qualitätsmerkmale mit einbezogen werden, da aufgrund der Betrachtung der Durchschnitte nur ein Wert pro Tag vorliegt und sonst die Reaktionszeiten auf mögliche Prozessstörungen zu groß werden. Pro Tag wird ein neuer Wert des Wünschbarkeitsindexes errechnet, sodass sich die Zeitreihe des Wünschbarkeitsindexes immer weiter verlängert. Zur Beurteilung, ob der Lagersteuerungsprozess noch (statistisch) unter Kontrolle ist, werden Kontrollgrenzen gemäß Kapitel 4 benötigt. Diese basieren auf der statistischen Verteilung der zu kontrollierenden Größe, in diesem Fall also auf der Verteilung des Wünschbarkeitsindexes, die in Kapitel 5.1.2 für den Fall zweier einseitiger Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington hergeleitet wurde. Falls der Lagersteuerungsprozess im statistischen Sinne außer Kontrolle ist, überschreitet ein Wert des Wünschbarkeitsindexes die Kontrollgrenzen.

Als Kontrollkarte empfiehlt sich hier eine Urwertkarte, da die Qualitätsmerkmale ohnehin schon tageweise erhoben werden und Tagesdurchschnitte darstellen. Eine weitere Verdichtung, beispielsweise durch Mittelwertkarten, hätte einen zu großen Informationsverlust zur Folge. Verwendet wird die in Kapitel 4.3 beschriebene Zaunkarte. Es wird hier nicht auf die in Kapitel 5.2.1 hergeleitete Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex zurückgegriffen, da die Zaunkarte für die vorliegenden Parametereinstellungen der Qualitätsmerkmale und der Wünschbarkeitsfunktionen im Vergleich mit der Urwertkarte für den Wünschbarkeitsindex und der Shewhart-Einzelwertkarte die besten Ergebnisse bzgl. des ARL-Verlaufs aufweist (vgl. Kapitel 5.2.2). Bei der Zaunkarte wird die Kenntnis der Verteilung über die Quantile mit einbezogen, wobei hier jedoch nur das untere und obere Quartil in die Berechnung eingeht. Ferner ist sie durch die Verwandtschaft zu Box-Plots sehr anschaulich interpretierbar und somit gut zu vermitteln

Die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes wurde unter Verwendung der Methodik von Schwartz und Yeh approximativ bestimmt. Abbildung 48 zeigt die so ermittelte theoretische im Vergleich zu der aus den Daten ermittelten empirischen Verteilungsfunktion. Es wird die hohe Genauigkeit der Approximation ersichtlich, Abweichungen ergeben sich lediglich in den Rändern der Verteilung. Diese sind jedoch zur Bestimmung der Kontrollgrenzen nicht relevant. Für diese werden nur der Median sowie das untere und obere Quartil benötigt, die in der Abbildung mit Punkten markiert sind. Hier ergeben sich zu vernachlässigende Unterschiede, was die Anwendbarkeit der Approximation nochmals unterstreicht.

Mit Hilfe der so ermittelten Kontrollgrenzen (LCL $= 0.763$, Median $= 0.802$, UCL $= 0.835$) für den Wünschbarkeitsindex lässt sich dann die Kontrollkarte aufstellen. Diese ist in Abbildung 49 dargestellt. Es wird deutlich, dass der Lagersteuerungsprozess im Mittel mit einem Wert größer 0.8 eine gemäß der Definition von Harrington exzellente

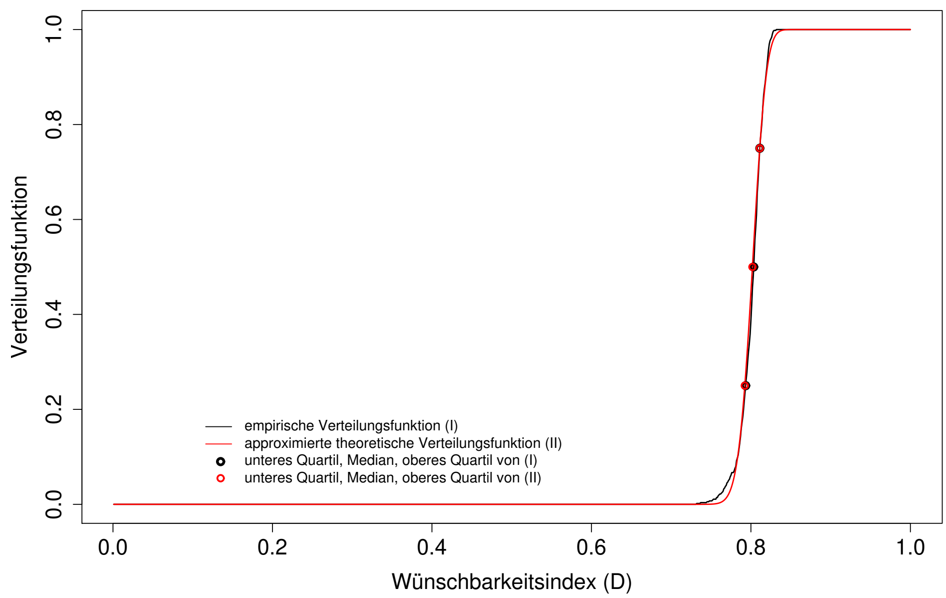



Abbildung 48: Vergleich der empirischen und approximierten theoretischen Verteilungsfunktion (vgl. Kapitel 5.1.2) des Wünschbarkeitsindexes

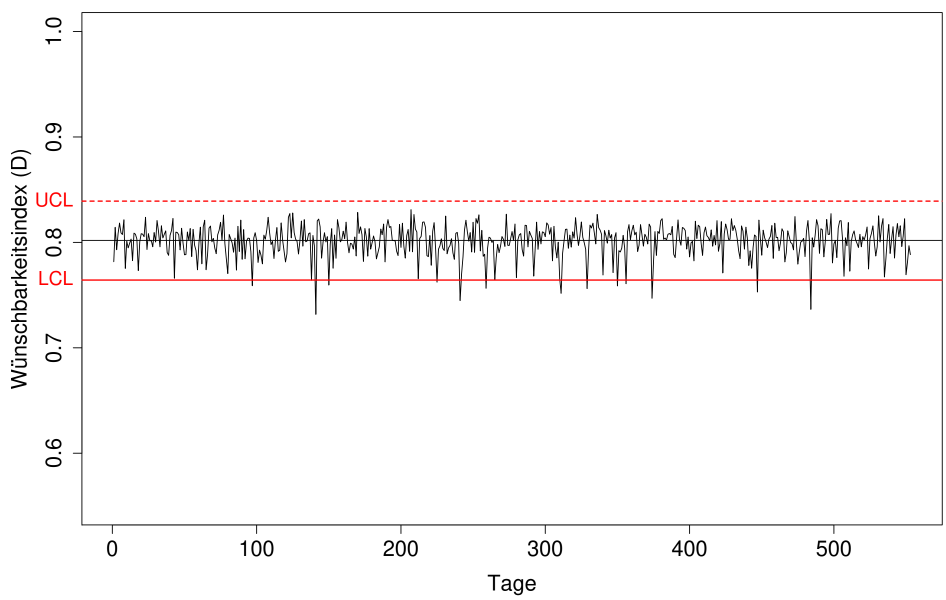



Abbildung 49: Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex auf Basis der approximierten theoretischen Verteilungsfunktion

Wünschbarkeit aufweist. Dies wird dadurch gestützt, dass die fachlichen Experten den Prozessverlauf als sehr gut empfinden. Zum Großteil ist ferner der Prozess statistisch unter Kontrolle, da nahezu alle Werte des Wünschbarkeitsindexes innerhalb der Kontrollgrenzen liegen, was einen insgesamt stabilen Steuerungsprozess impliziert.

An einigen Tagen lassen sich jedoch Ausreißerwerte nach unten beobachten, und zwar an den Beobachtungszeitpunkten 97, 138, 141, 150, 225, 241, 259, 311, 329, 350, 356, 374, 447 und 484. Die Gründe für diese Werte außerhalb der unteren Kontrollgrenze können nun mit Hilfe der in Kapitel 5.3 vorgestellten Ursachenanalyse aufgedeckt werden. Es erfolgt zunächst eine Rückrechnung der unteren Kontrollgrenze für den Wünschbarkeitsindex auf die zugrundeliegenden Wünschbarkeitsfunktionen unter Verwendung der Formeln aus Satz 5.3.1. Dabei muss nur ein Qualitätsmerkmal betrachtet werden, da die rückgerechnete Kontrollgrenze in Abhängigkeit des anderen Qualitätsmerkmals bestimmt wird. Sie weist demnach keinen konstanten Verlauf auf, vielmehr können niedrige Werte der einen Wünschbarkeitsfunktion durch entsprechend hohe Werte der anderen Wünschbarkeitsfunktion wieder kompensiert werden. Außerdem lässt sich erkennen, welches Qualitätsmerkmal primär für den Ausreißerwert des Wünschbarkeitsindexes verantwortlich ist. Verläuft nämlich die Wünschbarkeitsfunktion des kontrollierten Qualitätsmerkmals stabil, die Kontrollgrenze weist hingegen auffällige Unregelmäßigkeiten wie einen Trend, Ausreißerwerte oder eine erhöhte Streuung auf (vgl. dazu auch das Beispiel in Kapitel 5.3.1), kann das andere Qualitätsmerkmal als Verursacher ausgemacht werden.

Im vorliegenden Lagersteuerungsprozess steht die Auslagerung gegenüber der Einlagerung stärker im Fokus, da hier bei zu starker Abweichung von den geforderten Auslagerungszeitpunkten Lieferverzögerungen mit hohen Kosten entstehen können. Daher wird eine Kontrollkarte für die Wünschbarkeitsfunktion der medianen Terminabweichung der Auslagerung erstellt, die in Abbildung 50 oben zu finden ist. Die stärkere Priorität auf die Auslagerung ist hier auch daran zu erkennen, dass die zugehörige Wünschbarkeitsfunktion durchgängig mit geringen Schwankungen sehr hohe Werte nahe Eins aufweist. An den Tagen, an denen Ausreißerwerte des Wünschbarkeitsindexes vorliegen, verläuft die Wünschbarkeitsfunktion der Auslagerung stabil, die untere Kontrollgrenze weist jedoch starke Ausreißer nach oben auf. Die Ursache für die Prozessstörung ist daher primär bei der Einlagerung zu suchen, wo auffällig lange Einlagerungszeiten vorliegen.

Dieser Sachverhalt spiegelt sich ferner auch bei weiterer Rückrechnung der Kontrollgrenze auf das Qualitätsmerkmal selbst wieder. Aufgrund des Minimierungsproblems der einseiti-

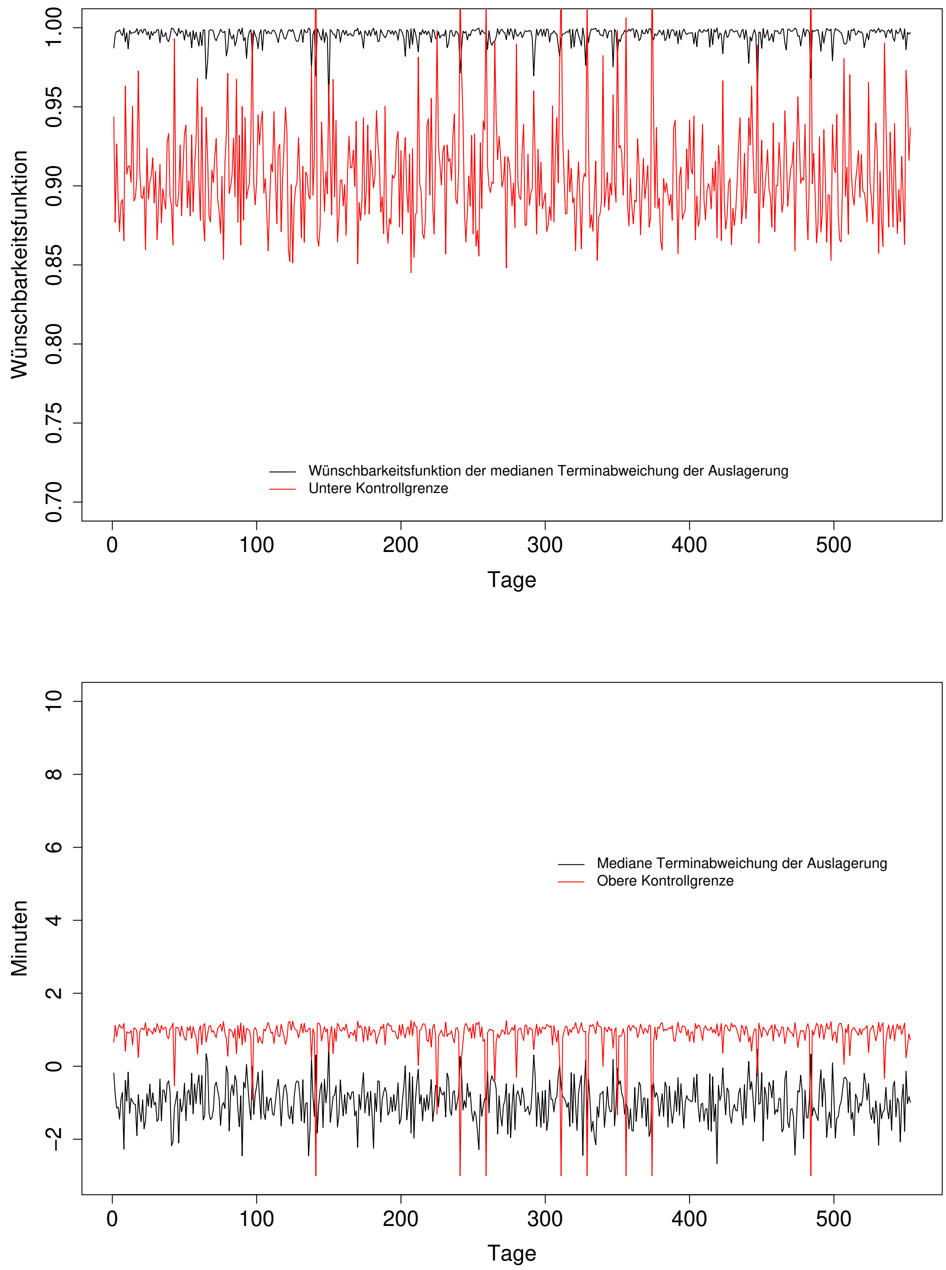



Abbildung 50: Ursachenanalyse für Werte des Wünschbarkeitsindexes unterhalb der unteren Kontrollgrenze gemäß Kapitel 5.3

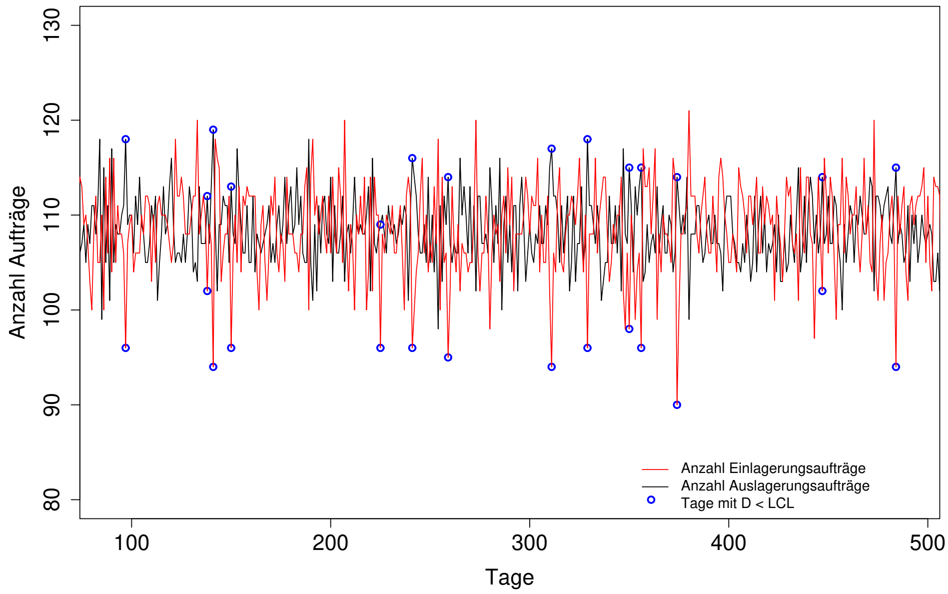



Abbildung 51: Ursachenanalyse für Werte des Wünschbarkeitsindexes unterhalb der unteren Kontrollgrenze anhand der Anzahl der Ein- und Auslagerungsaufträge

gen Wünschbarkeitsfunktion nach Harrington erhält man hier jedoch keine untere, sondern eine obere Kontrollgrenze für die mediane Terminabweichung der Auslagerung (vgl. Satz 5.3.3). Für Werte, bei denen der äußere Logarithmus der angegebenen Formel nicht definiert ist, wurde die obere Kontrollgrenze konstant auf den Wert $-3$ gesetzt. Abbildung 50 unten zeigt die so entstandene Kontrollkarte. Auch hier sind an den kritischen Beobachtungszeitpunkten Ausreißerwerte der Kontrollgrenze nach unten bei unauffälligem Verlauf der Realisationen des Qualitätsmerkmals der Auslagerung zu beobachten.

Bezieht man ferner die Anzahl der pro Tag durchgeführten Ein- und Auslagerungsaufträge mit ein, sieht man, wodurch die verlängerten Einlagerungszeiten entstehen. Die Tage mit Ausreißerwerten des Wünschbarkeitsindexes weisen sämtlich Auslagerspitzen auf (Abbildung 51). Da die Auslagerung im Vergleich zur Einlagerung höhere Priorität besitzt, sind die Multishuttles primär durch die Auslagerung ausgelastet. Es können zum einen nicht so viele Einlagerungen wie üblich durchgeführt werden, zum anderen besitzen die durchgeführten Einlagerungsaufträge höhere Wartezeiten. Dies führt im ersten Schritt zu einer verlängerten Einlagerungszeit und dadurch zu Ausreißerwerten des Wünschbarkeitsindexes nach unten. Die Heuristiken des LVS sollten demnach auf diesen Sachverhalt hin überprüft werden, um die gewünschte Qualität des Lagerprozesses zu erhalten.

# 7 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit zeigt ein neues Anwendungsfeld für den Wünschbarkeitsindex auf. Bisher wird der Wünschbarkeitsindex in der Praxis zur multikriteriellen Qualitätsoptimierung von (Produktions-) Prozessen verwendet. Diese Art der Verwendung legt jedoch nahe, ihn ebenso zur späteren Kontrolle des optimierten Prozesses zu benutzen. Dadurch kann eine Dimensionsreduktion in der statistischen Prozesskontrolle erzielt werden, da im Gegensatz zu den derzeit meist angewendeten separaten univariaten Kontrollkarten lediglich eine Kontrollkarte zur Überwachung der Prozessqualität herangezogen werden muss. Zwar liefern dies auch multivariate Kontrollkarten, hier ist jedoch die Interpretation und insbesondere die Ursachenanalyse von Prozessstörungen problematisch. Für die vorgestellten Kontrollkarten für Wünschbarkeitsindizes konnte eine Methodik entwickelt werden, die konkrete Hilfestellung bei der Ursachenanalyse leistet.

Es werden Urwert- und Extremwertkarten für verschiedene Arten von Wünschbarkeitsfunktionen und Wünschbarkeitsindizes eingeführt. Dabei ist die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes von zentraler Bedeutung, die für ein- und zweiseitige Wünschbarkeitsfunktionen nach Harrington in Kombination mit dem geometrischen Mittelwert oder dem Minimum der Wünschbarkeitsfunktionen als Wünschbarkeitsindex hergeleitet wird.

Im Vergleich zu anderen Kontrollkarten, die nicht speziell auf die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes zugeschnitten sind, zeigen sich die Vorteile von speziellen Kontrollkarten für den Wünschbarkeitsindex deutlich. Kontrollkarten, die von einer Normalverteilung (z.B. Shewhart-Einzelwertkarte oder Shewhart-Extremwertkarte) bzw. von symmetrischen Verteilungsrändern (z.B. Zaunkarte) des Wünschbarkeitsindexes ausgehen, besitzen zumeist extrem hohe Werte der Out-Of-Control-ARL. Dies wird immer problematischer, desto schiefer die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes ist. Des Weiteren wird der beschränkte Wertebereich des Wünschbarkeitsindexes auf das Intervall $(0, 1]$ nicht beachtet, sodass bei relativ hohen Varianzen der Qualitätsmerkmale Kontrollgrenzen außerhalb des Wertebereiches resultieren können.

Eine Kontrollkarte für den Wünschbarkeitsindex wurde in Zusammenarbeit mit dem *Fraunhofer Institut für Materialfluss und Logistik (IML)* in Dortmund zur Kontrolle der (simulierten) Steuerung eines automatischen Multishuttle-Lagers eingesetzt. Hier stand insbesondere im Fokus, ob sich eine termingerechte Auslagerung bei minimaler Einlagerzeit über die Zeit gewährleisten lässt. Dies ist ein neues Einsatzgebiet für den Wünschbarkeitsindex, der in den Bereich der Logistik bisher noch keinen Einzug gehalten hat. Zwar besitzt ein Lagerprozess eine dynamische Struktur, durch eine aggregierte Betrachtung von Tagesdurchschnitten der Qualitätsmerkmale wird jedoch Stabilität in den Qualitätsmerkmalen erreicht, die die globale Beurteilung der Lagerqualität ermöglicht.

Die Arbeit liefert den Einstieg in die Theorie zur Verwendung des Wünschbarkeitsindexes zur Prozesskontrolle. Für eine weitere Forschungsarbeit in diesem Bereich gibt es viele Perspektiven. Zum einen können die hier vorgestellten Kontrollkarten auch für andere Kombinationen von Wünschbarkeitsfunktionen und Wünschbarkeitsindizes konstruiert werden. Hier bietet sich insbesondere die Wünschbarkeitsfunktion nach Derringer an, die in der Praxis starke Verbreitung findet. Im ersten Schritt müsste dazu die resultierende Verteilung des Wünschbarkeitsindexes bestimmt werden.

Des Weiteren können weitere Kontrollkarten für die hier verwendeten Kombinationen von Wünschbarkeitsfunktionen und Wünschbarkeitsindizes hergeleitet werden, insbesondere für den Fall der Verdichtung der Stichprobenwerte des Wünschbarkeitsindexes. In diesem Fall müssen zweispurige Kontrollkarten für die Prozesslage und die Prozessstreuung verwendet werden, da die Verteilung des Wünschbarkeitsindexes keine Unabhängigkeit von Erwartungswert und Varianz aufweist. Durch den beschränkten Wertebereich verkleinert sich die Varianz, wenn der Erwartungswert sich den Wertebereichsgrenzen nähert.

Auch die Lagerverwaltung bzw. allgemein die Logistik als neuer Einsatzbereich für den Wünschbarkeitsindex lässt vielversprechende Forschungsansätze erkennen. Ein zentrales Thema in der Lagerverwaltung stellt beispielsweise neben dem reinen Lagerprozess die Kommissionierung dar. Hier wäre im ersten Schritt eine Aufarbeitung der derzeit benutzten Kennzahlen zur Beurteilung der Kommissionierqualität nötig, um die wichtigsten Qualitätsmerkmale für die Anwendung von Wünschbarkeitsindizes zu selektieren. Durch Gespräche mit Experten des IML wurde des Weiteren ersichtlich, dass neben einer statistischen Prozesskontrolle in dem Bereich der Lagerverwaltung das Ziel in einer effizienten Online-Prozesskontrolle, auch automatische Prozesskontrolle (APC) genannt, besteht. Demzufolge bleibt zu prüfen, ob und in welcher Art und Weise die Methodik der statistischen Prozesskontrolle mit Hilfe des Wünschbarkeitsindexes mit einem APC-Verfahren kombiniert werden könnte.

# Literatur


[AIC00] AICOS Technologies AG (2000): *STAVEX, Software-Referenz*, 4.3 ed., 1997 - 2000

[ALL91] J. A. Alloway, M. Raghavachari (1991): *Control Chart Based on the Hodges-Lehmann-Estimator*, Journal of Quality Technology 23, S. 336 - 347

[ALT02] W. Alt (2002): *Nichtlineare Optimierung*, Vieweg Studium, Braunschweig, Wiesbaden

[AMI95] R. W. Amin, M. R. Reynolds Jr., S. T. Bakir (1995): *Nonparametric Quality Control Charts Based on the Sign Statistic*, Communications in Statistics - Theory and Methods 24 (6), S. 1597 - 1623

[APA96] F. Aparisi (1996): *Hotelling's $T^2$ control chart with adaptive sample sizes*, International Journal of Production Research 34 (10), S. 2853 - 2862

[APA97] F. Aparisi (1997): *Sampling Plans for the Multivariate $T^2$ Control Chart*, Quality Engineering 10 (1), S. 141 - 147

[APA99] F. Aparisi, J. Jabaloyes, A. Carrion (1999): *Statistical Properties of the $|S|$ Multivariate Control Chart*, Communications in Statistics - Theory and Methods 28 (11), S. 2671 - 2686

[AVE01] A. F. Averill, J. M. Ingram, R. F. Nolan (2001): *Optimising the selection of metal cleaning processes or cleaning agents using desirability functions*, Transactions of the Institute of Metal Finishing 79 (4), S. 123 - 128

[BAN00] J. Banks (2000): *Getting Started with AutoMod*, Brooks-PRI Automation, Salt Lake City, Utah

[BAS02] S. Basu, R. Gaur, J. Gomes et al. (2002): *Effect of Seed Culture of Solid-State Bioconversion of Wheat Straw by Phanerochaete chrysosporium for Animal Feed Production*, Journal of Bioscience and Bioengineering 93 (1), S. 25 - 30

[BEA95] N. C. Beaulieu, A. A. Abu-Dayya, P. J. McLane (1995): *Estimating the Distribution of a Sum of Independent Lognormal Random Variables*, IEEE Transactions on Communications 43 (12), S. 2869 - 2873

[BEN02] I. Ben-Gal, J. Bukchin (2002): *The ergonomic design of workstations using virtual manufacturing and response surface methodology*, IEEE Transactions 34 (4), S. 375 - 391

[BRA68] J. V. Bradley (1968): *Distribution-Free Statistical Tests*, Prentice-Hall, New Jersey

[BRI98] J. Brink, G. Peisert (1998): *Lean Design: Assessing Performance, Productibility, Cost and Risk Much Earlier in the Design Process*, Defense Manufacturing Conference 1998

[BUE94] H. Büning, G. Trenkler (1994): *Nichtparametrische statistische Methoden*, 2. Aufl., de Gruyter, Berlin, New York

[CAR01] A. M. Carro, R. A. Lorenzo (2001): *Simultaneous optimization of the solid-phase extraction of organochlorine and organophosphorus pesticides using the desirability function*, Analyst 126, S. 1005 - 1010

[CAS96] E. D. Castillo, D. C. Montgomery, D. R. McCarville (1996): *Modified desirability functions for multiple response optimization*, Journal of Quality Technology 28 (3), S. 337 - 344

[CHA94] L. K. Chan, G. - Y. Li (1994): *A Multivariate Control Chart for Detecting Linear Trends*, Communications in Statistics - Simulation and Computation 23 (4), S. 997 - 1012

[CHA00] S. Chakraborti, P. van der Laan, M. A. van de Wiel (2000): *A Class of Distribution-Free Control Charts*, SPOR-Report 2000 - II, Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands

[CHA01] S. Chakraborti, P. van der Laan, S. T. Bakir (2001): *Nonparametric Control Charts: An Overview and Some Results*, Journal of Quality Technology 33 (3), S. 304 - 315

[CHA04] S. Chakraborti, P. van der Laan, M. A. van de Wiel (2003): *A Class of Distribution-free Control Charts*, Journal of the Royal Statistical Society C 53, S. 1 - 20

[CHO01] Y. - M. Chou, R. L. Mason, J. C. Young (2001): *The Control Chart for Individual Observations from a Multivariate Nonnormal Distribution*, Communications in Statistics - Theory and Methods 30 (8/9), S. 1937 - 1950

[CHU92] M. Chua, D. C. Montgomery (1992): *Investigation and Characterization of a Control Scheme for Multivariate Total Quality Control*, Quality and Reliability Engineering International 8 (6), S. 37 - 44

[DER80] G. C. Derringer, D. Suich (1980): *Simultaneous optimization of several response variables*, Journal of Quality Technology 12 (4), S. 214 - 219

[DER94] G. C. Derringer (1994): *A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties*, Quality Progress 27 (6), S. 51 - 58

[DIL98] C. Dilling (1998): *Entwicklung eines Kennzahlensystems für die Lagerhaltung*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, Fakultät Maschinenbau

[FEL01] C. J. Feltz, J. - J. Horng Shiau (2001): *Statistical Process Monitoring Using an Empirical Bayes Multivariate Control Chart*, Quality and Reliability Engineering International 17, S. 119 - 124

[FUL98] D. Fuller, W. Scherer (1998): *The Desirability Function: Underlying Assumptions and Application Implications*, IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics 4, S. 4016 - 4021

[GAT72] P. E. Gatzer, R. C. McMillan (1972): *The Use of Experimental Design and Computerized Data Analysis in Elastomer Development Studies*, Division of Rubber Chemistry, American Chemical Society Fall Meeting, Paper No. 6, Cincinnati, Ohio, October 3 - 6, 1972

[GLO90] F. Glover (1990): *Taboo Search: A Tutorial*, Interfaces 20 (4), S. 74 - 94

[GOH96] W. Gohout (1996): *Prozeßanalyse und statistische Prozeßregelung*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen

[GOL89] D. E. Goldberg (1989): *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, Bonn, Reading (Mass.) u.a.

[HAR65] J. Harrington (1965): *The desirability function*, Industrial Quality Control 21 (10), S. 494 - 498

[HAR94] M. J. Harry (1994): *The Vision of Six Sigma: A Roadmap for Breakthrough*, Phoenix: Sigma Pubishing Company

[HAR99] J. Hartung (1999): *Statistik*, 12. Aufl., R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

[HAY94] A. J. Hayter, K. - L. Tsui (1994): *Identification and Quantification in Multivariate Quality Control Problems*, Journal of Quality Technology 26 (3), S. 197 - 208

[HEN92] M. M. Hendriks, J. H. deBoer, A. K. Smilde, D. A. Doornbos (1992): *Multicriteria Decision making*, Chemometrics and intelligent laboratory systems 16, S. 175 - 191

[HEP98] K. Heptner (1998): *Kennzahlen für Distributionszentren*, Logistik Heute 9-98, S. 57 - 58

[HOL89] B. Holland, M. Ahsanullah (1989): *Further Results on the Distribution of Meinhold and Singpurwalla*, The American Statistician 43 (4), S. 216 - 219

[HOT47] H. Hotelling (1947): *Multivariate Quality Control*, Techniques of Statistical Analysis, ed.: Eisenhart, Hastay, Wallis; McGraw-Hill, New-York

[IHA96] R. Ihaka, R. Gentleman (1996): *R: A language for data analysis and graphics*, Journal of Computational and Graphical Statistics 5, S. 299 - 314

[IML02] Fraunhofer Institut für Materialfluss und Logistik (IML) (2002): *Multishuttle*, Presseinformation September 2002

[JAN97] G. J. Janacek, S. E. Meikle (1997): *Control Charts Based on Medians*, The Statistician 46, S. 19 - 31

[JAU02] L. Jaupi (2002): *Multivariate Control Charts for Complex Processes*, in: C. Lauro, J. Antoch, V. E. Vinzi, G. Saporta (2002): Multivariate Total Quality Control, Foundation and Recent Advances, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, S. 125 - 136

[JIM96] M. Jimidar, B. Bourguignon, D. L. Massart (1996): *Application of Derringer's desirability function for the selection of optimum separation conditions in capillary zone electrophoresis*, Journal of Chromatography A 740, S. 109 - 117

[JOH94] N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan (1994): *Continuous Univariate Distributions, Volume 1*, 2nd ed., Wiley, New York

[JUE89] R. Jünemann (1989): *Materialfluß und Logistik*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

[JUE00] R. Jünemann, T. Schmidt (2000): *Materialflußsysteme*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York

[KIM00] K. - J. Kim, D. K. J. Lin (2000): *Simultaneous optimization of mechanical properties of steel by maximizing desirability functions*, Applied Statistics 49 (3), S. 311 - 326

[KLA01] P. Klaus, N. Lubecki (2001): *Unerschlossene Potenziale auf dem Lager vorhanden*, DVZ 72, S. 12 - 13

[KOR02] E. S. Korakianithi, D. M. Rekkas, P. P. Dallas (2002): *Use of a $3^3$ factorial design and the desirability function for the characterization and optimization of pelletization process*, STP Pharma Sciences 12 (3), S. 191 - 197

[KRU03] T. Krupp, A. Hofmann (2003): *Kostentransparenz durch Benchmarking*, VDMA Nachrichten 04·03, S. 55 - 56

[LEO61] F. C. Leone, L. S. Nelson, R. B. Nottingham (1961): *The Folded Normal Distribution*, Technometrics 3 (4), S. 543 - 562

[LID95] J. W. Liddy, P. Goik, W. Taam (1995): *Use of Desirability Functions to Determine Operating Windows for New Product Designs*, Quality Engineering 7 (2), S. 267 - 276

[LIU95] R. Y. Liu (1995): *Control Charts for Multivariate Processes*, Journal of the American Statistical Association 90 (432), S. 1380 - 1387

[LIU02] C. Liu, Y. L. Yao (2002): *Optimal and Robust Design of Laser Forming Processes*, http://www.columbia.edu/~yly1/Liu1text.pdf, 14.10.2002

[MAS95] R. Mason, N. D. Tracy, J. C. Young (1995): *Decomposition of $T^2$ for Multivariate Control Chart Interpretation*, Journal of Quality Technology 27 (2), S. 99 - 108

[MAS97] R. Mason, N. D. Tracy, J. C. Young (1997): *A Practical Approach for Interpreting Multivariate $T^2$ Control Chart Signals*, Journal of Quality Technology 29 (4), S. 396 - 406

[MAT00] MATLAB (2000): *Optimization Toolbox, User's Guide*, The MathWorks Inc.

[MCF95] R. C. McFarlane, D.W. Bacon (1995): *Empirical Strategies for open-loop on-line optimization*, Canadian Journal of Chemical Engineering 67 (4), S. 665 - 677

[MEI87] R. J. Meinhold, N. D. Singpurwalla (1987): *A Kalman-Filter Smoothing Approach for Extrapolations in Certain Dose-Response, Damage-Assessment, and Accelerated-Life-Testing Studies*, The American Statistician 41 (2), S. 101 - 106

[MIT93] H. - J. Mittag (1993): *Qualitätsregelkarten*, Carl Hanser Verlag, München, Wien

[MIT98] M. Mitchell (1998): *An Introduction to Genetic Algorithms*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts

[MON91] D. C. Montgomery (1991): *Introduction to statistical quality control*, 2nd ed., Wiley, New York

[MON01] D. C. Montgomery (2001): *Introduction to statistical quality control*, 4th ed., Wiley, New York

[MOO74] A. M. Mood, F. A. Graybill, D. C. Boes (1974): *Introduction to the theory of statistics*, 3rd ed., McGraw-Hill, Singapore

[NIA02] N. Niang (2002): *Multidimensional methods for statistical process control: Some contributions to robust statistics*, in: C. Lauro, J. Antoch, V. E. Vinzi, G. Saporta (2002): Multivariate Total Quality Control, Foundation and Recent Advances, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, S. 137-162

[NOB00] R. B. Noble (2000): *A Flexible and Differentiable Desirability Function*, Workshop on Response Surface: Theory and Application, Blacksburg, April 19 and 20, 2002

[OAK91] R. Oakes (1991): *The Log-Log-Normal Distribution*, Master of Science Paper, Department of Statistics, University of South Carolina, USA

[OUT98] K. Outinen, H. Haario, P. Vuorela et al. (1998): *Optimization of selectivity in high-performance liquid chromatography using desirability functions and mixture designs according to PRISMA*, European Journal of Pharmaceutical Sciences 6, S. 197 - 205

[PAP00] N. Papila, W. Shyy, L. Griffin et al. (2000): *Preliminary Design Optimization For A Supersonic Turbine For Rocket Propulsion*, 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Paper No.2000-3242, Huntsville, AL (2000), http://www.aero.ufl.edu/~cfdweb/aiaa_nilay2.pdf, 14.10.2002

[PAR87] C. Park, M. R. Reynolds (1987): *Nonparametric Procedures for Monitoring a Location Parameter Based on Linear Placement Statistics*, Sequential Analysis 6, S. 303 - 323

[PAR02] P. A. Parker, R. DeLoach (2002): *Structural Optimization of a Force Balance Using a Computational Experiment Design (Invited)*, 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Nevada, AIAA-2002-0540, http://techreports.larc.nasa.gov/ltrs//PDF/2002/aiaa/NASA-aiaa-2002-0540.pdf, 14.10.2002 Inc., New York, Basel, HongKong

[RIB01] C. Ribardo, T. T. Allen, J. Schmitz (2001): *An Alternative Desirability Function for Achieving Six Sigma Quality*, http://www-personal.engin.umich.edu/~shihang-/informs_qsr/charles.pdf, 14.10.2002

[RIN89] H. Rinne, H. - J. Mittag (1989): *Statistische Methoden der Qualitätssicherung*, Carl Hanser Verlag, München, Wien

[RUN96] G. C. Runger (1996): *Projections and the $U^2$ Multivariate Control Chart*, Journal of Quality Technology 28 (3), S. 313

[RYA01] T. P. Ryan, B. J. Faddy (2001): *The Effect of Non-Normality on the Performance of CUSUM Procedures*, in: H. - J. Lenz, P. - T. Wilrich (2001): Frontiers in Statistical Quality Control 6, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, S. 176 - 193

[SAL02] P. Salomon, P. Sibani, R. Frost (2002): *Facts, Conjectures, and Improvements for Simulated Annealing*, SIAM monographs on mathematical modeling and computation, Philadelphia

[SCE02] G. Scepi (2002): *Parametric and non parametric multivariate quality control charts*, in: C. Lauro, J. Antoch, V. E. Vinzi, G. Saporta (2002): Multivariate Total Quality Control, Foundation and Recent Advances, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, S. 163 - 190

[SCH82] S. C. Schwartz, Y. S. Yeh (1982): *On the Distribution Function and Moments of Power Sums With Log-Normal Components*, The Bell System Technical Journal 61 (7), S. 1441 - 1462

[SCH99] R. Schlittgen, H. J. Streitberg (1999): *Zeitreihenanalyse*, 8. Aufl., R. Oldenbourg Verlag, München, Wien

[SCH00] W. Schmid, A. Steland (2000): *Sequential Control of Non-Stationary Processes by Nonparametric Kernel Control Charts*, Allgemeines statistisches Archiv 84, S. 315 - 336

[SHE31] W. A. Shewhart (1931): *Economic Control of Quality of Manufactured Product*, Van Nostrand, New York

[SHO01] H. Shore (2001): *Process Control for Non-Normal Populations Based on an Inverse Normalizing Transformation*, in: H. - J. Lenz, P. - T. Wilrich (2001): Frontiers in Statistical Quality Control 6, Physica-Verlag, Heidelberg, New York, S. 194 - 206

[SHY99] W. Shyy, P. K. Tucker, R. Vaidyanathan (1999): *Response Surface and Neural Network Techniques for Rocket Engine Injector Optimization*, AIAA/SAE/ASME/ASEE 35th Joint

Propulsion Conference, Paper No. 99-2455, June 20-24, http://www.aero.ufl.edu/~cfdweb/aiaa_raj1.pdf, 14.10.2002

[SHY00] W. Shyy, N. Papila, P. K. Tucker et al. (2000): *Global Design Optimization For Fluid Machinery Applications*, 2nd International Symposium on Fluid Machinery and Fluid Engineering (2nd ISFMFE), Invited Lecture, Beijing, China, http://www.aero.ufl.edu/~cfdweb/isfmfe.pdf, 14.10.2002

[SHY01] W. Shyy, N. Papila, R. Vaidyanathan et al. (2001): *Global Design Optimization for Aerodynamics and Rocket Propulsion Components*, Progress in Aerospace Sciences 37, S. 59 - 118, http://www.aero.ufl.edu/~cfdweb/Prog_Opt.pdf, 22.10.2002

[SLI01] S. B. Slimane (2001): *Bounds on the Distribution of a Sum of Independent Lognormal Random Variables*, IEEE Transactions on Communications 49 (6), S. 975 - 978

[SPIR98] F. A. Spiring, S. W. Cheng (1998): *An alternative variables control chart: The Univariate and Multivariate Case*, Statistica Sinica 8, S. 273 - 287

[STE99] D. Steuer (1999): *Multi-Criteria-Optimisation and Desirability Indices*, Technical Report 20/99, Universität Dortmund, FB Statistik

[STE00] D. Steuer (2000): *An Improved optimisation procedure for Desirability Indices*, Technical Report 27/00, Universität Dortmund, FB Statistik

[STE02] A. Steland (2002): *Nonparametric Monitoring of Financial Time Series by Jump-Preserving Control Charts*, Statistical Papers 43, S. 401 - 422

[STO02] Z. G. Stoumbus, J. H. Sullivan (2002): *Robustness to Non-normality of the Multivariate EWMA Control Chart*, Journal of Quality Technology 34 (3), S. 260 - 276

[SUL02] J. H. Sullivan (2002): *A Self-Starting Control Chart for Multivariate Individual Observations*, Technometrics 44 (1), S. 24 - 33

[TEN99] M. ten Hompel (1999): *Lagerverwaltungssysteme*, GamBit GmbH, Dortmund

[TRA01] A. Trautmann (2001): *Entwurf eines kennzahlengestützten Optimierungsmodells für objektorientierte Lagerverwaltungssysteme*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, Fakultät Maschinenbau

[TUC98] P. K. Tucker, W. Shyy, J. G. Sloan (1998): *An Integrated Design Optimization Methodology for Rocket Engine Injectors*, 34 th AIAA / ASME / SAE / ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, July 13 - 15, 1998

[UHL82] W. Uhlmann (1982): *Statistische Qualitätskontrolle*, 2. Aufl., B. G. Teubner, Stuttgart

[WEB1] *NAG: Numerical Algorithms Group Fortran Library*, http://www.nag.co.uk, 20.2.2003

[WEB2] *Optimization Software Guide*, http://plato.la.asu.edu/guide.html, 20.2.2003

[WEB3] S. S. Prabhu, R. N. Rodriguez, R. D. Tobias: *The New ADX Interface for Design and Analysis of Experiments*, http://www2.sas.com/proceedings/sugi22/STATS/PAPER271.PDF, 14.10.2002

[WEB4] *Leitsätze für Fruchtsäfte*, http://www.verbraucherministerium.de/verbraucher/themen/verbr/lmbuch/ls-fruchtsaefte.pdf, 8.5.2003

[WEB5] *Design-Expert*, www.statease.com, 20.11.2002

[WEB6] *NASA Langley Research Center*, http://www.larc.nasa.gov/, 3.2.2003

[WEB7] *Start!Benchmarking - Umfang der Auswertung*, http://www.start-benchmarking.de/auswertung/index.htm, 10.7.2003

[WEB95] J. Weber (1995): *Logistik-Controlling*, Schriftenreihe der Wissenschaftlichen Hochschule für Unternehmensführung Koblenz: Management (1), Schäffer-Poeschel, Stuttgart

[WEI99] C. Weihs, J. Jessenberger (1999): *Statistische Methoden zur Qualitätssicherung und -optimierung*, Wiley-VCH, Weinheim

[WIL96] T. R. Willemain, G. C. Runger (1996): *Designing Control Charts Using an Empirical Reference Distribution*, Journal of Quality Technology 28, S. 31 - 38

[WU00] W. Wu, G. - H. Cui, B. Lu (2000): *Optimization of multiple variables: application of central composite design and overall desirability*, Chinese Pharmaceutical Journal - Beijing - 35 (8), S. 530 - 532

[YOU91] D. L. Young, J. Teplik, N. T. Tracht, A. R. Alvarez (1991): *Application of statistical design and response surface methods to computer-aided VLSI device design - II: Desirability functions and Taguchi methods*, IEEE Transactions on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems 10 (1), S. 103 - 115

# Anhang

## A Wünschbarkeitsindizes in der Praxis - Überblick

| **Anwendungsfeld** | **Thema** | **Art der WF** | **Optimierung WI** | **Literatur** |
|---|---|---|---|---|
| Arbeitsplatzgestaltung | Optimierung der Arbeitsplatzergonomie in einem Fruchtverpackungsprozess. Ansatz zur simultanen Optimierung ökonomischer (z.B. Taktzeit) und ergonomischer (z.B. Körperhaltung) Aspekte in der Arbeitsplatzgestaltung. | Normalisierung | Numerische Optimierung (Nelder-Mead-Verfahren) | [BEN02] |
| Bioverfahrenstechnik | Optimierung der Biokonversion von Weizenstroh hinsichtlich der Nutzbarkeit als Futtermittel. Nebenprodukte aus der Produktion nachwachsender Rohstoffe sollen über optimal eingestellte chemische Prozesse (z.B. maximaler Rohproteingehalt) nutzbar gemacht werden. | Derringer | Konturplots | [BAS02] |
| Chemie | Simultane Optimierung der Festphasenextraktion (FE) von Organophosphor (OP)- und chlororganischen (CP) Pestiziden. Die FE ist eine Methode zur Reinigung und Aufkonzentrierung von Proben zu Analysezwecken mit dem Ziel der Maximierung der Wiederfindungsraten aller 9 OP und 18 CP. | Derringer | Oberflächenplots | [CAR01] |
| Chemie | Optimierung der Trennvoraussetzungen in der Kapillarzonenelektrophorese (KE). Die KE trennt Moleküle (hier Metallionen) gemäß ihrer Unterschiede im Masse-Ladungs-Verhältnis auf, wobei u. A. ein maximaler Trennungsfaktor bei minimaler Analysezeit angestrebt wird. | Derringer | Konturplots | [JIM96] |
| Chemie | Optimierung der Präparierung von Mikrokugeln. Metallhaltige Mikrokugeln, dessen Charakteristika (z.B. mittlerer Durchmesser) optimiert werden, eignen sich z.B. dank Magnetisierbarkeit für Sortierprozesse in (bio-) chemischen Anwendungen. | Harrington | Response Surface Analyse | [WU00] |

| **Anwendungsfeld** | **Thema** | **Art der WF** | **Optimierung WI** | **Literatur** |
|---|---|---|---|---|
| Chemie | Bestimmung des geeignetsten Lösungsmittels zur Reinigung von feinmechanischen Metallkomponenten für sauerstoffangereichte Atmosphären. Die Ultraschallreinigung ist ein Verfahren, mit dem höchste Reinheitsgrade erreicht werden können, die unter Beachtung der Umweltverträglichkeit maximiert werden sollen. | Harrington | Auswahl des Lösungsmittels mit höchstem WI | [AVE01] |
| Elektrotechnik | Optimierung des Aufbaus eines NPN-Transistors. Transistoren werden als lineare Stromverstärker oder als Schalter verwendet, deren Qualität z.B. vom Kollektor- und Basiswiderstand abhängt. | Derringer | Gittersuche, Konturplots, Sensitivitätsanalyse | [YOU91] |
| Fertigungstechnik | Optimierung einer Schlauchverbinderfertigung. Schlauchverbinder in der Automobilindustrie sollen eine möglichst einfache Installation bei verlässlicher Verbindung gewährleisten. | Derringer (modifiziert) | Konturplots | [LID95] |
| Luft- und Raumfahrt | Optimierung des Einspritzsystems von Raketentriebwerken. Erzielt werden soll eine maximale Energieausbeute unter Minimierung des Wärmeflusses an der Brennkammerwand. | Derringer | Numerische Optimierung (gradientenbasiert), Solver (Excel) | [SHY99], [SHY00], [TUC98] |
| Luft- und Raumfahrt | Strukturelle Optimierung einer Kräftewaage für Windkanaltests. Maximierung der Messsensitivität bei gleichzeitiger Minimierung der mechanischen Spannungen und strukturellen Verfälschung (siehe Kap. 3.2). | Derringer | Überlagerte 2D-Konturplots | [PAR02] |
| Luft- und Raumfahrt | Optimierung von Überschallraketenturbinen. Das Optimierungsziel besteht in der Minimierung des Gewichtes sowie in der Maximierung der Turbineneffizienz zur Steigerung der Raketennutzlast. | Derringer | Response Surface Analyse, Solver (Excel) | [SHY01], [PAP00] |

| **Anwendungsfeld** | **Thema** | **Art der WF** | **Optimierung WI** | **Literatur** |
|---|---|---|---|---|
| Pharmazie | Optimierung des Pelletisierungsprozesses bei peroralen Arzneiformen. Durch eine Fluid-Bed-Rotorgranulierung sollen möglichst kugelförmige Pellets von identischer Größe erzeugt werden. | Derringer | Numerische Optimierung (Design-Expert) | [KOR02] |
| Produktentwicklung | Bestimmung eines Kundenzufriedenheitsindexes (KI) innerhalb der Wert-Analyse eines Produktentwicklungsprozesses (PP). Diese beinhaltet einen integrierten Ansatz zur Erfassung der Leistung, der Produzierbarkeit, der Kosten und Risiken sowie der Kundenzufriedenheit zur frühzeitigen Optimierung des PPs. | Derringer | keine Angabe | [BRI98] |
| Umformtechnik | Optimierung des Laserformungsprozesses (LF) von quadratischen und kreisförmigen Stahlblechen. | Derringer | Numerische Optimierung (Nelder-Mead-Verfahren) | [LIU02] |

Tabelle 17: Wünschbarkeitsindizes in der Praxis - Übersicht, WF: Wünschbarkeitsfunktion, WI: Wünschbarkeitsindex

# B Verteilungsfreie univariate Kontrollkarten

| **Kontrollkarte** | **Charakteristika** | **Art** | **Literatur** |
|---|---|---|---|
| KK basierend auf Vorzeichentest für den Median | Median $z_0$ vorgegeben, Teststatistik: $\sharp y_i < z_0$ | PL, OG | [UHL82], S. 228 f. |
| KK basierend auf verengten Lehren | Modifikation des Vorzeichentests, Werte $a, b$ vorgegeben, $K := \sharp y_i < a$, $G := \sharp y_i > b$, Teststatistik: G - K | PL, OG | [UHL82], S. 229 ff. |
| KK basierend auf Iterationen unter- bzw. oberhalb des Medians | Teststatistik: $\sharp$ Iterationen pro Stichprobe bezogen auf vorgegebenen Wert des Medians | PL, OG | [UHL82], S. 232 ff. |
| KK basierend auf Iterationen bei den ersten Differenzen | Kein vorgegebener Wert für die Prozesslage, Teststatistik: $\sharp$ Iterationen der ersten Differenzen der Stichprobenwerte | PL, OG | [UHL82], S. 238 ff. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| KK basierend auf "Linear placement"-Statistiken | Kein Wert für die Prozesslage vorgegeben. Mit Hilfe von "Linear placement"-Statistiken werden aktuelle Stichproben mit einer großen Referenzstichprobe verglichen. | PL, OG | [PAR87] |
| KK für den Median einer symmetrischen Verteilung | Basiert auf verteilungsfreien Konfidenzintervallen für den Median (Hodges-Lehmann-Schätzer) | PL, OG | [ALL91] |
| KK für den Median | Basiert auf modifiziertem Vorzeichentest, Median $z_0$ vorgegeben. Teststatistik: $\sum_{i=1}^{g} signum(y_i - z_0)$ | PL, OG | [AMI95] |
| Urwertkarte | Kontrollgrenzen über Ordnungsstatistiken einer großen Referenzstichprobe, aber keine eindeutigen Regeln zur Aufstellung | PL, OG | [WIL96] |
| KK für den Median einer zukünftigen Stichprobe | Kontrollgrenzen über Ordnungsstatistiken einer großen Referenzstichprobe, Teststatistik: Stichprobenmedian | PL, OG | [JAN97] |
| Zaunkarte | Quantilbasierte Urwertkarte, geht auf die Theorie der Box-Plots zurück. | Gesamte Verteilung, OG | [WEI99], S. 303 f. |
| Prezedenzkarte | Mit Hilfe von Prezedenzstatistiken einer Referenzstichprobe werden Ordnungsstatistiken von zukünftigen Stichproben geschätzt | PL, OG | [CHA00], [CHA04] |
| KK für die Prozessvariabilität basierend auf verengten Lehren | Modifikation des Vorzeichentests, Werte $a, b$ vorgegeben, $K := \sharp y_i < a$, $G := \sharp y_i > b$, Teststatistik: G + K | PS, OG | [UHL82], S. 229 ff. |
| KK für die Prozessvariabilität | Verwendung des "Interquartile Range Tests", Quartile werden über eine Referenzstichprobe bestimmt, Teststatistik: $\sharp y_i < Q_{0.25} + \sharp y_i > Q_{0.75}$ | PS, OG | [AMI95] |

Tabelle 18: Univariate verteilungsfreie Kontrollkarten (KK);
OG / MG: Ohne / Mit Gedächtnis; PL / PS: KK für die Prozesslage / Prozessstreuung, $\sharp$: Anzahl

# C Multivariate Kontrollkarten

| **Multivariate KK für die Prozesslage** | **Erläuterungen / Literatur** |
|---|---|
| $T^2$-Karte | Multivariate Verallgemeinerung der Mittelwertkarte bzw. der Einzelwertkarte (vgl. Kapitel 4.2). Änderungen in Prozesslage und Prozessstreuung sind jedoch nicht unterscheidbar ([MON01], S. 512 ff.). |
| <u>Modifikationen der $T^2$-Karte:</u><br>- Für Hauptkomponenten | Dimensionsreduktion durch Auswahl der ersten Hauptkomponenten, die ca. 95 % der Gesamtvariation der Daten ausmachen. Betrachtet wird neben der $T^2$- Karte eine Karte für den Näherungsfehler der Hauptkomponenten bzgl. neuer Beobachtungen ([WEI99], S. 336 ff.). |
| - Robuste $T^2$-Karte | Die klassische Schätzung der Parameter der Normalverteilung in der Analysephase des Prozesses führt bei großen Erwartungswertverschiebungen in dieser Phase zu einer Aufblähung der $T^2$-Statistik. Bei gruppierten Daten wird der Erwartungswert robust geschätzt, bei Einzelwerten zusätzlich auch die lokale Varianz ([NIA02]). |
| - Für nichtnormalverteilte Daten | Selbst geringe Abweichungen von der Normalverteilungsannahme bei der $T^2$- Einzelwertkarte haben eine starke Verringerung der In-Control-ARL zur Folge, falsche Alarme werden somit häufiger ([STO02]). Gleichzeitig erhöht sich die Out-Of-Control-ARL. Für die Kontrollphase des Prozesses wird über Kernschätzungen die exakte Verteilung der Daten approximiert, es werden jedoch recht hohe Stichprobengrößen benötigt ([CHO01]). |
| - Mit adaptiven Stichprobengrößen | Durch adaptive Stichprobengrößen können geringe und schleichende Prozessschwankungen schneller aufgedeckt werden. Es wird bei einfacherer Handhabbarkeit eine ähnliche Güte wie bei Anwendung der MCUSUM-Karte erzielt ([APA96], [APA97]). |
| - Für Prozessinnovationen | Selbststartende Kontrollkarte für Fälle, in denen die Prozessparameter nicht bekannt, aber Gründe gegen eine Analysephase sprechen (z.B. sehr kostspielige Ausschussproduktion). Die $T^2$-Statistik wird für die Abweichung der aktuellen Beobachtung von dem Durchschnitt aller vergangenen Beobachtungen gebildet ([SUL02]). |
| - Für Influenzfunktion des Mittelwertes | Die Influenzfunktion gibt an, wie sich infinitesimale Änderungen in der aktuellen Beobachtung auf den Mittelwert auswirken. Für diese Funktion wird die Kontrollkarte erstellt ([JAU02]). |

| | |
|---|---|
| MEWMA-Karte | Multivariate Verallgemeinerung der EWMA-Karte (vgl. Kapitel 4.2), basierend auf exponentieller Glättung der Beobachtungsvektoren. Die UCL kann durch Vorgabe der In-Control-ARL bestimmt werden ([MON01], S. 526 ff.). |
| Modifikationen der MEWMA-Karte:<br>- Modifizierte MEWMA-Karte | Die exponentielle Glättung wird hier nicht für die Beobachtungsvektoren, sondern für die jeweiligen $T^2$-Statistiken durchgeführt. Die Kontrollgrenzen werden unter Verwendung der "Six-Sigma-Methodik" über die ersten beiden Momente der resultierenden Verteilung approximiert ([NIA02]). |
| - für Prozessinnovationen | Gleicher Hintergrund wie bei der entsprechenden $T^2$-Karte. Für die Abweichung der aktuellen Beobachtung von dem Durchschnitt aller vergangenen Beobachtungen wird die MEWMA-Teststatistik berechnet ([SUL02]). |
| - Empirische Bayes-EWMA-Karte | Die aktuelle Prozesslage wird geschätzt durch die a-priori-Verteilung des Erwartungswertes und die aktuelle Beobachtung. Für diesen Schätzer wird eine MEWMA -Kontrollkarte erstellt ([FEL01]). |
| MUWMA-Karte | Für eine festgelegte Anzahl zurückliegender Beobachtungen wird der Durchschnitt über die zugehörigen $T^2$-Statistiken gebildet, und mit Hilfe der ersten beiden Momente dieser Verteilung und der "Six-Sigma-Methodik" werden die Kontrollgrenzen bestimmt ([NIA02]). |
| MCUSUM-Karte | Multivariate Verallgemeinerung der CUSUM-Karte aus Kapitel 4.2 ([SCE02]). |
| NP-S-Karte | Nichtparametrische Version einer MCUSUM-Karte, basierend auf einem Ranking der Stichprobendaten anhand ihrer Datentiefe ("Simplicial Depth") ([LIU95]). |
| $U^2$-Karte | Sensitiv für Erwartungswertverschiebungen, die nur Teilmengen der $k$ Qualitätsmerkmale betreffen. Betrachtet wird die Länge der Projektion des standardisierten Mittelwertsvektors entlang einer Orthonormalbasis (z.B. Hauptkomponenten) eines Unterraumes des $\mathbb{R}^k$ ([RUN96]). |
| Hauptkomponenten-Verlaufs-Karte<br>("Trajectory Plot") | Paarweise Scatterplots der Hauptkomponenten, wobei eine Kontrollellipse anhand einer Referenzstichprobe erstellt wird. So lassen sich Verschiebungen in Richtung der Hauptkomponenten erkennen [MON01], S. 540 f.). |

| **Multivariate KK für die Prozessstreuung** | **Erläuterungen / Literatur** |
|---|---|
| $S^2$-Karte | Verallgemeinerung der univariaten S-Karte aus Kapitel 4.2. Für die generalisierte Varianz (Determinante der Kovarianzmatrix) wird eine Kontrollkarte entweder mit Hilfe der "Six-Sigma-Methodik" ([MON01], S. 532) oder über die exakte Verteilung bestimmt ([APA99]). |
| Influenzfunktions-Varianz-Karte | Kontrollkarte für die Influenzfunktion der Eigenwerte der Kovarianzmatrix. So wird der Effekt einer infinitesimalen Änderung der aktuellen Beobachtung auf die Eigenwerte gemessen ([JAU02]). |

| **Multivariate KK für Prozesslage und Prozessstreuung** | **Erläuterungen / Literatur** |
|---|---|
| NP-Q-Karte | Nichtparametrische Kontrollkarte, basierend auf einem Ranking der Stichprobendaten anhand ihrer Datentiefe ([LIU02]. |
| T-MSE-$S^2$-Karte | Quadratische Mittelwertabweichungen werden zusammen mit dem MSE und spezifischen Kontrollgrenzen in einer Kontrollkarte abgetragen. Die empirische Varianz $S^2$ fungiert als Warngrenze für den MSE. Unterschiedliche Gewichtungen der Qualitätsmerkmale sind möglich ([SPIR98]). |

| **Multivariate KK für spezielle Fragestellungen** | **Erläuterungen / Literatur** |
|---|---|
| Influenzfunktions-Kovarianz-Karte | Dient zur Aufdeckung von Änderungen in der Korrelationsstruktur der Qualitätsmerkmale. Dazu wird die Influenzfunktion der Eigenvektoren der Kovarianzmatrix herangezogen ([JAU02]). |
| M-Karte für lineare Trends | Mittels "Projection Pursuit"-Methoden, d.h. mit explorativen Projektionen der Daten in niedrigdimensionalere Räume, können lineare Trends in den Daten aufgedeckt werden ([CHA94]). |

Tabelle 19: Multivariate Kontrollkarten (KK), Übersicht und kurze Erläuterungen