UNIVERSITÄT DORTMUND

Mitteilungen aus dem Bereich
der Mechanik und Statik

Thomas Rauscher

Modellierung des reibungsbehafteten Rollkontakts elasto-plastischer metallischer Festkörper

Mitteilungen Nr. 1/00

Modellierung des reibungsbehafteten Rollkontakts elasto-plastischer metallischer Festkörper

Von der Fakultät Bauwesen der

Universität Dortmund

zur Erlangung der Würde eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Thomas Rauscher M.S. (USA)

Dortmund 1999

Vorsitzender der Prüfungskommission	Prof. Dr.oec.publ. E. Leimböck
Erster Gutachter	Prof. Dr. H. Obrecht (Ph. D.)
Zweiter Gutachter	Prof. Dr.-Ing. K. Thermann
weiteres Mitglied der Kommission	Prof. Dr.-Ing. A. Hettler
Tag der Einreichung:	20. Januar 1998
Tag der mündlichen Prüfung:	24. November 1999

Herausgeber
Prof. Dr. Hans Obrecht (Ph.D.)
Lehrstuhl für Baumechanik-Statik
Universität Dortmund
44221 Dortmund
Tel. (0231) 7552536
Fax (0231) 7552532

Organisation und Verwaltung
Priv.-Doz. Dr.-Ing. Michael Brünig
Lehrstuhl für Baumechanik-Statik
Universität Dortmund
44221 Dortmund
Tel. (0231) 7554682
Fax (0231) 7552532

xxxx2000xx

Thomas Rauscher
Oskar-Wachtel-Weg 19
44149 Dortmund

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein stationärer Walzprozess eines elastisch-plastischen Körpers mit Materialverfestigung als unilateraler Rollkontakt unter Berücksichtigung trockener Festkörperreibung formuliert.

Die mathematische Beschreibung des stationären Rollkontakts führt auf die Minimierung eines nichtlinearen Variationsfunktionals. Im Rahmen der Active-Set-Strategie wird ein zweidimensionaler Rollkontakt-Algorithmus entwickelt, in den ein Coulomb'sches Gleitreibungsmodell integriert ist. Unter Anwendung einer Penalty-Regularisierung der geometrischen Rollkontaktbedingungen wird das Problem mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode näherungsweise gelöst. Die unbekannten Verteilungen von Normal- und Tangentialspannung in der Kontaktoberfläche werden aus der Transformation der Kontaktknotenkräfte mit Hilfe einer diagonalisierten Kontaktflächenmatrix berechnet.

Anhand numerischer Simulationen wird das Verformungsverhalten des Walzguts sowie Kontaktspannungsverteilungen mit dem neu entwickelten Rollkontaktalgorithmus untersucht. Um den Einfluss der Reibung zu zeigen, sind auch die Haft- und Gleitzonen in der Kontaktfläche und die oberflächennahen Spannungsverteilungen im Walzgut dargestellt.

Abstract

A steady state rolling process of an elastic-plastic work-hardening body is formulated as a unilateral rolling contact problem taking dry friction into account.

The formulation of this steady state rolling contact problem leads to a minimization of a variational nonlinear functional. Within the framework of the active set strategy a two dimensional roll contact algorithm is developed, including a slip model of Coulomb friction. The use of a penalty regularization of the kinematic contact constraint together with the finite element method is applied to solve the problem. The unknown distributions of the pressure and traction on the contact surface are evaluated from the contact forces using a lumped transformation method.

Numerical simulations with the new developed roll contact algorithm are carried out to study the deformation behavior of the workpiece as well as the contact stress distributions. To indicate the influence of friction, stick-slip zones in the contact region and the subsurface stress distribution in the workpiece are depicted as well.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. Dr. H. Obrecht (Ph.D.) am Lehrstuhl für Baumechanik-Statik der Universität Dortmund.

Herr Prof. Obrecht begleitete meine Arbeiten stets mit regem Interesse und stand mir in vielen Diskussionen als Partner zur Verfügung. Er ließ mir dabei aber immer den notwendigen Freiraum, um die eigenen Ideen verwirklichen zu können. Für die Anregungen zu dieser Arbeit und seine Unterstützung möchte ich ihm besonders danken.

Den Herren Professor Dr.-Ing. K. Thermann und Professor Dr.-Ing. A. Hettler gilt mein Dank für die Übernahme der Korreferate.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinen Kolleginnen und Kollegen vom Lehrstuhl für Baumechanik-Statik und vom Lehrstuhl für Numerische Methoden und Informationsverarbeitung für ihre Unterstützung bedanken. Insbesondere seien hier die Herren Dr.-Ing. M. Brünig, Dr.-Ing. L. Speier, Dipl.-Ing. S. Drewes und Dipl.-Ing. Lu Z. genannt.

Dortmund, im Januar 2000 — Thomas Rauscher

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Kontaktprozesse treten in Natur und Technik in so mannigfaltiger und komplexer Form in Erscheinung, dass ihre physikalische Analyse meist nur über eine Klassifizierung der verschiedenen Kontaktformen problembezogen erfolgen kann. Unter dem Kontaktproblem zweier oder mehrerer Festkörper wird die Verlagerung und Deformation der Körper durch eine bestimmte Belastung verstanden, die dazu führt, dass sich ein oder mehrere Kontaktbereiche mit entsprechenden Kontaktspannungsverteilungen einstellen. Größe, Form und Verteilung der Kontaktflächen und Kontaktspannungen sind dabei im Allgemeinen unbekannt und sind von der Belastungsgeschichte sowie den Wechselwirkungsprozessen in den Kontaktflächen abhängig. Die Komplexität der Oberflächengeometrie der Kontaktkörper sowie die Berücksichtigung tribologischer Prozesse in den Kontaktflächen führt dazu, dass sich analytische Lösungen nur für wenige Kontaktvorgänge entwickeln lassen (*Johnson* [50], *Kikuchi/Oden* [59]). Jeder reibbehaftete Festkörperkontakt stellt aufgrund der unbekannten instationären Kontaktfläche ein geometrisch nichtlineares und aufgrund der Reibungsphänomene ein physikalisch nichtlineares, irreversibles Problem dar, das sich nur noch mit Hilfe eines numerischen Iterationsverfahrens näherungsweise lösen lässt.

1.1 Studien zum Rollkontakt

Einen umfassenden Überblick über den allgemeinen Stand der Festkörper-Kontaktmechanik bis zum Beginn der achtziger Jahre zeigt *Kalker* [54]. Hauptentwicklungen zur Theorie stationärer Kontaktformulierungen sind in der Arbeit von *Zhong* und *Mackerle* [121], die vor allem eine problemorientierte extensive Literaturübersicht liefert, dargestellt. *Kalker* [54] zeigt anhand einer Klassifizierung verschiedener Kontaktproblemgruppen, wie mit der klassischen Halbraum- oder Variationsformulierung analytische und numerische Lösungswege entwickelt wurden. Einen Überblick über die Entwicklung und den aktuellen Stand numerischer Lösungstechniken für Kontaktprobleme geben die Arbeiten von *Aliabadi/Brebbia* [1], *Qin/He* [93], *Wriggers* [117] sowie die Berichtsammlung in [104]. Experimentellen, analytischen und numerischen Studien speziell zum rollenden Kontakt widmen sich *Kalker* [55, 56] und *Johnson* [50]. *Kalker* [55] erläutert die auf der Halbraumtheorie basierenden Lösungsverfahren quasi-statischer Rollkontaktformulierungen vom Typ Rad-Schiene mit Coulomb'scher Reibung und vergleicht deren analytische Leistungsfähigkeit. In *Johnson* [50] werden die analytischen Betrachtungen des Rollkontakts am Halbraummodell durch die Berücksichtigung inelastischer Materialeigenschaften (elastisch-idealplastisch, visko-elastisch) erweitert.

Das Problem des rollenden Kontakts ist hinsichtlich zweier elastischer Rotationskörper im Wesentlichen gelöst, wenn sich der Normalkontakt mit Hilfe der Hertz'schen Kontaktmechanik hinreichend genau erfassen lässt [50]. Aufbauend auf der Lösung von *Hertz* [43] wird das Tangentialkontaktproblem für den Fall zweier Rollen mit identisch elastischen Materialkennwerten von *Carter* [14] und für unterschiedliche Materialien von *Bentall* [9], *Kalker* [53, 55] und in *Johnson* [50] behandelt. Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen die Tangentialspannungsverteilungen im zweidimensionalen stationären Rollkontakt, wie sie unter Voraussetzung einer Hertz'schen Pressung von Carter berechnet wurden.

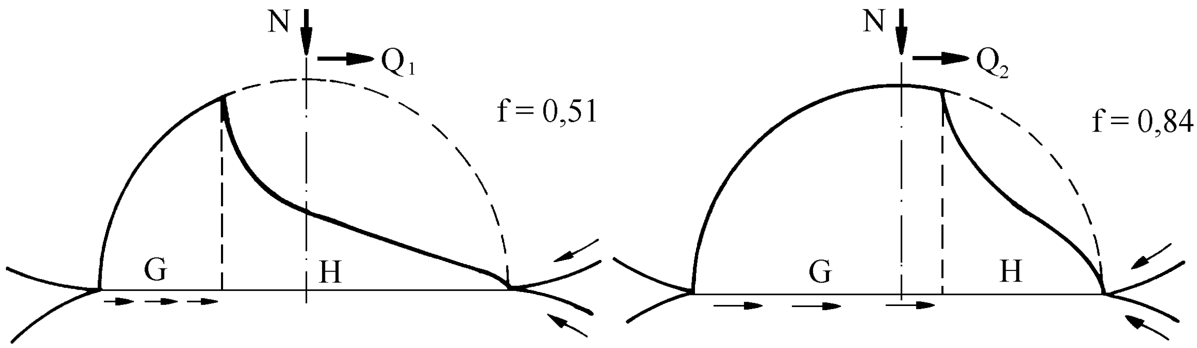


Abb. 1.1: Tangentialspannungsverteilung im reibbehafteten Rollkontakt bei Körpern mit gleichen elastischen Materialeigenschaften $E_1 = E_2$ nach Aufbringen einer Tangentiallast $Q_1 < Q_2$, $f = Q/(\mu N)$, Reibwert μ (Carter [14], Kalker [53])

Verschwindet dabei das Integral der Tangentialspannungsverteilung in der Kontaktzone, wird der Rollkontakt als freies Rollen bezeichnet, da eine Rollbewegung ohne Übertragung einer Tangentialkraft stattfindet.

Ein weiteres wesentliches Charakteristikum dieser stationären Rollkontaktstudien ist die Entstehung unterschiedlicher Haft- und Mikrogleitzonen (symbolisch H, G) in der Kontaktfläche. In Abhängigkeit der vorhandenen Randbedingungen (Materialkombination, Reibwert, Rollgeschwindigkeit) treten diese mehr oder weniger stark in Erscheinung. Unter Anwendung des Coulomb'schen Reibungsgesetzes wird die maximal aufnehmbare Tan-

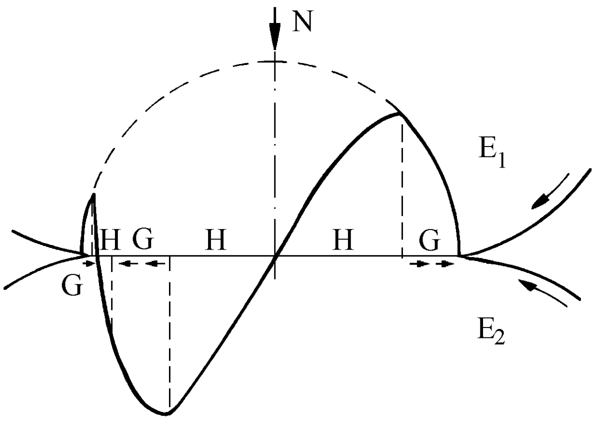


Abb. 1.2: Tangentialspannungsverteilung im reibbehafteten Rollkontakt bei unterschiedlichen elastischen Materialeigenschaften $E_1 > E_2$ unter reiner Normalbelastung (*Bentall* [9], *Kalker* [53])

gentialspannung durch die Hertz'sche Pressung und den Reibwert μ bestimmt. Die Pfeile in den Abbildungen geben die Mikrogleitrichtung des oberen über den unteren Rollkörper an.

Eine Erweiterung dieses Kenntnisstandes unter Verzicht der Annahme einer Hertz'schen Pressung liefern die Arbeiten von *Hearle/Johnson* [39], *Knothe/Wang* [63], *Liu/Paul* [74] und *Oden/Lin* [88]. Im Normalkontakt entsteht infolge viskoelastischer Materialeigenschaften und Reibung bereits eine asymmetrische Verteilung der Kontaktpressung, so dass ein zusätzliches Antriebsmoment zur Aufrechterhaltung einer stationären Rollbewegung erforderlich ist. Die prinzipielle Form der Tangentialspannungsverteilung und die damit in Verbindung stehende Verteilung von Haft- und Mikrogleitzonen ist mit den Kontaktstudien an Rollkörpern mit unterschiedlich elastischen Materialeigenschaften bis auf ihre Asymmetrie näherungsweise identisch (Abb. 1.2).

Aufgrund der großen fertigungstechnischen Bedeutung befasst sich die Majorität der Rollkontaktanalysen wie z.B. *Bhargava et al.* [10], *Chandra* [15], *Li/Kobyashi* [73], *Malinowski/Lenard* [79], *Mori et al.* [84] oder *Rónda et al.* [97] mit der Simulation von metallischen Walzprozessen. Durch die parallelen Stellungen der Richtrollen im Walzprozess kommt es hier zum Metalltreiben im Werkstück. Form, Größe und Verteilung der Kontaktspannungen sind hier stark vom Material, den Reibbedingungen und den Walzen- und Walzgutgeometrien abhängig. Abbildung 1.3 zeigt eine schematische Darstellung der Druckspannungsverteilung am Streifenelement beim Walzen von Metallen. Neben dem Rollkontakt in Walzprozessen werden in industriellen Fertigungen auch Richtprozesse über Rollkontakt ausgeführt.

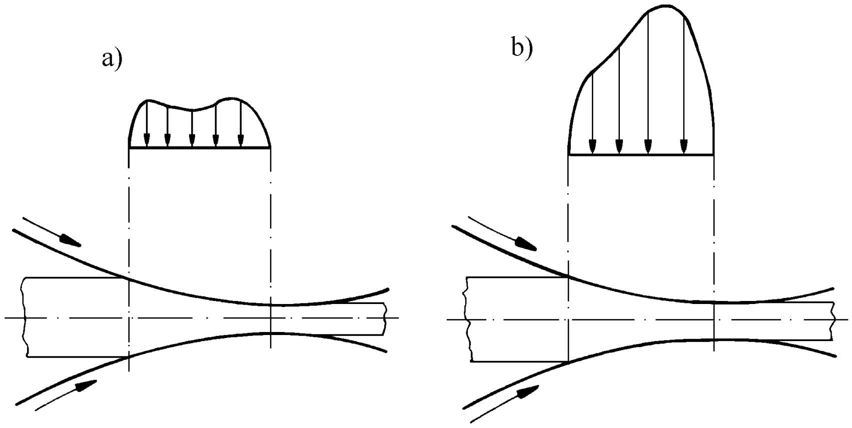


Abb. 1.3: Kontaktpressung beim Kaltwalzen von Stabstahl (a) und Bandstahl (b) (MacGregor/Palme [78], *Malinowski/Lenard* [79])

Da in vielen Warmwalzprozessen durch den Abkühlvorgang Geradheitsabweichungen in Höhen- und Seitenrichtung am Werkstück auftreten, werden die Geradheitsabweichungen im Allgemeinen über einen Richtprozess korrigiert. Neben Richtpressen werden hierzu auch Rollenrichtmaschinen benutzt. Abbildung 1.4 zeigt eine 7-Rollenrichtmaschine wie sie beim Richten von Schienenprofilen verwendet wird.

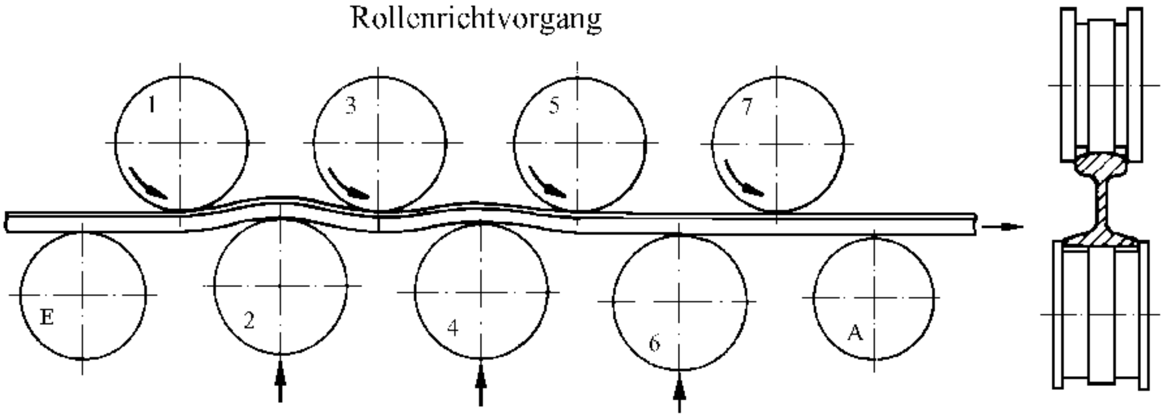
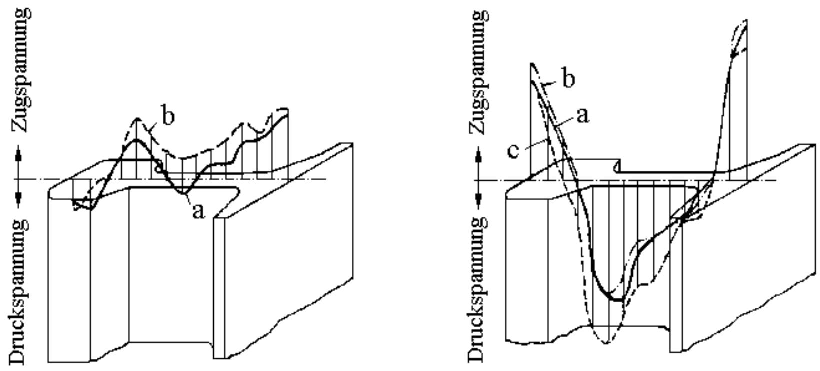


Abb. 1.4: Richten eines Schienenprofils durch eine 7-Rollenrichtmaschine

1.2 Problemstellung und Motivation

Fehlende Kenntnisse über Form, Größe und Verteilung der Kontaktflächen und der Kontaktspannungen im Richtprozess motivierten die Untersuchungen und Studien dieser Arbeit. Im Folgenden sollen deshalb zuerst Problemstellung und Erkenntnisstand erläutert werden, bevor das Lösungskonzept in dieser Arbeit dargestellt wird.

Im Verlauf eines Rollenrichtvorgangs wird das Werkstück über einzelne Richtrollen wechselseitig plastisch gebogen, bis am Ende ein gerades Walzprofil die Richtmaschine verlässt. Die im Rollenrichtvorgang auftretenden plastischen Formänderungen beeinflussen nachhaltig den aus dem Umform- und Wärmebehandlungsverfahren vorhandenen Eigenspannungszustand im Walzprofil. Abbildung 1.5 zeigt den von *Meier* [80] experimentell ermittelten Eigenspannungsverlauf eines Schienenprofils nach dem Abkühlvorgang und nach dem einmaligen Durchlauf durch eine Rollenrichtmaschine.



(a) Nach Abkühlvorgang (b) Nach Rollenrichtvorgang

*Abb. 1.5: Charakteristischer Eigenspannungsverlauf nach dem Abkühlvorgang (*a*-im Schienenstapel,* b*-allein liegend,* c*-spannungsarm geglüht) und nach dem Rollenrichtvorgang* (*Meier* [80])

Aufgrund der hohen Qualitätsanforderungen an Eisenbahnschienen als Fahrzeugführungs- und Trägerelement im Personen- und Güterverkehr wird bei der Produktion von Schienenprofilen dem Rollenrichtvorgang und der damit verbundenen Beeinflussung der Materialeigenschaften besonders große Bedeutung beigemessen. Nach dem Walzen erfahren die Schienenprofile in Quer- und Längsrichtung eine Verkrümmung, deren Ursache aus dem unterschiedlichen Abkühlvorgang der Oberfläche der Schiene im Kühlbett resultiert. Der erforderliche Richtprozess führt hier zu besonders starken plastischen Umlagerungen der anfänglichen Temperatureigenspannungen (Abbildung 1.5) und beeinflusst die Rissfestigkeit und damit das Bruchverhalten einer Schiene (*Asbeck/Heyder* [3], *Schade* [98], *Schweitzer et al.* [101]). Von grundsätzlichem Interesse ist die Fragestellung, welche Parameter Form und Größe der Eigenspannungen im Richtprozess bestimmen und inwieweit eine Optimierung der gestellten Güteanforderungen hinsichtlich Geradheit und Bruchfestigkeit der Schiene durch den Richtvorgang möglich ist.

Die ersten umfangreichen experimentellen Untersuchungen von *Meier* [80] zur Entstehung von Eigenspannungen an Eisenbahnschienen ergaben, dass die jeweiligen Eigenspannungen hauptsächlich durch das Herstellungsverfahren bestimmt werden. Dabei entstehen die resultierenden Eigenspannungen aus drei Hauptanteilen, den Walzeigenspannungen, den Temperatureigenspannungen aus dem Abkühlvorgang und den durch den Rollenrichtvorgang verursachten Eigenspannungen. Über einen direkten Vergleich der Eigenspannungsanteile untereinander konnte gezeigt werden, dass durch den Rollenrichtvorgang erheblich größere Eigenspannungen hervorgerufen werden als durch den Temperatureinfluss beim Walz- und Abkühlvorgang. Die Amplituden der Richteigenspannungen werden dabei entscheidend durch den Anstellgrad sowie den Plastizierungsgrad der Querschnitte bestimmt. Auf den Verlauf der Eigenspannungen über die Querschnittshöhe hat der Anstellgrad selbst nur geringen Einfluss. Der Richtvorgang verursacht neben der Modifizierung des Eigenspannungsverlaufs auch eine Verkürzung der Schiene, die je nach Richtrollenanstellung zwischen 0.05 und 0.1 % der Fertigungslänge betragen kann.

Weitere Eigen- und Schweißspannungsverteilungen in Eisenbahnschienen wurden von *Asbeck/Heyder* [3], *Schade* [98] und *Schweitzer et al.* [101] untersucht. Die Entstehung der Richteigenspannungen wird von den Autoren auf die starken lokalen Plastizierungen in den Biegedruckzonen sowie den Kraftübertragungen in den Kontaktzonen zwischen Richtrolle und Richtgut, die beim Richtvorgang abwechselnd an der Fuß- und Kopfseite der Schiene entstehen, begründet. Weiterhin wurde festgestellt, dass die Größe des Schienenprofils sowie die Werkstoffgüte der Schiene keinen wesentlichen Einfluss auf die Verteilung der Längseigenspannungen rollengerichteter Schienen haben.

Die erstmals von *Schweitzer et al.* [101] durchgeführten experimentellen Studien an teilweise rollengerichteten Schienen (durch Unterbrechungen des Richtvorgangs und Entfernung der Schiene aus der Richtmaschine) ermöglichten eine Analyse der Verformungs- und Eigenspannungsverläufe an verschiedenen Positionen der Schiene. Die zu Beginn des Richtvorgangs entstandenen Druckeigenspannungen an den Außenseiten der Schiene wurden durch den Richtprozess in Zugeigenspannungen überführt. Hingegen nahmen die im Stegbereich entstandenen großen Druckeigenspannungen mit fortschreitendem Durchlauf der Schiene durch die Richtmaschine nur geringfügig ab. Trotz vergleichender Biegeuntersuchungen und den dort gemessenen Eigenspannungszuständen konnte die Entstehung der Eigenspannungen während des Rollenrichtens allein nicht erklärt werden, so dass weitere Einflussgrößen in Betracht gezogen werden müssen.

Neben diesen rein experimentellen Untersuchungen zum Eigenspannungszustand von Schienenprofilen im Rollenrichtvorgang wurden erstmals von *Brünig* [12] und *Wunderlich et al.* [119] eine numerische Simulation des Rollenrichtvorgangs von schweren Profilen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Auf der Basis der Versuchsergebnisse von Schienen (*Schweitzer et al.* [101]) wurde eine Modellierung des Richtvorgangs mit Hilfe von schubsteifen Stabelementen durchgeführt. In den Modellrechnungen wurden der Abkühleigenspannungszustand, die effektiven Richtrollenanstellungen der Unterrollen, die Axialbeanspruchung aus den angetriebenen Oberrollen sowie ein inelastisches Materialgesetz für die Schienenprofile berücksichtigt. Mit Hilfe des entwickelten Modells war es möglich, den Endzustand sowie den Entstehungsvorgang der Eigenspannungen qualitativ und bis zu einem gewissen Grad auch quantitativ korrekt nachzubilden.

Die experimentellen und theoretisch-numerischen Untersuchungen zum Rollenrichten von Schienen liefern hauptsächlich Grundkenntnisse über die Entstehung der Eigenspannungsverteilung. Noch immer fehlen genaue Analysen, die den mechanisch äußerst komplexen Vorgang der Ursache für die Entstehung der Eigenspannungsverteilung während des Rollenrichtens erklärbar machen. Die im Rahmen des bisherigen Modells erzielten Übereinstimmungen zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen konnten nur unter der Annahme erzielt werden, dass über die Kontaktflächen zwischen Richtrolle und Schiene Längskräfte in die Schiene eingeleitet werden, deren Größe durch ein Trial-and-Error-Verfahren aus gemessenen Werten abgebildet wurde. Dies führte zu der Schlussfolgerung, dass der Reibung eine entscheidende Rolle bei der Entstehung der Richteigenspannungen zukommt, da eine Übertragung tangential angreifender Kräfte von der Richtrolle in die Schiene auf andere Weise nicht möglich ist. Über Größe, Verteilung und Entstehung dieser tangentialen Kontaktspannungen gibt es bislang nur unvollständige Informationen.

Aussagen über den tatsächlichen Spannungszustand in der Kontaktfläche, der sich zwischen Rolle und Schiene im Richtvorgang ausbildet, konnten weder aus dem experimentellen noch aus dem numerischen Modell von *Brünig* [12] gewonnen werden. Wie im Detail die nichtlineare Wechselwirkung zwischen Schiene und Richtmaschine senkrecht und parallel zur Schienenlängsachse zustande kommt und welche Faktoren sie hauptsächlich beeinflussen ist unvollständig geklärt und soll in dieser Arbeit durch lokale numerische Studien näher untersucht werden.

1.3 Aufbau der Arbeit

Aufgrund der unbekannten Kontaktfläche und der möglichen Gleitreibungs- und inelastischen Deformationsprozesse sind die mathematischen Gleichungen, die den Formgebungsprozess durch den Rollkontakt beschreiben, nichtlinear. Im Allgemeinen lassen sich nur noch mit Hilfe numerischer Iterationsverfahren Näherungslsungen berechnen. Viele Näherungsverfahren, wie z.B. auch die Finite-Elemente-Methode, lassen sich über eine Variationsformulierung der systembeschreibenden Gleichungen entwickeln. Bei einer quasistatischen Prozessbeschreibung hat sich das Prinzip der virtuellen Arbeit (variationelle Gleichungsmethode) etabliert. Variationelle Ungleichungsmethoden werden hingegen nur selten angewandt. Die Gründe hierfür liegen zum einen in dem sehr komplexen mathematischen Fundament dieser Theorie, *Duvaut/Lions* [25] und *Moreau* [83], zum anderen an den hierfür zur Zeit zur Verfügung stehenden problemorientierten Optimierungsverfahren, deren Algorithmen langsam sind und nicht immer eine Lösung liefern (*Schittkowski* [99]).

Des Weiteren sind die auf der Hertz'schen Theorie basierenden Beschreibungen und Rechenmodelle nur schwer oder gar nicht auf elasto-plastische Rollkontaktprobleme anwendbar. Lösungsstrategien reibungsbehafteter Rollkontaktprobleme unter Berücksichtigung zusätzlicher materieller Nichtlinearitäten werden erst durch die Anwendung leistungsfähiger Rechenanlagen effizient möglich, wie elastische und visko-elastische dreidimensionale Rollkontaktmodelle und Analysen von *Kalker* [56] zeigen. Der Rollkontakt zwischen elasto-plastischen Festkörpern mit Reibung zählt bei *Kalker* [55, 54] noch zu den ungelösten Problemen. Erst in den neueren Arbeiten der numerischen Kontaktmechanik von *Aliabadi/Brebbia* [1], Tagungsband [104] oder *Zhong/Mackerle* [121] werden inelastisches Materialverhalten und Reibung in die Kontaktformulierung mit aufgenommen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das theoretische Konzept der numerischen Umsetzung eines Rollkontaktproblems mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode zu beschreiben und weiter zu entwickeln, so dass Entstehung und Entwicklung von Einflussgrößen, die aus der Interaktion zwischen Rolle und Gegenkörper in der Kontaktfläche entstehen, untersucht und deren Auswirkungen beschrieben werden können. Von besonderem Interesse sind dabei Verteilung und Größe der Normal- und Tangentialspannungen in den Kontaktflächen sowie der Spannungszustand in den oberflächennahen Bereichen.

Bei der theoretischen Behandlung von Umformprozessen (*Dahl et al.* [22]), in die sich auch der Rollenrichtvorgang eingliedern lässt, sind neben der Modellbildung des inelastischen

Materialverhaltens auch den Wechselwirkungsprozessen in der Kontaktzone besondere Beachtung zu schenken. Deshalb wird eine Betrachtung der Kontaktmechanik als tribologisches System in Kapitel 2 einer kontinuumsmechanischen Betrachtung vorangestellt. Dies geschieht nicht nur im Hinblick auf die Einschätzung von Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit der tribologischen Erscheinungsformen und der makroskopischen Modellbildung, sondern soll insbesondere den zur Zeit noch fragmentarischen Stand der kontinuumsmechanischen Kontaktmodellierung verdeutlichen.

In Kapitel 3 werden die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen zusammengestellt, auf deren Grundlage die Modellbildung des Rollkontakts und eine zweidimensionale numerische Umsetzung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode durchgeführt wird. Materialgleichungen zur Erfassung des elasto-plastischen Materialverhaltens sowie das Annäherungs- und Reibverhalten metallischer Festkörper werden in Kapitel 4 dargestellt.

Nachdem die Problemstellung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit im Kapitel 5 formuliert und linearisiert wird, folgt im Kapitel 6 die numerische Umsetzung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Die Kontaktnebenbedingungen werden dabei auf der Grundlage der Active-Set-Strategie in das zu lösende Gleichungssystem eingearbeitet.

Die Verifikation des entwickelten Rollkontakt-Algorithmus wird durch die numerische Simulation von Rollenricht- und Walzvorgängen im Kapitel 7 durchgeführt. Eine Zusammenfassung der Arbeit und ihrer Ergebnisse sowie ein Ausblick auf weitere Studien folgen im abschließenden Kapitel 8.

2 Kontakt metallischer Oberflächen

Die Tribologie ist der Oberbegriff für die Kennzeichnung der Gebiete Reibung, Verschleiß und Schmierung bei sich gegeneinander bewegten Körpern, *Hays* [38], und prägt das heutige Verständnis über den Festkörperkontakt. Ein tribologisches System besteht dabei aus Grundkörper, Gegenkörper, Zwischenschichten und Umgebungsmedium. Unter Berücksichtigung der makro- und mikroskopischen Erscheinungsformen ist die Definition der Reibung vielfältig. Im Allgemeinen wird mit dem Begriff der äußeren Reibung der Widerstand charakterisiert, der eine gleitende oder rollende Relativbewegung zwischen zwei in Kontakt stehenden Körpern hemmt oder verhindert. Die Wirkungsrichtung des Widerstands ist dabei der Relativbewegung entgegengesetzt. Entsprechend der Bewegungskinematik wird zwischen der Gleitreibung und der Rollreibung unterschieden. Die Arbeiten von *Tabor* [106], *Krim* [67] und *Bhushan* [11] geben eine kompakte Einführung in das heutige Grundverständnis der Festkörpertribologie.

Hinsichtlich der Modellbildung und der Interpretation der numerischen Rollkontaktanalysen ist ein erweitertes Verständnis dieses tribologischen Systems sinnvoll. Deshalb sollen in den folgenden Abschnitten wichtige tribologische Erkenntnisse des trockenen metallischen Oberflächenkontakts zusammengefasst werden.

2.1 Struktur und Aufbau

In der Betrachtung der Bildungsmechanismen der äußeren Reibung fester Körper wird der Oberflächentopologie, ihrem Schichtenaufbau und ihren beanspruchungsbedingten Veränderungen eine wesentliche Rolle zugewiesen. Jede technische Oberfläche zeigt auf Mirkoebene ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes Rauigkeits- und Welligkeitsprofil. In der üblichen Darstellung (Abbildung 2.1) wird dieses Mikrogebirge der Oberfläche in einer Maßstabsverzerrung von vertikaler zu horizontaler Richtung aufgezeichnet. Kenngrößen der Mikrotopologie einer Oberfläche werden durch den betrachteten Profilschnitt und

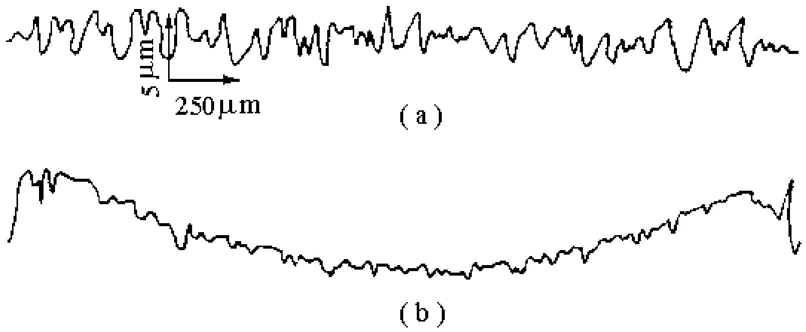


Abb. 2.1: Rauigkeitsprofil (a) vor und (b) nach dem Kontakt (*Neale* [85])

den Einlaufzustand der Oberfläche bestimmt. Die Schwierigkeit einer eindeutigen Beschreibung der Mikrotopologie macht eine makroskopische Berücksichtigung problematisch. Studien von *Greenwood* [36] und *Krim* [67] zeigen, das der Rauigkeit im Rahmen einer makroskopischen Beschreibung der Reibung eine eher untergeordnete Rolle zukommt, sie aber in der Grundlagenforschung die Basis bereit stellt, auf der die unterschiedlichen Reibphänomene erklärt werden können. Wie aus Abbildung 2.2 deutlich wird, steigt die

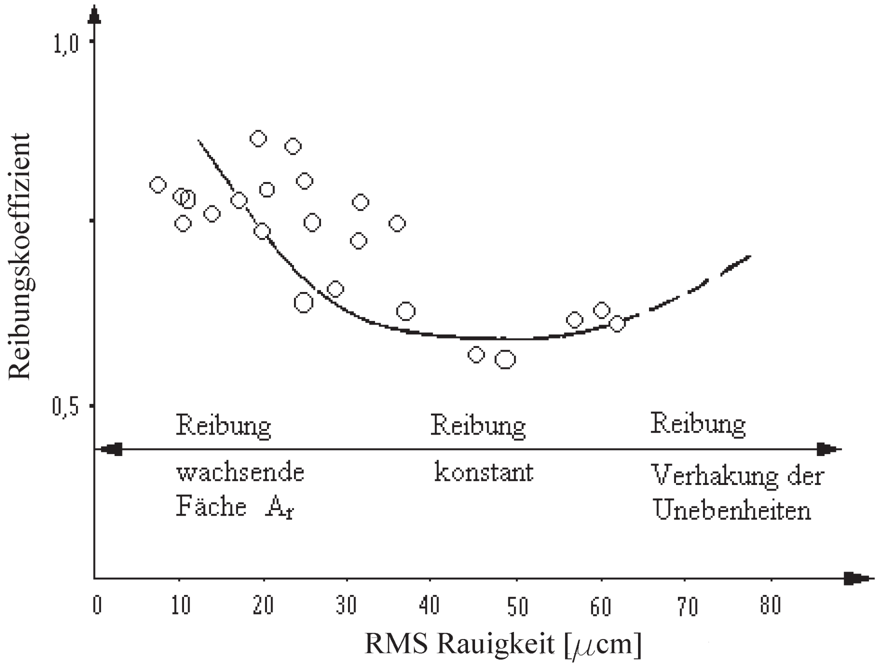


Abb. 2.2: Abhängigkeit des Reibwerts von der Oberflächenrauigkeit (*Rabinowicz* [94])

Reibung mit zunehmender Glattheit bzw. Rauigkeit der Kontaktflächen an. Im Fall glatter Kontaktflächen wird der Zuwachs mit dem überproportionalen Anwachsen der realen Kontaktflächen begründet, im Fall steigender Rauigkeit mit dem Anwachsen der notwendigen Hebekräfte zur Überwindung der größer werdenden Unebenheiten. Für mittlere Rauigkeitsbereiche, wie sie in der Ingenieurpraxis vorkommen, zeigt der Reibwert sein Minimum sowie eine eher vernachlässigbar kleine Abhängigkeit von der Rauigkeit.

Neben der Mikrotopologie bestehen die Oberflächen im Allgemeinen aus verschiedenen Deckschichten. Wie in Abbildung 2.3 dargestellt, baut sich auf den Reibflächen eine äußere und eine innere Grenzschicht auf. In den meisten Fällen bestimmen die mechanischen Eigenschaften der äußeren Grenzschicht (Schubfestigkeit, Härte etc.) und die Haftfestigkeit zum Grundmaterial die Reibung. Der Eindringwiderstand der äußeren Grenzschicht kann

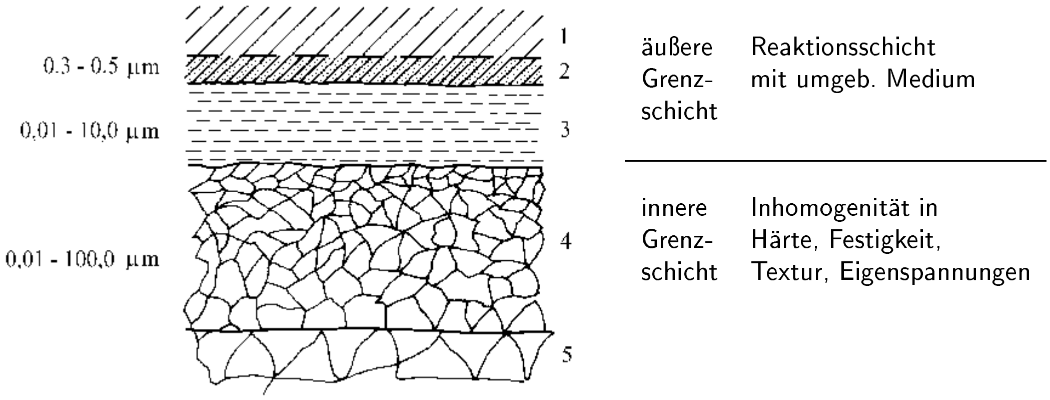


Abb. 2.3: Prinzipieller Schichtenaufbau metallischer Oberflächen, 1. *Umgebendes Medium,* 2. *Adsorptionsschicht,* 3. *Oxidschicht,* 4. *Störungsfeld durch Umformen,* 5. *Grundmaterial* (*Rabinowicz* [94], *Polzer/Meissner* [91], *Wuttke* [120])

bis zum 30fachen, bei Aluminium bis zum 100fachen über der des darunterliegenden Grundmaterials liegen. Die Schubfestigkeit dagegen ist viel geringer als die des Grundmaterials. Die Tabelle 2.1 verdeutlicht die Wirkung einer Deckschicht auf den Reibwert bei einer Stahl/Stahlpaarung. Der Reibwert verringert sich um das Zwei- bis Dreifache.

Oberfläche	Oxidfilm	Sulfidfilm	Ölsäure	Schmierfilm
sauber	0.78	0.78	0.78	0.78
mit Film	0.27	0.39	0.11	0.32

Tabelle 2.1: Einfluss verschiedener Filme auf den Reibwert bei einer Stahl/Stahlpaarung (*Kragelski* [65])

Allgemein gilt für Deckschichten auf Festkörpern, dass sich der Gleitwiderstand in dem Maße verringert, wie sich die Filmdicke erhöht. Ihre Entstehung wird sehr stark von der umgebenden Atmosphäre, dem Temperaturfeld, der Gleitgeschwindigkeit, der anliegenden Belastung und der realen Kontaktfläche beeinflusst.

Bei metallischen Gleitpaarungen entspricht das Reibverhalten aufgrund der Reaktionsbereitschaft der Oberflächenschicht mit der Luft und der hieraus resultierenden Deckschichtbildung der sogenannten Grenzschichtreibung. Es entsteht eine gegenüber dem Grundmaterial weichere Grenzschicht. Nach *Kragelski* [65] ist die Ausbildung dieser Grenzschicht eine notwendige Bedingung für die Entstehung und Aufrechterhaltung der äußeren Gleitreibung. Bei Abwesenheit einer solchen Grenzschicht kann es zu festen Verschweißungen in den Oberflächen kommen. Eine Relativbewegung wird dann nur unter Abrieb und Verschleiß möglich und es kommt zur Zerstörung des Gleitsystems. Hierbei überschreitet der Reibwert den Grenzwert der äußeren Reibung von $\mu > 0.3$ [91]. Das Grundmaterial bestimmt das weitere Reibverhalten.

Ein Schwerpunkt der Tribologie liegt auf der Bestimmung dreier grundsätzlicher Elemente:

- der realen Kontaktfläche A_r,
- der Haft- und Schubfestigkeit in und um die realen Kontaktstellen,
- sowie der Art und Weise des Materialverhaltens während einer Relativbewegung.

Vom Ausgangsstadium der Kontaktbildung an ändern sich die Kenngrößen bis sich ein unter der anliegenden Belastung optimaler Gleitzustand eingestellt hat. Nach *Kragelski* [66] bestimmen die Verschleißbedingungen den Einlaufprozess, die sich einstellende Gleichgewichtsrauigkeit und damit die reale Kontaktfläche, den Gradienten der Haft- und Schubfestigkeit sowie die Art und Weise des oberflächennahen Materialverhaltens im Kontakt.

2.1.1 Erscheinungsform der äußeren Reibung

Aufgrund der Mikrotopologie entsteht der physikalische Kontakt als ein Ergebnis berührender und verformender Rauigkeitsspitzen. Mit zunehmender Normalbelastung treten je nach Größe der lokal anliegenden Spannung elastische bzw. plastische Verformungen an den Kontaktstellen ein. Diese Verformungen führen zu einer mikroskopischen Annäherung der Kontaktflächen und somit zur Neubildung von Kontaktstellen und zur Veränderung der realen Kontaktfläche. An den realen Kontaktflächen bilden sich Reibverbindungen (Abbildung 2.4), an denen tribochemische und tribophysikalische Wechselwirkungsprozesse bis in eine Tiefe von 5-30 μm ablaufen können [91]. Der Wirkungsgrad dieser

Triboprozesse ist aufgrund der anisotropen Mikrotopologie ortsabhängig, so dass dem nominellen Kontakt im Allgemeinen ein anisotroper, inhomogener diskreter Kontakt zugrunde liegt. Wird zusätzlich eine tangentiale Belastung aufgebracht, tritt eine weitere

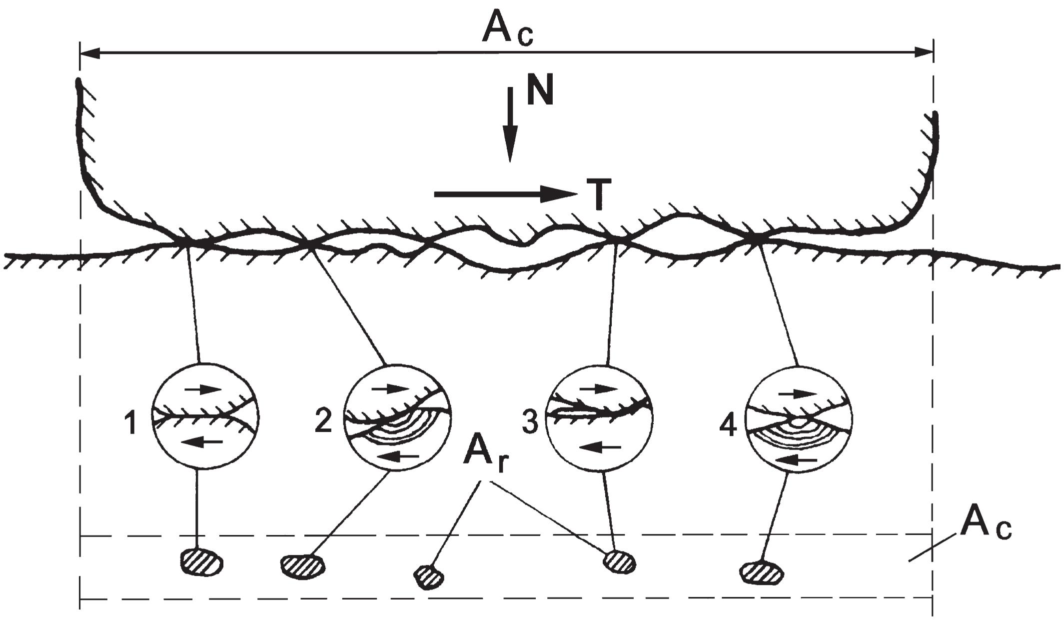


Abb. 2.4: Kontaktlokalisation und Triboprozesse infolge der realen Oberflächenstruktur

Annäherung der Oberflächen ein, die mit einer Neuverteilung der Berührungsstellen und Reibverbindungen verbunden ist [65]. Der Prozess der Annäherung und der Wechselwirkung führen zu einer Veränderung der Deckschichten und zur Herausbildung eines dritten Körpers. Seine Besonderheit besteht zum einen in den ununterbrochenen Zerstörungs- und Neubildungsprozessen seiner Elemente während einer Gleitbewegung, zum anderen in der Ausbildung eines positiven Gradienten der Schubfestigkeit. Die makroskopische Kraft, die für Zerstörungs- und Neubildungsprozesse der Kontaktstellen beim Gleiten aufgebracht werden muss, wird als Reibkraft definiert und ihr Verhältnis zur anliegenden Normalkraft als Reibwert eingeführt.

Die Komplexität der Entstehungsprozesse der Reibkraft macht eine quantitative Erfassung nur unter vereinfachten Betrachtungen und Annahmen möglich. Aufgrund der im Detail betrachteten Erscheinungsbilder entwickelten sich verschiedene Theorien zur mathematischen Modellbildung der Reibung, siehe *Polzer/Meissner* [91]. Unter den verschiedenen Theorien wird die Adhäsions-Deformationstheorie von *Kragelski* [65] in der Ingenieurwissenschaft bevorzugt angewendet. Sie stellt im Wesentlichen die physikalisch-geometrischen

Aspekte der Reibung heraus und schließt als wichtigen Sonderfall das Coulomb'sche Reibungsgesetz mit ein. Diese Theorie lässt sich entsprechend dem Stand der Erkenntnisse verändern und erweitern, wie die Arbeiten von *Gläser* [35] und *Van* [112] zeigen.

2.1.2 Die Kontaktfläche

Da der reale Kontakt diskret und unstetig ist, wird neben der nominellen Kontaktfläche A_c die reale Kontaktfläche $A_r = \sum A_r^i$ als Summe aller tatsächlichen Berührungsflächen A_r^i eingeführt. Von entscheidender Bedeutung dabei ist, ob ein Kontakt ruhender oder bewegter Körper vorliegt. In *Kragelski et al.* [66] wird zur Abschätzung der realen Kontaktfläche bei gleichzeitiger Einwirkung von Normal- und Tangentialbelastung die Beziehung

$$A_r = \sqrt{(1 + \alpha_1\, \mu^2)}\, \mathring{A}_r \tag{2.1}$$

vorgeschlagen. Hierin ist α_1 ein werkstoffabhängiger, experimentell zu ermittelnder Parameter im Wertebereich $1 \leq \alpha_1 \leq 27$, μ der Reibwert und $\mathring{A}_r$ die unter reiner Normalbelastung entstehende reale Kontaktfläche. Nach *Rabinowicz* [94] kann sich unter Einwirkung einer tangentialen Belastung die reale Kontaktfläche bis zum Dreifachen der Berührungsfläche $\mathring{A}_r$ vergrößern. Finden beim Übergang vom Ruhe in den Bewegungszustand nur unbedeutende Änderungen im Spannungszustand der Kontaktflächen statt, kann in erster Näherung mit

$$A_r \approx \mathring{A}_r = \eta_c\, A_c\,, \qquad \eta_c < 1 \tag{2.2}$$

gerechnet werden. *Kragelski* [65] begrenzt die Anwendungen der Gleichung (2.2) auf Kontaktpaarungen mit Reibwerten $\mu < 0.3$, da der Einfluss der Tangentialspannung auf die Vergrößerung der Kontaktgeometrie hier nur max. 5 % beträgt. Untersuchungen am ruhenden Kontakt von *Uppal et al.* [108, 110] zeigen, dass mit zunehmender Normalbelastung N die reale Kontaktfläche sich primär durch die Verformung der Mikrohügel und sekundär durch die Neubildung von Kontaktstellen vergrößert. Von *Uppal et al.* [109] wird zur Abschätzung der realen Kontaktfläche ($m < 1$, $c_o = 0.5$)

$$\eta_c = c_o\, \left(\frac{\mid N \mid}{H A_c}\right)^m \tag{2.3}$$

vorgeschlagen. Für Aluminium geben die Autoren einen bereichsweise konstanten Parameter m in Abhängigkeit von der Belastung $\eta_p = N/H$ und der und Vickers-Härte H an. Mit steigender Belastung verkleinert sich m von 0.95 auf bis zu 0.3. Sie bestätigen die klassische Annahme der Proportionalität $A_r \propto N$ bei geringer Normalbelastung.

Auf der Grundlage einer statistischen Auswertung verschiedener Versuchsergebnisse zur Bestimmung der realen Kontaktfläche wird von *Woo/Thomas* [116] ebenfalls eine exponentielle Beziehung nach (2.3) mit $c_o = 1$ angegeben. Die Regressionsanalyse der Versuchsergebnisse ergibt einen Mittelwert von $m \approx 0.8$.

2.2 Gleitreibung

Aufgrund der Komplexität und Vielzahl der Einflussfaktoren bei der trockenen Gleitreibung wird in der Bestimmung einer spezifischen Reibkraft τ bzw. des Reibwerts μ nur ein isolierter Teilbereich des tribologischen Gesamtsystems berücksichtigt. In *Kragelski et al.* [65, 66] und *Polzer/Meissner* [91] lassen sich Aussagen zur Last-, Temperatur- und Zeitabhängigkeit von μ sowie Tendenzen zum Einfluss des Werkstoffs und des umgebenden Mediums finden. Infolge der Unstetigkeit des Kontakts zweier Festkörper beruht die Berechnung des Tangentialwiderstands in erster Näherung auf der integralen Erfassung der Widerstände. Die additive Aufspaltung des Reibwerts nach Gleichung (2.4)

$$\mu \approx \mu_{ad} + \mu_{def} = \underbrace{\left(\frac{\tau_o}{p_r} + \beta \right)}_{\mu_{ad}} + \underbrace{k \sqrt{\frac{h}{R}}}_{\mu_{def}} \tag{2.4}$$

wird auf den in unterschiedlicher Tiefe ablaufenden Adhäsions- und Deformationsprozessen begründet und führt auf den Begriff der Doppelnatur der Reibung. In der Adhäsionskomponente μ_{ad} werden die Bindungskräfte, in der Deformationskomponente μ_{def} der Formänderungswiderstand in den Mikrokontakten berücksichtigt.

Die Anfangsscherfestigkeit τ_o, die Normalpressung p_r sowie ein experimentell zu bestimmender Druckkoeffizient β bestimmen die Adhäsionskomponente. Der Druckkoeffizient β berücksichtigt die Vergrößerung der Scherfestigkeit infolge des anliegenden Normaldrucks. Im Deformationsanteil wächst der Reibwert über das Verhältnis der Eindringtiefe h zum mittlerem Rauigkeitsradius R und einem Parameter k, der die Art der Deformation erfasst. Für viele Oberflächen kann in erste Näherung vereinfacht mit $k = 0.4$ bei plastischem und $k = 0.2\,\alpha_g$ bei elastischem Kontakt gerechnet werden. Der Koeffizient der elastischen Hystereseverluste α_g gibt dabei das Verhältnis der bei elastischen Deformationen eines Werkstoffs in Wärme umgewandelten Arbeit zur aufgewendeten Gesamtenergie an (gehärteter Stahl $\alpha_g = 0.01$, Baustahl $\alpha_g = 0.05$, Gummi $\alpha_g = 0.35$ aus [91]). *Wuttke* [120] und *Polzer/Meissner* [91] geben für τ_o und β Werte im Bereich von $9 \leq \tau_o \leq 1600$MPa,

$0.014 \leq \beta \leq 0.24$ sowie für eine Stahl/Stahlpaarung bei trockener Reibung $\tau_o = 80\text{MPa}$ und $\beta = 0.42$ an. *Tabor* [106] beobachtet für Metalle $\mu_{ad} \geq \beta$ und für Nichtmetalle $\mu_{ad} \ll \beta$. In Abbildung 2.5 ist die prinzipielle Abhängigkeit des Reibwerts von der Normalbelastung dargestellt.

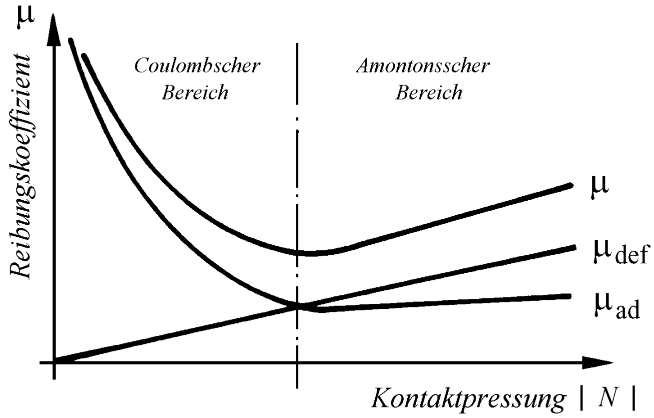


Abb. 2.5: Abhängigkeit des Reibwerts von der Normalbelastung (*Polzer/Meissner* [91])

Bei geringer Belastung bestimmt die Adhäsionskomponente den Reibwert. Mit steigender Druckbelastung nimmt die Adhäsionskomponente ab. Erreicht die Druckspannung die Fließspannung des Materials wird der Kontakt plastisch und der Adhäsionsanteil bleibt näherungsweise konstant. Bei hoher Druckbelastung ist ein Zuwachs nur über den Deformationsanteil möglich. Je kleiner der Adhäsionsanteil des Reibwerts ist, desto flacher ist der linke Kurventeil und um so weniger ausgeprägt zeigt sich ein Minimum in der Abhängigkeit des Reibwerts von der Belastung. Das Minimum kennzeichnet den Übergang vom elastischen zum plastischen Kontakt.

Nach *Wuttke* [120] ist die Berücksichtigung der Deformationskomponente μ_{def} bei technischen Reibsystemen schwierig, da die konkreten geometrischen Kontaktbedingungen während des Gleitens sowie das Festigkeitsverhalten rauer Werkstoffoberflächen kaum bekannt sind. *Kragelski* [65] weist darauf hin, dass μ_{ad} experimentell für die konkreten Bedingungen zu ermitteln ist, da eine Abschätzung mit tabellarisierten Werten β und τ_o zu beachtlichen Abweichungen mit dem wirklichen Reibwert führen kann.

In *Kragelski et al.* [66] sind weitere analytische Beziehungen für den Reibwert nach (2.4) in Abhängigkeit von der Kontaktart und den Kontaktbedingungen tabellarisch zusammengestellt. Bei nicht allzu großer Belastung und eher glatten Oberflächen kann bei hochelastischen Werkstoffen die Deformationskomponente in der Herausbildung der Reibkräfte vernachlässigt werden.

Neben der Formulierung des Reibwerts auf der Adhäsions-Deformationstheorie wurde erstmals in *Kragelski et al.* [66], auf der Basis von Untersuchungen am Kontakt Rad-Schiene, eine parabolische Funktion für den Haftreibwert

$$\mu_H = -1.865\ \mu_G^2 + 1.48\ \mu_G + 0.048 \tag{2.5}$$

im einem Gleitreibwert von $0.28 \leq \mu_G \leq 0.6$ angegeben. Eine empirische Beziehung für den Haftreibwert μ_H für Stahloberflächen wurde auch von *Ghabrial/Zaghlool* [32] entwickelt

$$\mu_H = 0.12 + 0.8\ g_n^\epsilon + 10^{-4}[\ 18\ \theta + 60\ log(\zeta)\ ] \quad . \tag{2.6}$$

Hier wird in Abhängigkeit vom Neigungswinkel θ der Mikrounebenheiten vor der Oberflächenbearbeitung durch den Kontakt, dem Koeffizienten der gegenseitigen Annäherung $0 \leq g_n^\epsilon \leq 0.02\mu m$ und einem Prozessparamter ζ für die Art der Oberflächenbearbeitung (in den ein Oberflächenglättungsindex sowie die Standardabweichung der Rauigkeitsspitzen eingeht) der Reibwert berechnet.

Da es über die Wechselwirkungsmechanismen in gleitendem, rollendem oder bohrendem Festkörperkontakt noch keine endgültige Klarheit gibt (*Wuttke* [120], *Krim* [67]), existiert eine allgemeingültige quantitative Theorie der Reibung derzeit noch nicht.

2.3 Rollreibung

Wird im Vergleich zur Gleitreibung die Relativbewegung durch eine Rollbewegung verursacht, wird in Analogie zur Gleitreibung der Begriff der Rollreibung verwendet [105]. Beim Rollkontakt wird zwischen der Haftreibung, die das Durchdrehen einer Rolle verhindert, und der eigentlichen Rollreibung unterschieden.

Die Einführung des Begriffs der Rollreibung basiert auf der Kontaktkinematik und den Kontakt-Spannungsbedingungen beim Rollkontakt. Dabei sind die tribologischen Gleitreibungsmodelle zur Erklärung der in der Kontaktzone entstehenden Widerstandskräfte nach *Czichos* [21] nur bedingt anwendbar. Dies liegt zum einen daran, dass sich die Rollreibung nicht durch eine Oberflächenschmierung reduzieren lässt und zum anderen in den Besonderheiten der Roll-Interface-Kinematik. So findet der Prozess des Zusammentreffens und des sich Lösens von Oberflächenelementen im Rollkontakt nicht tangential, sondern hauptsächlich in Richtung der Oberflächennormalen statt, so dass der Adhäsionseigenschaft und der Scherfestigkeit der Reibverbindungen eine eher untergeordnete Rolle zukommen. Die Widerstandskräfte, die einer Rollbewegung entgegenwirken, entstehen im Wesentlichen durch die geometrische Imperfektion des Rollkörpers, die Rauigkeit der Kontaktflächen, die elasto-plastischen Deformationen des Rollkörpers und der Rollbahn, die elastischen Hystereseerscheinungen sowie die Reibwirkung in den Haft- und Mikrogleitabschnitten der Kontaktfläche.

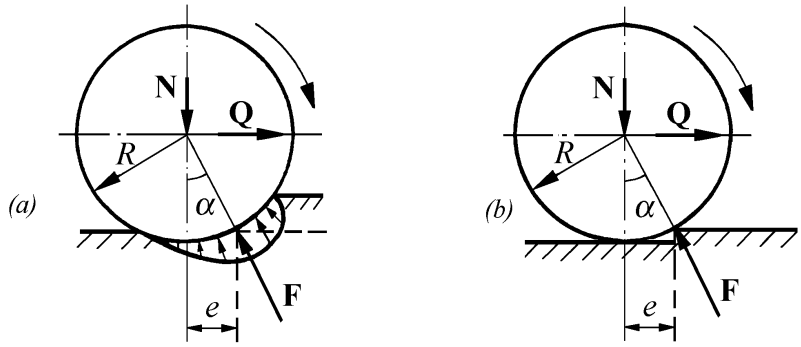


Abb. 2.6: Darstellung der Kräfteverhältnisse am rollenden Rad (a) und seiner Modellbildung (b) (*Polzer/Meissner* [91])

Die Vielfältigkeit und Komplexität der vorhandenen Rollsysteme und Rollmechanismen hat zur Folge, dass die Entstehungsprozesse sowie die Bestimmung geeigneter physikalischer Größen zur Beschreibung der Rollreibung und der dort vorliegenden Kräfteverhältnisse noch immer auf der klassischen Betrachtung eines ideal glatten, starren Rades, das auf einer Ebene mit gleichmäßiger Geschwindigkeit rollt (Abbildung 2.6) beschrieben werden. Experimentelle Arbeiten in *Kragelski* [65] und *Johnson* [49] zeigen, dass die Rollreibung durch die Oberflächenrauigkeit, die Normalbelastung, die Rollenradien und die Materialeigenschaften beeinflusst wird. So zeigt sich mit abnehmender Oberflächenrauigkeit ($3.0 \rightarrow 0.025\,\mu m$) eine Verringerung des Rollwiderstands um das Zwei- bis Dreifache. Studien von *Atala/Rowe* [4] verdeutlichen, dass die Rauigkeit der Oberflächen im Rollkontakt schnell abnimmt, ihre Welligkeit aber länger vorhanden bleibt. Im Rollprozess wurden die Unebenheiten dabei hauptsächlich durch plastische Deformationen geglättet.

Untersuchungen zur Entstehung der Rollwiderstandskräfte in *Johnson* [50] zeigen, dass sich die Kontaktfläche in Abhängigkeit vom betrachteten Rollsystem aus unterschiedlichen Haft- und Mikrogleitabschnitten zusammensetzen kann, wobei die Ausbildung von

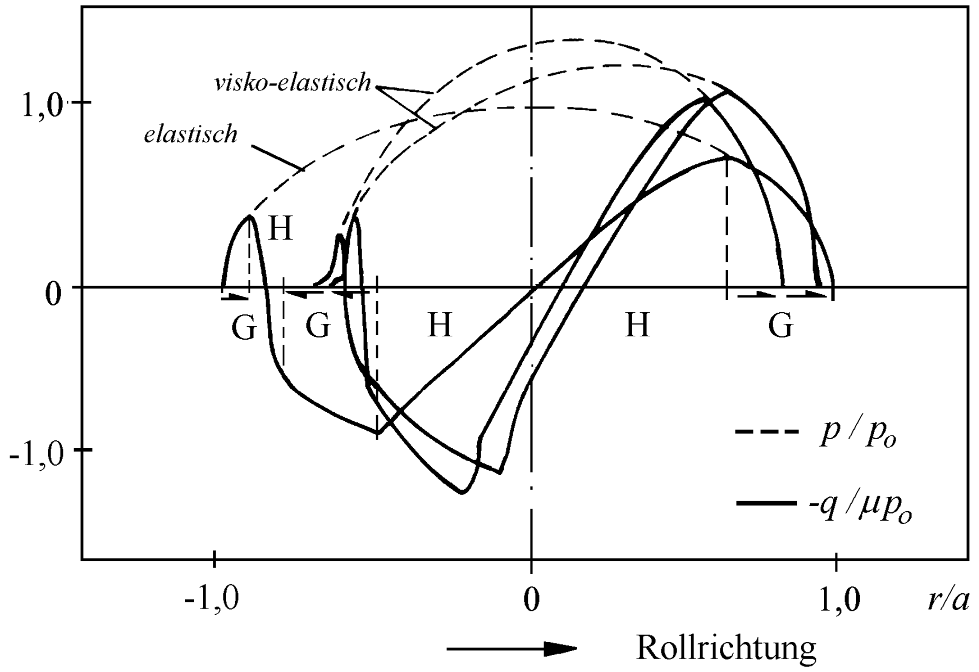


Abb. 2.7: Verteilung der Normal- und Tangentialspannungen, der Haft- und Mikrogleitzonen beim Rollkontakt visko-elastischer Walzen (*Wang* [114])

Haft- und Mikrogleitzonen beim Abrollen als Schlupf bezeichnet wird. Form, Größe und Anordnung der Haft- und Mikrogleitabschnitte sind von den Materialeigenschaften und der Gleitreibung in der Kontaktzone abhängig. Analytische Lösungen über Größe, Form und Lage der Haft- und Mikrogleitzonen in der Kontaktfläche sind dabei auf den elastischen Rollkontakt begrenzt, da visko-elastische Werkstoffeigenschaften sowie inelastisches Verhalten der Kontaktkörper zu einer asymmetrischen Verteilung der Kontaktpressung beim Rollkontakt führen (Abbildung 2.7). Unter Vernachlässigung der Mikrogleitanteile wird die Entstehung des Rollwiderstands auf der Deformation des vor dem rollenden Körpers gelegenen Werkstoffs begründet.

Analysen des oberflächennahen Materialverhaltens zeigen, dass durch wiederholte Rollkontaktbeanspruchung eine zyklische Be- und Entlastung in den Elementen des Grundkörpers einsetzt (Abbildung 2.8). Dabei werden die Werkstoffbereiche, die im Einlaufbereich der Kontaktfläche liegen, stärker belastet als die im Auslaufbereich. Dies führt zu einer Verlagerung des Druckzentrums vor den Mittelpunkt der Kontaktfläche. Es entsteht ein Drehmoment, das dem Vorwärtsrollen entgegenwirkt und einen Rollwiderstand entstehen lässt. Eine genauere Erfassung des Rollwiderstands bei inelastischen Rollprozessen basiert

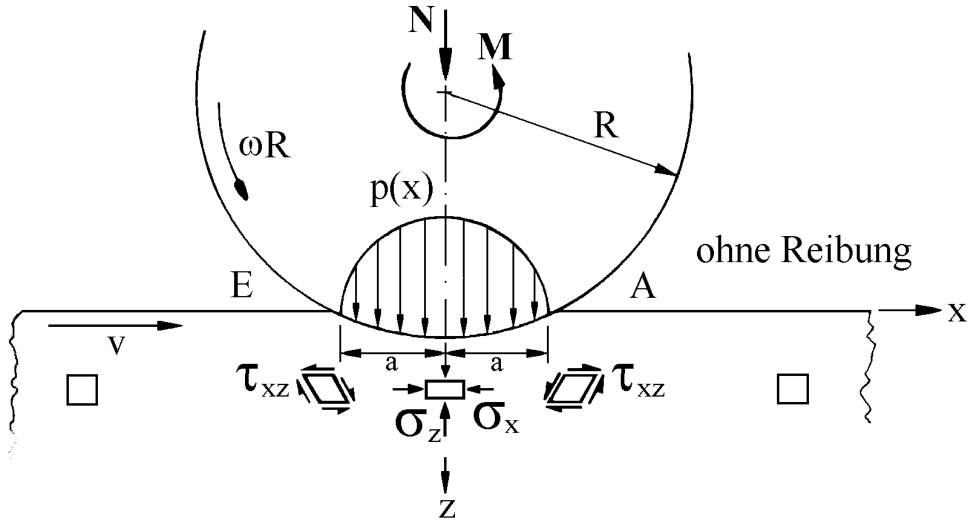


Abb. 2.8: Oberflächenbeanspruchung beim Rollkontakt eines Zylinders mit einem elasto-plastischen Halbraum (Johnson [50]*)*

deshalb auf dem Materialantwortverhalten der Oberflächenstruktur während des Rollprozesses. Studien zum Rollmechanismus von *Eldrege/Tabor* [26], *Merwin/Johnson* [81] und *Tabor* [105] zeigen die Abhängigkeit des Rollwiderstands von der Belastungsgeschichte. So sinkt der Rollwiderstand von der ersten Rollbelastung mit jedem weiteren Rollbelastungszyklus, bis sich ein stabiler Rollwiderstand auf der eingelaufenen Oberfläche einstellt. Die Untersuchungen von *Johnson* [50, 51] zeigen, dass der Rollwiderstand durch inelastische Deformationen der Kontaktoberflächen und durch die Ausbildung von Mikrogleitzonen zwischen ihnen entsteht. Eine Reduzierung der Kontaktflächengröße, verursacht durch steifere Werkstoffpaarungen oder Reduzierung der Oberflächenkonformität, führt zu einer Reduzierung des Rollwiderstands bei gleichzeitigem Anwachsen der Kontaktspannungen. Aufgrund des inelastischen Materialverhaltens ist der wiederholte Rollkontakt mit Materialverfestigungen in den oberflächennahen Bereichen sowie der Entstehung von Eigenspannungen und der Glättung der geometrischen Oberflächenstruktur begleitet. Beim wiederholten Rollkontakt wird die Oberflächenstruktur durch eine Kombination aus vorhandenen Eigen- und Kontaktspannungen beansprucht, die zu differenzierten Deformationsvorgängen in der Kontaktzone führen.

Aufgrund der Komplexität der in den Oberflächenbereichen auftretenden Deformationen wurden in Abhängigkeit der Beanspruchung des ersten Rollbelastungszyklus theoretische Materialantwortkurven, wie in Abbildung 2.9 dargestellt, konstruiert. Dabei werden die möglichen Materialantworten unterteilt in:

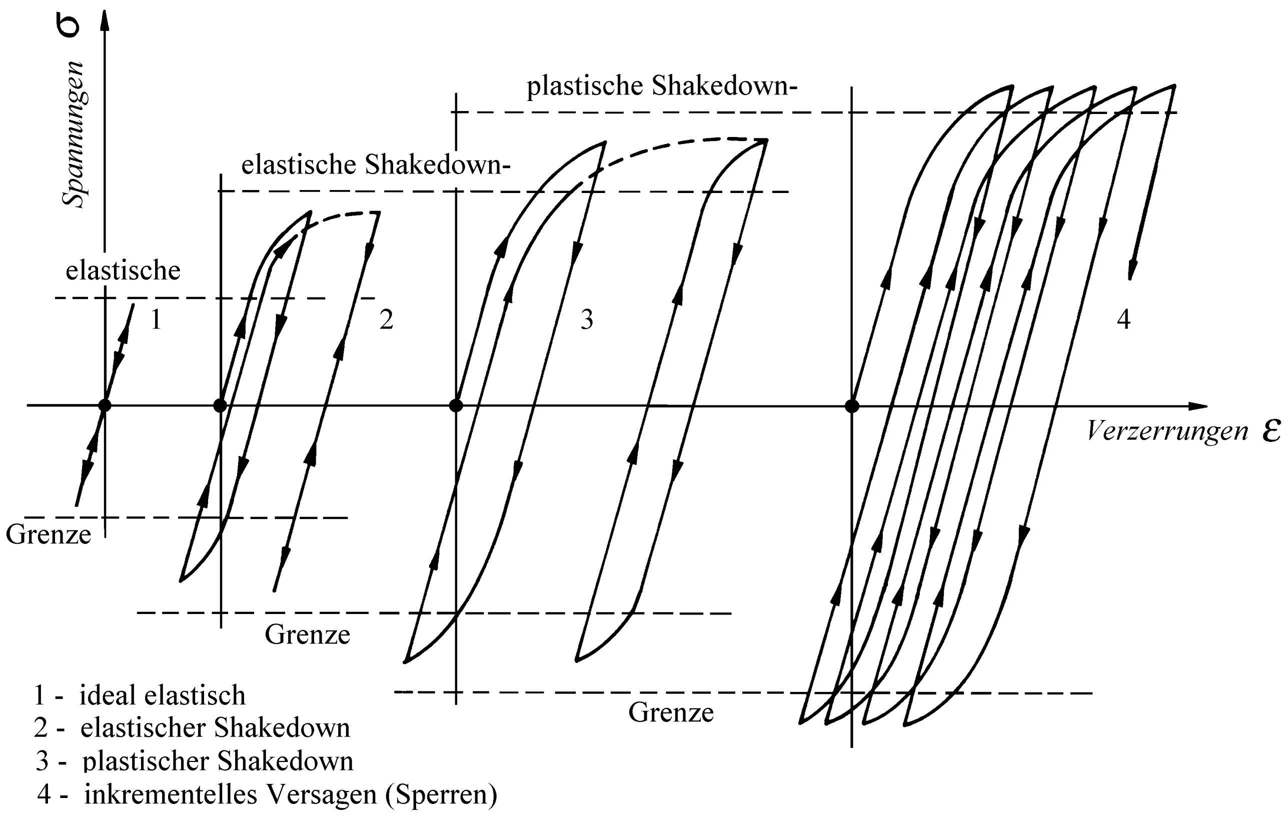


Abb. 2.9: Reproduktion der Materialbeanspruchungskurven bei zyklischer Rollkontaktbeanspruchung (Johnson [50, 51])

1 *Ideal elastisches Verhalten der Oberflächenstruktur*, wenn bei wiederholter Rollbelastung die Spannungen unterhalb der Fließgrenze der Werkstoffe bleiben.

2 *Elastischer Shakedown*, wenn in der Erstbelastungsphase Fließen und Verfestigungen des Oberflächenmaterials eintreten und weitere Rollbelastungszyklen unterhalb der in der Erstbelastungsphase erreichten maximalen Spannung, der elastischen Shakedown-Grenze, bleiben.

3 *Plastischer Shakedown*, wenn in der Erstbelastungsphase Fließen und Verfestigungen des Oberflächenmaterials eintreten und weitere Rollbelastungszyklen zu geschlossenen, stabilen, elasto-plastischen Antwortzyklen führen, die unterhalb einer plastischen Shakedown-Grenze bleiben.

4 *Inkrementeller Kollaps*. Wenn unter hoher Erstbelastung die plastische Shakedown-Grenze überschritten wird, führt dies bei wiederholter Rollbelastung zum Anwachsen der plastischen Verzerrungen in jedem weiteren Zyklus und zum Vorwärtsfließen des oberflächennahen Werkstoffs bis in eine gewisse Tiefe.

Aus den Untersuchungen eines Zylinders, der über einen elasto-plastischen Halbraum mit kinematischer Verfestigung rollt und einen Linienkontakt bildet, folgert *Johnson* [51], dass bei kleinem Reibwert ($\mu \leq 0.3$) die plastischen Deformationen in den oberflächennahen Bereichen (Abbildung 2.10) und bei großem Reibwert ($\mu > 0.3$) im Grundmaterial auftreten. Da die Eigenspannungen, die bereits durch die ersten wiederholten Überrollungen entstehen, Betrag und Ort der maximalen Beanspruchung erheblich beeinflussen, wird die Beschreibung einer Rollbeanspruchung mit der klassischen Hertz'schen Theorie als nicht ausreichend angesehen *Zwirlein/Schlicht* [123].

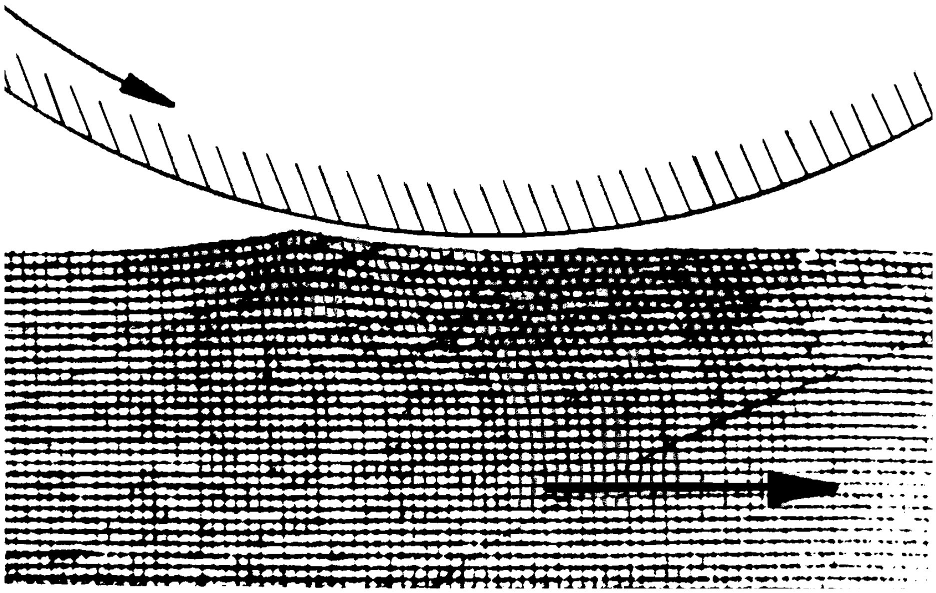


Abb. 2.10: Plastische Oberflächendeformation gegen die Rollrichtung einer Stahlrolle auf einem Kupferblock (*Johnson* [51])

3 Kontinuumsmechanische Modellbildung

3.1 Kinematik

3.1.1 Grundlagen der Kontaktkinematik

Zur Behandlung von Kontaktproblemen muss die klassische phänomenologische Beschreibung der Deformation eines materiellen Körpers auf die problemabhängige Anzahl materieller Kontinua erweitert werden. Diese werden dabei als Körper $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ in den dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ derart eingebettet, dass sie sich in ihrer unbelasteten, spannungsfreien und unverformten Referenzkonfiguration $\mathring{\mathcal{B}}$ nicht oder gerade kontaktspannungsfrei berühren. Durch Vorgabe eines Bezugssystems in $\mathbb{R}^3$, mit den Koordinaten x^i $(i = 1, 2, 3)$ und der raumfesten kartesischen Basis $\mathring{\mathbf{e}}_i$, wird jeder materielle Punkt durch ein Koordinatentripel eindeutig identifiziert und über seinen Ortsvektor dargestellt. Infolge äußerer Einwirkungen wird jeder Körper aus der Referenzkonfiguration heraus verschiedene Konfigurationen durchlaufen, die durch eine Abbildung $\chi : \mathring{\mathcal{B}} \mapsto \mathcal{B}_t \subset \mathbb{R}^3$ formalisiert wird. Eine zeitliche Aufeinanderfolge von Konfigurationen zweier Körper $\mathbb{k} = I, II$ wird lokal durch die Bewegung ihrer materiellen Punkte mit

$$\mathbf{x}^I = \chi^I(\mathring{\mathbf{x}}^I, t) \quad , \qquad \mathbf{x}^{II} = \chi^{II}(\mathring{\mathbf{x}}^{II}, t) \tag{3.1}$$

erfasst, wobei die Zeit $t \in \mathbb{R}$ als freier Parameter eingeführt wird. Wie Abbildung 3.1 veranschaulicht, kann unter Anwendung der Gleichungen in (3.1) eine gegenseitige Durchdringung der in Kontakt miteinander stehenden Körper infolge ihrer Deformation nicht verhindert werden. Die Abbildungen sind im Fall der Durchdringung injektiv, nicht mehr vollständig bijektiv. Eine zulässige Abbildung für Kontaktdeformationen analog (3.1), die eine Bijektivität hinsichtlich beider Mengen von materiellen Punkten aufrechterhalten kann, existiert nach *Kosinski* [64] und *Wendland* [115] nicht.

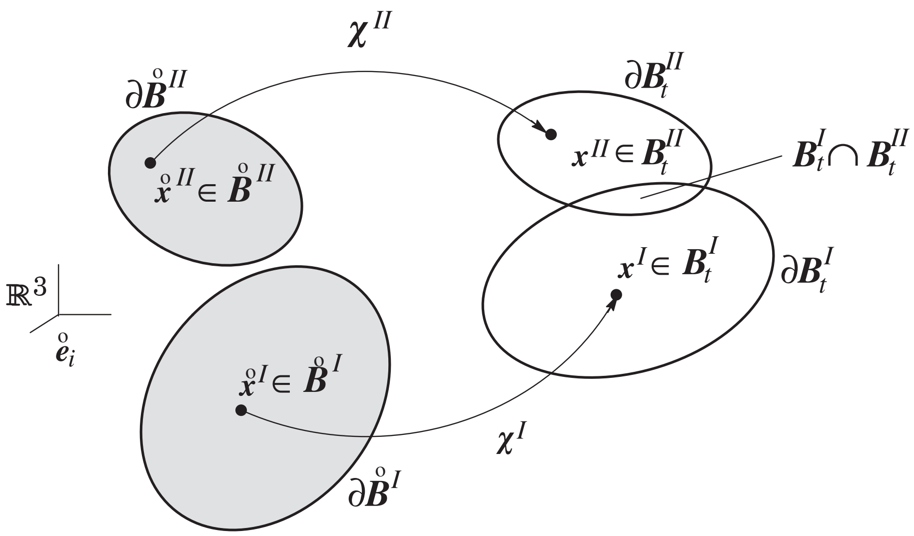


Abb. 3.1: Deformation aus der Referenz- in die Momentankonfiguration nach der Einbettung zweier materieller Körper in den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$

Nur mit Kenntnis der a priori unbekannten Kontaktfläche lassen sich inverse Abbildungen $(\Psi^{\Bbbk})^{-1} : \partial\mathcal{B}_c \mapsto \partial\mathring{\mathcal{B}}^{\Bbbk} \subset \mathring{\mathcal{B}}^{\Bbbk}$ (zur Identifikation der Lage zweier Partikel in der Referenzkonfiguration

$$\mathring{\mathbf{x}}^{I} = (\Psi^{I})^{-1}(\mathbf{x}_c, t) \quad , \qquad\qquad \mathring{\mathbf{x}}^{II} = (\Psi^{II})^{-1}(\mathbf{x}_c, t) \quad , \tag{3.2}$$

die in der Momentankonfiguration einen Kontaktpunkt $\mathbf{x}_c$ in der Kontaktfläche $\partial\mathcal{B}_c$ bilden) konstruieren *Hughes et al.* [47]). Da die reale Kontaktfläche im Allgemeinen kurzlebig, d.h. ständigen Veränderungen unterworfen ist, sind die inversen Abbildungen in (3.2) unstetig.

Damit die auf dem Deformationsgradienten entwickelten kinematischen Größen weiter verwendet werden können, müssen die Bijektivität und die materielle Undurchdringbarkeit auch bei Kontaktdeformationen erhalten bleiben bzw. erzeugt werden. Diese Forderungen führen auf die Einführung des primären kinematischen Axioms der Kontaktmechanik [47]

$$\mathcal{B}^{I} \cap \mathcal{B}^{II} = \{\} \quad . \tag{3.3}$$

Die algebraische Beziehung (3.3) stellt die geometrische Forderung auf, dass ein vom Körper $\mathcal{B}^{I}$ in der Momentankonfiguration eingenommenes Teilgebiet in $\mathbb{R}^3$ nicht gleichzeitig vom Körper $\mathcal{B}^{II}$ oder Teilen dieses Körpers eingenommen werden kann. Eine gegenseitige Durchdringung wird somit formal zumindest ausgeschlossen. Unter der Annahme bijektiver Abbildungsformen gilt

$$\Psi^{\Bbbk}(\mathring{\mathbf{x}}^{\Bbbk}, t) = \chi^{\Bbbk}(\mathring{\mathbf{x}}^{\Bbbk}, t) \qquad \forall \quad \mathring{\mathbf{x}}^{\Bbbk} \in \partial\mathcal{B}^{\Bbbk} \quad . \tag{3.4}$$

Da beide Abbildungen $\chi^{\Bbbk}$ und $(\Psi^{\Bbbk})^{-1}$ unabhängig voneinander definiert sind, stellt $\Psi^{\Bbbk}$ die Restriktion einer eingeschränkten Bewegungsmöglichkeit des Körpers $\Bbbk = I$ oder II durch die Abbildung $\chi^{\Bbbk}$ dar. Die von beiden Körperoberflächen gebildete nominelle Kontaktfläche $\partial\mathcal{B}_c$ wird als eine materielle Oberfläche bzgl. beider Punktmengen definiert

$$\partial\mathcal{B}_c = \partial\mathcal{B}^{I} \cap \partial\mathcal{B}^{II} \neq \{\} \quad , \tag{3.5}$$

die mit (3.3) von keinem materiellen Punkt überschritten werden darf. Das experimentell beobachtete und theoretisch erklärbare gleichzeitige Auftreten von mehreren Haft- und Gleitbereichen in der Kontaktfläche führt zur Aufspaltung der Kontaktfläche in

$$\partial\mathcal{B}_c := \sum_{i=1}^{n_{ca}} \partial\mathcal{B}_{ca}^{i} \cap \sum_{j=1}^{n_{cs}} \partial\mathcal{B}_{cs}^{j} \quad , \tag{3.6}$$

wobei n_{ca} die Anzahl der Haft- und n_{cs} die der Gleitzonen in $\partial\mathcal{B}_c$ angibt. Die strengen globalen algebraischen Forderungen in (3.3) und (3.5) entsprechen, wie tribologische Erkenntnisse zeigen, nicht der Natur des realen Festkörperkontakts. Gerade bei metallischen Oberflächen kann es zur Ausbildung eines *dritten* Körpers und zu dessen Zerstörung durch Abrieb, Verschleiß und somit zum Materialaustausch während des Kontakts kommen. Aufgrund der Komplexität und Kurzlebigkeit der Bildungsprozesse dieses dritten Körpers, der Schwierigkeit seiner experimentellen Erfassung und allgemein gültigen makroskopischen Beschreibung wird an den primären geometrischen Forderungen der Kontaktkinematik weiterhin festgehalten.

Abbildung 3.1 zeigt zwei Körper $\Bbbk = I, II$ vor und nach erfolgter Deformation, wobei ein unzulässigen Bereich $\mathcal{D} = \mathcal{B}^{I} \cup \mathcal{B}^{II}$ in der aktuellen Konfiguration entsteht. Ohne Berücksichtigung der Kontaktkinematik stellen beide Momentankonfigurationen a priori Gleichgewichtskonfigurationen der Körper dar. Auf der Grundlage dieser von *Chandrasekaran et al.* [16] bezeichneten *Pseudo*-Konfigurationen kann im kontinuumsmechanischen Sinn erst weiter gearbeitet werden, wenn von jedem Körper ein Teil seiner Deformation zurückgeführt werden kann, so dass eine physikalisch zulässige Kontaktkonfiguration gemäß (3.3) und (3.5) entsteht.

Die globalen geometrischen Zwangsbedingungen (3.3)-(3.5) werden durch eine lokale Abstandsfunktion $g(\chi^{I}, \chi^{II}, t)$, mit der das gegenseitige Durchdringen der Kontaktkörper in der Momentankonfiguration post festum erfasst werden kann, mathematisch umgesetzt. Geeignete Abstandsmaße werden dabei erst im Rahmen des zur Lösung des Kontaktproblems verwendeten räumlichen Diskretisierungsverfahrens und der mit ihr einhergehenden Oberflächendiskretisierung formuliert und linearisiert *Eterovic/Bathe* [27], *Ju/Taylor* [52]. Unter Voraussetzung der Erfüllung von (3.3) und (3.5) lassen sich die kontinuumsmechanischen Grundlagen auch auf Festkörperkontaktprobleme in der Form anwenden, dass jeder Körper als eigenes Kontinuum betrachtet wird und die Kontaktfläche als Interface die Feldprobleme miteinander koppelt. Die Identifizierung einer Feldgröße mit einem Kontinuum über den Index $\Bbbk$ soll in den folgenden Darstellungen erst wieder Verwendung finden, sobald für die Beschreibung der Kontaktmechanik eine Unterscheidung einzelner Kontinuua notwendig wird.

3.1.2 Deformation

Die zentrale Größe zur Beschreibung der bei einer Deformation auftretenden lokalen kinematischen Veränderungen sind der materielle Deformationsgradient $\mathbf{F}(\mathring{\mathbf{x}}, t)$ und der räumliche Geschwindigkeitsgradient $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$. Der Deformationsgradient entwickelt sich aus (3.1) über die partielle Ableitung des Ortsvektors $\mathbf{x}$ nach den materiellen Koordinaten. Über den Nabla-Operator lässt sich $\mathbf{F}$ in Form eines dyadischen Produktes

$$\mathbf{F}(\mathring{\mathbf{x}}, t) := (\mathbf{x} \otimes \nabla_{\mathring{\mathbf{x}}}) = \operatorname{Grad} \chi(\mathring{\mathbf{x}}, t) \tag{3.7}$$

oder in der Betrachtung der Differentiale der Ortsvektoren

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}\, d\mathring{\mathbf{x}} \tag{3.8}$$

als linearer Operator definieren. Mit der Existenz der Inversen von $\mathbf{F}$ ist für die Jacobi-Determinate $J = \det \mathbf{F} \neq 0$ zu fordern. Zur Berechnung der Komponenten des Deformationsgradienten wird ein Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}(\mathring{\mathbf{x}}, t) = \chi(\mathring{\mathbf{x}}, t) - \mathring{\mathbf{x}} \tag{3.9}$$

eingeführt und (3.7) mit (3.1) in der Form

$$\mathbf{F}(\mathring{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{1} + \operatorname{Grad}\mathbf{u} \tag{3.10}$$

darstellbar. Über die materielle Zeitableitung von (3.8) entsteht der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\, d\mathring{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\, d\mathbf{x} \quad . \tag{3.11}$$

Im Gegensatz zu $\mathbf{F}$, der ein materielles Linienelement $d\mathring{\mathbf{x}}$ in die Momentankonfiguration transformiert, wirkt $\mathbf{L}$ auf das Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration und bestimmt seine Geschwindigkeitsänderung.

3.1.3 Starrkörperkinematik

Für einen Starrkörper wird der Deformationsgradient über die polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{R}\,\mathbf{U}$ mit dem orthogonalen Rotationstensor $\mathbf{R}$ identisch, da im Fall reiner Starrkörperdeformationen die Linienelemente $d\mathbf{x}$ bzgl. der Referenzkonfiguration unverzerrt ($\mathbf{U} = \mathbf{1}$) bleiben müssen. Für $\mathbf{L}$ entsteht die Identität mit dem antisymmetrischen Drehgeschwindigkeitstensor $\mathbf{W}$, dem über das äußere Produkt ein Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$

$$\mathbf{W}\;d\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{x} = d\dot{\mathbf{x}} \tag{3.12}$$

zugeordnet werden kann. Der Drehgeschwindigkeitsvektor legt die aktuelle Lage der Drehachse im Raum fest. Für einen Punkt $\mathbf{x}$, der den Abstand $d\mathbf{x}$ vom momentanen Drehpol hat, gibt (3.12) die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes an. $d\dot{\mathbf{x}}$ hat dabei die Richtung der Normalen, die auf der von $\boldsymbol{\omega}$ und $d\mathbf{x}$ aufgespannten Ebene steht.

Da Translationsbewegungen durch $\mathbf{F}$ nicht erfasst werden, wird zur Beschreibung der Gesamtbewegung eines Starrkörpers $\mathcal{B}$ ein intrinsisches kartesisches KOS eingeführt und zweckmäßigerweise im Schwerpunkt S von $\mathcal{B}$ verankert. Die Orientierung der raumfesten Basis $\mathring{\mathbf{e}}_i$ lässt sich über den eigentlich orthogonalen Drehtensor $\mathbf{Q}$ in die intrinsische Basis $\mathbf{e}_i$ gemäß

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\,\mathring{\mathbf{e}}_i \tag{3.13}$$

in Beziehung setzen. Mit dem Ursprungsvektor $\mathbf{x}_r$, der die Verschiebung des raumfesten zum intrinsischen KOS erfasst, kann die Lage eines Punktes $\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{Q}^T\,\mathbf{r} = \mathbf{x}_r + \hat{\mathbf{r}} \tag{3.14}$$

und über die Zeitableitung seine Geschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_r + \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}} \tag{3.15}$$

angegeben werden. Der Ortsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ beschreibt dabei die Lage des Punktes $\mathbf{x}$ bzgl. des intrinsischen KOS mit der Komponentendarstellung bezogen auf das raumfeste KOS. Die

Komponentendarstellung von $\hat{\mathbf{r}}$ bzgl. des intrinsischen KOS folgt analog (3.13) aus

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}\,\hat{\mathbf{r}} \quad . \tag{3.16}$$

Durch (3.15) wird die Geschwindigkeit eines Punktes $\mathbf{x}$ in eine Translationsgeschwindigkeit des Bezugspunktes $\dot{\mathbf{x}}_r$ des intrinsischen Basissystems und in eine Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ bei festgehaltenem Bezugspunkt S aufgespalten.

3.1.4 Kinematik des Rollprozesses

Eine reale Modellbildung der Bewegung des Richt- oder Walzguts durch die Richt- bzw. Walzanlage, ist hinsichtlich der numerischen Umsetzung durch einer materiellen Beschreibung schwierig. In der mathematischen Modellbildung wird deshalb der Rollprozess als Bewegung der starren Rollen über das deformierbare Richt- oder Walzgut dargestellt. In dieser Modellbildung muss ein Anstellprozess der Rollen der eigentlichen Rollkinematik vorgeschaltet werden, um z.B. die einzelnen Richtrollen in den gewünschten Anstellgrad des Richtprozesses zu bringen. In der Modellbildung der Drehbewegung wird der raumfeste Drehpol einer Richtrolle S zu einem momentanen Drehpol M in der Kontaktfläche. Findet eine gleitfreie Drehbewegung statt, beschreibt die Bahnkurve eines Oberflächenpunktes der Richtrolle eine gewöhnliche Zykloide. Über die Abwicklung des tatsächlich zurückgelegten Rollweges kann die Rotationsbewegung als eine äquivalente Translation der Rollenachse über (3.15) dargestellt werden. Zur Modellierung des Rollenrichtprozesses verbleiben somit die Anstellphase und die Rotationsphase der Rollen, für die jeweils eine Abstandsfunktion zur Prüfung der Kontaktkinematik aufgestellt werden muss.

Unter Anwendung eines Zylinderkoordinatensystems (ZKOS) wird die Lage eines beliebigen Punktes (Index s) auf der Rolloberfläche $\mathbf{x}_s^{II} \in \partial\mathcal{B}^{II}$ über den Ortsvektor bzgl. des intrinsischen ZKOS

$$\mathbf{x}_s^{II} = \mathbf{r}_s(\theta^\alpha) = x^i(\theta^\alpha)\,\mathring{\mathbf{e}}_i \tag{3.17}$$

darstellbar. Über die partiellen Ableitungen von (3.17) entsteht in bekannter Weise ein ortsabhängiges Dreibein mit den kovarianten Tangentenvektoren

$$\mathbf{a}_\alpha^{II} = \mathbf{r}_{s,\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial \theta^\alpha} \quad , \qquad \mathbf{e}_{t_\alpha} = \frac{\mathbf{a}_\alpha^{II}}{\|\, \mathbf{a}_\alpha^{II} \,\|} \tag{3.18}$$

und dem Normaleneinheitsvektor

$$\mathbf{n}^{II} = \mathbf{e}_{t_1} \times \mathbf{e}_{t_2} \; . \tag{3.19}$$

Mit Hilfe der kovarianten Koeffizienten des Metrik- und des Krümmungstensors

$$m^{II}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}^{II}_{\alpha} \bullet \mathbf{a}^{II}_{\beta} \quad , \qquad b^{II}_{\alpha\beta} = \mathbf{n}^{II} \bullet \mathbf{a}^{II}_{\alpha,\beta} \tag{3.20}$$

lassen sich die metrischen Eigenschaften der Oberfläche charakterisieren. Hat sich eine Kontaktzone zwischen Rolle und Richt- bzw. Walzgut ausgebildet, so kann unter Einbeziehung des intrinsischen ZKOS die Lage der Oberflächenpunkte, die in der Kontaktfläche liegen, analog (3.14) mit

$$\mathbf{x}^{I}_{c} = \mathbf{x}^{II}_{r} + \hat{\mathbf{r}}_{c} \qquad \forall \;\; \mathbf{x}^{I}_{c} \in \partial\mathcal{B}_{c} \quad , \tag{3.21}$$

$$\mathbf{x}^{II}_{s} = \mathbf{x}^{II}_{r} + \hat{\mathbf{r}}_{s} \qquad \forall \;\; \mathbf{x}^{II}_{s} \in \partial\mathcal{B}_{c} \tag{3.22}$$

angegeben werden. Hierbei beschreibt $\mathbf{x}^{II}_{r} \in \mathcal{B}^{II}$ die aktuelle Lage der Rollenachse, $\hat{\mathbf{r}}_{c}$ die Lage eines Punktes (Index c) des Richtguts $\mathbf{x}^{I}_{c} \in \partial\mathcal{B}_{c}$. Für ihre Geschwindigkeiten folgt

$$\dot{\mathbf{x}}^{I}_{c} = \dot{\mathbf{x}}^{II}_{r} + \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{c} = \dot{\mathbf{x}}^{II}_{r} + \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{\mu} \qquad \forall \;\; \mathbf{x}^{I}_{c} \in \partial\mathcal{B}_{c} \quad , \tag{3.23}$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{II}_{s} = \dot{\mathbf{x}}^{II}_{r} + \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{s} = \dot{\mathbf{x}}^{II}_{r} + \boldsymbol{\omega}^{II} \times \hat{\mathbf{r}}_{s} \qquad \forall \;\; \mathbf{x}^{I}_{s} \in \partial\mathcal{B}_{c} \quad . \tag{3.24}$$

Der zweite Term der rechten Seite $\dot{\hat{\mathbf{r}}}_{\mu}$ berücksichtigt eine Geschwindigkeitsänderung von $\mathbf{x}^{I}_{c}$ infolge Gleitbewegungen. Dieser Term verschwindet im Fall eines Haftkontakts $\mathbf{x}^{I}_{c} = \mathbf{x}^{II}_{s}$ bzw. $\hat{\mathbf{r}}_{c} = \hat{\mathbf{r}}_{s}$, so dass nach einer zeitlichen Integration der Verschiebungspfade die Wege der Oberflächenpunkte von $\mathbf{x}^{II}_{s}$ und $\mathbf{x}^{I}_{c}$ identisch sind. Somit gilt im Fall einer gleitfreien Kontaktbewegung

$$\dot{\mathbf{x}}^{I}_{c} = \dot{\mathbf{x}}^{II}_{s} = \dot{\mathbf{x}}^{II}_{r} + \boldsymbol{\omega}^{II} \times \hat{\mathbf{r}}_{s} \qquad \forall \quad \mathbf{x}^{II}_{s} = \mathbf{x}^{I}_{c} \in \partial\mathcal{B}_{c} \quad . \tag{3.25}$$

Der Gedanke, dass im Haftkontakt eine eindeutige Zuordnung von Kontaktpunkten möglich ist, wird zur Konstruktion der a priori unbekannten Kontaktfläche zwischen Rolle und Richtgut ausgenutzt. Da die Kontaktfläche bzw. die Kontaktpunktpaarungen zunächst unbekannt sind, müssen diese - über ihre unbekannten Durchstoßpunkte - konstruiert werden. Die Konstruktion der Durchstoßpunkte wird für die jeweiligen Prozessphasen im Folgenden näher erläutert.

3.1.4.1 Kontaktkinematik der Anstellphase

In der Anstellphase $\boldsymbol{\omega}^{II} = \mathbf{0}$ bildet sich mit fortschreitender Anstellung eine gekrümmte Kontaktoberfläche zwischen dem deformierbaren Körper $\mathcal{B}^{I}$ und der Rolle $\mathcal{B}^{II}$ aus. Die Krümmung der Rolle bestimmt dabei die Form der Kontaktoberfläche, unbekannt bleibt ihre Größe.

Durch Vorgabe eines Richtungsvektors der Bewegung $\hat{\mathbf{a}}$, z.B. der Anstellrichtung, und $\hat{\mathbf{e}}_t = \mathbf{e}_3 \times \hat{\mathbf{a}}$ lässt sich unter Auswertung der Nebenbedingungen

$$(\mathbf{r}_c - \overset{*}{\mathbf{r}}_s) \bullet \hat{\mathbf{e}}_t = 0 \quad , \tag{3.26a}$$

$$\| \overset{*}{\mathbf{r}}_s \| = \| \mathbf{r}_s \| \tag{3.26b}$$

mit (3.21) der unbekannte Durchstoßpunkt bestimmen. In Analogie der Bewegung von Kontaktpunkten in einer Haftzone nach (3.25) motiviert sich (3.26a) über die Konstruktion einer fiktiven Rollenkonfiguration $\overset{*}{\mathcal{B}}$, in (Abb. 3.2) als *Strich-Punkt-Linie* dargestellt.

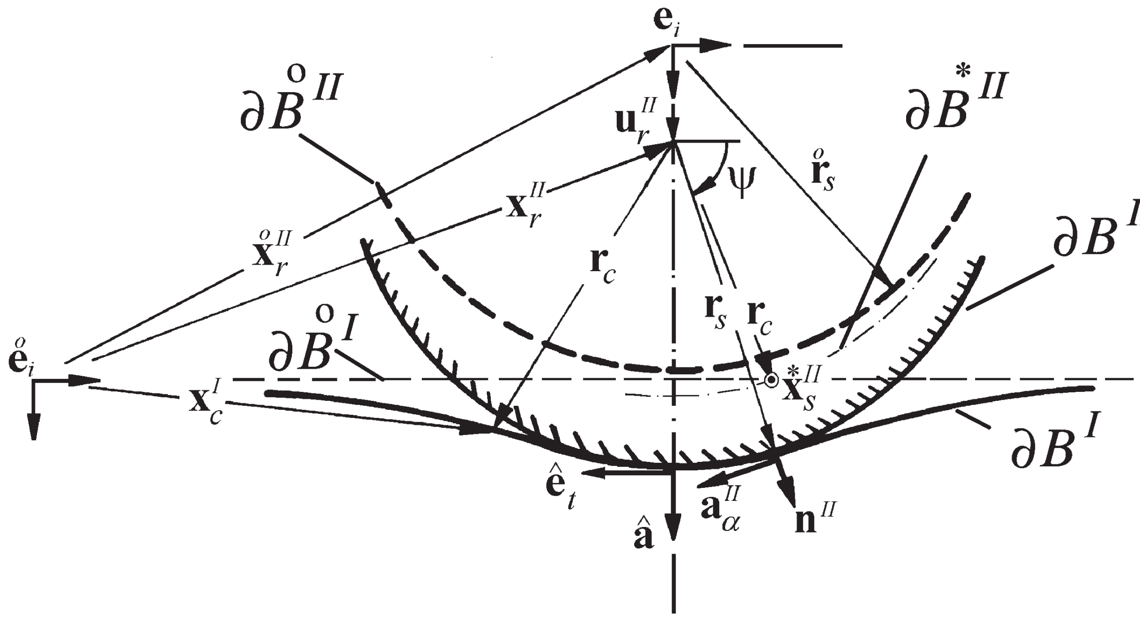


Abb. 3.2: Kontaktkinematik infolge einer Durchdringung der Kontaktkörper in der Anstellphase

Dabei stellt $\overset{*}{\mathbf{r}}_s$ den fiktiven Ortsvektor dar, der den fiktiven Erstkontakt des Kontaktpunktes $\mathbf{x}_c^I$ mit der Rollenoberfläche im unbekannten Durchstoßpunkt $\overset{*}{\mathbf{x}}{}_s^{II}$ von (3.26a) beschreibt. Da der Anstellweg aus der vorgegebenen fiktiven Rollenkonfiguration in die Momentankonfiguration nun bekannt ist, ist auch der Verschiebungspfad von $\overset{*}{\mathbf{x}}{}_s^{II}$ eindeutig bestimmbar. Unter der Annahme eines über den Verschiebungsweg beständigen Haftkontakts zwischen $\mathbf{x}_c^I$ und $\overset{*}{\mathbf{x}}{}_s^{II}$ wird der Verschiebungspfad von $\mathbf{x}_c^I$ mit dem von $\overset{*}{\mathbf{x}}{}_s^{II}$ identisch. Mit der Projektion der Vektordifferenz bzgl. der Anstellrichtung

$$g_a = (\mathbf{r}_c - \overset{*}{\mathbf{r}}_s) \bullet \hat{\mathbf{a}} \tag{3.27}$$

lässt sich so der kinematische Kontaktzustand jedes potentiellen Kontaktpunktes $\mathbf{x}_c^I$ durch die Fallunterscheidung in den Zustandsmengen

$$\textit{Penetration:} \quad I_p = \{ \mathbf{x}_c^I \mid g_a < 0 \, ; \quad \mathbf{x}_c^I \in \mathcal{B}^I \cap \mathcal{B}^{II} \} \tag{3.28a}$$

$$\textit{Kontakt:} \quad I_c = \{ \mathbf{x}_c^I \mid g_a = 0 \, ; \quad \mathbf{x}_c^I \in \partial \mathcal{B}_c \} \tag{3.28b}$$

$$\textit{Gap:} \quad I_g = \{ \mathbf{x}_c^I \mid g_a > 0 \, ; \quad \mathbf{x}_c^I \in \mathcal{B}^I \setminus \mathcal{B}^{II} \} \tag{3.28c}$$

definieren. Punkte, die zur Menge I_p gehören, erweitern die Menge I_c der aktiven Kontaktpunkte. Eine alternative Vorgehensweise liegt in der Verwendung der kinematischen Kontaktbedingung

$$g_n = (\mathbf{r}_c - \overset{*}{\mathbf{r}}_s) \bullet \mathbf{n}_c \quad , \tag{3.29}$$

die analog (3.27) den Kontaktzustand in den Zustandsmengen (3.28a)-(3.28c) liefert. Das Abstandsmaß g_n in (3.29) wird hier im Gegensatz zu (3.27) in klassischer Weise entlang der Oberflächennormalen $\mathbf{n}_c = \mathbf{n}^{II}$ gemessen. Da die Oberflächennormale nur in einem Punkt mit der Bewegungsrichtung $\mathbf{n}_c = \hat{\mathbf{a}}$ übereinstimmt, ergeben sich aus (3.27) und (3.29) unterschiedliche Abstandsmaße. Aufgrund des noch unbekannten Kontaktspannungszustands liefern die beiden geometrischen Abstandsmessungen (3.27) und (3.29) unterschiedliche Ansätze zur Approximation des unbekannten Kontaktverschiebungsfeldes. Da der Ansatz in (3.27) sich physikalisch über die Bewegungsrichtung der Rolle motiviert, wird er als der sinnvollere Ansatz für eine numerische Umsetzung angesehen.

3.1.4.2 Kontaktkinematik der Rollphase

Bei einer gleichförmigen Drehbewegung der Richtrolle um ihre raumfeste Achse kann die Geschwindigkeit der Rollenoberflächenpunkte nach (3.24) mit

$$\dot{\mathbf{x}}_s^{II} = \boldsymbol{\omega}^{II} \times \hat{\mathbf{r}}_s \tag{3.30}$$

angegeben werden. Die Bahngeschwindigkeit lässt sich in der Komponentendarstellung bzgl. des ZKOS über den Rollenradius $\mathring{r}$ und den Wälzwinkel ψ mit $\boldsymbol{\omega}^{II} = \dot{\psi}\, \mathbf{e}_3$

$$\| \dot{\mathbf{x}}_s^{II} \| = \dot{s} = \mathring{r}\, \dot{\psi} \tag{3.31}$$

darstellen. Beschreibt $\mathring{\mathbf{x}}_r^{II}$ die Achslagen in der neu gewählten Referenzkonfiguration am Ende der Anstellphase, so kann die Verschiebung $\mathbf{u}_r^{II}$ der Achse bzgl. $\mathring{\mathbf{x}}_r^{II}$ aus

$$\mathbf{x}_r^{II} = \mathring{\mathbf{x}}_r^{II} + \mathbf{u}_r^{II} \tag{3.32}$$

berechnet werden. Erfolgt die Drehbewegung bei gehaltener Anstellung, ist die Richtung des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}_r$ vorgegeben. In einer konformen Abbildung der Rotationsbewegung muss der Betrag der Verschiebung der Rollenachse identisch sein mit dem im betrachteten Zeitinterval zurückgelegten Bahnweg s eines Punktes $\mathbf{x}_s^{II} \in \partial\mathcal{B}^{II}$ auf der Rollenoberfläche. Es gilt dann

$$\dot{\mathbf{u}}_r^{II} \equiv \dot{\mathbf{x}}_s^{II} = \boldsymbol{\omega}^{II} \times \hat{\mathbf{r}}_s \quad . \tag{3.33}$$

Infolge der Rollenrotation wird die Kontaktfläche in einen Einlaufbereich, in dem ständig neue Kontaktpaarungen gebildet werden, und in einen Auslaufbereich, in dem ein kontinuierlicher Ablöseprozess stattfindet, unterteilt. Kontaktpunkte, die im Einlaufbereich der Rolle liegen, bleiben während einer Drehbewegung mit der Rollenoberfläche in Kontakt. Die Geschwindigkeit der Kontaktpunkte folgt aus (3.24) und erlaubt im Fall eines Kontakts im Einlaufbereich die Aufspaltung in

$$\dot{\mathbf{x}}_c^{I} = \dot{\mathbf{x}}_r^{II} + \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{s\psi} + \dot{\hat{\mathbf{r}}}_{c\mu} \tag{3.34}$$

mit der Drehgeschwindigkeit der Rollenpunkte

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}}_{s\psi} = \boldsymbol{\omega}^{II} \times \hat{\mathbf{r}}_s \quad . \tag{3.35}$$

Unter der Annahme $\dot{\hat{\mathbf{r}}}_{c\mu} = 0$ eines idealen Haftkontakts ist (3.34) wieder integrierbar. Der Verschiebungspfad $\mathbf{u}_c^I$ des aktiven Kontaktpunktes $\mathbf{x}_c^I \in \partial\mathcal{B}_c$, der nicht im Auslaufbereich der Kontaktfläche liegt, ist somit an den Weg seines Führungspunktes $\mathbf{x}_s^{II} \in \partial\mathcal{B}_c$ über (3.33) direkt gebunden. Weitere Kontaktpunkte $\mathbf{x}_c^I \in I_g$, die vor dem Einlaufbereich liegen, werden infolge der Drehbewegung mit der Rolle in Kontakt treten. Mit Hilfe der Nebenbedingungen

$$(\,\mathbf{r}_c - \overset{*}{\mathbf{r}}_s\,) \bullet \hat{\mathbf{a}} \;=\; 0 \tag{3.36a}$$

$$\|\, \overset{*}{\mathbf{r}}_s \,\| \;=\; \|\, \mathbf{r}_s \,\| \tag{3.36b}$$

lässt sich in Analogie zur Anstellkinematik eine fiktive Rollenkonfiguration $\overset{*}{\mathbf{r}}_s \in \partial\overset{*}{\mathcal{B}}{}^{II}$ konstruieren, in der ein Penetrationspunkt $\mathbf{x}_c^I$ die Bedingungen eines fiktiven Kontaktpunktes $\mathbf{x}_c^I = \overset{*}{\mathbf{x}}{}_s^{II}$ erfüllt (Abb. 3.3). Die Projektion der Vektordifferenz aus (3.36a) in die Rollebene des Momentandrehpols D

$$\overset{*}{s} = (\,\mathbf{r}_c - \overset{*}{\mathbf{r}}_s\,) \bullet \hat{\mathbf{e}}_t \tag{3.37}$$

erlaubt die Definition eines Kontaktzustands $\overset{*}{s} \equiv g_a$ mit den Zustandsmengen (3.28a)-(3.28c). Im Fall der Penetration kann $\overset{*}{s}$ als Rollweg interpretiert werden, den $\overset{*}{\mathbf{x}}{}_s^{II}$ bei einer

Drehung aus der fiktiven in die aktuelle Rollenlage zurücklegen muss. Unter Annahme eines Haftkontakts liefert die Integration der Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}_c^I \equiv \dot{\overset{*}{\mathbf{x}}}_s = \dot{\overset{*}{\mathbf{u}}}{}_r^{II} + \overset{*}{\boldsymbol{\omega}}{}^{II} \times \overset{*}{\mathbf{r}}_s \tag{3.38}$$

den Verschiebungspfad eines Kontaktpunktes unter Erfüllung der Nebenbedingung

$$\| \dot{\overset{*}{\mathbf{u}}}{}_r^{II} \| = \| \overset{*}{\boldsymbol{\omega}}{}^{II} \times \overset{*}{\mathbf{r}}_s \| = \dot{\overset{*}{s}} \quad . \tag{3.39}$$

Abbildung (3.3) veranschaulicht graphisch den Fall der Durchdringung im Einlaufbereich der Rolle.

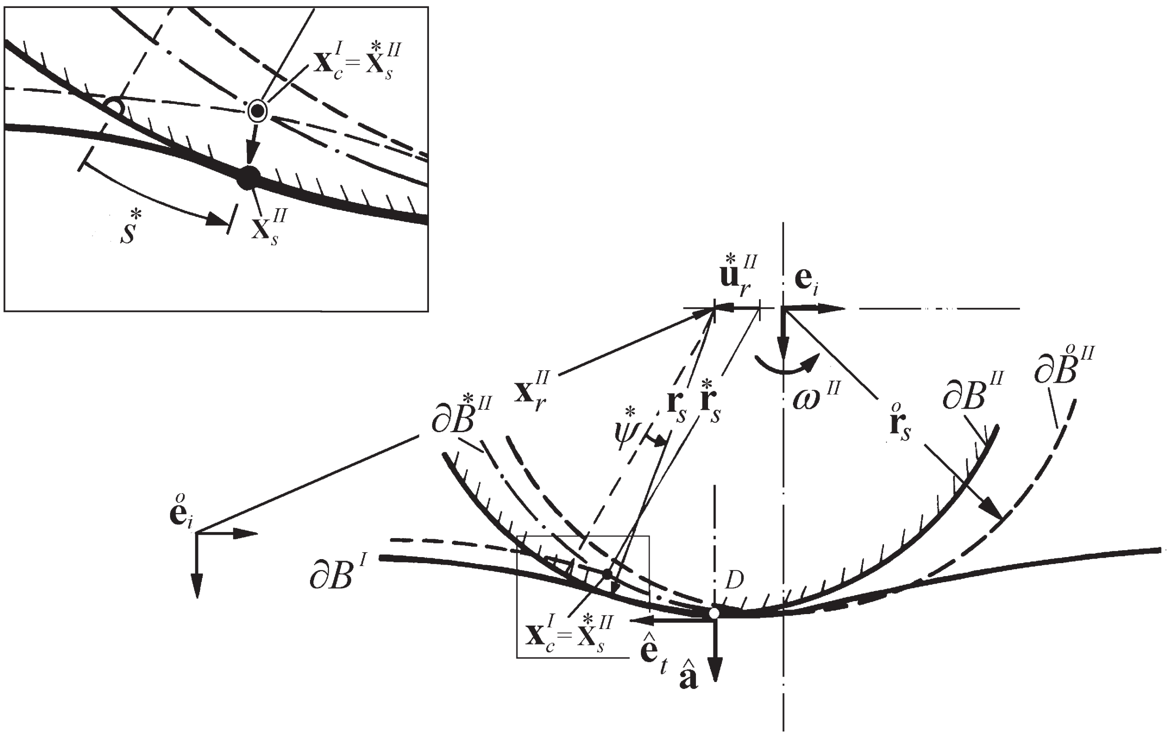


Abb. 3.3: Kontaktkinematik nach einer Durchdringung in der Rotationsphase

3.1.5 Verzerrungen

Eine Formänderung kann durch die Darstellung der quadrierten Länge eines differentiellen Ortsvektors $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration $\mathcal{B}$ mit (3.8) durch

$$\| d\mathbf{x} \|^2 = d\mathbf{x} \bullet d\mathbf{x} = d\mathring{\mathbf{x}} \bullet \mathbf{C}\, d\mathring{\mathbf{x}} \tag{3.40}$$

erfasst werden. Der Betrag des differentiellen Linienelementes $\| d\mathring{\mathbf{x}} \|$ in $\mathring{\mathcal{B}}$ ist nur dann mit dem Betrag von $\| d\mathbf{x} \|$ identisch, wenn der rechte Cauchy-Green-Tensor

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \tag{3.41}$$

zum Einheitstensor $\mathbf{1}$ in (3.40) wird. Jede Abweichung, $\mathbf{C} \neq \mathbf{1}$, zeigt eine Formänderung an. Aus der Differenz der Betragsquadrate

$$\| d\mathbf{x} \|^2 - \| d\mathring{\mathbf{x}} \|^2 = d\mathring{\mathbf{x}} \bullet (\mathbf{C} - \mathbf{1})\, d\mathring{\mathbf{x}} \tag{3.42}$$

motiviert sich der symmetrische materielle Green'sche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad . \tag{3.43}$$

Mit (3.41) und (3.10) wird seine geometrisch nichtlineare Form in Abhängigkeit des Gradienten des Verschiebungsvektors darstellbar

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \Big\{ \mathrm{Grad}\mathbf{u} + \mathrm{Grad}^T\mathbf{u} + \mathrm{Grad}^T\mathbf{u}\; \mathrm{Grad}\mathbf{u} \Big\} \quad . \tag{3.44}$$

Die materielle Zeitableitung von (3.43) liefert für die Verzerrungsraten

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad . \tag{3.45}$$

Die so definierten Deformationstensoren $\mathbf{C}$ und $\mathbf{E}$ liefern rotationsfreie Deformationsmaße, die eine Formulierung von Materialgesetzen erleichtert.

3.2 Kinetik

3.2.1 Spannungen

Die Betrachtung von Oberflächenkräften pro Flächeneinheit führt auf den Begriff des Spannungsvektors $\mathbf{t}$ [2, 8]. Neben einer möglichen Zeitabhängigkeit ist der Spannungsvektor im Allgemeinen vom Ort $\mathbf{x}$ und von der Orientierung des Flächenelements $d\mathbf{a} = \mathbf{n}\, da$, durch die Richtung der nach außen zeigenden Normale $\mathbf{n}$ angegeben, abhängig. Wird ein Kontinuum durch eine Schnittfläche gedanklich in zwei Teile zerlegt, so gilt auf der Schnittfläche

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \quad . \tag{3.46}$$

Auf beide Teilkörper wirkt der Spannungsvektor mit dem gleichen Betrag, aber entgegengesetzter Richtung. Über das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{n}\, \mathbf{T}(\mathbf{x}) \qquad \text{in} \quad \mathcal{B} \tag{3.47}$$

wird der Zusammenhang zu dem von $\mathbf{n}$ unabhängigen Cauchy-Spannungstensor $\mathbf{T}$ hergestellt. Analog (3.46) gilt auf der Oberfläche $\partial\mathcal{B}_\sigma$, auf der eine äußere Belastung $\bar{\mathbf{t}}$ angreift, die statische Randbedingung

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{0} \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_\sigma \quad . \tag{3.48}$$

3.2.2 Kontaktspannungen

Befinden sich die Körper $\mathcal{B}^I$ und $\mathcal{B}^{II}$ im Punkt $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}^I = \mathbf{x}^{II}$ miteinander in Kontakt, so stehen sie über die sich in der Kontaktfläche ausbildenden Kontaktspannungen analog (3.46) in Wechselwirkung miteinander. Mit $\mathbf{n}_c := \mathbf{n}^{II} = -\mathbf{n}^I$ gilt

$$\mathbf{t}_c := \mathbf{t}_c^{II}(\mathbf{x}_c, \mathbf{n}_c) = -\mathbf{t}_c^I(\mathbf{x}_c, -\mathbf{n}_c) \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_c \quad , \tag{3.49}$$

wobei $\mathbf{t}_c^{II}$ die Kontaktspannung darstellt, die der Köper $\mathcal{B}^I$ auf den Körper $\mathcal{B}^{II}$ im Punkt $\mathbf{x}_c$ ausübt. Wie in Abbildung 3.4 dargestellt, wird der Kontaktspannungsvektor $\mathbf{t}_c$ bzgl.

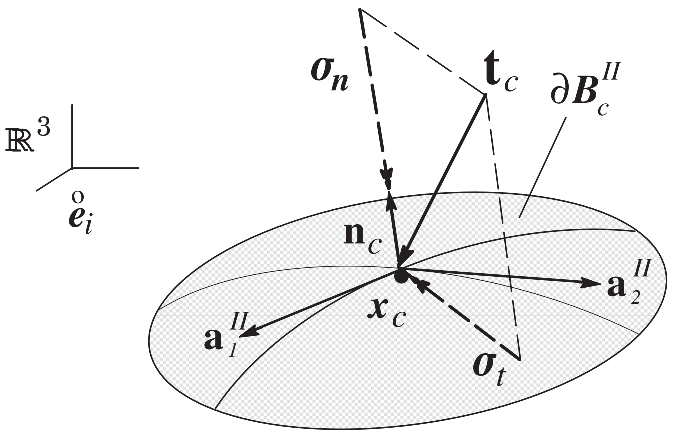


Abb. 3.4: Darstellung der Kontaktspannungen im lokalen Oberflächenkoordinatensystem

des lokalen Oberflächenkoordinatensystems (3.18), (3.19) additiv zerlegt

$$\mathbf{t}_c = \sigma_n\ \mathbf{n}_c + \sigma_t^\alpha\ \mathbf{a}_\alpha^{II} = \mathbf{t}_n + \mathbf{t}_t \qquad . \tag{3.50}$$

Die Normal- und Tangentialkomponeten berechnen sich aus

$$\sigma_n = \mathbf{t}_c \bullet \mathbf{n}_c \qquad , \qquad \sigma_t^\alpha = \mathbf{t}_c \bullet \mathbf{a}^{\alpha II} \quad . \tag{3.51}$$

Tribologische Untersuchungen zur Bestimmung der Eigenschaften und Merkmale der in der Kontaktzone ablaufenden Wechselwirkungsprozesse in *Kragelski* [65] zeigen, daß für quasi-statische Normalkontaktbedingungen

$$\sigma_n \leq \bar{\sigma}_{kri} \tag{3.52}$$

gilt. Darin stellt $\bar{\sigma}_{kri}$ die experimentell zu bestimmende aufnehmbare Zugspannung dar. Da für viele Stoffpaarungen die Adhäsionswirkung in Normalenrichtung in der Kontaktzone sehr klein ist, wird in der Kontaktmechanik mit der klassischen Druckspannungsbedingung $\bar{\sigma}_{kri} = 0$ gearbeitet. Hierfür wurde von *Duvaut/Lions* [25] die Bezeichnung *unilateraler* Kontakt eingeführt, der heute als Bezeichnung für Kontaktprobleme, bei denen einer der beiden Kontaktpartner als Starrkörper betrachtet wird, dient. Wird der Kontakt unabhängig von der Richtung der Normalspannung σ_n aufrechterhalten, so wird dies von den Autoren als *bilateraler* Kontakt klassifiziert und heute zur Kennzeichnung des Kontakts zwischen deformierbaren Körpern verwendet. In der makroskopischen Betrachtungsweise wird der Kontakt in tangentialer Richtung als

$$\textit{reibungsfreier Kontakt:} \quad \sigma_t^\alpha = 0 \quad , \tag{3.53}$$

$$\textit{Reibkontakt:} \quad \|\,\mathbf{t}_t\,\| \leq |\bar{\tau}_{kri}| \tag{3.54}$$

idealisiert. Dabei stellt $\bar{\tau}_{kri}$ die experimentell ermittelte Tangentialspannung dar, bei der eine irreversible Relativbewegung der Kontaktoberflächen einsetzt. Die Zeitableitung von (3.50) liefert

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{t}}_c = \overset{\bullet}{\mathbf{t}}_c - \mathbf{W}\ \mathbf{t}_c \quad , \tag{3.55}$$

mit der objektiven Spannungsrate $\overset{\bullet}{\mathbf{t}}_c = -\dot{\sigma}_n\ \mathbf{n}_c + \dot{\sigma}_t^\alpha\ \mathbf{a}_\alpha^{II}$. Der zweite Term in (3.55) berücksichtigt die Änderungen der Kontaktspannungen infolge einer Rotation der lokalen Referenzbasis auf der Kontaktfläche.

3.2.3 Bewegungsgleichung

Nach dem Impulserhaltungssatz wird die zeitliche Änderung des Impulsvektors $\mathbf{f}_i$ durch die am Körper einwirkenden $\mathbf{f}_v$ Volumen- und $\mathbf{f}_\sigma$ Oberflächenkräfte hervorgerufen. Wirkt am Körper das Beschleunigungsfeld $\mathbf{b}$, so gilt nach dem Impulserhaltungssatz

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\int\limits_{\mathcal{B}} \rho\,\dot{\mathbf{x}}\ dv\,]}_{\mathbf{f}_i} = \underbrace{\int\limits_{\mathcal{B}} \rho\,\mathbf{b}\ dv}_{\mathbf{f}_v} + \underbrace{\int\limits_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}\ da}_{\mathbf{f}_\sigma} \quad . \tag{3.56}$$

Die Geschwindigkeit eines Punktes ist dabei über die materielle Zeitableitung

$$\dot{\mathbf{x}} := \left.\frac{\partial \mathbf{x}(\mathring{\mathbf{x}}, t)}{\partial t}\right|_{\mathring{\mathbf{x}}\ =\text{fest}} \tag{3.57}$$

definiert. Mit dem Cauchy-Theorem (3.47) und dem Gauß'schen Integralsatz [23] wird das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral

$$\mathbf{f}_\sigma = \int\limits_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}\ da = \int\limits_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T}^T\,\mathbf{n}\ da = \int\limits_{\mathcal{B}} \mathrm{div}\mathbf{T}^T\ dv \tag{3.58}$$

überführbar. Mit dem Reynolds'schen Transporttheorem [8] und der Einbeziehung der Kontinuitätsgleichung aus der Massenbilanz

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \tag{3.59}$$

entsteht für die Zeitableitung des Impulsvektors in (3.56)

$$\dot{\mathbf{f}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[\int_{\mathcal{B}} \rho\, \dot{\mathbf{x}}\, dv\,] = \int_{\mathcal{B}} \rho\, \ddot{\mathbf{x}}\, dv \quad . \tag{3.60}$$

Mit (3.58) und (3.60) entsteht aus (3.56 das integrale Gleichgewicht für ein beliebiges Kontinuum, dessen lokale Darstellung

$$\operatorname{div}\mathbf{T}^T + \rho\, \mathbf{b} \, = \rho\, \ddot{\mathbf{x}} \tag{3.61}$$

als 1. Bewegungsgleichung von Cauchy bezeichnet wird. Nach der 2. Bewegungsgleichung von Cauchy ist die Bilanz des Drehimpulses [8] äquivalent mit der Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad . \tag{3.62}$$

Für quasi-statische Kontaktprobleme lassen sich nun unter Einbeziehung der kinematischen (3.3)-(3.5) und dynamischen (3.52)-(3.54) Kontaktbedingungen die lokalen Bedingungen eines Gleichgewichtszustands zusammenstellen. So erfüllt ein quasi-statischer Gleichgewichtszustand zweier in Kontakt stehender Festkörper $\Bbbk = I, II$ die

Gleichgewichtsbedingungen

$$\operatorname{div}\mathbf{T}^{\Bbbk} + \rho^{\Bbbk}\, \mathbf{b} \, = \quad \mathbf{0} \qquad \text{in} \quad \mathcal{B}^{\Bbbk} \, , \tag{3.63}$$

die vorgegebene Spannungsrandbedingungen

$$\bar{\mathbf{t}}^{\Bbbk} - \mathbf{t}^{\Bbbk} \, = \quad \mathbf{0} \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}^{\Bbbk}_{\sigma} \, , \tag{3.64}$$

das lokale Durchdringungsverbot

$$g_a(\mathbf{x}^{\Bbbk}, \hat{\mathbf{a}}) \, \geq \quad 0 \qquad \forall \;\; \mathbf{x}^{\Bbbk} \in \; \partial\mathcal{B}^{\Bbbk} \tag{3.65}$$

und die Kontaktspannungsbedingungen im Fall des Kontakts $g_a = 0$

$$\mathbf{t}^{I}_c + \, \mathbf{t}^{II}_c \, = \quad \mathbf{0} \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_c \, , \tag{3.66}$$

$$\sigma_n \, \leq \quad \bar{\sigma}_{kri} \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_c \, , \tag{3.67}$$

$$\| \, \sigma^{\alpha}_t \, \mathbf{a}^{II}_{\alpha} \, \| \, \leq | \, \bar{\tau}_{kri} \, | \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_c \, . \tag{3.68}$$

Aufgrund der Nebenbedingungen (3.65)-(3.68) wird das Kontaktproblem auch für linear elastische Materialien nichtlinear und analytische Lösungen lassen sich nur noch für wenige Spezialfälle angeben (*Johnson* [50]).

Über eine Variationsformulierung der lokalen Gleichgewichtsbedingungen wird die Basis für die Entwicklung von Näherungslösungen gelegt. Variationsformulierungen müssen infolge der Ungleichungsnebenbedingungen und des dissipativen Charakters reibungsbehafteter Kontaktprobleme streng genommen als Variationsungleichung formuliert werden, siehe *Duvaut/Lions* [25], *Oden/Kikuchi* [87] und *Klarbring* [61]. In der mathematischen Programmierung, die sich mit der Lösung von Optimierungsproblemen mit und ohne Nebenbedingungen befasst, finden sich verschiedene Methoden und Algorithmen zur Lösung von Variationsgleichungen und Variationsungleichungen. Zu ihnen zählen unter anderem die Optimierungsverfahren, die auf der Active-Sets-Strategie aufbauen. Mit dieser Methode lassen sich Näherungslösungen von Variationsungleichungen wieder auf der Basis von Variationsgleichungen entwickeln. Der Vorteil dieser Optimierungsstrategie liegt dabei auf der Verwendung der bekannten Gradientenverfahren vom Netwon-Raphson-Typ, die in vielen rechnerunterstützten Lösungsverfahren stabil und ausgetestet implementiert vorliegen.

4 Materialgleichungen

4.1 Stoffgesetze des Kontinuums

Im Rahmen dieser Arbeit wird der Rollenrichtvorgang als isothermer Prozess idealisiert. Durch die Entkoppelung thermischer und mechanischer Variablen wird für die materialbeschreibenden Gleichungen ein direkter Zusammenhang zwischen den im Körper wirkenden Spannungen und seiner Bewegung herstellbar. Die mechanischen Stoffgesetze klassischer Kontinua sind mit der Massen-, Impuls- und Drehimpulsbilanz verträglich. In der deduktiven Ableitung, *Giesekus* [34], motiviert die Definition einer massenspezifischen Spannungsleistung $\dot{w}$

$$\dot{w} := \frac{1}{\rho}\,\mathbf{T} \bullet \mathbf{D} = \frac{1}{\mathring{\rho}}\,\mathbf{S} \bullet \dot{\mathbf{E}} \tag{4.1}$$

eine Ausgangsgleichung zur Formulierung von Stoffgesetzen. Durch (4.1) wird dem Spannungstensor einer Bezugskonfiguration eine arbeitskonforme kinematische Größe zugeordnet. Nach der massenspezifischen Spannungsleistung ist die Green'sche Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{E}}$ mit dem 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor $\mathbf{S}$ durch ein Stoffgesetz zu verknüpfen. Für weitere Überlegungen ist das Entropiekonzept von grundlegender Bedeutung, das in Form einer Ungleichung die ablaufenden Energietransformationen in realen Prozessen als irreversibel charakterisiert. Wird die Spannungsleistung nach *Lehmann* [72] additiv in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil aufgespalten

$$\dot{w} = \dot{w}^{e} + \dot{w}^{irr} \quad , \tag{4.2}$$

so kann infolge der Entropieproduktion in einem isothermen Prozess die irreversible in Wärme umgewandelte Spannungsleistung $\dot{w}^{irr} \geq 0$ nicht negativ sein. Ein Konzept zur Berücksichtigung dissipativer Effekte in Stoffgleichungen basiert auf der Existenz sogenannter interner Variablen, die in Evolutionsgleichungen definiert werden und die Entwicklungen von irreversiblen Prozessen im Material beschreiben.

4.1.1 Elastisches Materialmodell

Im Rahmen der Elastizitätstheorie, *Ogden* [89], kann für ein isotropes Material im Fall kleiner Verzerrungen und einer spannungsfreien Ausgangskonfiguration der Spannungszuwachs über ein linear elastisches Stoffgesetz

$$\dot{\mathbf{S}} = \lambda \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{E}}^e)\, \mathbf{1} + 2\mu\, \dot{\mathbf{E}}^e = \mathbb{C}^e\, \dot{\mathbf{E}}^e \tag{4.3}$$

mit den zwei klassischen Lamé-Konstanten λ und μ und dem Hooke'schen Elastizitätstensor

$$\mathbb{C}^e = \lambda\, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\, \mathbb{1} \tag{4.4}$$

berechnet werden. Mittels eines vierstufigen Tensors

$$\mathbb{H} = \mathbb{1} - \frac{1}{3}\, \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \tag{4.5}$$

ergibt sich für die Rate des deviatorischen Anteils die Beziehung

$$\dot{\mathbf{S}}^D = 2\mu\, \mathbb{H}\, \dot{\mathbf{E}}^e \quad . \tag{4.6}$$

4.1.2 Elasto-plastisches Materialmodell

Eine deduktive Formulierung elastisch-plastischer Materialmodelle finiter Deformationen basiert heute im Allgemeinen auf der multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten in einen rein elastischen und einen rein plastischen Operator nach *Lee* [71]. Über dieses Konzept wird eine spannungsfreie fiktive Zwischenkonfiguration eingeführt, um elastisches und plastisches Deformationsverhalten in der mathematischen Beschreibung gegeneinander abgrenzen zu können und so eine separate Formulierung von Teilstoffgesetzen für finite Deformationen zu ermöglichen. Infolge der Aufspaltung werden die auf den Deformationsgradienten beruhenden Deformations- und Verzerrungsgrößen entsprechend erweitert und neu definiert, *Simo* [102].

Im Rahmen einer Theorie kleiner Verzerrungen werden die Zuwächse der Gesamtverzerrung additiv und eindeutig in physikalisch deutbare, rein elastische und rein plastische Anteile aufgespalten

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p \quad . \tag{4.7}$$

4.1.3 Fließbedingung

In der geschwindigkeitsunabhängigen Formulierung elasto-plastischer Stoffgesetze wird mit Einführung der Fließbedingung und der Belastungsbedingung das Kriterium zur Bestimmung des elastischen bzw. plastischen Materialverhaltens festgelegt. Die Fließbedingung wird als Funktion Φ in Abhängigkeit des aktuellen Spannungszustands $\mathbf{S}$ und zusätzlicher interner Variablen α_i beschrieben. In Form einer Fallunterscheidung

$$\Phi = \Phi\left(\mathbf{S}, \alpha_i\right) \quad \begin{cases} < 0 & \textit{elastisch} \\ = 0 & \textit{plastisch} \\ > 0 & \textit{unzulässig} \end{cases} \tag{4.8}$$

wird der Spannungszustand der aktuellen Konfiguration mit Hilfe der Fließbedingung charakterisiert. Für metallische Werkstoffe lässt sich die Fließfunktion, *Chen/Han* [17] in zwei Anteile zerlegen

$$\Phi\left(\mathbf{S}, \alpha_i\right) = f(\mathbf{S}^D, \mathbf{A}^D,) - k(\varepsilon_{\mathrm{v}}^p) \quad . \tag{4.9}$$

Zur Beschreibung der Fließfläche werden die deviatorischen Spannungsanteile $\mathbf{S}^D$, ein Verfestigungstensor $\mathbf{A}^D$ sowie die skalare plastische Vergleichsdehnung $\varepsilon_{\mathrm{v}}^p$ benutzt. Die Lage der Fließfläche Φ im Spannungsraum wird dabei über $f(\mathbf{S}^D, \mathbf{A}^D)$ bestimmt und über $k(\varepsilon_{\mathrm{v}}^p)$ ihre Form. Der Spannungsdeviator kann mit(4.5) aus dem 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor berechnet werden

$$\mathbf{S}^D = \mathbb{H}\,\mathbf{S} \quad . \tag{4.10}$$

Im Rahmen der Theorie kleiner Verzerrungen kann die Fließfunktion mit einem reduzierten symmetrischen deviatorischen Spannungstensor

$$\hat{\mathbf{S}}^D = (\mathbf{S}^D - \mathbf{A}^D) \quad , \tag{4.11}$$

einer von-Mises-Fließbedingung und einer gemischten Verfestigung formuliert werden

$$\Phi\left(\mathbf{S}^D, \mathbf{A}^D, \varepsilon_{\mathrm{v}}^p\right) = \|\, \hat{\mathbf{S}}^D \,\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\ \sigma_{\mathrm{v}}(\varepsilon_{\mathrm{v}}^p) = 0 \quad . \tag{4.12}$$

Im Fall einer rein isotropen Verfestigung ist $\mathbf{A}^D = \mathbf{0}$. Im Fall einer rein kinematischen Verfestigung ist $\sigma_{\mathrm{v}}(\varepsilon_{\mathrm{v}}^p)$ eine Konstante.

4.1.4 Fließgesetz

Als Evolutionsgleichungen dienen Fließgesetze, mit deren Hilfe der Zuwachs und die Richtung der plastischen Verzerrungen bestimmt wird. Wird die Normalenregel zur Bestimmung der plastischen Verzerrungen verwendet, so gilt

$$\dot{\mathbf{E}}^p \;= \dot{\lambda}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = \dot{\gamma}\,\mathbf{N} \tag{4.13}$$

unter Verwendung von

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{S^D}}{\|\,\mathbf{S}^D\,\|} \quad ; \qquad \dot{\gamma} = \dot{\lambda}\,\|\,\mathbf{S}^D\,\| \quad . \tag{4.14}$$

Die Fließbedingung nimmt in (4.13) die Rolle eines plastischen Potentials für $\dot{\mathbf{E}}^p$ ein, in der die Richtung der Verzerrungszuwächse koaxial mit der aktuellen deviatorischen Spannungsrichtung vorgegeben werden. Infolge der Entropieaussage folgt aus der Betrachtung der Rate der plastischen Arbeit unter Anwendung der Fließregel (4.13)

$$\dot{w}^p = \mathbf{S} \bullet \dot{\mathbf{E}}^p \;= \dot{\gamma}\,\hat{\mathbf{S}} \bullet \mathbf{N} \;\geq 0 \tag{4.15}$$

und unter Beachtung der unilateralen Bedingung für den plastischen Multiplikator

$$\Phi \;\begin{cases} = 0 & \Rightarrow \quad \dot{\gamma} \geq 0 \\ < 0 & \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = 0 \end{cases} \quad . \tag{4.16}$$

Zur Bestimmung des unbekannten Multiplikators $\dot{\gamma}$ wird die Konsistenzbedingung

$$\dot{\Phi} \;= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} \bullet \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} \bullet \dot{\mathbf{A}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\mathrm{v}}}\,\frac{d\sigma_{\mathrm{v}}}{d\varepsilon^p_{\mathrm{v}}}\,\dot{\varepsilon}^{\,p}_{\mathrm{v}} = 0 \tag{4.17}$$

mit Hilfe von Verfestigungsregeln und der Fließregel entwickelt und nach $\dot{\gamma}$ aufgelöst. Durch eine lineare kinematische Verfestigungsregel von *Prager* [92]

$$\dot{\mathbf{A}}^D = c\,\dot{\mathbf{E}}^p \quad , \tag{4.18}$$

mit einem konstanten Verfestigungsparameter c, wird eine Translationsbewegung der Fließfläche bei Erhaltung ihrer Größe, Form und Orientierung beschrieben. Über die Ratenformulierung einer eindimensionalen Vergleichsspannungs-Dehnungsbeziehung

$$\dot{\sigma}_{\mathrm{v}} = E_p\,\dot{\varepsilon}^{\,p}_{\mathrm{v}} \tag{4.19}$$

wird der plastische Modul $E_p = d\sigma_{\mathrm{v}}/d\varepsilon^p_v$ definiert. Durch den Vergleich der eindimensionalen plastischen Arbeitsrate mit (4.15) entsteht

$$\dot{\varepsilon}^p_{\mathrm{v}} = \dot{\gamma}\,\frac{1}{\sigma_{\mathrm{v}}}\,\hat{\mathbf{S}}^D \bullet \mathbf{N} \quad . \tag{4.20}$$

Mit der Substitution von (4.20), (4.18) und (4.13) in (4.17) folgt aus der Konsistenzbedingung mit (4.12) die Bestimmungsgleichung für $\dot{\gamma}$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\tilde{H}}\,\mathbf{N} \bullet \dot{\mathbf{S}}^D \quad . \tag{4.21}$$

Hierin wird ein in Abhängigkeit der gewählten Materialverfestigung zu bestimmender Verfestigungsparameter $\tilde{H}$

$$\tilde{H} = \left[\alpha\, c + (1-\alpha)\, \frac{2}{3}\, E_p \right] \tag{4.22}$$

eingeführt. Im Fall einer rein kinematischen Verfestigung ist $\alpha = 1$ und $\tilde{H} = c$, im Fall einer rein isotropen Verfestigung ist $\alpha = 0$ und $\tilde{H} = \frac{2}{3}\, E_p$. Zur vollständigen Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens wird neben der Identifikation lokaler elastischer und plastischer Materialbereiche durch die Fließbedingung die Art der plastischen Deformation mit Hilfe eines Be- und Entlastungskriteriums charakterisiert

$$\dot{\varPhi} = 0 \quad ; \qquad \mathbf{N} \bullet \dot{\mathbf{S}} \begin{cases} > & 0 \quad \textit{plastische Belastung} \\ = & 0 \quad \textit{neutrale Spannungsänderung} \\ > & 0 \quad \textit{elastische Entlastung} \end{cases} \quad . \tag{4.23}$$

4.2 Stoffgesetze des Oberflächenkontakts

Wechselwirkungen, die über die Oberflächen zweier Festkörper ablaufen, werden durch die Diskretheit des Kontakts lokalisiert und durch eine gegenseitige Annäherung der Oberflächen sowie durch die Ausbildung von Adhäsionsbrücken in den Kontaktstellen auf Mikroebene charakterisiert. Temperatur, Relativgeschwindigkeit der Kontaktkörper, umgebendes Medium sowie Dauer des Kontaktes sind nur einige Einflussgrößen, die den Zerstörungs- und Neubildungsprozess der Kontaktstellen beeinflussen und zur Veränderung der physikalischen Eigenschaften des Oberflächenkontakts beitragen. Im Zuge der kontinuumsmechanischen Beschreibung des Kontakts werden in Anlehnung an die Kontaktkinematik Stoffgesetze des Oberflächenkontakts in Normal- und Tangentialrichtung benötigt.

4.2.1 Materialverhalten in Normalenrichtung

Unter dem Einfluss steigender Normalbelastung werden die sich berührenden Unebenheiten zweier rauer Oberflächen geglättet. Die Annäherungsphase ist mit Verformungen und gegenseitigem Eindringen der sich berührenden Unebenheiten verbunden. *Nuri/Halling* [86] untersuchen die Steifigkeit von rauen Stahloberflächen bei der Annäherung unter reiner Normalbelastung. Die experimentellen Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt. Sie zeigen, dass die Steifigkeit im Normalkontakt mit zunehmender Rauigkeit abnimmt und mit zunehmender Belastung anwächst. In Abbildung 4.2 werden elastische und plastische Anteile bei der Annäherung glatter (a) und rauer (b)

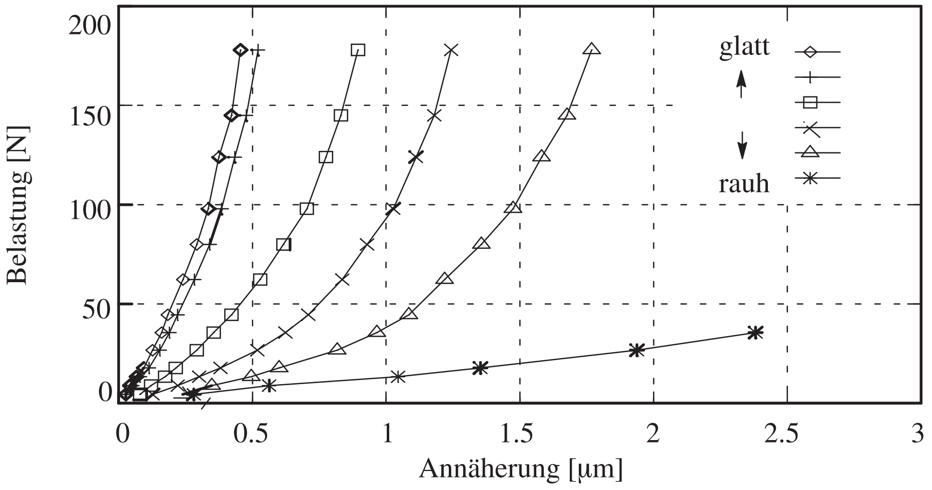


Abb. 4.1: Annäherung von Stahloberflächen mit unterschiedlicher Rauigkeit im Normalkontakt (Nuri/Halling [86])

Oberflächen gegenübergestellt. Aus dem Vergleich der beiden Diagramme wird deutlich, dass bei glatten Oberflächen 4.2(a) die Annäherung im Wesentlichen durch elastische, bei rauen Oberflächen durch plastische Deformationen der Oberflächenstruktur bestimmt wird. Bei wiederholter Be- und Endlastung dominiert elastisches Materialverhalten, wobei sich mit zunehmender Härte die Steifigkeit verringert (*Back et al.* [5]).

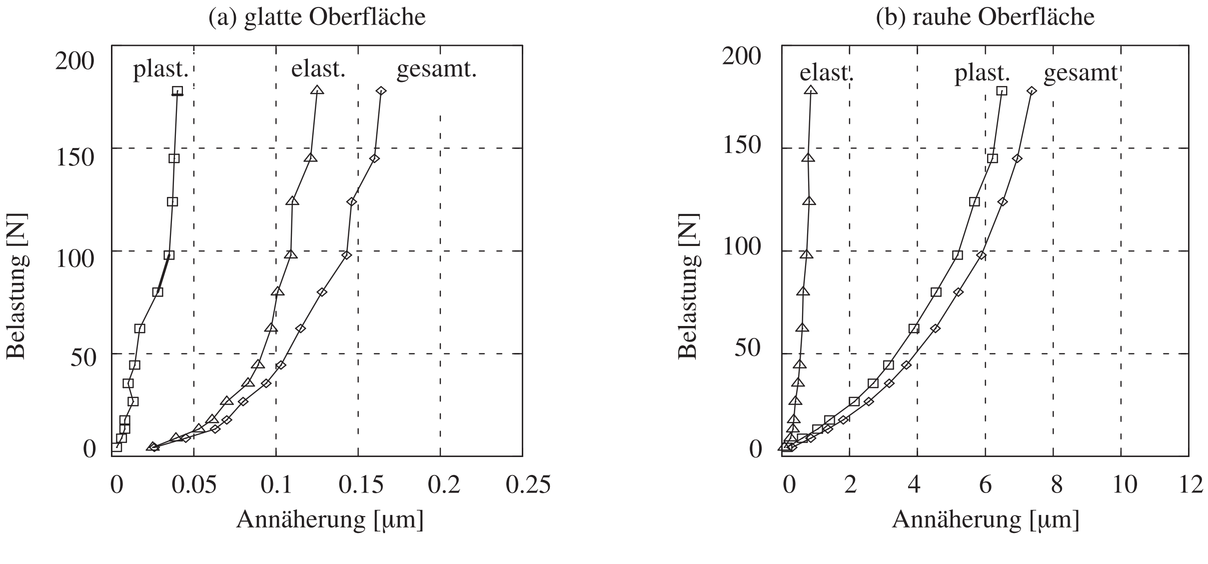


Abb. 4.2: Elastische und plastische Anteile bei der Annäherung von Stahloberflächen (Nuri/Halling [86])

In den wenigen experimentellen Untersuchungen zum Einfluss der Annäherung g_n^ϵ auf Reibungsprozesse werden von *Back et al.* [5] und *Kragelski et al.* [66] eine exponentielle Abhängigkeit von der Kontaktpressung σ_n vorgeschlagen

$$g_n^\epsilon = a_1\ (\sigma_n)^\eta + a_2 \quad . \tag{4.24}$$

Ihre Gültigkeit beschränkt sich dabei auf kleine Kontaktpressungen. Die experimentell zu bestimmenden Koeffizienten a_1, a_2, η in (4.24) sind von der Rauigkeit und dem Material der Kontaktoberflächen abhängig. Für Oberflächenrauigkeiten im Bereich von 3-20 μm wird $0,3 \leq a_1 \leq 4$, $a_2 = 0$ und $0,3 \leq \eta \leq 0,5$ angegeben. Bei konstantem $\eta = 0,5$ verhält sich a_1 inversproportional zum Elastizitätsmodul. Auf der Grundlage von Versuchen werden des Weiteren von den Autoren eine inverse Proportionalität der Normalkontaktsteifigkeit zur Rauigkeit sowie eine Steifigkeitserhöhung bei Entlastung und erneuter Druckbelastung festgestellt. *Back et al.* [5] entwickelten außerdem für den elastischen Weg, der sich bei wiederholten Be- und Entlastungsvorgängen einstellt, eine logarithmische Beziehung

$$g_n^\epsilon = \frac{1}{b}\ \ln(\frac{\sigma_n}{a}) \tag{4.25}$$

mit zwei freien Konstanten a, b, die wiederum vom Material der Kontaktpaarung und der Rauigkeit der Oberfläche abhängig sind.

4.2.2 Materialverhalten in Tangentialrichtung

Experimentelle Untersuchungen von *Back et al.* [5], *Courtney-Pratt/Eisner* [19] und *Kragelski* [65] befassen sich mit der Ermittlung der Abhängigkeit zwischen der Tangentialkraft und den Deformationen in tangentialer Richtung unter konstanter Kontaktpressung. In den Untersuchungen wird eine relative Mikroverschiebung (Anfangsverschiebung) vor Beginn des Gleitens beobachtet, deren Entstehungsprozess nicht eindeutig quantifiziert werden kann. Im Anfangsstadium einer tangentialen Lastaufbringung zeigt sich eine direkte Proportionalität zwischen der Schubkraft und der Anfangsverschiebung, die mit steigender Belastung bis zum Erreichen eines Grenzwertes nichtlinear wird (Abbildung 4.3). Der Abschnitt $0A$ stellt den Bereich der Anfangsverschiebung dar, der die Bewegung einleitet. Eine Variation der Versuchsanordnung zeigte, dass die Steifigkeit in tangentialer Richtung sich mit zunehmender Normalbelastung vergrößert.

In Versuchen mit zyklischer Tangentialbelastung wurde eine unvollständige Rückführung der Anfangsverschiebung unter konstanter Normalbelastung beobachtet, die zu Hystereseerscheinungen in den Last-Verschiebungskurven führt. Die Größe des reversiblen und

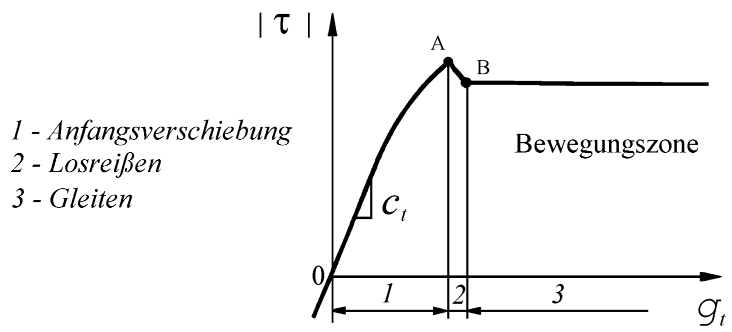


Abb. 4.3: Prinzipielle Abhängigkeit der Anfangsverschiebung von der Tangentialbelastung (Courtney-Pratt [19], *Kragelski* [65])

irreversiblen Anteils ist des Weiteren von der anliegenden Druckbelastung abhängig. Hinsichtlich dieser Ergebnisse wird die Anfangsverschiebung g_t allgemein in drei Anteile (eine reversible Komponente g_t^{et} nach Abnahme der Tangentialkraft, eine reversible Komponente g_t^{en} nach Abnahme der Normalkraft und eine irreversible Restverschiebung g_t^{irr}) aufspaltbar

$$g_t = g_t^{et} + g_t^{en} + g_t^{irr} \quad . \tag{4.26}$$

Hinsichtlich der Betrachtung von Stahlkontaktoberflächen lassen sich aufgrund obiger Untersuchungen weitere Vereinfachungen angeben. So wurden bei Stahl/Stahlpaarungen keine reversiblen Anteile in der Anfangsverschiebung gemessen, *Kragelski* [65], sondern nur bei ungleichen Stoffpaarungen wie z.B. bei Stahl/Leder. Die Grenzwerte der Anfangsverschiebung lagen dabei im Bereich von $0,1 \leq g_t \leq 40\,\mu m$, die aber auch Volumendeformationen der Proben mit einschließen. Auch *Courtney-Pratt/Eisner* [19] klassifizieren die Anfangsverschiebung bei metallischen Kontaktpaarungen im Wesentlichen als irreversibel und beurteilen das Verhältnis des reversiblen Anteils an der gesamten Anfangsverschiebung als bedeutungslos.

Zur Berechnung der tangentialen Widerstandskraft während einer Anfangsverschiebung wird von *Kragelski* [66] ein zweigliedriger Ansatz vorgeschlagen

$$\tau = k_t\, g_t - c_t\, g_t^3 \quad , \tag{4.27}$$

mit einer tangentialen Steifigkeit k_t und einer flächenbezogenen Steifigkeit c_t, die von der Normalbelastung sowie vom Zustand der Kontaktoberflächen abhängig sind. Für ebene Grenzflächen kann der Zusammenhang zwischen Schubkraft und Anfangsverschiebung durch einen bilinearen Kurvenverlauf angenähert werden. Ein Vergleich der experimentell

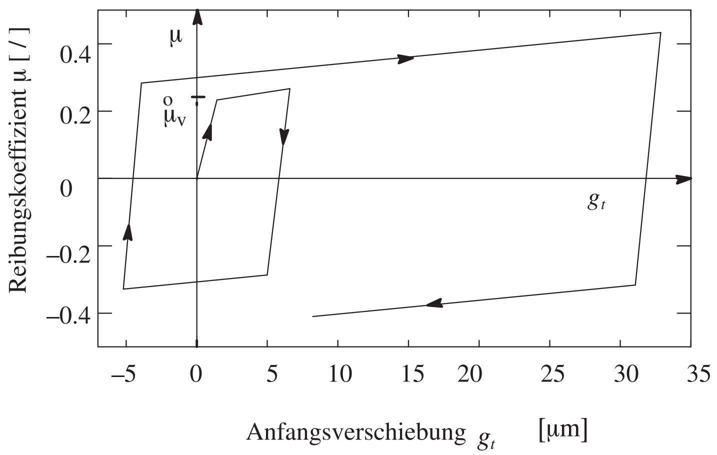


Abb. 4.4: Bilineare Approximation der tangentialen Anfangsverschiebung an ebenen Grenzflächen (Courtney-Pratt [19] *und Kragelski et al.* [66])

ermittelten Energieverluste zeigte eine Proportionalität des Grenzwerts der Anfangsverschiebung g_t zur Normalbelastung. Diese Proportionalität konnte für eine Stahl/Stahlpaarung in einer Modellbildung eines rauen elastischen Kontakts mit der Annäherung über die Normalbelastung mit

$$g_t \propto \mid N \mid^{0,46} \tag{4.28}$$

errechnet werden. In der gleichen Studie wird auch eine direkte Proportionalität der Grenzverschiebung zum Haft-Reibwert festgestellt.

4.2.3 Interface-Modellbildung

Aufgrund des auf Mikroebene erworbenen Kenntnisstandes trockener Oberflächenreibung bei Metallen wird für eine makrogeometrische Kontaktbeschreibung ein kontinuierliches 3-Körpermodell (Abbildung 4.5) nach *Danow* [91] eingeführt. Dieses 3-Körpemodell besteht aus einem Gleiter *I* und einem Grundkörper *II*, für die kontinuierliche Festkörpermodelle benutzt werden. Das mechanische Kontaktgebiet, innerhalb dessen die Unebenheiten beider Körper über ihre Grenzschichten in Wechselwirkung miteinander treten, wird als dritter Körper *III* (Interface) mit einer nicht verschwindenden Dicke t definiert. Bei der trockenen Grenzschichtreibung wird im Rahmen der Kontaktmechanik die Existenz einer Druckverteilung auf die Reibfläche immer vorausgesetzt und mit dieser eine Verteilung der übrigen prozessbeschreibenden Größen verbunden. In diesem Zusammenhang wird der Kontakt als linearer stationärer Kontakt bezeichnet, wenn der Zusammenhang zwischen der relativen Annäherung und der Normalbelastung linear ist und keine Verschleißerscheinungen im Interface auftreten.

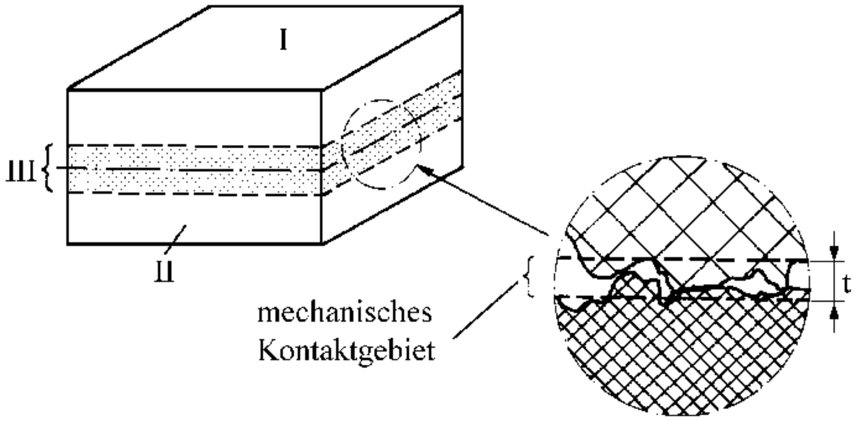


Abb. 4.5: Vereinfachtes 3-Körpermodell makrogeometrischer Kontaktuntersuchungen

Für die mathematisch-analytische Beschreibung eines quasi-statischen, kontinuierlichen 3-Körpermodells wird für das Interface ein Gleichungssystem aufgestellt. In ihm müssen die kinematischen und dynamischen Gleichgewichtsbeziehungen formuliert werden, die im Allgemeinen aus dem Kräftegleichgewicht, einem Gleitkriterium, einem Gleitgesetz, Kontaktsteifigkeitsgesetzen, einem Verteilungsgesetz für die gegenseitige Annäherung sowie Gesetze für den Oberflächenverschleiß bestehen. Die Auffindung zuverlässiger Beziehungen zwischen den Kenngrößen für den kontinuierlichen Kontakt und den rechnerisch schwer zugänglichen Kenngrößen des diskreten Kontakts ist Aufgabe derzeitiger tribologischer Forschungsarbeiten. Aussagen bzgl. der Übertragbarkeit der auf Mikroebene entwickelten Beziehungen fehlen ebenso wie Gesetzmäßigkeiten, die die Makrogrößen mit den auf Mikroskala ablaufenden Prozessen und Parametern in Verbindung setzen. Erschwerend kommt hinzu, dass jede Änderung der Beanspruchungsbedingungen zu einem erneuten Einlaufen im Anfangszustand der Reibung führt, der im Sinne der Kontaktmechanik den Übergang in einen stationären Endzustand des Gleichungssystems darstellt.

Eine erste Abschätzung der fehlenden Parameter wird auf der Basis idealisierter Mikrokontaktmodelle in *Kragelski et al.* [65, 66] durchgeführt. Die Komplexität und Anwendungsrestriktionen der dort entwickelten Gleichungen sowie die unvollständige Quantifizierung trockener Reibprozesse mag Ursache dafür sein, dass Interface-Modelle heute immer noch auf der Basis des klassischen Coulomb'schen Reibungsgesetzes formuliert werden.

In Normalenrichtung gilt dabei nach (3.49) und (3.51) im Fall des unilateralen Kontakts

$$(\mathbf{t}^{I} + \mathbf{t}^{II}) \bullet \mathbf{n}_c = 0 \qquad \text{mit} \quad \sigma_n < 0 \quad . \tag{4.29}$$

Für ein homogenes isotrope Oberflächenstruktur beschreibt ein Gleitkriterium vom Coulomb'schen Typ

$$\Upsilon(I_n, I_t, \vartheta_i) = I_t - \mu(I_n, H, A_r)\; I_n \begin{cases} = 0 & \text{Gleiten} \\ < 0 & \text{Haften} \end{cases} \tag{4.30}$$

das Reibungsverhalten über den Reibwert μ. Hierbei werden die Längen der Komponenten des Kontaktspannungsvektors $\mathbf{t}_c$

$$I_n = \| \; \mathbf{t}_n \; \| \qquad , \qquad I_t = \| \; \mathbf{t}_t \; \| \tag{4.31}$$

die Mikrohärte H und die realen Kontaktfläche A_r verwendet. Wird der Reibwert $\mu = \mu_{ad}$ nach der Adhäsions-Deformationstheorie (2.4) mit $p_r = \sigma_n/\eta_c$ und (2.3) umgeformt, entsteht

$$\mu = c_o \frac{A_c \tau_o}{(H \; A_c)^m}\; (I_n\, A_c)^{m-1} + \beta \quad ; \qquad m < 1 \quad . \tag{4.32}$$

Der druckabängige Reibwert in (4.32) ist in Abhängigkeit von mikro- und makroskopischen Parametern zu berechnen. Mit Vorgabe einer Gleitregel

$$\dot{\mathbf{g}}^{irr} = \dot{\gamma}_c \, \frac{\partial I_t}{\partial \mathbf{t}_c} \tag{4.33}$$

wird die Geschwindigkeit der irreversiblen Relativverschiebung über den unbekannten Gleitmultiplikator $\dot{\gamma}_c$ berechenbar. Die Verwendung der Gleitfläche (4.30) als Gleitpotential in (4.33) ist nur im Fall konstanter Kontaktpressung möglich, da sonst aus der partiellen Ableitung auch ein abhebender irreversibler Anteil in Normalenrichtung entstehen würde. Auf der Grundlage der experimentell beobachteten Energiedissipation, die bereits während der Anfangsverschiebung einsetzt und auf Mikroebene mit einer unvollständigen Rückkehr bei tangentialer Entlastung bei ungleichen Stoffpaarungen begleitet sein kann, wird z.B. bei *Curnier* [20], *Fredriksson* [31], *Giannakopoulos* [33], *Michalowski/Mórz* [82] eine Modellbildung des tangentialen Kontaktverhaltens analog der Plastizitätstheorie durchgeführt. Für metallische Werkstoffpaarungen werden in einer Ratenformulierung die additive Aufspaltung der Annäherung und der Anfangsverschiebung formal durch

$$\dot{g}_n \;\; = \;\; \dot{g}_n^e \tag{4.34}$$

$$\dot{g}_t \;\; = \;\; \dot{g}_t^e + \dot{g}_t^{irr} \tag{4.35}$$

eingeführt. Werden die elastischen Anteile in den Beziehungen (4.25) und (4.27) in erster Näherung durch lineare Stoffgesetze der Form

$$\dot{\mathbf{t}}_n \; = \mathbf{D}_n \; \dot{\mathbf{g}}_n^e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_n = -c_n \; (\mathbf{n}_c \otimes \mathbf{n}_c) \tag{4.36}$$

$$\dot{\mathbf{t}}_t \; = \; \mathbf{D}_t \; \dot{\mathbf{g}}_t^e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}_t = -c_t \; (\mathbf{1} - \mathbf{n}_c \otimes \mathbf{n}_c) \tag{4.37}$$

approximiert, kann mit Hilfe der Konsistenzbedingung

$$\dot{\Upsilon} = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{t}_t} \bullet \dot{\mathbf{t}}_t + \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{t}_n} \bullet \dot{\mathbf{t}}_n + \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mu}\, \dot{\mu} = 0 \tag{4.38}$$

und unter Einbeziehung der linearen Stoffgesetze (4.36) und (4.37), der Gleitregel (4.33), der additiven Aufspaltung der Raten (4.34) und (4.35) eine Bestimmungsgleichung für

$$\dot{\gamma}_c = \frac{1}{\tilde{H}_c} \left[\frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{t}_t} \bullet \mathbf{D}_t\, \dot{\mathbf{g}}_t + \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{t}_n} \bullet \mathbf{D}_n\, \dot{\mathbf{g}}_n - \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mu}\, \frac{d\mu}{d\sigma_n}\, c_n\, \dot{g}_n \right] \tag{4.39}$$

mit

$$\tilde{H}_c = \mathbf{D}_t \bullet \mathbf{T}_c \quad ; \qquad \mathbf{T}_c = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \mathbf{t}_t} \otimes \frac{\partial I_t}{\partial \mathbf{t}_t} \tag{4.40}$$

entwickelt werden. Im Fall eines isotropen Interfaces folgt mit den obigen Beziehungen $\tilde{H}_c = -c_t$. In einer Theorie kleiner Relativverschiebungen kann für (4.39) die Komponentendarstellung

$$\dot{\gamma}_c = \frac{(\tau_1\, \dot{g}_t^1 + \tau_2\, \dot{g}_t^2\,)}{\sqrt{(\tau_1)^2 + (\tau_2)^2}} \; - \frac{c_n}{c_t} \left[\mu + \frac{d\mu}{d\sigma_n}\, |\sigma_n| \right] \dot{g}_n \tag{4.41}$$

angegeben werden. Da die Existenz der unvollständigen Rückkehr nicht eindeutig mit der Existenz plastischer Verformungen in der Kontaktzone verbunden werden kann, *Kragelski et al.* [66], sowie Transformationsbeziehungen zwischen den tribologischen und den kontinuumsmechanischen Größen fehlen, motiviert sich das Konzept der Anwendung der Plastizitätstheorie auf Reibsysteme hauptsächlich durch seine numerische Umsetzbarkeit.

Neben dem Konzept der Umsetzung analog der Plastizitätstheorie wird die Unstetigkeit des Reibkontakts in der makroskopischen Betrachtung mit Hilfe von Subdifferentialen von *Klarbring et al.* [62] und *Moreau* [83] in eine mathematisch konvexe Form (Pseudopotentiale) gebracht. Mit Hilfe dieses Konzeptes wird versucht, unstetige durch stetig differenzierbare Funktionsverläufe zu ersetzen und so die phänomenologische Kontaktbeschreibung im mathematischen Sinne zu regularisieren.

5 Variationsformulierung

5.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Eine äquivalente Form des quasi-statischen Gleichgewichtszustands wird durch Skalarmultiplikation der lokalen Feldgleichungen (3.63) und (3.64) mit der Variation des Ortsvektors $\delta\mathbf{x}$ und anschließender Integration über das betrachtete Gebiet erhalten

$$\delta\Pi(\mathbf{x},\delta\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathcal{B}} (\operatorname{div}\mathbf{T} + \rho\,\mathbf{b}) \bullet \delta\mathbf{x}\; dv + \int\limits_{\partial\mathcal{B}} (\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}) \bullet \delta\mathbf{x}\; da = 0 \quad . \tag{5.1}$$

Die Variation δ wird dabei unter festgehaltener Zeit $\delta t = 0$ und festgehaltenem Ort $\mathring{\mathbf{x}}$, d.h. materiell, ohne Auswechseln des jeweils betrachteten materiellen Punktes, durchgeführt, so dass die entstehenden Skalarprodukte physikalisch interpretierbar sind. Mit (3.5) wird die materielle Variation des Ortsvektors eines Punktes

$$\delta\mathbf{x} = \delta(\mathring{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) = \delta\mathbf{u} \tag{5.2}$$

mit der Variation des Verschiebungsfeldes identisch. Unter Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes und der Identität (5.2) lässt sich die virtuelle Formänderungsarbeit im Volumenintegral in zwei Anteile aufspalten

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \operatorname{div}\mathbf{T} \bullet \delta\mathbf{u}\; dv = \int\limits_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} \bullet \delta\mathbf{u}\; da - \int\limits_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \bullet \operatorname{grad}^T \delta\mathbf{u}\; dv \tag{5.3}$$

und (5.1) in das bekannte Prinzip der virtuellen Arbeiten

$$\int\limits_{\mathcal{B}} \rho\,\mathbf{b} \bullet \delta\mathbf{u}\; dv + \int\limits_{\partial\mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \bullet \delta\mathbf{u}\; da - \int\limits_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \bullet \operatorname{grad}^T \delta\mathbf{u}\; dv = 0 \tag{5.4}$$

überführen. Die Spezifizierung der über die Oberflächen auf den Körper einwirkenden Rand- und Nebenbedingungen liefert

$$\int\limits_{\partial\mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \bullet \delta\mathbf{u}\; da = \int\limits_{\partial\mathcal{B}_\sigma} \bar{\mathbf{t}}_\sigma \bullet \delta\mathbf{u}\; da_\sigma + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_u} \mathbf{t}_u \bullet \delta\mathbf{u}\; da_u + \int\limits_{\partial\mathcal{B}_c} \mathbf{t}_c \bullet \delta\mathbf{u}\; da_c \quad . \tag{5.5}$$

Das erste Randintegral $\partial\mathcal{B}_\sigma$ erfasst die virtuelle Arbeit der vorgegebenen Belastung $\bar{\mathbf{t}}_\sigma$. Das zweite Randintegral $\partial\mathcal{B}_u$ berücksichtigt die virtuelle Arbeit der unbekannten Zwangskräfte auf dem Randbereich bekannter Verschiebungen

$$\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_u \quad . \tag{5.6}$$

Mit Hilfe der geometrischen Forderung an den virtuellen Verschiebungszustand

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_u \tag{5.7}$$

verschwindet das zweite Randintegral in (5.5). Das dritte Randintegral erfasst die virtuelle Arbeit der Kontaktspannungen $\mathbf{t}_c$, die auf den Körper über die Kontaktoberfläche $\partial\mathcal{B}_c$ wirken. Unter Berücksichtigung des Gegenwirkungsprinzips (3.49) folgt für die virtuelle Arbeit zweier in Kontakt stehender Körper $\Bbbk = I, II$

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \delta\Pi^I + \delta\Pi^{II} \\ 0 &= \sum_{\Bbbk=I}^{II} \left[\int_{\mathcal{B}^\Bbbk} (\, \mathbf{T}^\Bbbk \bullet \operatorname{grad}^T \delta\mathbf{u}^\Bbbk - \rho^\Bbbk\, \mathbf{b} \bullet \delta\mathbf{u}^\Bbbk \,)\, dv^\Bbbk - \int_{\partial\mathcal{B}_\sigma^\Bbbk} \bar{\mathbf{t}}_\sigma^\Bbbk \bullet \delta\mathbf{u}^\Bbbk \, da_\sigma^\Bbbk \right] \qquad (5.8) \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{B}_c} \mathbf{t}_c \bullet (\, \delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II} \,)\, da_c \quad . \qquad (5.9) \end{aligned}$$

5.1.1 Virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte

Mit der Darstellung des Kontaktspannungsvektors nach (3.50) folgt für das Skalarprodukt der virtuellen Arbeit der Kontaktspannungen (5.9)

$$\delta A_c = \int_{\partial\mathcal{B}_c} \{\, \sigma_n\, \mathbf{n}_c \bullet (\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}) + \sigma_t^\alpha\, \mathbf{a}_\alpha^{II} \bullet (\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}) \,\}\, da_c \quad . \tag{5.10}$$

Zur Erfassung des geometrischen Kontakts wird ein Abstandsvektor $\mathbf{g}$ mit dem Ursprung in $\mathbf{x}^{II}$ und dem Endpunkt in $\mathbf{x}^I$ konstruiert. Seine Darstellung bzgl. der lokalen Oberflächenbasis auf $\partial\mathcal{B}^{II}$ ist durch

$$\mathbf{g} = [\, \mathbf{x}^I - \mathbf{x}^{II}(\theta^\alpha) \,] = g_n\, \mathbf{n}^{II} + g_t^\alpha\, \mathbf{a}_\alpha^{II} \tag{5.11}$$

gegeben. θ^α sind die freien Parameter, mit denen sich eine glatte Oberfläche $\partial\mathcal{B}^{II}$ vollständig oder zumindest bereichsweise parametrisieren lässt. Im Fall konkaver Oberflächen entsteht mit Hilfe einer Normalenprojektion unter Erfüllung der Nebenbedingungen

$$[\, \mathbf{x}^I - \mathbf{x}^{II}(\theta^\alpha) \,] \bullet \mathbf{n}^{II} = g_n \quad , \tag{5.12}$$

$$[\, \mathbf{x}^I - \mathbf{x}^{II}(\theta^\alpha) \,] \bullet \mathbf{a}_\alpha^{II} = 0 \tag{5.13}$$

eine eindeutige Identifizierung und Zuordnung möglicher Kontaktpaare. Für einen vorgegebenen festgehaltenen Punkt $\mathbf{x}^I \in \partial\mathcal{B}^I$ wird mit Punkten $\mathbf{x}^{II}$ von $\partial\mathcal{B}^{II}$ das Skalarprodukt in (5.13) berechnet. Im Fall, dass (5.13) erfüllt wird, liefert (5.12) den kürzesten Abstand der Oberfläche $\partial\mathcal{B}^{II}$ zum Punkt $\mathbf{x}^I$ (Abbildung 5.1).

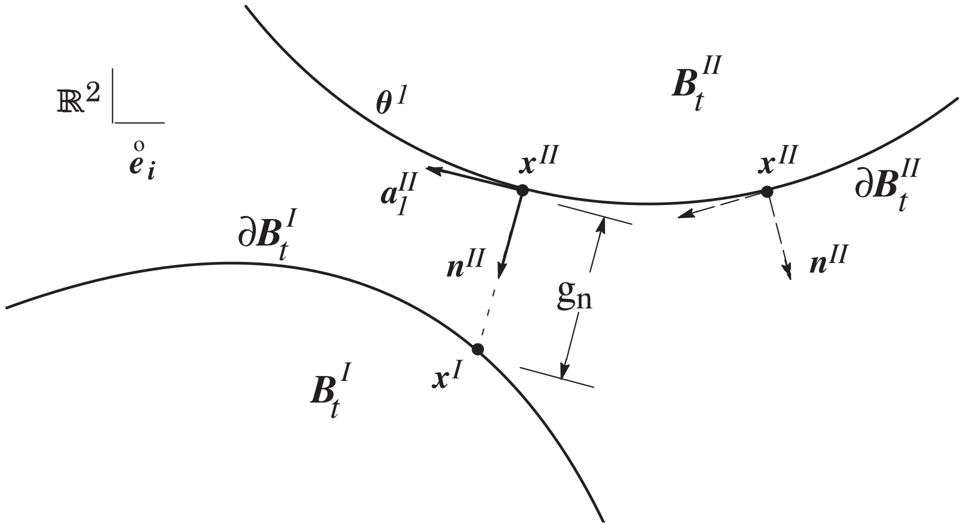


Abb. 5.1: Darstellung der lokalen Kontaktidentifizierung in R^2 auf der Basis der Abstandsminimierung über eine Normalenprojektion

Für einen vorgegebenen Punkt $\mathbf{x}^I \in \partial\mathcal{B}^I$ bildet das Argumentenminimum von (5.11) den kürzesten Abstand zur Oberfläche $\partial\mathcal{B}^{II}$ im Punkt $\mathbf{x}^{II}$. Die erste Variation der Normalenprojektion (5.12) liefert

$$(\delta\mathbf{x}^I - \delta\mathbf{x}^{II} - \mathbf{a}_\alpha^{II}\delta\theta^\alpha)\bullet\mathbf{n}^{II} = \delta g_n \qquad , \tag{5.14}$$

da $\delta\mathbf{n}^{II}\bullet\mathbf{n}^{II} = 0$ verschwindet. Unter Verwendung der kovarianten Metrik- und Krümmungskoeffizienten (3.20) folgt mit der ersten Variation des Tangentenvektors

$$\delta\mathbf{a}_\alpha^{II} = \delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{II} + \mathbf{a}_{\alpha,\beta}^{II}\,\delta\theta^\beta \tag{5.15}$$

für die Variation der Tangentialprojektion (5.13)

$$(\delta\mathbf{x}^I - \delta\mathbf{x}^{II})\bullet\mathbf{a}_\alpha^{II} + g_n\,\mathbf{n}^{II}\bullet\delta\mathbf{x}_{,\alpha}^{II} - (m_{\alpha\beta}^{II} - g_n\,b_{\alpha\beta}^{II})\,\delta\theta^\beta = 0 \quad . \tag{5.16}$$

Da in einer phänomenologischen Betrachtung der Oberflächen diese als ideal glatt angesehen werden, ist ein Kontakt durch $g_n = 0$ gegeben und lässt sich nach (5.14) und (5.16) durch die lokalen Nebenbedingungen

$$(\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II})\bullet\mathbf{n}_c = 0 \quad , \tag{5.17}$$

$$(\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II})\bullet\mathbf{a}_\alpha^{II} = m_{\alpha\beta}^{II}\,\delta\theta^\beta \tag{5.18}$$

erfassen. Mit der klassischen Normalenbedingung (5.17) für ideal glatte Oberflächen leisten die Kontaktkräfte (Zwangskräfte im Sinne Lagrange'scher Multiplikatoren) in (5.10) keinen Beitrag zur virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte, da sie stets orthogonal zur möglichen virtuellen Verschiebungsbahn der Kontaktpunkte gerichtet sind. Die virtuelle Arbeit reduziert sich auf die Arbeit der Reibkräfte entlang des Weges der Ortskoordinate θ im Fall einer virtuellen Relativbewegung

$$\delta A_c = \int\limits_{\partial \bar{\mathcal{B}}_c} \sigma_t^\alpha \, m_{\alpha\beta}^{II} \, \delta\theta^\beta \, da_c \quad . \tag{5.19}$$

Im Fall eines Haftkontakts $\delta\theta^\beta = 0$ bzw. eines reibungsfreien Kontakts $\sigma_t^\alpha = 0$ verschwindet mit Erfüllung der Nebenbedingung auch dieses Integral. Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit kann sich ein Gleichgewichtszustand für die in Kontakt stehenden Körper dann nur einstellen, wenn auf $\partial\mathcal{B}_c$ die Nebenbedingungen

$$(\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}) \bullet \mathbf{n}_c = 0 \tag{5.20}$$

$$(\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}) \bullet \mathbf{a}_\alpha^{II} = 0 \tag{5.21}$$

$$\sigma_n \leq 0 \tag{5.22}$$

$$\| \, \sigma_t^\alpha \, \mathbf{a}_\alpha^{II} \, \| \leq | \, \tau_{kri} \, | \tag{5.23}$$

erfüllt sind. Durch (5.20) und (5.22) werden die Normalkontaktbedingungen und mit (5.21) und (5.23) die Tangentialkontaktbedingungen für einen idealen Haftkontakt in der Kontaktzone beschrieben. Bei Verletzung der Nebenbedingung (5.23) wird das Integral der virtuellen Arbeit der Reibkräfte ungleich Null, es liegt kein statischer Gleichgewichtszustand mehr vor, da nun eine Relativbewegung der Körper durch Freisetzung der Nebenbedingung (5.21) ermöglicht werden muss. Ein analoger Sachverhalt liegt im Fall einer Zugspannung vor, wenn die Unilateralität von (5.22) verletzt ist und eine Freisetzung der Nebenbedingung (5.20) notwendig wird.

Die Bedingung $\delta g_n = 0$ kann in einer numerischen Umsetzung während einer Belastungänderung a priori nur dort erfüllt werden, wo ein Haftkontakt existiert oder eine erneute Durchdringung der Körper ausgeschlossen ist. Im Fall $g_n < 0$ repräsentiert g_n das physikalisch unzulässige Maß der gegenseitigen Durchdringung, das zur Konstruktion der aktuellen Kontaktfläche mit Hilfe des Penaltyverfahrens verwendet werden kann. Die Art und Weise der numerischen Umsetzung des Normalkontakts motiviert als Bestimmungsgleichung für eine virtuelle Annäherung

$$\delta g_n^\epsilon := (\,\delta \mathbf{u}^I - \delta \mathbf{u}^{II}\,) \bullet \mathbf{n}^{II} \tag{5.24}$$

und analog für eine virtuelle Relativverschiebung *Laursen/Simo* [69], *Wriggers* [117]

$$\delta\theta^\beta := \frac{1}{(m_{\alpha\beta}^{II} - g_n^\epsilon\, b_{\alpha\beta}^{II})}\,[\,(\delta \mathbf{u}^I - \delta \mathbf{u}^{II}) \bullet \mathbf{a}_\alpha^{II} + g_n^\epsilon\, \mathbf{n}^{II} \bullet \delta \mathbf{u}_{,\alpha}^{II}\,] \quad . \tag{5.25}$$

Die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte wird dabei auf der Basis der Annäherung $\delta g_n^\epsilon\,[\mu m]$, d.h. der Glättung der Rauigkeitskennflächen begründet (Abbildung 5.2).

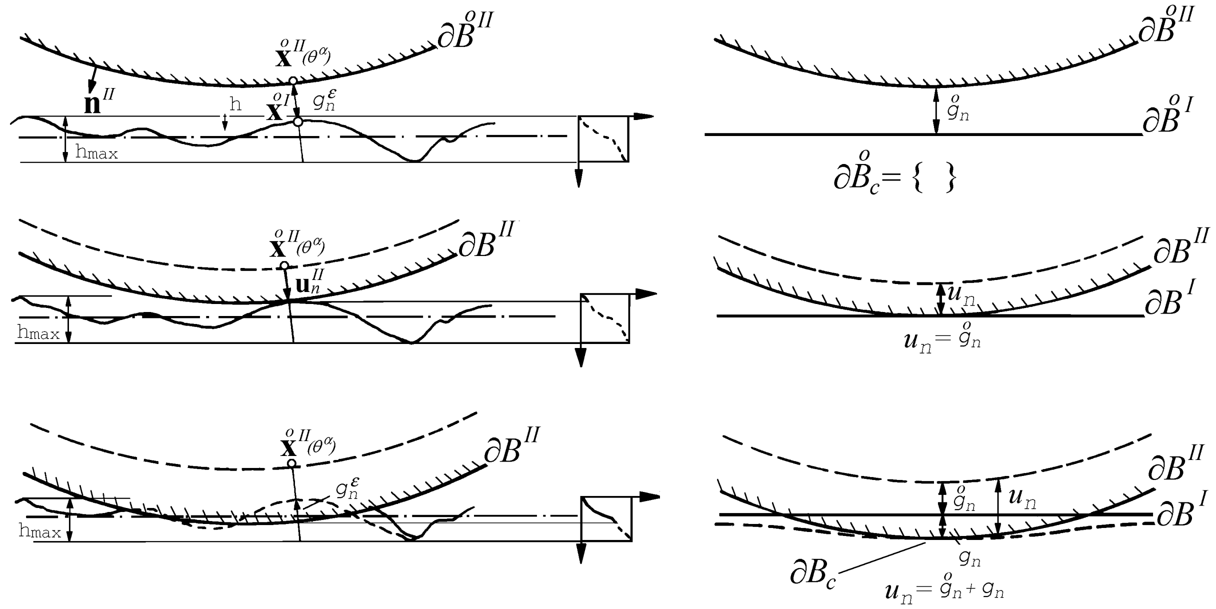


Abb. 5.2: Konzepte der meso- und makroskopischen Annäherung in der Kontaktkinematik

Als virtuelle Arbeit der Kontaktspannungen wird dann

$$\delta A_c = \int\limits_{\partial \bar{\mathcal{B}}_c} (\,\sigma_n\, \delta g_n^\epsilon + \sigma_t^\alpha\, m_{\alpha\beta}^{II}\, \delta\theta^\beta\,)\, da_c \tag{5.26}$$

verwendet, so dass sich Kontaktsteifigkeiten über das Konzept der konsistenten Linearisierung einarbeiten lassen. Diese Lösungsstrategie wird in der numerischen Umsetzung aufgrund der vorgestellten Rollkontaktkinematik sowie der fehlenden mesomechanischen Abbildung von $g_n^\epsilon\,[\mu m] \mapsto g_n\,[cm]$ in dieser Arbeit nicht verwendet.

5.2 Linearisierung

Aufgrund der physikalischen und geometrischen nichtlinearen Problemstellung kann ein Gleichgewichtszustand nur mit Hilfe von iterativen Lösungsverfahren gefunden werden, *Luenberger* [76]. Die verbleibenden Integrale müssen im Rahmen des gewählte Iterationsverfahren konsistent linearisiert werden.

Die Integrationsgrenzen der Volumen- und Oberflächenintegrale lassen sich mit Hilfe des Deformationsgradienten von der Momentankonfiguration auf die Referenzkonfiguration transformieren. Die Integration ist dann auf der bekannten Metrik des Referenzzustands ausführbar. Mit den Transformationsbeziehungen können unter Vernachlässigung der Volumenkräfte die virtuelle Formänderungsarbeit

$$\delta A_i^{\Bbbk} = \int\limits_{\mathring{\mathcal{B}}^{\alpha}} \mathbf{S}^{\Bbbk} (\mathbf{F}^{\Bbbk})^T \bullet \mathrm{Grad}^T \delta \mathbf{u}^{\Bbbk} \; d\mathring{v}^{\Bbbk} \tag{5.27}$$

und die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte

$$\delta A_a^{\Bbbk} = \int\limits_{\partial \mathring{\mathcal{B}}_{\sigma}^{\Bbbk}} \bar{\mathbf{p}}_{\sigma}^{\Bbbk} \bullet \delta \mathbf{u}^{\Bbbk} \; d\mathring{a}_{\sigma}^{\Bbbk} \tag{5.28}$$

bzgl. $\mathring{\mathcal{B}}$ dargestellt werden. Eine Transformation der virtuellen Arbeit der Kontaktspannungen (5.10) auf die Referenzkonfiguration wird erst möglich, wenn die unbekannte Kontaktfläche $\partial \mathcal{B}_c$ der Momentankonfiguration bekannt ist und sich als äquivalente Oberfläche in $\partial \mathring{\mathcal{B}}_c$ abbilden lässt. Unter dieser Voraussetzung folgt für die Darstellung der virtuellen Arbeit der Kontaktspannungen $\mathbf{p}_c$

$$\delta A_c = \int\limits_{\partial \mathring{\mathcal{B}}_c} \mathbf{p}_c \bullet (\, \delta \mathbf{u}^{I} - \delta \mathbf{u}^{II} \,) \; d\mathring{a}_c \quad . \tag{5.29}$$

Auf der Basis der klassischen Taylor-Reihenentwicklung wird ein Funktional unter der Exsistenz der Gateaux-Ableitung, *Vajnberg* [111], in der Form

$$\delta \Pi^{\Bbbk}(\delta \mathbf{u}, {}^{n}\mathbf{u} + \vartriangle \mathbf{u}) = \underbrace{\delta \bar{\Pi}^{\Bbbk}(\delta \mathbf{u}, {}^{\mathbf{n}}\mathbf{u}) + \frac{\partial \, [\, \delta \bar{\Pi}^{\Bbbk}(\delta \mathbf{u}, {}^{\mathbf{n}}\mathbf{u}\,) \,]}{\partial^{\mathbf{n}} \mathbf{u}} \bullet \vartriangle \mathbf{u}}_{L[\, \delta \Pi^{\Bbbk} \,]} + \ldots = 0 \tag{5.30}$$

geometrisch linearisiert und als Grundlage für ein inkrementelles und iteratives Lösungsverfahren vom Newton-Typ verwendbar, *Hughes/Pister* [46]. Die Berücksichtigung der virtuellen Arbeit der Kontaktspannungen in diesem klassischen Verfahren ist nicht trivial. Es erfordert aufgrund der unbekannten Kontaktfläche eigene Kontaktiterationsläufe bei Konstanthaltung variabler Prozessparameter und kann nur durch Vorgabe der unbekannten Kontaktspannungs- bzw. einer Verschiebungsverteilung oder einer Regularisierung der unstetigen Funktionsbeschreibungen des makroskopischen Eindring- und Reibverhaltens *Oden/Kikuchi* [87] numerisch umgesetzt werden.

Unter Voraussetzung konservativer Oberflächenlasten auf $\partial\mathring{\mathcal{B}}_\sigma$ reduziert sich die geometrische Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit auf das Integral der inneren Kräfte und der Kontaktkräfte. Die Linearisierung bzgl. der materiellen Koordinaten liefert für einen deformierbaren Körper

$$L[\,\delta\Pi^I\,] = \int_{\mathring{\mathcal{B}}^I} \mathrm{Grad}\delta\mathbf{u}^I \bullet (\,\bar{\mathbf{F}}^I\,\bar{\mathbf{S}}^I\,)\; d\mathring{v}^I - \int_{\partial\mathring{\mathcal{B}}^I_\sigma} \bar{\mathbf{p}}^I_\sigma \bullet \delta\mathbf{u}^I\; d\mathring{a}^I \tag{5.31}$$

$$+ \int_{\mathring{\mathcal{B}}^I} \frac{\partial\bar{\mathbf{S}}^I}{\partial\mathbf{u}^I}\,\Delta\mathbf{u}^I\;(\bar{\mathbf{F}}^I)^T \bullet \mathrm{Grad}^T\delta\mathbf{u}^I\; d\mathring{v}^I \tag{5.32}$$

$$+ \int_{\mathring{\mathcal{B}}^I} \mathrm{Grad}\delta\mathbf{u}^I \bullet (\,\bar{\mathbf{S}}^I\;\mathrm{Grad}^T\Delta\mathbf{u}^I\,)\; d\mathring{v}^I \quad , \tag{5.33}$$

wobei der Index ${}^n(\ldots)$ durch $(\bar{\ldots})$ ersetzt wurde. Der linearisierte Zuwachs des 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors liefert unter Anwendung der Kettenregel

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{S}}^I}{\partial\mathbf{u}^I}\,\Delta\mathbf{u}^I = \left.\frac{\partial\mathbf{S}^I}{\partial\mathbf{C}^I}\right|_{n+\xi_{\mathbf{X}}} \frac{\partial\bar{\mathbf{C}}^I}{\partial\mathbf{u}^I}\,\Delta\mathbf{u}^I \tag{5.34}$$

$$= \mathbb{C}^{ep}\;[\,(\bar{\mathbf{F}}^I)^T\,\mathrm{Grad}\Delta\mathbf{u}^I + \mathrm{Grad}^T\Delta\mathbf{u}^I\;\bar{\mathbf{F}}^I\,] \quad . \tag{5.35}$$

Der vierstufige elasto-plastische Materialtensor $\mathbb{C}^{ep}$ verbindet das Differential des Spannungstensors mit dem Differential des Verzerrungstensors. Infolge seiner Belastungsabhängigkeit wird dieser an der Stelle $n{+}\xi;\ \xi \in [0,1]$ über eine Integration der Ratengleichungen entwickelt. Für einen Starrkörper $\mathcal{B}^{II}$ verbleibt für die äußeren Kräfte (5.28)

$$L[\,\delta\Pi^{II}\,] = -\int_{\partial\mathring{\mathcal{B}}^{II}_\sigma} \bar{\mathbf{p}}^{II}_\sigma \bullet \delta\mathbf{u}^{II}\; d\mathring{a}^{II}_\sigma \quad . \tag{5.36}$$

5.2.1 Linearisierung der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte

Eine Linearisierung der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte auf der Basis von (5.29) liefert

$$L[\,\delta A_c\,] = \int_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} \bar{\mathbf{p}}_c \bullet (\,\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}\,)\; d\mathring{a}_c \tag{5.37}$$

$$+ \int_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} (\,\frac{\partial\bar{p}_n}{\partial g_n}\,\Delta g_n\;\bar{\mathbf{n}}^{II} + \bar{p}_n\,\Delta\bar{\mathbf{n}}^{II}\,) \bullet (\,\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}\,)\, d\mathring{a}_c \tag{5.38}$$

$$+ \int_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} (\,\frac{\partial\bar{p}^\alpha_t}{\partial\theta^\beta}\,\Delta\theta^\beta + \frac{\partial\bar{p}^\alpha_t}{\partial\bar{p}_n}\frac{\partial\bar{p}_n}{\partial g_n}\,\Delta g_n)\;\;\bar{\mathbf{a}}^{II}_\alpha \bullet (\,\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}\,)\, d\mathring{a}_c \tag{5.39}$$

$$+ \int_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} \bar{p}^\alpha_t\,\Delta\bar{\mathbf{a}}^{II}_\alpha \bullet (\,\delta\mathbf{u}^I - \delta\mathbf{u}^{II}\,)\, d\mathring{a}_c\,. \tag{5.40}$$

Durch Vertauschen der Operatoren in (5.14) und (5.16) folgt für die Linearisierung unter der Bedingung $g_n = 0$

$$\triangle g_n = \; (\,\triangle \mathbf{u}^{I} - \triangle \mathbf{u}^{II}\,) \bullet \bar{\mathbf{n}}^{II} \quad , \qquad \bar{m}^{II}_{\beta\gamma}\, \triangle\theta^{\gamma} = (\,\triangle \mathbf{u}^{I} - \triangle \mathbf{u}^{II}\,) \bullet \bar{\mathbf{a}}^{II}_{\beta} \quad . \tag{5.41}$$

Über $\bar{\mathbf{n}}^{II} \bullet \bar{\mathbf{a}}^{II}_{\beta} = 0$ entsteht für die *Linearisierung des Normalenvektors*

$$\triangle\bar{\mathbf{n}}^{II} = -(\,\bar{\mathbf{n}}^{II} \bullet \triangle\bar{\mathbf{a}}^{II}_{\beta}\,)\, \bar{m}^{\beta\gamma}\, \bar{\mathbf{a}}^{II}_{\gamma} = -(\,\bar{\mathbf{n}}^{II} \bullet \triangle\mathbf{u}^{II}_{,\beta} + \bar{b}^{II}_{\beta\delta}\, \triangle\theta^{\delta}\,)\, \bar{m}^{\beta\gamma}\, \bar{\mathbf{a}}^{II}_{\gamma} \tag{5.42}$$

und nach Einarbeitung der linearisierten Beziehungen in (5.38) und entsprechender Zusammenfassung die Darstellung

$$L[\,\delta A_c\,] \;=\; \int\limits_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} \bar{\mathbf{p}}_c \bullet (\,\delta\mathbf{u}^{I} - \delta\mathbf{u}^{II}\,)\; d\mathring{a}_c \tag{5.43}$$

$$+ \int\limits_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} (\,\triangle\mathbf{u}^{I} - \triangle\mathbf{u}^{II}\,)\, \bar{\mathbf{D}}_c \;\bullet (\,\delta\mathbf{u}^{I} - \delta\mathbf{u}^{II}\,)\, d\mathring{a}_c \tag{5.44}$$

$$+ \int\limits_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} (\,\bar{\mathbf{n}}^{II} \bullet \triangle\mathbf{u}^{II}_{,\alpha}\,)\, (\,\bar{p}^{\alpha}_t \delta g_n - \bar{p}_n\, \delta\theta^{\alpha}\,)\, d\mathring{a}_c \tag{5.45}$$

$$+ \int\limits_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} \bar{b}^{II}_{\alpha\beta}\, \triangle\theta^{\beta} \quad (\,\bar{p}^{\alpha}_t \delta g_n - \bar{p}_n\, \delta\theta^{\alpha}\,)\; d\mathring{a}_c \tag{5.46}$$

mit

$$\bar{\mathbf{D}}_c = c_n(g_n)\; (\,\bar{\mathbf{n}}^{II} \otimes \bar{\mathbf{n}}^{II}\,) + \frac{\partial\bar{p}^{\alpha}_t}{\partial\theta^{\beta}}\; \frac{1}{\bar{m}^{II}_{\beta\gamma}}\, (\,\bar{\mathbf{a}}^{II}_{\gamma} \otimes \bar{\mathbf{a}}^{II}_{\alpha}\,) + \mu^{\alpha}\, c_n(g_n)\; (\,\bar{\mathbf{n}}^{II} \otimes \bar{\mathbf{a}}^{II}_{\alpha}\,) \quad . \tag{5.47}$$

Mit den Größen des Abschnitts 4.2.1 wird für den ersten Term in (5.47)

$$\frac{\partial\bar{p}_n}{\partial g_n} = c_n(g_n) \tag{5.48}$$

die nichtlineare Normalsteifigkeit und für den dritten Term

$$\frac{|\;\partial\bar{p}^{\alpha}_t\;|}{|\;\partial\bar{p}_n\;|} = \mu^{\alpha} \tag{5.49}$$

der Reibwert subsituiert. $\bar{\mathbf{D}}_c$ lässt sich als Interface-Materialtensor interpretieren, der aufgrund des dritten Terms unsymmetrisch ist. Werden die Forderungen (5.20) und (5.21) für alle Kontaktpunkte aufrechterhalten, verschwinden (5.43)-(5.46) vollständig. Eine Interpretation im Sinne des klassischen Penaltyverfahrens wird möglich, wenn

$$\triangle\mathbf{u}^{I} - \triangle\bar{\mathbf{u}}^{II} = \mathbf{0} \qquad \forall \quad \mathbf{x}_c \in \bar{\mathcal{B}}_c \tag{5.50}$$

als Verschiebungsnebenbedingung betrachtet wird, in der eine vorgegebene Verschiebung $\Delta\bar{\mathbf{u}}^{II}$ eines Kontaktpunktes aus $\partial\bar{\mathcal{B}}_c \subset \partial\mathcal{B}^{II}$ auch als Verschiebungspfad für den Punkt $\mathbf{x}^I \in \partial\mathcal{B}^I$ des Körpers $\mathcal{B}^I$ erzwungen wird. Wird in Anlehnung an (5.47) ein symmetrischer Penalty-Materialtensor

$$\bar{\mathbf{D}}_{cp} = c_n \, (\, \bar{\mathbf{n}}^{II} \otimes \bar{\mathbf{n}}^{II} \,) + c_t^{\alpha} \, (\, \bar{\mathbf{a}}_{\gamma}^{II} \otimes \bar{\mathbf{a}}_{\alpha}^{II} \,) \tag{5.51}$$

definiert, entsteht aus dem linearisierten Prinzip der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte im Fall vorgegebener Verschiebungen in der Kontaktzone aus (5.43) und (5.44) mit (5.51)

$$L[\, \delta A_c \,] = \int\limits_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} \bar{\mathbf{p}}_c \bullet \delta\mathbf{u}^I \; d\mathring{a}_c + \int\limits_{\partial\mathring{\mathcal{B}}_c} (\, \Delta\mathbf{u}^I - \Delta\bar{\mathbf{u}}^{II} \,) \, \bar{\mathbf{D}}_{cp} \bullet \delta\mathbf{u}^I \; d\mathring{a}_c \quad . \tag{5.52}$$

Das erste Skalarprodukt lässt sich als die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte deuten. Im zweiten Skalarprodukt ist unter anderem auch die virtuelle Arbeit der Penetrationskräfte enthalten.

5.3 Spannungsberechnung

In einer nichtlinearen Berechnung der Finite-Elemente-Methode müssen die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen in jedem Lastschritt ausgewertet werden. Im Gegensatz zum hyperelastischen Materialverhalten wird das inelastische Materialverhalten durch die Ratengleichungen des Fließgesetzes (4.13) und die Verfestigungsregeln (4.18) und (4.19) charakterisiert. Diese nichtlinearen Differentialgleichungen 1. Ordnung können mit Hilfe von Ein-, Mehrschritt- oder Extrapolationsverfahren numerisch integriert werden. Im Rahmen einer geschwindigkeitsunabhängigen Plastizitätstheorie hat sich das implizite Einschritt-Integrationsverfahren (Euler-Rückwärts) aufgrund seiner numerischen Stabilität in der Anwendung bewährt, siehe *Ortiz/Popov* [90], *Simo/Taylor* [103]. Nach der Integration über den Zeitschritt $[{}^n t + \Delta t]$ müssen die plastischen Verzerrungen

$$^{n+1}\mathbf{E}^p \;= {}^n\mathbf{E}^p + \Delta\lambda \; \mathbb{H} \; {}^{n+1}\mathbf{S} \tag{5.53}$$

$$^{n+1}\varepsilon_{\mathrm{v}}^p \;= {}^n\varepsilon_{\mathrm{v}}^p + \Delta\lambda \, \frac{2}{3} \, {}^{n+1}\sigma_{\mathrm{v}} \tag{5.54}$$

und die Vergleichspannung

$$^{n+1}\sigma_{\mathrm{v}} \;= {}^n\sigma_{\mathrm{v}} + \Delta\lambda \, \frac{2}{3} E_p {}^{n+1}\sigma_{\mathrm{v}} \tag{5.55}$$

an der noch unbekannten Intervallgrenze $[\, t_n{+}\Delta t \,]$ iterativ ermittelt werden, wobei für $\Delta\gamma = \Delta\lambda \, \| \, \mathbf{S}^D \, \|$ substituiert wird. Nach (4.3) ergeben sich die Spannungen am Ende eines

Lastschrittes aus

$$ {}^{n+1}\mathbf{S} = \mathbb{C}^e \; {}^{n+1}\mathbf{E}^e \; = \mathbb{C}^e \; ({}^{n+1}\mathbf{E} - {}^{n}\mathbf{E}^p \; - \triangle\lambda \, \mathbb{H} \; {}^{n+1}\mathbf{S}) \quad . \tag{5.56} $$

Für das Differential der Spannungen folgt

$$ d\mathbf{S} = \mathbb{C}^e \; (d\mathbf{E} - d\triangle\lambda \, \mathbb{H} \, \mathbf{S} - \triangle\lambda \, \mathbb{H} \, d\mathbf{S}) \quad , \tag{5.57} $$

wobei zur Vereinfachung der Notation der Index $(n{+}1)$ für Größen der aktuellen Konfiguration fortgelassen wurde. Zur Bestimmung des plastischen Multiplikators $\triangle\lambda$ wird die Konsistenzbedingung

$$ \varPhi \, (\triangle\lambda) = \| \, \mathbf{S}^D \, \| - \sqrt{\frac{2}{3}} \, \sigma_{\mathrm{v}}(\varepsilon^p_{\mathrm{v}}) = 0 \tag{5.58} $$

in eine Taylorreihe entwickelt

$$ \varPhi \, (\triangle\lambda^{i+1}) = \varPhi \, (\triangle\lambda^{i}) + \frac{\partial \varPhi \, (\triangle\lambda^i)}{\partial \triangle\lambda} \, \triangle\triangle\lambda + 0(\triangle\triangle\lambda^2) = 0 \quad . \tag{5.59} $$

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordung kann das Nullstellenproblem mit Hilfe eines iterativen Lösungsverfahrens vom Newton-Raphson-Typ

$$ \triangle\triangle\lambda = - \left[\frac{\partial \varPhi \, (\triangle\lambda^i)}{\partial \triangle\lambda} \right]^{-1} \varPhi \, (\triangle\lambda^i) \tag{5.60} $$

zur Bestimmung von

$$ \triangle\lambda^{i+1} = \triangle\lambda^i + \triangle\triangle\lambda \tag{5.61} $$

benutzt werden. Für die Ableitung der Konsistenzbedingung entsteht im Fall einer linearen isotropen Verfestigung

$$ \frac{\partial \varPhi \, (\triangle\lambda^i)}{\partial \triangle\lambda} = - \, \mathbf{S}^D \bullet \left[(\, \mathbb{1} \, + \triangle\lambda^i \, \mathbb{C}^e \, \mathbb{H})^{-1} \, \mathbb{C}^e \; + \frac{2E_p}{(3 - \triangle\lambda^i \, 2E_p)} \mathbb{1} \, \right] \mathbf{S}^D \quad . \tag{5.62} $$

Die Spannungsberechnung beginnt mit einer elastischen Prediktorspannung aus (5.56) und dem Startwert $\triangle\lambda \equiv \triangle\lambda^0 = 0$. Zur Überprüfung des Spannungszustands wird somit

$$ \mathbf{S}^{pre} \; = \mathbb{C}^e \; (\, \mathbf{E} - {}^{n}\mathbf{E}^p \;) \quad , \tag{5.63} $$

in die Fließbedingung (5.58) substituiert. Bei Verletzung der Fließbedingung wird mit Hilfe der obigen Gleichungen ein iterativer plastischer Korrektorschritt über $\triangle\lambda^{i+1}$ durchgeführt und die neue Prediktorspannung über

$$ \mathbf{S}(\triangle\lambda^{i+1}) = \mathbf{S}^{pre} \; - \triangle\lambda^{i+1} \, \mathbb{H} \, \mathbf{S}(\triangle\lambda^i) \tag{5.64} $$

berechnet. Die Iteration wiederholt sich solange, bis die Fließbedingung in (5.58) durch $\mathbf{S}(\triangle\lambda^{i+1})$ erfüllt wird.

5.3.1 Konsistenter elasto-plastischer Tangentenmodul

Für die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeit wird das Differential der Spannungen in Abhängigkeit des Verzerrungszuwachses benötigt. Nach Berechnung des aktuellen Spannungs-Verzerrungszustands kann der elasto-plastische Tangentenmodul der aktuellen Konfiguration für den nächsten Lastschritt berechnet werden. Aus dem Differential der Konsistenzbedingung (5.58)

$$d\Phi\,(\vartriangle\lambda) = \mathbf{N} \bullet \mathbb{H}\; d\mathbf{S} - \sqrt{\frac{2}{3}}\; d\sigma_{\mathrm{v}} = 0 \tag{5.65}$$

entsteht mit dem Differential der effektiven Spannungen

$$d\sigma_{\mathrm{v}} = E_p\, d\vartriangle\epsilon_{\mathrm{v}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\, E_p\, d\vartriangle\gamma = \frac{2\, E_p\, \sigma_{\mathrm{v}}}{(3 - \vartriangle\lambda\, 2E_p)}\; d\vartriangle\lambda \tag{5.66}$$

die Beziehung

$$d\vartriangle\lambda = -\frac{1}{\tilde{E}_p}\; \mathbf{S} \bullet \mathbb{H}\, d\mathbf{S} \tag{5.67}$$

mit der Definition eines modifizierten plastischen Moduls

$$\tilde{E}_p := -\frac{4\, E_p\, \sigma_{\mathrm{v}}^2}{(9 - \vartriangle\lambda\, 6E_p)} \quad . \tag{5.68}$$

Die Substitution von (5.67) in (5.57) liefert nach einigen Umformungen das benötigte Differential der Spannungs-Verzerrungsbeziehung

$$d\mathbf{S} = \mathbb{C}_T^{ep}\; d\mathbf{E} \tag{5.69}$$

mit einem elasto-plastischen Tangentenmodul

$$\mathbb{C}_T^{ep} \;:= \left[\, \mathbb{C}^{e-1} \; - \frac{1}{\tilde{E}_p}\, \mathbb{H}\; (\, \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}\,)\, \mathbb{H} + \vartriangle\lambda\, \mathbb{H} \right]^{-1} \quad , \tag{5.70}$$

der in Abhängigkeit des plastischen Multiplikators und des aktuellen Spannungszustands berechnet wird. In analoger Weise kann ein konsistenter elasto-plastischer Tangentenmodul zur Berücksichtigung einer kinematischen Verfestigung entwickelt werden.

5.3.2 Berechnung der Kontaktspannungen

Die mit der numerischen Lösung von Kontaktproblemen für Finite-Elemente-Programme entwickelten Kontaktalgorithmen befassen sich im ersten Schritt mit der Ermittlung der Kontaktfläche durch Erfüllung der geometrischen Kontaktbedingungen. Erst im zweiten Schritt kann dann die Erfüllung des Reibungsgesetzes erfolgen. Aufgrund möglicher

Gleiterscheinungen in der Kontaktfläche, die von neuer Penetration und/oder partieller Ablösung der Kontaktkörper begleitet sein kann, wiederholen sich diese Schritte bis ein Gleichgewichtszustand gefunden ist. In diesem iterativen Prozess lassen sich die unbekannten Kontaktspannungen $\mathbf{p}_c$ aus den Kontaktkräften $\mathbf{f}_c$ berechnen. Sind Kontaktfläche und Kontaktkräfte bekannt, so kann über

$$\mathbf{f}_c \bullet \delta \mathbf{u}^I = \int\limits_{\partial \mathring{\mathcal{B}}_c} \mathbf{p}_c \bullet \delta \mathbf{u}^I \, d\mathring{a}_c \qquad (5.71)$$

die Berechnung der Kontaktspannungen durchgeführt werden. Da die Auswertung von (5.71) unter anderem auch von der räumlichen Diskretisierung der Kontaktfläche abhängig ist, wird die Berechnung der Kontaktspannungen im Kapitel 6.2.3 näher erläutert.

6 Finite-Elemente-Formulierung

Die Grundlagen und verschiedene Teilaspekte der Finite-Elemente-Methoden sind in *Bathe* [7], *Hughes* [45] oder *Zienkiewicz* [122] umfassend dargestellt. Ausgangspunkt der Finite-Elemente-Methode ist die geometrische Zerlegung des Kontinuums $\mathring{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{E}^3$ in n_e-fache Teilgebiete $\mathring{\mathcal{B}}_h^e \in \mathring{\mathcal{B}}_h$, die finiten Elemente

$$\mathring{\mathcal{B}}_h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathring{\mathcal{B}}_h^e \quad . \tag{6.1}$$

Die Feinheit der Diskretisierung (Index h), mit der die Geometrie des Körpers $\mathring{\mathcal{B}}_h \to \mathring{\mathcal{B}}$ approximiert wird, symbolisiert den Übergang vom kontinuierlichen zum n-dimensionalen, diskreten algebraischen Lösungsraum $\mathcal{R}^n$ (h-Adaptivität).

6.1 Ebenes Strukturmodell

Im Rahmen eines isoparametrischen Konzepts werden das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}$ und das Koordinatenfeld $\mathring{\mathbf{x}}$ durch gleiche Ansatzfunktionen im Gebiet eines finiten Elements approximiert. Die Darstellung eines zweidimensionalen Verschiebungs- und materiellen Koordinatenfeldes bzgl. des $\xi, \eta \in [-1, 1]$ Parameterraums des Einheitselementes mit n_k Elementknoten lautet

$$u_x^e(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(\xi,\eta)\, u_k \quad ; \quad \mathring{\mathrm{x}}^e(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(\xi,\eta)\, \mathring{\mathrm{x}}_k \tag{6.2}$$

$$u_y^e(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(\xi,\eta)\, v_k \quad ; \quad \mathring{\mathrm{y}}^e(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{n_k} N^k(\xi,\eta)\, \mathring{\mathrm{y}}_k \quad . \tag{6.3}$$

Unter Verwendung der Lagekoordinaten der Knoten k im natürlichen ξ, η-Koordinatensystem lassen sich die bilinearen Formfunktionen eines 4-Knotenelements ($n_k = 4$) in der Notation von *Hughes* [45] mit

$$N^k(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,(1+\xi\xi_k)(1+\eta\eta_k) \tag{6.4}$$

darstellen. Die vollständige Matrizenformulierung des linearisierten Prinzips der virtuellen Arbeit in den Größen der Referenzkonfiguration erfordert eine vollständige Algebraisierung der Skalarprodukte in Abschnitt 5.1.1 bis 5.3.1. Mit Einführung des Elementverschiebungsvektors

$$\underline{\mathbf{v}}^{eT} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots , u_{n_k}, v_{n_k}\} \tag{6.5}$$

und der Matrix der Formfunktionen für die Verschiebungen

$$\underline{\mathbf{N}}^e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \ldots & N_{n_k} & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \ldots & 0 & N_{n_k} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

folgt für die Variation $\delta\underline{\mathbf{u}}^e$ und den Zuwachs $\vartriangle\underline{\mathbf{u}}^e$ des Elementverschiebungsfeldes $\underline{\mathbf{u}}^{eT} = \{u_x^e, u_y^e\}$ nach (6.2) und (6.3)

$$\delta\underline{\mathbf{u}}^e = \underline{\mathbf{N}}^e\,\delta\underline{\mathbf{v}}^e \quad ; \qquad \vartriangle\underline{\mathbf{u}}^e = \underline{\mathbf{N}}^e \vartriangle\underline{\mathbf{v}}^e \quad . \tag{6.7}$$

Bei Auswertung der entsprechenden Strukturmodellierung und Ausnutzung spezieller Symmetrieeigenschaften lässt sich der Gradient des Verschiebungsfeldes über

$$\mathrm{Grad}\,\delta\underline{\mathbf{u}}^e = \underline{\mathbf{B}}^e\delta\underline{\mathbf{v}}^e \quad , \qquad \mathrm{Grad} \vartriangle\underline{\mathbf{u}}^e = \underline{\mathbf{B}}^e \vartriangle\underline{\mathbf{v}}^e \tag{6.8}$$

darstellen. Die Matrix $\underline{\mathbf{B}}^e$ enthält die Ableitungen der Formfunktionen nach den materiellen Koordinaten. Mit der Matrix $\underline{\mathbf{G}}^e(\underline{\mathbf{v}}^e)$

$$\underline{\mathbf{G}}^e(\underline{\mathbf{v}}^e) = \underline{\mathbf{F}}^{eT}\ \underline{\mathbf{B}}^e \tag{6.9}$$

kann (5.31) in diskreter Form dargestellt werden

$$\delta\Pi_h^I(\underline{\mathbf{v}}^e, \delta\underline{\mathbf{v}}^e) = \delta\underline{\mathbf{v}}^{eT}\ [\int\limits_{\mathring{V}_h} \underline{\mathbf{G}}^{eT}\,\underline{\mathbf{S}}^e\,d\mathring{v} - \int\limits_{\mathring{A}_h} \underline{\mathbf{N}}^{eT}\ \underline{\bar{\mathbf{p}}}^e\,d\mathring{a}\,] \quad . \tag{6.10}$$

Die Matrix $\underline{\mathbf{S}}^e$ enthält die Komponenten des 2. Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensors und $\underline{\bar{\mathbf{p}}}^e$ die Ordinaten vorgegebener Oberflächenspannungen an den jeweiligen Knotenpunkten. Die Komponenten des elasto-plastischen Stofftensors (5.70) werden in einer Materialmatrix $\underline{\mathbf{C}}_{ep}$ zusammengestellt, so dass sich aus (5.32), (5.33) und (5.34) mit (6.8) und (6.9) die Darstellung

$$\mathrm{D}\delta\Pi_h^I \vartriangle\underline{\mathbf{v}}^e = \delta\underline{\mathbf{v}}^{eT}\ [\int\limits_{\mathring{V}_h} (\ \underline{\mathbf{G}}^{eT}\ \underline{\mathbf{C}}_{ep}^e\ \underline{\mathbf{G}}^e + \underline{\mathbf{B}}^{eT}\ \underline{\mathbf{S}}^e\ \underline{\mathbf{B}}^e\ )\ d\mathring{v}\,] \vartriangle\underline{\mathbf{v}}^e \tag{6.11}$$

entwickeln lässt. Mit der Definition der Matrizen für die Spannungsresultierenden eines Elements

$$\underline{\mathbf{s}}^e \;=\; \int\limits_{\mathring{V}_h} \underline{\mathbf{G}}^{eT}\; \underline{\mathbf{S}}^e \, d\mathring{v} \quad , \tag{6.12}$$

den Elementknotenkräften aus der äußeren Belastung

$$\underline{\bar{\mathbf{f}}}^{\,e} \;=\; \int\limits_{\mathring{A}_h} \underline{\mathbf{N}}^{eT}\;\; \underline{\bar{\mathbf{p}}}^{\,e} \, d\mathring{a} \tag{6.13}$$

und der nichtlinearen Elementsteifigkeitsmatrix

$$\underline{\mathbf{k}}^e_T = \int\limits_{\mathring{V}_h} (\;\underline{\mathbf{G}}^{eT}\; \underline{\mathbf{C}}^e_{ep}\;\; \underline{\mathbf{G}}^e + \underline{\mathbf{B}}^{eT}\; \underline{\mathbf{S}}^e\; \underline{\mathbf{B}}^e\;) \, d\mathring{v} \tag{6.14}$$

lautet die algebraische Form des linearisierten Prinzips der virtuellen Arbeit eines Elements nach (5.30)

$$\delta \underline{\mathbf{v}}^{\,eT} \;\left[\, \underline{\mathbf{s}}^e - \underline{\bar{\mathbf{f}}}^{\,e} + \;\underline{\mathbf{k}}^e_T \,\Delta\underline{\mathbf{v}}^{\,e} \right] = 0 \quad . \tag{6.15}$$

Über die Assemblierung

$$\underline{\mathbf{K}}_T = \bigcup_{e=1}^{n_e} \underline{\mathbf{k}}^e_T \;, \quad \Delta\underline{\mathbf{v}} \;= \bigcup_{e=1}^{n_e} \Delta\underline{\mathbf{v}}^{\,e} \;, \quad \underline{\bar{\mathbf{f}}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \underline{\bar{\mathbf{f}}}^{\,e} \;, \quad \underline{\mathbf{s}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \underline{\mathbf{s}}^{\,e}$$

und Einarbeitung bekannter Verschiebungsrandbedingungen entsteht das zu lösende algebraische Gleichungssystem

$$\underline{\mathbf{K}}_T(\underline{\mathbf{v}}\,)\;\Delta\underline{\mathbf{v}} \;=\; \underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{v}}(\underline{\mathbf{v}}\,) \qquad\qquad \forall \quad \underline{\mathbf{v}} \,\in \mathcal{R}^n \quad , \tag{6.16}$$

dessen rechte Seite aus der Differenz der äußeren und inneren Knotenpunktkräfte das Residuum bildet

$$\underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{v}}(\underline{\mathbf{v}}\,) = \underline{\bar{\mathbf{f}}} - \underline{\mathbf{s}}(\underline{\mathbf{v}}\,) \quad . \tag{6.17}$$

6.2 Active-Set-Strategie

Die Entwicklung numerischer Lösungsverfahren für Kontaktprobleme im Rahmen der Finite-Elemente-Methode beruhen im Allgemeinen auf der Active-Set-Strategie. Auf der Suche nach einem Gleichgewichtszustand werden im Zuge der Active-Set-Strategie nur diejenigen Ungleichungsnebenbedingungen berücksichtigt, die ein Ausbrechen der Lösung aus dem zulässigen Lösungsraum verhindern, siehe z.B. *Himmelblau* [44], oder *Luenberger* [76, 77]. Dabei wird eine Ungleichungsnebenbedingung als aktiv bezeichnet, wenn sie in Form ihrer Gleichheit an einem Lösungspunkt wirkt. Durch Vorschalten eines Kontaktsuchalgorithmus kann so die Anzahl der zu berücksichtigenden Ungleichungsnebenbedingungen vom Typ (3.28a) auf die der Aktiven beschränkt werden. Auf der Basis der Active-Set-Strategie lassen sich somit alle gefundenen aktiven Ungleichungsnebenbedingungen im Lösungsverfahren so integrieren, als lägen sie in Form von Gleichungen vor.

Nebenbedingungen die in Gleichungsform vorliegen, lassen sich dann auf bekannte Weise mit Hilfe Lagrange'scher Multiplikatoren, dem Penalty- oder Barrierverfahren oder einer Kombination aus beiden in die Variationsformulierung von (6.16) und damit in viele existierende Finite-Elemente-Programme einarbeiten. Zu beachten bleibt, daß bei Anwendung der Active-Set-Strategie jeder Lagrange-Multiplikator, der mit einer aktiven Ungleichungsnebenbedingung verbunden ist, einer Vorzeichenbeschränkung unterliegt. Diese entsteht aus dem Kuhn-Tucker-Theorem, das die notwendigen Bedingungen lokaler Extrema für Optimierungsaufgaben mit Ungleichungsnebenbedingungen liefert, *Luenberger* [76]. Damit das Kuhn-Tucker-Theorem Gültigkeit besitzt, dürfen die durch die aktiven Nebenbedingungen entstehenden Ränder des Lösungsraums keine Unstetigkeitsstellen (Scheitelpunkte) bilden und ihre Gradienten am Lösungspunkt nicht linear abhängig sein, *Himmelblau* [44]. Im Fall unstetiger Nebenbedingungen wurde z.B. von *Kikuchi* [58] zur Erfüllung der Qualifikationsanforderungen eine Regularisierung der Nebenbedingung durchgeführt, indem unstetige Nebenbedingungen durch stetige Funktionsbeschreibungen approximiert wurden.

6.2.1 Geometrische Kontaktbedingungen

Mit dem Konzept der Active-Set-Strategie wird im Fall der Penetration des Knotens k die Ungleichung (3.28a) durch

$$\underline{\mathbf{g}}^k := \vartriangle\underline{\mathbf{v}}_c^k - \vartriangle\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k = \underline{\mathbf{0}} \tag{6.18}$$

aktiviert, wobei $\vartriangle\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k$ das Eindringmaß des Knotens in den Gegenkörper darstellt. Über den Vergleich der notwendigen Bedingungen für das Erreichen eines Extremums ist zwischen dem Penaltyverfahren und der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren ein Zusammenhang herstellbar. Ein unbekannter Lagrange'scher Multiplikator stellt sich als Gradient der gewählten Penaltyfunktion dar, wenn der Penaltyfaktor gegen unendlich strebt, *Jacoby et al.* [48], *Landers/Taylor* [68]. Im Sinn der Kontaktmechanik lassen sich die unbekannten Kontaktknotenkräfte in (5.29)

$$\underline{\mathbf{f}}_c^k = \int\limits_{\mathring{A}_c^e} \underline{\mathbf{p}}_c^e \; d\mathring{a}_c^e \tag{6.19}$$

als Lagrange'sche-Multiplikatoren interpretieren und auf der Grundlage eines quadratischen Penaltyfunktionals $P(\underline{\mathbf{g}}^k, k_\epsilon)$ die Beziehung

$$\underline{\mathbf{f}}_c^k = \lim_{k_\epsilon \to \infty} \nabla_{\mathrm{v}} P(\underline{\mathbf{g}}^k, k_\epsilon) = (\nabla_{\mathrm{v}} \underline{\mathbf{g}}^k)^T \, k_\epsilon \, \underline{\mathbf{W}}_c^k \; \underline{\mathbf{g}}^k \tag{6.20}$$

angeben. Dabei ist $\underline{\mathbf{W}}_c^k$ eine Skalierungsmatrix, über dessen Koeffizienten die einzelnen Gleichungen in $\underline{\mathbf{g}}^k$ hinsichtlich des globalen Penaltyfaktors k_ϵ gewichtet werden. Eine Gewichtung vom Typ $\underline{\mathbf{W}}_c^k = \underline{\mathbf{1}}^k$ sollte nach *Felippa* [28] nur bei gut konditionierten linearen Gleichungssystemen Verwendung finden. Da infolge der Diskretisierung die Nebenbedingungen (6.18) in entkoppelter Form vorliegen, ist $\nabla_{\mathrm{v}} \underline{\mathbf{g}}^k = \underline{\mathbf{1}}$. Für entkoppelte Nebenbedingungen entsteht aus (6.20) mit (6.18)

$$\underline{\mathbf{f}}_c^k = \underline{\mathbf{k}}_c^k \; (\triangle \underline{\mathbf{v}}_c^k - \triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k) \tag{6.21}$$

unter Verwendung einer Penaltysteifigkeitsmatrix vom Typ (5.51)

$$\underline{\mathbf{k}}_c^k = k_\epsilon \, \underline{\mathbf{W}}_c^k = \int\limits_{\mathring{A}_c^e} \underline{\mathbf{D}}_{cp}^e \; d\mathring{a}_c^e \quad . \tag{6.22}$$

Mit den fiktiven Kontaktknotenlasten für einen Penetrationsknoten $\triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k = g_a^k \, \underline{\hat{\mathbf{a}}}$ bzw. einen Haftknoten $\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k = \underline{\mathbf{0}}$ in (6.21)

$$\triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}{}_c^k = \underline{\mathbf{k}}_c^k \; \triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k \tag{6.23}$$

folgt für die virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte nach (5.52)

$$L[\delta A_c] = (\delta \underline{\mathbf{v}}_c^k)^T \, [\underline{\mathbf{f}}_c^k + \underline{\mathbf{k}}_c^k \; \triangle \underline{\mathbf{v}}_c^k - \triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}{}_c^k \,] \quad . \tag{6.24}$$

Mit der Einarbeitung von (6.24)in (6.16) entsteht

$$[\underline{\mathbf{K}}_T + \underline{\mathbf{K}}_C] \, \triangle \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{r}}(\underline{\mathbf{v}}) \qquad \forall \quad \underline{\mathbf{v}} \in \mathcal{R}^{\mathrm{n}} \quad , \tag{6.25}$$

ein Gleichungssystem, das eine diskrete vorgegebene Kontaktfläche enthält. In der Bestimmung des unbekannten Verschiebungsfeldes wird somit das Axiom der Kontaktkinematik (3.3) erfüllt. Mit der Assemblierung der Kontaktknotenkräfte (6.19) und (6.23)

$$\underline{\mathbf{f}}_c = \bigcup_{e=1}^{n_c} \underline{\mathbf{f}}_c^k \qquad , \qquad \triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}_c = \bigcup_{e=1}^{n_s} \triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}{}_c^k$$

und (6.17) gilt nun für den Residuumvektor

$$\underline{\mathbf{r}}(\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{r}}_{\mathrm{v}}(\underline{\mathbf{v}}) + \triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}_c(\underline{\mathbf{v}}) - \underline{\mathbf{f}}_c(\underline{\mathbf{v}}) \quad . \tag{6.26}$$

Da sich die Verschiebungsnebenbedingungen (6.18) in der Form (6.21) mit (6.22) nur näherungsweise erfüllt werden, steigt und fällt die Brauchbarkeit der Lösung von (6.25) in Abhängigkeit der Penaltyfaktoren in (6.22) (Penaltysensibilität). Eindeutige Gesetzmäßigkeiten zur Bestimmung der freien Parameter existieren nicht für die nichtlinearen Problemstellungen. Hilfestellungen für eine geeignete Wahl von k_ϵ bei reibungsfreien elastischen Normalkontaktproblemen finden sich in den Arbeiten von *Felippa* [28, 29], *Landers/Taylor* [68], *Reddy* [95] und *Wriggers* [118].

6.2.2 Physikalische Kontaktbedingungen

Infolge des nichtlinearen Materialverhaltens muss die Lösung von (6.25) iterativ erfolgen. Während des iterativen Lösungsprozesses werden die Kontaktknotenkräfte, die zur Aufrechterhaltung der kinematischen Kontaktbedingung benötigt werden, über die Integration der Elementspannungen zu Elementknotenkräften nach (6.12) und anschließende Assemblierung als Fehlkräfte im Residuumvektor erzeugt. Über die Transformation der Kontaktknotenkräfte auf die lokale Normal- und Tangentialrichtung der Rollenoberfläche am jeweiligen Kontaktknoten k

$$\underline{\mathbf{f}}_c^k = \underline{\mathbf{T}}^k \; \underline{\mathbf{s}}^k \tag{6.27}$$

mit der Matrix der Kontaktknotenkräfte

$$\underline{\mathbf{f}}_c^k = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{f}_n^k \\ \mathrm{f}_t^k \end{array} \right\} \quad ; \qquad \mathrm{f}_n^k \leq 0 \tag{6.28}$$

und der Transformationsmatrix

$$\underline{\mathbf{T}}^k = \left[\begin{array}{cc} \cos\psi^k & \sin\psi^k \\ -\sin\psi^k & \cos\psi^k \end{array} \right] \quad , \tag{6.29}$$

wird der Reibungszustand in der Kontaktzone verifizierbar. ψ^k ist der aktuelle Lagewinkel des Kontaktknotens bzgl. des intrinsischen KOS. Mit einem Reibgesetz vom Coulomb'schen Typ, einem Reibkoeffizienten nach (4.32), wird der Reibungszustand in der Kontaktzone

$$|\,\mathrm{f}_t^k\,| \left\{ \begin{array}{lll} < & \mu_{ad}^k\,|\,\mathrm{f}_n^k\,| & \textit{lokales Haften,} \\ \geq & \mu_{ad}^k\,|\,\mathrm{f}_n^k\,| & \textit{lokales Gleiten} \end{array} \right. \tag{6.30}$$

unterteilt. Wird für jeden Kontaktknoten der Haftzustand nach (6.30) festgestellt, liegt ein vollständiger Haftkontakt vor und ein statischer Gleichgewichtszustand ist erreicht. Ein makroskopischer Gleitzustand tritt ein, wenn an allen Knoten in der Kontaktzone der Zustand *Gleiten* vorliegt. Im Fall eines unvollständigen Gleitzustands unterteilt sich die Kontaktzone in Haft- und Gleitbereiche, die nach tribologischen Erkenntnissen der Ausbildung einer vollständigen Gleitzone immer vorausgeht. Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingung wird am Gleitknoten die nichtaufnehmbare Reibkraft

$$\Delta \underline{\mathbf{f}}_c^k = \begin{bmatrix} \Delta \mathrm{f}_n^k \\ \Delta \mathrm{f}_t^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ |\,\mathrm{f}_t^k\,| - \mu_{ad}^k\,|\,\mathrm{f}_n^k\,|\,\mathrm{sgn}(\mathrm{f}_t^k) \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

als Belastung aufgebracht und der Knoten aus dem Active-Set herausgenommen, d.h. als freier Knoten betrachtet. Das Active-Set reduziert sich somit immer auf die Kontaktknoten, an denen ein Haftzustand vorliegt. Im Zuge der Active-Set-Strategie ergibt sich für jeden Kontaktknoten ein Lastvektor der Form

$$\underline{\mathbf{f}}_c = \begin{cases} \underline{\mathbf{0}} & \forall \quad \textit{Haftknoten,} \\ (\Delta \underline{\mathbf{f}}_c^k)^T\ \underline{\mathbf{T}}^k & \forall \quad \textit{Gleitknoten.} \end{cases} \tag{6.32}$$

Mit der Assemblierung zu einem globalen Lastvektor erfolgt die Lösung von (6.25) solange, bis die Gleitbedingung

$$\Upsilon(\mathrm{f}_n, \mathrm{f}_t, \mu) = |\,\mathrm{f}_t^k\,| - \mu_{ad}^k\,|\,\mathrm{f}_n^k\,| \leq 0 \tag{6.33}$$

an allen Kontaktknotenpunkten erfüllt ist. Da die Gleitknoten aus der Menge des Active-Set entfernt werden, ist nach Erfüllung der Gleitbedingung (6.33) eine erneute Penetrationsprüfung notwendig, da die Gleitknoten wieder zu Eindringknoten werden können.

6.2.3 Berechnung der Kontaktspannungen

Die Analyse eines Kontaktproblems mit Hilfe der Methode der finiten Elemente liefern a priori nur die Verschiebungen der Elementknoten und die Kontaktknotenkräfte. Um Aussagen über Form und Verteilung der Oberflächenspannungen in der Kontaktfläche zu erhalten, müssen die Kontaktknotenkräfte in Normal- und Tangentialspannungen transformiert werden. Diese Transformation kann mit Hilfe einer

- *Kontaktflächenmatrix* $\underline{\mathbf{C}}$ oder auf der Basis einer
- *Extrapolation* der Elementspannungen

erfolgen. Da die Extrapolation der Elementspannungen auf Oberflächenspannungen nach *Torstenfeld* [107] ohne eine geeignete Mittelwertbildung benachbarter Elementspannungen zu unterschiedlichen Antworten führt und sich in der Regel nur unbefriedigende Resultate damit erzielen lassen, wird die Berechnung der Kontaktspannungen mit Hilfe einer Kontaktflächenmatrix durchgeführt.

6.2.3.1 Konsistente Kontaktflächenmatrix

Die Idee dieser Methode liegt in der Invertierung der Methode zur Berechnung äquivalenter Knotenlasten aus verteilten Oberflächenlasten mit Hilfe der Elementformfunktionen *Liu et al.* [75]. Die Berechnung der Kontaktflächenmatrix kann dabei analog der Berechnung einer Massenmatrix in der Dynamik erfolgen, wenn die Elementdichte $\rho = 1$ gesetzt wird, siehe z.B. *Hughes* [45]. Mit der Approximation der Oberflächenspannungsverteilung am Elementrand

$$\underline{\mathbf{p}}_c^e \; = \; \underline{\mathbf{M}}_c \; \underline{\sigma}_c^e \tag{6.34}$$

über die Matrix der Formfunktionen für die Spannungsverteilung $\underline{\mathbf{M}}$ analog (6.6) und dem Elementkontaktspannungsvektor

$$\underline{\sigma}_c^{eT} \; = \{p_n^1, p_t^1, p_n^2, p_t^2, \ldots, p_n^{n_k}, p_t^{n_k}\}^e \tag{6.35}$$

liefert die virtuelle Arbeit am Element (e) mit (6.19)

$$\delta \underline{\mathbf{u}}_c^{eT} \; \underline{\mathbf{f}}_c^{\,e} = \delta \underline{\mathbf{v}}_c^{eT} \; (\int\limits_{A_c^e} \underline{\mathbf{N}}^{eT} \; \underline{\mathbf{M}}^e \, d\bar{a}_c^e) \; \underline{\sigma}_c^e \quad . \tag{6.36}$$

Mit der Elementkontaktflächenmatrix

$$\underline{\mathbf{C}}^e = \int\limits_{A_c^e} \underline{\mathbf{N}}^{eT} \; \underline{\mathbf{M}}^e \, d\bar{a}_c^e \quad , \tag{6.37}$$

folgt aus (6.36) das Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannten Oberflächenspannungen aus den Elementknotenlasten

$$\underline{\mathbf{f}}_c^{\,e} \; = \; \underline{\mathbf{C}}^e \underline{\sigma}_c^e \quad . \tag{6.38}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems muss die Elementkontaktflächenmatrix durch Integration der Formfunktionen ermittelt werden. Wird (6.37) exakt integriert, entsteht eine vollbesetzte konsistente Kontaktflächenmatrix. Ihre Verwendung zur Rückrechnung auf die unbekannte Kontaktspannungsverteilung ist nicht ganz unproblematisch, da über ihre

Abbildung aus Knotendruckkräften auch Zugspannungen auf dem Elementrand entstehen können. Über eine Diagonalisierung von $\underline{\mathbf{C}}^e$ lässt sich nicht nur diese für den Kontakt unzulässige Form der Spannungsverteilung vermeiden, sondern auch eine Entkoppelung der auf einem gekrümmten Rand durch $\underline{\mathbf{T}}^e$ gekoppelten Knotenordinaten der Normal- und Tangentialspannungen erzielen.

6.2.3.2 Lumped-Kontaktflächenmatrix

Eine ausführliche Darstellung verschiedener Diagonalisierungsverfahren zeigen *Zienkiwicz* [122] und *Hughes* [45]. Wird zur Diagonalisierung von $\underline{\mathbf{C}}^e$ die Methode der Zeilensummen benutzt, berechnen sich die Koeffizienten aus

$$\widehat{C}^e_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} C^e_{ik} & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \quad , \tag{6.39}$$

wobei n die Anzahl der Zeilen repräsentiert. Vorteilhaft ist ihre Verwendung bei rotationssymmetrischer Problembeschreibung, da sie keine Nullterme für Knoten liefert, die auf der Rotationsachse liegen.

Durch eine numerische Integration der Gleichung (6.37) mit Hilfe der Jacobi-Determinante auf dem natürlichen Koordinatensystem $[-1 \leq \xi \leq 1]$ für einen Linienkontakt

$$\widehat{C}^e_{ij} = \int\limits_b \int\limits_{-1}^{1} N_i M_j \ J \ d\xi dz = b^e \sum_k \ w_k \ N_i(a_k) M_j(a_k) \ J(a_k) \tag{6.40}$$

kann bei geeigneter Wahl der Integrationspunkte a_k in den Elementknoten und einer passenden Integrationsordnung (Trapezformel bei linearen, Simpson'sche Regel bei quadratischen Elementrändern) eine diagonalisierte Kontaktflächenmatrix direkt erzeugt werden. Die Funktionaldeterminante J gibt das Verhältnis der differentiellen Bogenlänge ds zu $d\xi$ wieder und wird mit Hilfe des isoparametrischen Konzeptes aus $J = \sqrt{x^2_{,\xi} + y^2_{,\xi}}$ berechnet.

6.2.3.3 Rückrechnung

Analog der Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrizen zu einer Systemsteifigkeitsmatrix lassen sich die elementweise erstellten Kontaktflächenmatrizen zu einer globalen Kontaktflächenmatrix $\underline{\mathbf{C}}$ für den gesamten Kontaktbereich zusammenbauen

$$\underline{\mathbf{C}} = \bigcup_{\mathrm{e}=1}^{\mathrm{n_{ec}}} (\ \underline{\mathbf{C}}^{\mathrm{e}}) \quad . \tag{6.41}$$

An den Kontaktknoten lassen sich die Ordinaten der Kontaktspannungen $\underline{\sigma}_c$ über

$$\underline{\sigma}_c = \underline{\mathbf{C}}^{-1} \underline{\mathbf{f}}_c \tag{6.42}$$

berechnen. Mit Hilfe der Formfunktionen in $\underline{\mathbf{M}}^e$ wird ihre Verteilung dargestellt. Die Spaltenmatrix $\underline{\mathbf{f}}_c$ enthält die nach (6.27) transformierten Kontaktknotenkräfte der Kontaktzone.

Bei Anwendung konsistenter Kontaktflächenmatrizen können die Randzonen einer Kontaktfläche zu Problemzonen werden. Liegen die Elementrandknoten eines Elements nicht vollständig in der aktuellen Kontaktfläche, führt die Anwendung einer konsistenten Kontaktflächenmatrix zu Zugspannungsordinaten an den Elementknoten, die außerhalb der Kontaktzone liegen. Diese Schwierigkeit lässt sich durch die Anwendung diagonalisierter Kontaktflächenmatrizen umgehen, da hierdurch die Knotenfreiwerte entkoppelt werden.

Der Zusammenbau der auf Elementebene erstellten Kontaktflächenmatrizen und Knotenlasten zu einem Gleichungssystem (6.42) ist im Allgemeinen auf Kontaktspannungsanalysen, bei denen die Kontaktfläche eine ebene Fläche bzw. gerade Linie bildet, beschränkt ($\psi^k = konst.$). Bei gekrümmten Kontaktflächen können aufgrund der verwendeten Elementtypen Unstetigkeiten in der Approximation der Geometrie auftreten. Diese Unstetigkeiten in den Elementübergängen komplizieren den Zusammenbau, so dass auf eine globale Transformation meist verzichtet wird *Bathe* [6]. Eine elementweise Transformation der Knotenkräfte auf Elementkontaktspannungen führt dann zum Verlust der Stetigkeit des Kontaktspannungsverlaufs.

Bei Kontaktpaarungen mit einem Starrkörper, dessen potentielle Kontaktfläche stetig und analytisch beschreibbar ist, kann eine globale Transformation gemäß (6.42) erfolgen, wenn die Auswertung der Kontaktknotenkräfte auf der Abwicklung der Kontaktfläche des Starrkörpers erfolgt.

6.3 Bestimmung der diskreten Kontaktfläche

6.3.1 Kinematik der Rolle

Für die zweidimensionale Kontaktspannungsanalyse wird der deformierbare Körper $\mathcal{B}^{I}$ mit Hilfe isoparametrischer Scheibenelemente diskretisiert. Die Rolle wird als Starrkörper $\mathcal{B}^{II}$ mit ideal glatter Oberfläche betrachtet. Dies erlaubt eine einfache analytische Beschreibung der Bewegung und der Oberflächengeometrie einer Rolle. Mit der Integration der Geschwindigkeit eines Punktes $\mathbf{x}_s^{II}$ der Rollenoberfläche (Index s)

$$\int_{{}^{n}t}^{{}^{n+1}t} d\mathbf{x}_s^{II}\, dt = {}^{n+1}\mathbf{x}_s^{II} - {}^{n}\mathbf{x}_s^{II} = \Delta\hat{\mathbf{u}}_s^{II} \tag{6.43}$$

kann seine aktuelle Lage über (3.24) durch

$${}^{n+1}\mathbf{x}_s^{II} = {}^{n}\mathbf{x}_s^{II} + \Delta\hat{\mathbf{u}}_r^{II} + \Delta\boldsymbol{\omega}^{II} \times {}^{n}\hat{\mathbf{r}}_s \tag{6.44}$$

mit dem Anstellweg der Rollenachse (Index r)

$$\Delta\mathbf{u}_r^{II} = {}^{n+1}\mathbf{x}_r^{II} - {}^{n}\mathbf{x}_r^{II} \quad , \tag{6.45}$$

dem Zuwachs des Drehwinkels

$$\Delta\boldsymbol{\omega}^{II} = \Delta\omega^3\, \mathbf{e}_3 \tag{6.46}$$

und der Darstellung des Ortsvektors im intrinsischen ZKOS

$${}^{n}\hat{\mathbf{r}}_s = \mathring{r}\ \mathbf{e}_r = \mathring{r}\ (\cos({}^{n}\psi)\,\mathbf{e}_1 + \sin({}^{n}\psi)\,\mathbf{e}_2\,) \tag{6.47}$$

berechnet werden. Da jede Drehbewegung einer Richtrolle durch eine ebene Drehbewegung beschreibbar ist, stimmt die Zeitableitung der Drehwinkel mit den Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit überein, *Riemer et al.* [96]. Das Integral der Winkelgeschwindigkeit ist identisch mit der Drehwinkeländerung des Wälzwinkels ψ, und es gilt

$$\Delta\boldsymbol{\omega}^{II} = \Delta\omega^3\, \mathbf{e}_3 \equiv \Delta\psi\, \mathbf{e}_3 \quad . \tag{6.48}$$

Unter Anwendung des Additionstheorems der Summe zweier Winkel mit $\Delta\psi$ als infinitesimaler Winkeländerung folgt für (6.44)

$$\begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathrm{x}_s \\ {}^{n+1}\mathrm{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{n}\mathrm{x}_s \\ {}^{n}\mathrm{y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta u_r \\ \Delta v_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathring{r}\ \cos({}^{n+1}\psi) - \mathring{r}\cos({}^{n}\psi) \\ \mathring{r}\ \sin({}^{n+1}\psi) - \mathring{r}\sin({}^{n}\psi) \end{bmatrix} \tag{6.49}$$

mit ${}^{n+1}\psi = {}^{n}\psi + \Delta\psi$. Mit (6.47) entsteht hieraus

$$\Delta\underline{\mathbf{u}}_s^{II} = {}^{n+1}\mathbf{x}_s^{II} - {}^{n}\mathbf{x}_s^{II} = \Delta\underline{\mathbf{u}}_r^{II} + {}^{n+1}\underline{\mathbf{r}}_s - {}^{n}\underline{\mathbf{r}}_s \quad . \tag{6.50}$$

Die zweidimensionale Modellierung als unilateraler Kontakt erlaubt die Konstruktion eines Knoten-auf-Kurve-Kontaktalgorithmus, bei dem Lage und Form der potentiellen Kontaktzone aufgrund der Starrkörper-Modellierung bekannt sind und nur ihre Größe iterativ ermittelt werden muss. Der Starrköper dient als Referenzkörper (master) bei der Untersuchung der Knotenpunkte des diskretisierten Gegenkörpers (slave) auf Penetration.

Im Folgenden wird die Anstellphase, anschließend die Rollphase am Beispiel der Penetration eines Slaveknotens in den Masterbereich im Rahmen der Beschreibung der Starrkörperbewegung, wie im Abschnitt 3.1.4 vorgestellt, detailliert beschreiben.

6.3.2 Anstellphase

Eine zweckmäßige Beschreibung der Anstellung lässt sich auf einem kontaktspannungsfreien Punktkontakt im Ausgangszustand entwickeln, der in der Anstellrichtung $\hat{\mathbf{a}}$ liegt. Eine Verschiebung des Anstellpunktkontakts in Richtung des Anstellwegs kann mit dem Eindringen von Slaveknoten in den Masterraum verbunden sein, Abbildung 6.1.

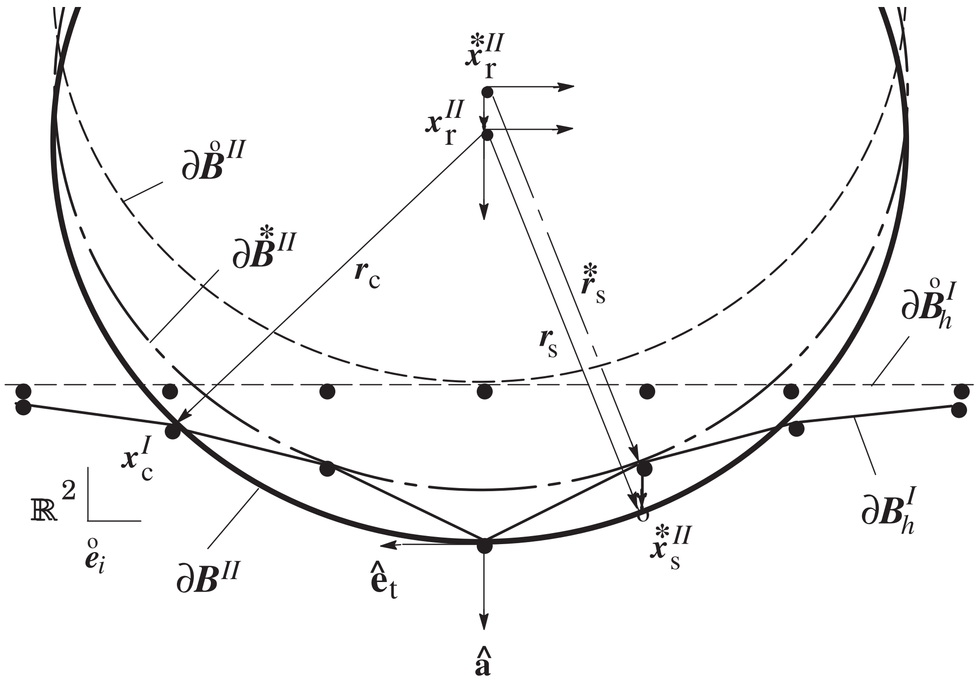


Abb. 6.1: Penetration von Slaveknoten x_c^I in den Masterraum $\mathcal{B}^{II}$ der Rolle während der Anstellphase

Mit der Kenntnis, dass für einen Kontaktpunkt

$$ {}^{n+1}\underline{\hat{\mathbf{r}}}_c = {}^{n+1}\underline{\mathbf{x}}_c^{\,I} - {}^{n+1}\underline{\mathbf{x}}_r^{\,II} \tag{6.51} $$

gilt, wird die Konstruktion des Ortsvektor $\underline{\hat{\mathbf{r}}}_s$ bzw. $\overset{*}{\underline{\mathbf{r}}}_s$ zum Eindringknoten durch die Berechnung des Lagewinkels aus (3.26a) und (3.26b) ermöglicht. Die Berechnung des Abstandsmaßes g_a über (3.27) erlaubt mit Hilfe der Zustandsmengen (3.28a-3.28c) eine Beurteilung der momentan eingenommenen Konfigurationen beider Körper. Alle Knoten, die zur Menge der Kontakt- oder Penetrationspunkte gehören, bilden nun das Active-Set, das zur Aufrechterhaltung der geometrischen Forderung (3.3) berücksichtigt werden muss. Im Fall der Penetration wird die Korrektur des Verschiebungsfelds über (6.18) mit

$$ \triangle\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}_c^{\,k} = g_a^k\,\underline{\hat{\mathbf{a}}} \tag{6.52} $$

erforderlich. In diesem Haft-Korrekturschritt werden Punkte, die sich bereits im Kontaktbereich befanden, durch $g_a^k{=}0$ an ihrem Ort fixiert. Am Beispiel einer Anstellrichtung von $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{e}_2$ folgt für die Haft-Kontaktkinematik der Anstellphase:

Kontaktkinematik der Anstellphase

(1) *Bestimmung des Lagewinkels* $\overset{*}{\psi}{}^k$ *aus* (3.26a), (3.26b)

$$\cos \overset{*}{\psi}{}^k = \frac{1}{\mathring{r}} \left({}^{n+1}\mathrm{x}_c^I - {}^{n+1}\mathrm{x}_r^{II} \right)$$

(2) *Berechnung des Knotenabstands* g_a^k *aus* (3.27) *mit* ${}^{n+1}\psi^k = \overset{*}{\psi}{}^k$

$$g_a^k = \left({}^{n+1}\mathrm{y}_c^I - {}^{n+1}\mathrm{y}_r^{II} \right) - \mathring{r}\ \sin({}^{n+1}\psi^k)$$

(3) *Überprüfung der kinematischen Kontaktbedingungen* (3.28a-3.28c).
Erweiterung des Active-Sets mit Knoten für die $g_a^k < Tol_c$ *gilt, mit*

$$\triangle \overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k = g_a^k\, \underline{\hat{\mathbf{a}}}$$

Das Zeichen $*$ symbolisiert eine Größe bzgl. einer fiktiven Kontaktkonfiguration, wie im Abschnitt 3.1.4 erläutert.

6.3.3 Rollphase

Nach dem numerischen Anstellvorgang soll die Richtrolle bei gehaltener Anstellung auf der Schienenoberfläche entlang rollen und den Rollenrichtprozess simulieren. Zwischen der Verschiebung der Rollenachse $\triangle\mathbf{u}_r$ und dem zurückgelegten Rollweg $\triangle s$ soll

$$\triangle s = \|\, \triangle\boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{r}}_p \,\| \equiv \|\, \triangle\mathbf{u}_r \,\| \qquad (6.53)$$

gelten. Hierin ist $\hat{\mathbf{r}}_p$ der Ortsvektor vom Ursprung des intrinsischen KOS zum Momentandrehpol M_P der Rolle. Die Verschiebung der Rollenachse wird nach (3.33) mit dem zurückgelegten Rollweg identisch, wenn makroskopisch gleitfreies Rollen vorliegt. Da die Existenz einer Haftzone immer zu einem vollständigen Drehinkrement bei einer starren Rolle führt, wird bei gehaltener Anstellung nach (6.53) die neue Achslage der Rolle durch

$${}^{n+1}\mathbf{x}_r^{II} = {}^{n}\mathbf{x}_r^{II} - \triangle\boldsymbol{\omega} \times {}^{n}\hat{\mathbf{r}}_p \qquad (6.54)$$

bestimmt. Beschreibt $\hat{\mathbf{r}}_p$ analog (6.47) mit dem Winkel ψ_p die Lage des Momentandrehpols M_P der Rolle in der Kontaktfläche, so entsteht aus (6.54)

$$
{}^{n+1}\underline{\mathbf{x}}_r^{II} = \begin{bmatrix} {}^n\mathrm{x}_r^{II} \\ {}^n\mathrm{y}_r^{II} \end{bmatrix} - \Delta\psi\,\mathring{r} \begin{bmatrix} -sin({}^n\psi_p) \\ cos({}^n\psi_p) \end{bmatrix} \quad . \tag{6.55}
$$

Analog der Anstellkinematik lässt sich mit Hilfe einer fiktiven Rollenkonfiguration eine Rollkontaktkinematik formulieren. Die aktuelle Lage eines Slaveknotens wird durch (6.51) erfaßt. Mit Hilfe von (3.36a) und (3.36b) wird wieder der Lagewinkel aus einer fiktiven Kontaktkonfiguration mit dem Ortsvektor $\overset{*}{\underline{\mathbf{r}}}_s$ konstruiert. Die fiktive Lage der Rollenachse für das Kontaktpaar $\overset{*}{\underline{\mathbf{x}}}{}_s^{II} = \underline{\mathbf{x}}_c^{I}$ folgt aus

$$
\overset{*}{\underline{\mathbf{x}}}{}_r^{II} = {}^{n+1}\underline{\mathbf{x}}_c^{I} - \overset{*}{\underline{\mathbf{r}}}_s \quad . \tag{6.56}
$$

Analog (6.53) kann ein fiktiver Rollweg $\Delta\overset{*}{\mathrm{s}}$ aus der fiktiven Konfiguration in die momentane Lage über (6.53) mit

$$
\Delta\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}_r = {}^{n+1}\underline{\mathbf{x}}_r^{II} - \overset{*}{\underline{\mathbf{x}}}{}_r^{II} \tag{6.57}
$$

berechnet werden. Die Bestimmung der Lage eines Knotens $\overset{*}{\underline{\mathbf{x}}}{}_s^{k}$ in der aktuellen Konfiguration wird über (6.50) mit dem Drehinkrement ${}^{n+1}\overset{*}{\psi}{}^k = \overset{*}{\psi}{}^k + \Delta\overset{*}{\mathrm{s}}{}^k/\mathring{r}$ ermöglicht und der Verschiebungsweg aus der fiktiven in die aktuelle Konfiguration über

$$
\Delta\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_s^k = {}^{n+1}\underline{\mathbf{x}}_s^{II} - \overset{*}{\underline{\mathbf{x}}}{}_s^{II} \tag{6.58}
$$

berechenbar. Eine Auswertung am Beispiel der Rollrichtung mit $-\mathbf{e}_1$ soll die dargestellte Vorgehensweise verdeutlichen:

Kontaktkinematik der Rollphase

(1) *Prüfung auf Penetration mit dem Betrag von* (6.51)

$$\frac{1}{\mathring{r}^2}\left[\,\left({}^{n+1}\mathrm{x}_c^I - {}^{n+1}\mathrm{x}_r^{II}\right)^2 \;+\left({}^{n+1}\mathrm{y}_c^I - {}^{n+1}\mathrm{y}_r^{II}\right)^2\;\right] - 1 \geq TOL_c$$

(2) *Bestimmung des fiktiven Lagewinkels* $\overset{*}{\psi}{}^k$ *nach* (3.36a) *und* (3.36b)

$$\sin \overset{*}{\psi}{}^k = \frac{1}{\mathring{r}}\,\left(\,{}^{n+1}\mathrm{y}_c^I - {}^{n+1}\mathrm{y}_r^{II}\,\right)$$

zur Konstruktion des Ortsvektors $\overset{*}{\underline{\mathbf{r}}}_c$ *nach* (6.47)

(3) *Berechnung des fiktiven Rollwegs über* (6.56)

$$\Delta\overset{*}{\mathrm{s}}{}^k = \left(\,{}^{n+1}\mathrm{x}_r^{II} - {}^{n+1}\mathrm{x}_c^I\,\right) - \mathring{r}\cos\overset{*}{\psi}{}^k = \Delta\overset{*}{\psi}{}^k\,\mathring{r}$$

(4) *Ermittlung der Verschiebung von* $\overset{*}{\underline{\mathbf{x}}}{}_s^{II}$ *mit dem fiktiven Drehinkrement* $\Delta\overset{*}{\psi}{}^k$ *analog* (6.50) *mit* (6.56)

$$\Delta\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k = \begin{bmatrix} {}^{n+1}\mathrm{x}_r^{II} - \overset{*}{\mathrm{x}}{}_r^{II} \\ {}^{n+1}\mathrm{y}_r^{II} - \overset{*}{\mathrm{y}}{}_r^{II} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathring{r}\,\cos({}^{n+1}\,\overset{*}{\psi}{}^k) - \mathring{r}\,\cos\overset{*}{\psi}{}^k \\ \mathring{r}\,\sin({}^{n+1}\,\overset{*}{\psi}{}^k) - \mathring{r}\,\sin\overset{*}{\psi}{}^k \end{bmatrix}$$

6.4 Iterations- und Kontaktalgorithmus

Für die numerische Berechnung des Rollkontakts wird ein globaler Kontaktalgorithmus verwendet. Innerhalb eines Lastinkrements selbst können zur Erfüllung der Gleichgewichts- und Kontaktbedingungen wiederholte Iterationsläufe notwendig sein. Die Anzahl der Kontaktknoten, die zum Active-Set gehören, wird mit n_c bezeichnet.

Werden Nebenbedingungen nicht punktweise wie die Verschiebungsrestriktion (6.18) nach der Diskretisierung der Kontaktzone durch die Finite-Elemente-Methode vorgegeben, sondern sind über den Randbereich verteilt, so wird eine numerische Integration des Penaltyterms erforderlich. Wie Studien von *Kikuchi* [58] und *Reddy* [95] zeigen, wirkt sich

Globaler Iterationsalgorithmus

(1) *Setzen der Startwerte:* $t = 0$

$$\underline{\mathbf{v}}^{0} = \underline{\mathbf{0}}\,; \quad \underline{\mathbf{s}}^{0} = \underline{\mathbf{0}}\,; \quad \Delta\overset{*}{\underline{\bar{\mathbf{u}}}} = \Delta\underline{\bar{\mathbf{u}}}\;; \quad n_c = 1$$

(2) *Aufbau der Matrizen:* $\underline{\mathbf{K}}^{0}_{T}\;;\quad \underline{\mathbf{K}}^{0}_{C}\;;\quad \underline{\mathbf{r}}^{0} = \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}{}^{0}_{c}$

---

(3) *Lösung von:* $[\,\underline{\mathbf{K}}^{i}_{T} + \underline{\mathbf{K}}^{i}_{C}\,]\,\Delta\underline{\mathbf{v}}^{\,i} = \underline{\mathbf{r}}^{i}$

(4) *Berechnung von:* $\underline{\mathbf{v}}^{\,i+1} = \underline{\mathbf{v}}^{\,i} + \Delta\underline{\mathbf{v}}^{\,i}$

(5) *Konvergenzabfrage:*

If: $\dfrac{\|\,\Delta\underline{\mathbf{v}}^{\,i}\,\|}{\|\,\underline{\mathbf{v}}^{\,i+1}\,\|} \leq TOL_u$ then goto (7)

(6) *Schleife über alle Elemente: Berechnung von*

1. Verzerrungen, plastische Dehnungen
2. Spannungen $\underline{\mathbf{s}}^{i+1} = \underline{\mathbf{s}}^{i} + \Delta\underline{\mathbf{s}}^{i}$
3. Elasto-plastische Stoffmatrix
4. Fehlkraftvektor $\underline{\mathbf{r}}^{i+1} = -\,\underline{\mathbf{s}}^{i+1}$ then goto (3)

---

(7) *Kontaktalgorithmus (Abs. 6.4):*

If: $g^{k}_{a} \leq TOL_c$ then Setze $(\,\bullet\,) = (\,\bullet\,)^{j+1}$ goto (2)
If: $\mathrm{f}^{k}_{n} > 0$ then Setze $(\,\bullet\,) = (\,\bullet\,)^{j+1}$ goto (2)
If: $|\,\Delta\mathrm{f}^{k}_{t}\,| \geq TOL_p$ then Setze $(\,\bullet\,) = (\,\bullet\,)^{j+1}$ goto (2)

(8) *Update:*

Verzerrungen, Spannungen, Active-Set etc.

(9) *Neuer Belastungsschritt:*

If: $t < t_{\mathrm{Ende}}$ then Setzte $\Delta\overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}^{k} = \Delta\underline{\bar{\mathbf{u}}}\;;\quad \forall\; k \in [1, n_c]$ goto (2)

(10) *Stopp*

Lokaler Kontaktalgorithmus

(7.1) *Schleife über alle Kontakt- und Nachbarknoten:* $n_p = 0$

1. Prüfung des Abstandswertes:

   If: $g_a^k > TOL_c$ then goto (7.6)

2. Erweiterung des Active-Set: $n_p = n_p + 1$

3. Knotenlastvektor: $\overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}{}_c^k = k_\epsilon \, \underline{\mathbf{W}}_c^k \, \Delta \overset{*}{\underline{\mathbf{u}}}{}_c^k \;\; ; \quad \mathrm{f}_n^k = 0$

(7.4) *Aufbau der globalen Matrizen:* $n_c = n_c + n_p$ $\quad \underline{\mathbf{K}}_C^{i+1} = \bigcup_{k=1}^{n_c} k_\epsilon \, \underline{\mathbf{W}}_c^k$

$$\underline{\mathbf{r}}^{i+1} \Leftarrow \underline{\mathbf{0}}^k \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n_c - n_p$$
$$\underline{\mathbf{r}}^{i+1} \Leftarrow \overset{*}{\underline{\mathbf{f}}}{}_c^k \qquad \text{für } k = n_c - n_p, \ldots, n_c$$

(7.5) *Kontaktflächenberechnung:*

If: $n_p > 0$ goto (2)

(7.6) *Prüfung der Vorzeichenbedingung:*

Adhäsionskontakt: If: $\mathrm{f}_n^k < 0$ then goto (7.7)

Zugkraft: $\underline{\mathbf{f}}_c^k = \alpha \, \underline{\mathbf{f}}_c^k \quad 0 < \alpha < 1$

Reduzierung des Active-Set: $n_c = n_c - 1$ then goto (7.8)

(7.7) *Prüfung des Reibgesetzes:*

Gleitbedingung: If: $\Upsilon(\underline{\mathbf{f}}_c^k, \mu_{ad}) \leq 0$ then goto (7.8)

Gleitkontakt: Berechnung $\Delta \underline{\mathbf{f}}_c^k$

Knotenlastvektor: $\underline{\mathbf{f}}_c^k = (\underline{\mathbf{T}}^k)^T \Delta \underline{\mathbf{f}}_c^k$

Reduzierung des Active-Set: $n_c = n_c - 1$

(7.8) *Aufbau der Kontaktsteifigkeitsmatrix:* $\quad \underline{\mathbf{K}}_C^{i+1} = \bigcup_{k=1}^{n_c} k_\epsilon \, \underline{\mathbf{W}}_c^k$

$$\underline{\mathbf{r}}^{i+1} \Leftarrow \underline{\mathbf{0}} - (\underline{\mathbf{s}}^j)^{i+1} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n_c - 1$$
$$\underline{\mathbf{r}}^{i+1} \Leftarrow \underline{\mathbf{f}}_c^j - (\underline{\mathbf{s}}^j)^{i+1} \qquad \text{für } j = k$$

(7.9) *Stopp:* goto (2)

eine reduzierte Integration des Penaltyterms stabilisierend auf den Lösungsalgorithmus des Penaltyverfahrens aus. Dieser Sachverhalt ist für die Konstruktion der Kontaktspannungsverteilung nach (6.19) aus den Kontaktknotenkräften von entscheidender Bedeutung. Nach *Oden/Kikuchi* [87] sind oszillierende Kontaktspannungen oder Sprungstellen in der Kontaktspannungsverteilung das Ergebnis falscher Integrationsordnung. Die reduzierte Integration sollte dabei um einen Grad niedriger gewählt werden, als diese für eine exakte Integration des Penaltyterms erforderlich wäre. Mathematisch lässt sich die erforderliche numerische Integrationsordnung zur Berechnung stabiler Kontaktspannungen durch Erfüllung der diskreten Babuska/Brezzi-Bedingung [87] begründen.

7 Numerische Simulationen

7.1 Eindrückproblem

Am Beispiel eines Eindrückproblems soll der Kontaktalgorithmus untersucht werden. Betrachtet wird ein reibungsbehafteter Kontakt zwischen einem zylindrischen Starrkörper und einem deformierbaren, horizontal verschieblich gelagerten Block, dessen Materialverhalten durch ein elasto-plastisches Stoffgesetz mit linearer isotroper Verfestigung beschrieben wird. In der sich ausbildenden Kontaktzone ist das Reibverhalten durch das klassische Coulomb'sche Reibgesetz charakterisiert. Die Abmessungen der Strukturen sowie die verwendete Diskretisierung des Blocks unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften mit 4- bzw. 9-Knoten-Scheibenelementen sind in Abbildung 7.1, schematisch dargestellt.

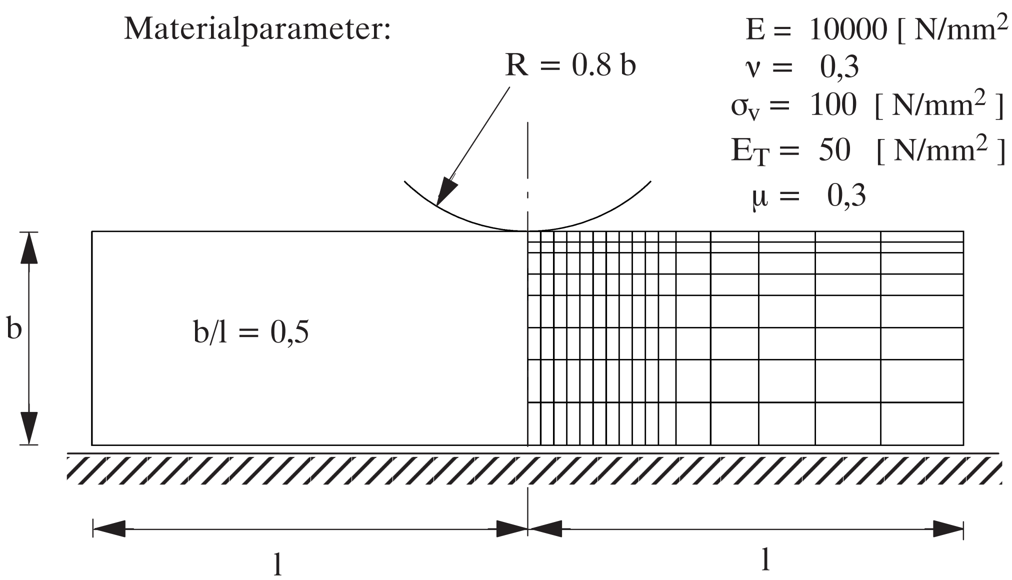


Abb. 7.1: Modell der Eindrückung eines zylindrischen Starrkörpers in einen deformierbaren Block.

Ähnliche Studien ohne Berücksichtigung von Reibung finden sich in *Dumas/Baronet* [24], *Hardy et al.* [37], *Kikuchi/ Skalski* [60], *Lee* [70] und mit Coulomb'scher Reibung in *Campos et al.* [13], *Chandrasekaran et al.* [16], *Cheng/Kikuchi* [18] und *Kikuchi* [57].

7.1.1 Spannungsverteilungen in der Kontaktfläche

Im Fall eines linear-elastischen Materialverhaltens sind die mit Hilfe einer Lumped-Kontaktflächenmatrix berechneten Normal- und Reibschubspannungsverteilungen in den Abbildungen 7.2 und 7.3 dargestellt.

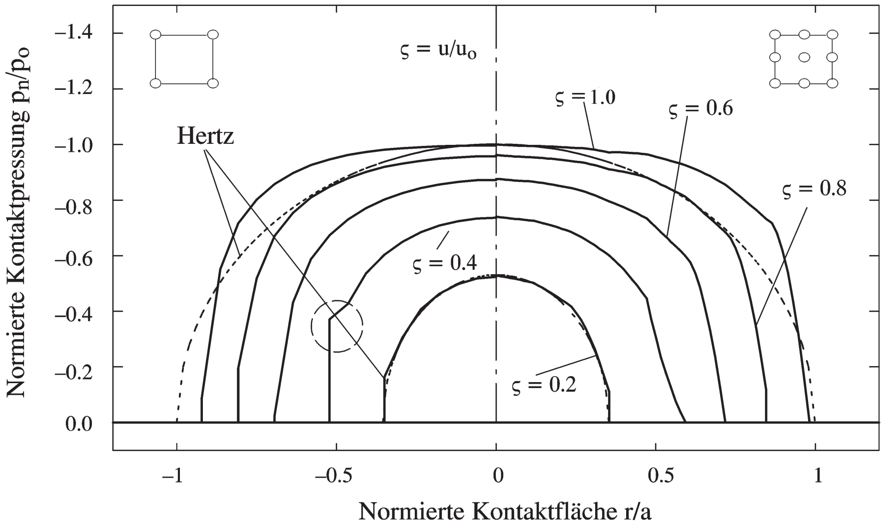


Abb. 7.2: Verteilung der Kontaktpressungen links mit 4-Knoten-, rechts mit 9-Knotenelementen, Reibwert $\mu = 0.3$

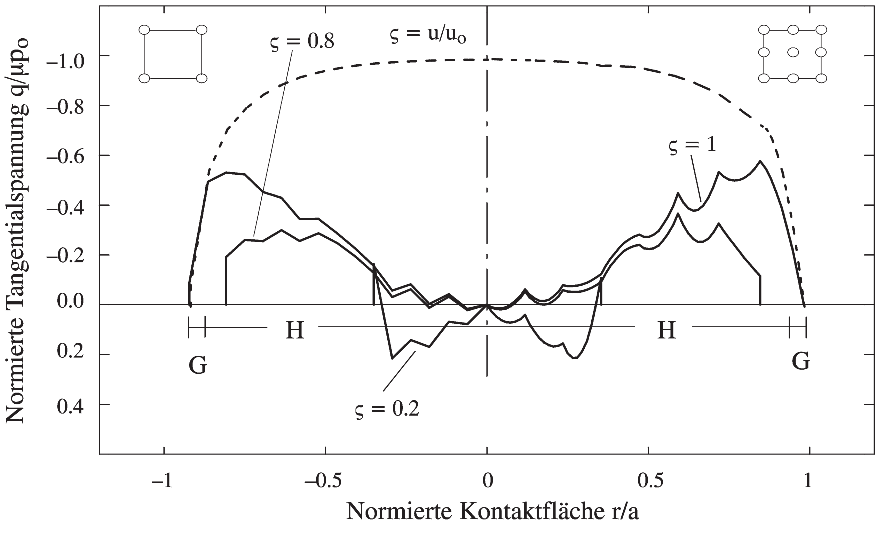


Abb. 7.3: Verteilung der Reibspannungen links mit 4-Knoten-, rechts mit 9-Knotenelementen, Reibwert $\mu = 0.3$

Die Darstellung erfolgt mit einer Normierung der Kontaktfläche $2a = 10\ mm$, einer maximalen Kontaktpressung $p_o = 2087\ N/mm^2$ und der maximalen Eindrücktiefe in der Symmetrieachse von $u_o = 2.5\ mm$. Wie Abbildung 7.2 verdeutlicht, entspricht bei geringer

Eindrückung $\zeta = 0.2$ die Kontaktpressung einer Hertz'schen Pressung. Mit fortschreitender Eindrückung weicht diese jedoch immer mehr von der elliptischen Verteilung ab und entspricht bei maximaler Eindrückung $\zeta = 1$ einer eher rechteckigen Verteilung. Qualitativ liefern beide Elementtypen gleichwertige Normalspannungsverteilungen. Der Knick im Funktionsverlauf der Pressung bei $\zeta = 0.4$ unter Verwendung der 4-Knotenelemente sowie die konkave Krümmung bei 9-Knotenelementen resultieren aus der geometrischen Oberflächendiskretisierung und den Elementansatzfunktionen. Diese charakteristischen Merkmale der Lumped-Transformationsmethode treten noch ausgeprägter in Erscheinung, wenn die Längen der Elementkanten in der Kontaktfläche variieren.

Wesentlich deutlicher zeigt sich der Einfluss der Elementansatzfunktionen im qualitativen Verlauf der Reibschubspannungen. Die Konstruktion äquivalenter Reibschubspannungen aus den Kontaktknotenkräften über eine Kontaktflächenmatrix liefert bei Anwendung der 9-Knotenelemente sehr unbefriedigende Ergebnisse. Die auftretende Welligkeit in der Verteilung macht die Lösung ohne zusätzliche Glättungsalgorithmen physikalisch unbrauchbar. In den weiteren Analysen und Auswertungen wird deshalb nur noch das 4-Knotenelement verwendet. Mit der Annahme der Coulomb'schen Reibung müssen in den Gleitabschnitten der Kontaktfläche die Reibschubspannungen proportional der anliegenden Kontaktpressung sein. Für den Belastungszustand unter maximaler Anstellung sind die Kontaktpressung und die sich ergebenden Haft- und Gleitabschnitte in Abbildung 7.3 dargestellt. Es zeigt das bekannte Bild einer Haftzone im mittleren Bereich, an die zwei Gleitabschnitte angrenzen.

7.1.2 Spannungsverteilungen im Material

Die Isoplethen der Hauptschubspannung τ in Abbildung 7.4 wurden mit einer Höhenschichtung von $\Delta\tau \approx 0,16p_o$, die der vertikalen Spannung $\Delta\sigma_{yy}$ in Abbildung 7.4 mit $\Delta\sigma_{yy} \approx 0,34p_o$, erzeugt. Wird als Referenzspannung die maximale Schubspannung zugrunde gelegt, so wird die höchste Materialbeanspruchung nicht im unmittelbaren Kontaktbereich, sondern in einer Tiefe von $y \approx 0,8a$ mit $\tau \approx 0,8p_o$ erreicht. Qualitativ entspricht dies der analytischen Lösung eines Hertz'schen Kontakts Walze/Ebene ($y = 0,78a$ mit $\tau = 0,3p_o$), *Wuttke* [120].

Abbildung 7.5 zeigt das Lastspannungsbild in der Symmetrieachse und entlang der Oberfläche. In Bildteil A ist zusätzlich die Hertz'sche Lösung in Form gestrichelter Linien eingezeichnet. Der Einfluss der anliegenden Kontaktpressung, der Reibschubspannung

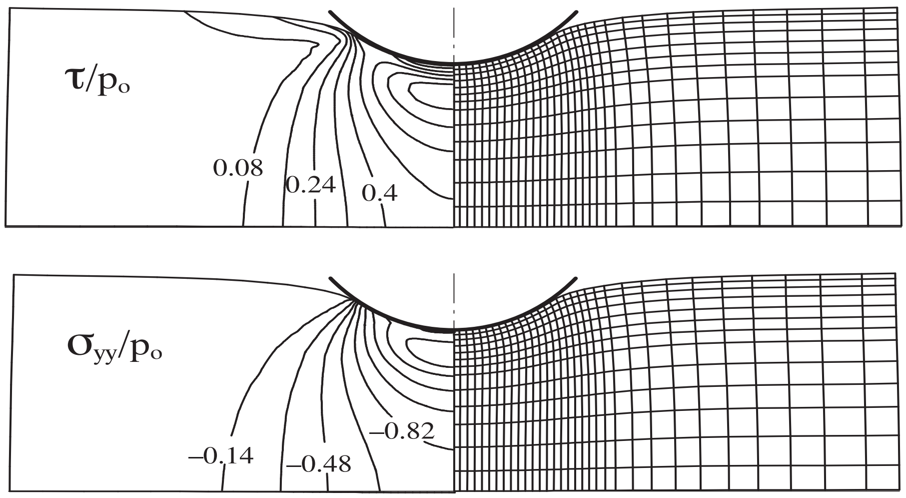


Abb. 7.4: Oben: Isoplethen der normierten Hauptschubspannung τ/p_o, unten: Isoplethen der normierten Normalspannung σ_{yy}/p_o mit deformiertem FE-Netz bei maximaler Eindrückung unter elastischem Materialverhalten und Coulomb'scher Reibung $\mu = 0.3$

sowie der geometrischen Randbedingungen spiegelt sich deutlich im Verlauf der einzelnen Spannungskomponenten wieder. Infolge der Reibspannungen tritt ein σ_{yy}-Druck-Zugspannungswechsel in den oberflächennahen Bereichen am Ende der Kontaktzone ein. Infolge der Richtungsumkehr unterliegt das Material in Oberflächennähe einer Wechselbeanspruchung. Studien am Halbraummodell in *Wuttke* [120] zeigen, dass mit Aufbringen einer tangentialen Reibschubspannung die σ_{yy}-Spannungsspitze am Rand des Kontakts vom Reibwert abhängig ist. Sie verschwindet vollständig im reibungsfreien Kontakt und tritt mit wachsendem Reibwert immer deutlicher hervor.

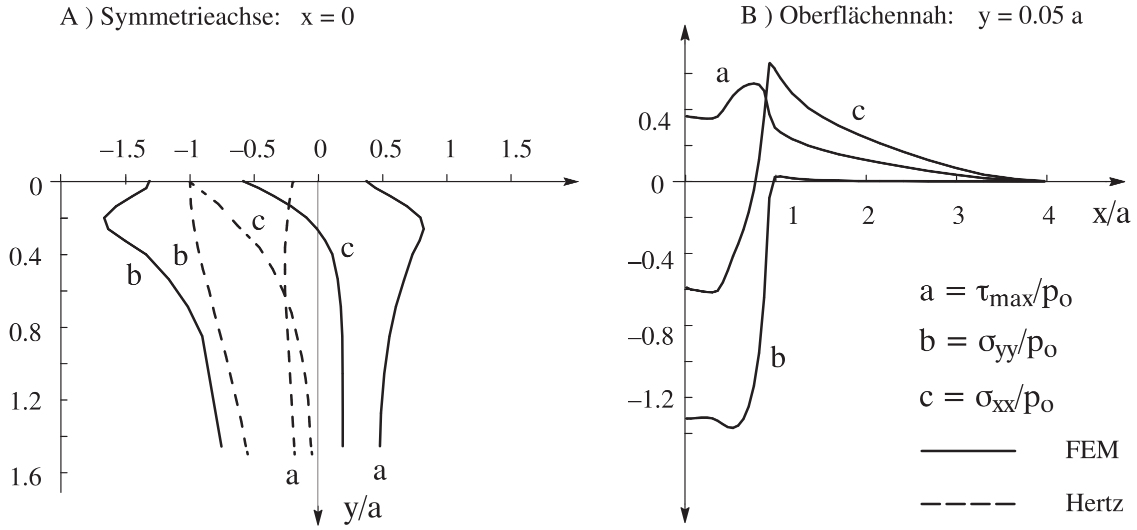


Abb. 7.5: Verlauf der Spannungen A) in der Symmetrieachse über die Tiefe und B) in Oberflächennähe im Modell Zylinder/Block mit Coulomb'scher Reibung $\mu = 0.3$

Unter Verwendung einer elementweise linearen Verschiebungsapproximation ergeben sich im Fall eines elasto-plastischen Materialverhaltens Normal- und Reibschubspannungsverteilungen, die in den Abbildungen 7.6 und 7.7 dargestellt sind. In den Darstellungen wurde bzgl. der Kontaktfläche von $2a = 10\ mm$ und einer Kontaktpressung von $p_o = 211\ N/mm^2$ bei einer Eindrücktiefe in der Symmetrieachse von $u_o = 1.0\ mm$ normiert.

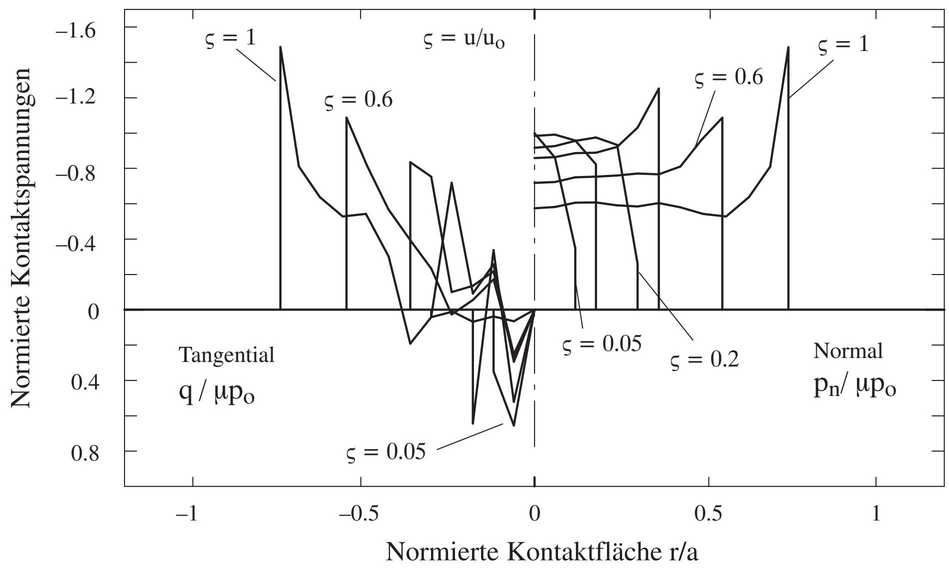


Abb. 7.6: Verteilung der Kontaktspannungen bei elasto-plastischem Materialverhalten

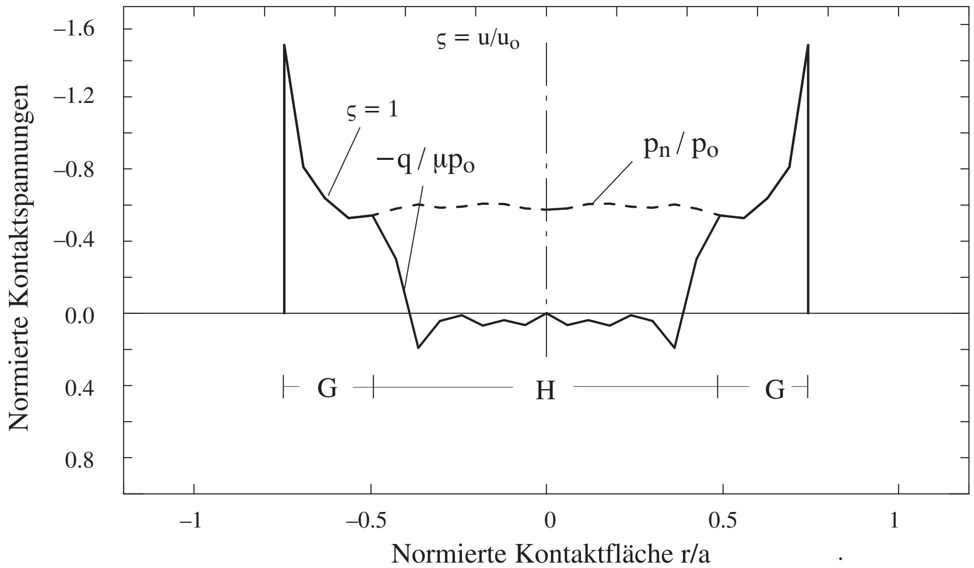


Abb. 7.7: Verteilung der Haft- und Gleitzonen in der Kontaktfläche mit maximalen Kontaktspannungen bei elasto-plastischem Materialverhalten

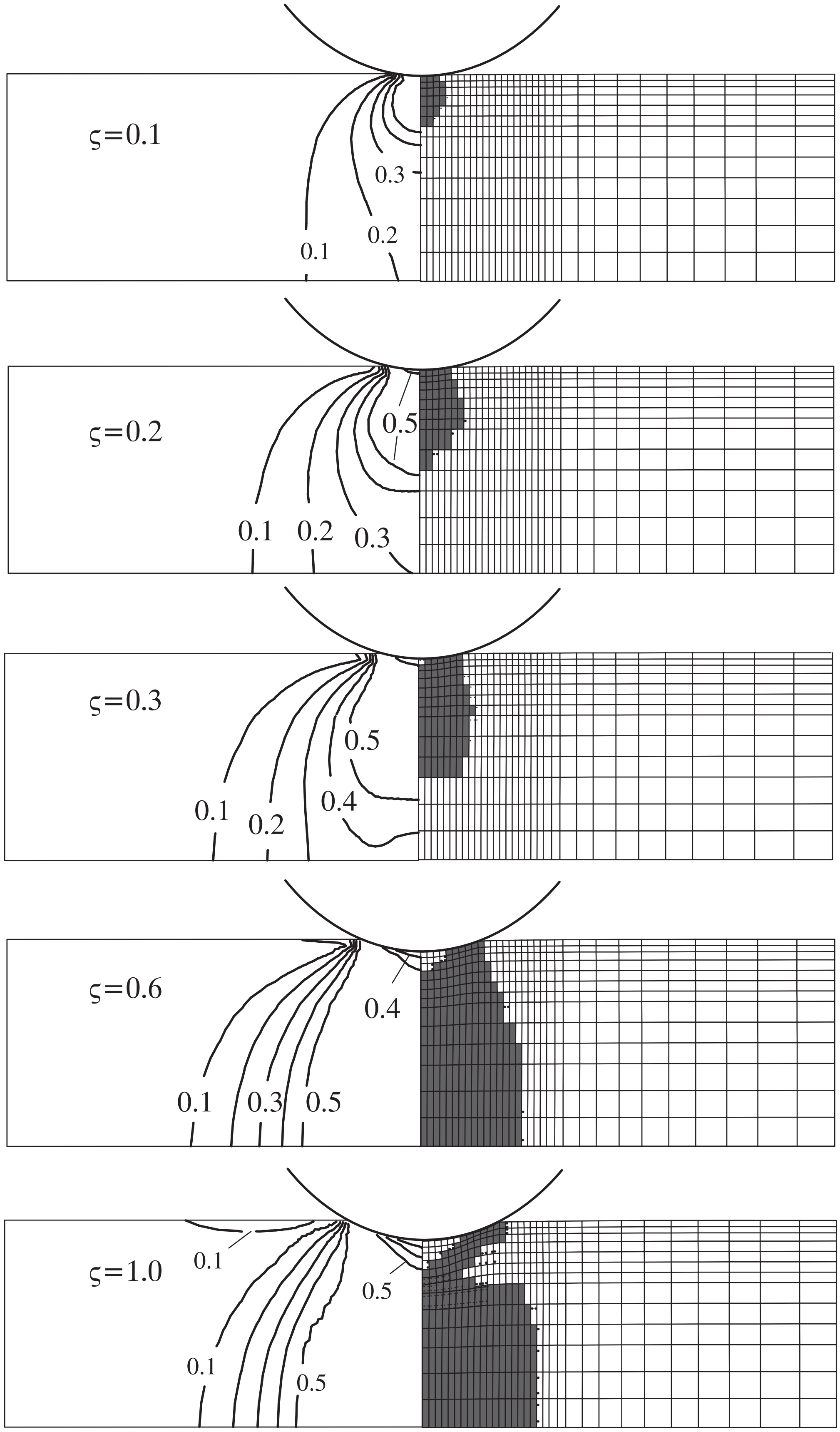


Abb. 7.8: Links: Isoplethen der normierten Hauptschubspannung $\tau/\mathring{\sigma}_{\mathrm{v}}$, rechts: Plastizierungsgeschichte bei elasto-plastischem Materialverhalten

Bei geringer Eindrückung $\zeta \leq 0.05$ entspricht auch hier die Kontaktpressung noch einer Hertz'schen Pressung. Mit fortschreitender Eindrückung verlagern sich die maximalen Kontaktspannungsordinaten immer stärker an den Randbereich der Kontaktzone bei gleichzeitig abnehmender geradliniger Verteilung in den mittleren Bereichen. Abbildung 7.7 zeigt eine Haftzone im mittleren Bereich, an die zwei Gleitabschnitte angrenzen. Aufgrund des inelastischen Materialverhaltens sind diese Gleitabschnitte auch bei geringer Anstellung schon stärker ausgeprägt als im Fall eines elastischen Gegenkörpers.

Im linken Bildteil von Abbildung 7.8 sind die Isoplethen der normierten Hauptschubspannung $\tau/\mathring{\sigma}_{\mathrm{v}}$ dargestellt. Wie die Isoplethen und die Entwicklung der plastischen Zonen zeigen, verlagert sich die höchste Materialbeanspruchung mit fortschreitdender Eindrückung aus dem unmittelbaren Kontaktbereich unter der Walze zum Rand der Kontaktzone und in tiefer liegende Materialbereiche. Die Beanspruchungsumlagerung führt zur Entlastung unter der Walze und es entsteht ein elastischer Bereich in einer vollständig plastizierten Umgebung.

7.2 Anstellvorgang am Schienensegment

Abbildung 7.9 zeigt eine Schiene beim Durchlauf durch eine 7-Rollenrichtmaschine während des Richtvorgangs.

Abb. 7.9: Richtrollen und Richtgut in einer Rollenrichtmaschine

7.2.1 Geometrische Eingangsparameter

Die den numerischen Untersuchungen zugrunde liegenden Richtversuche vom Schienentyp UIC 60 wurden bei der KRUPP STAHL AG, Werk Rheinhausen durchgeführt, *Heller et al.* [42]. Die üblichen Anstellgrade der Unterrollen liegen dabei im Bereich von 5-18 mm vertikaler Verschiebung und korrigierten über einsetzende plastische Verformungen die unerwünschten Geradheitsabweichungen einer abgekühlten gewalzten Schiene *Heller/Schweitzer* [41].

Das Berechnungsmodell zur Beschreibung der Interaktion zwischen Schiene und Richtrolle wird aufgrund von Symmetrieüberlegungen auf den in Abbildung 7.10 dargestellten Bereich reduziert. Die Diskretisierung der Schiene selbst erfolgt mit zweidimensionalen

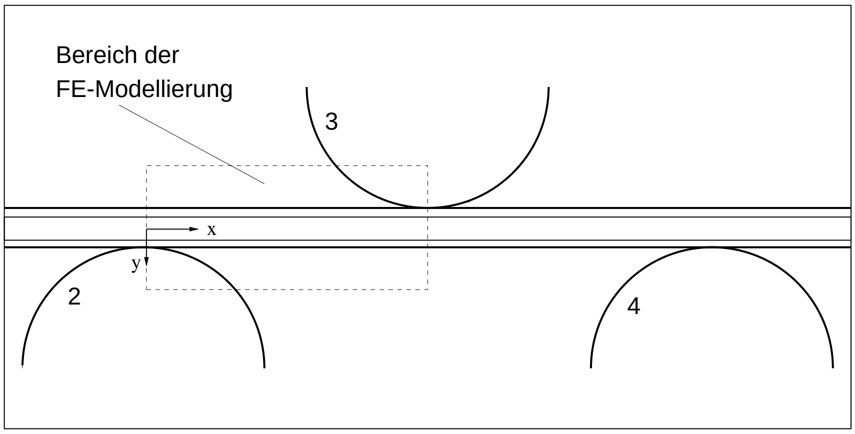


Abb. 7.10: Bereich der FE-Modellierung

isoparametrischen 4-Knotenscheibenelementen. Die Richtrollen werden als kreisförmige Starrkörperscheiben modelliert. Die veränderliche Querschnittsbreite der Schiene wird durch unterschiedliche elementweise konstante Elementdicken über die Höhe approximiert, wobei vorzugsweise die feinere Querschnittsunterteilung (Abb.7.11) verwendet wurde.

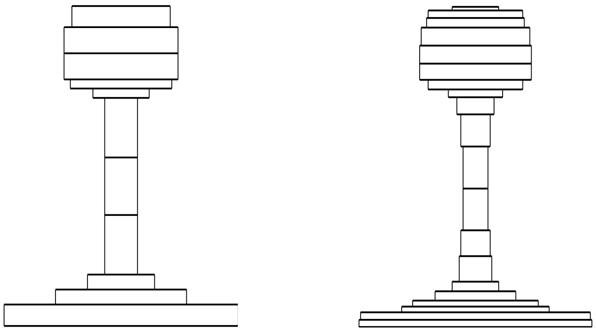


Abb. 7.11: Modellierung des Schienenprofils UIC 60 durch die Elementschichtung

7.2.2 Materialparameter

Die zur Beschreibung des elasto-plastischen Materialverhaltens der Schiene erforderlichen Parameter wurden durch die Auswertung von Zugversuchen *Heller/Schweitzer* [40] gewonnen und bei den Berechnungen wie folgt angesetzt:

$$\begin{array}{llcrl} \text{Elastizitätsmodul} & E & = & 18.5\ 10^4 & N/mm^2 \\ \text{Poissonzahl} & \nu & = & 0.3 & \\ \text{Fließspannung} & \mathring{\sigma}_{\mathrm{v}} & = & 450 & N/mm^2 \\ \text{Tangentenmodul} & E_T & = & 15400 & N/mm^2 \quad . \end{array}$$

Die Anwendung des speziell entwickelten Kontaktalgorithmus erfordert außerdem die Wahl verschiedener Interface-Parameter, für die im Rahmen der Berechnungen folgende Werte angesetzt wurden

$$\begin{array}{llcrl} \text{Haftreibwert} & \mu_H & = & 0.0 - 0.3 & \\ \text{Penaltyfaktor} & k_c & = & 1.0\ 10^{10} & N/mm \\ \text{Kontaktkinematik} & TOL_C & = & \pm 0.01 & mm \\ \text{Kontaktdynamik} & TOL_F & = & \pm 0.01 & N \quad . \end{array}$$

Darüber hinaus wird bei der numerischen Modellierung der rechte Rand der Schiene des in Abbildung 7.10 dargestellten Bereichs als horizontal unverschieblich angenommen, während der linke Rand alternativ als horizontal verschieblich oder unverschieblich modelliert wird. Die verschiebliche Randbedingung am linken Rand entspricht dabei den kinematischen Verhältnissen im Ein- und Auslaufbereich der Richtmaschine, während die unverschiebliche Randbedingung die Verhältnisse im mittleren Bereich der Richtmaschine entspricht. Die maximale Anstellgrad beträgt in allen Fällen 15 mm.

7.2.3 Spannungsverteilungen in der Schiene

Der Einfluss der Querschnittsdiskretisierung auf den Verlauf der Längs- und Quernormalspannungen über die Schienenhöhe direkt unterhalb der Richtrolle zeigt Abbildung 7.12. In beiden Fällen stimmen die Spannungsverläufe qualitativ recht gut überein. Wie ein Vergleich der maximalen Druckspannungen an der Fahrfläche zeigt, werden mit einer feineren Elementeinteilung Spannungsspitzen deutlich ausgeprägter erfaßt als mit einer groben Querschnittsapproximation. Für die weiteren Berechnungen wurde deshalb durchweg die feinere Elementeinteilung verwendet.

Die sich bei maximalem Anstellgrad sowie nach vollständiger Entlastung ergebenden Normal- und Schubspannungsverteilungen sind in den Abbildungen 7.13-7.16 dargestellt. Dabei beziehen sich die in Abbildung 7.13 und 7.14 wiedergegebenen Verläufe auf die

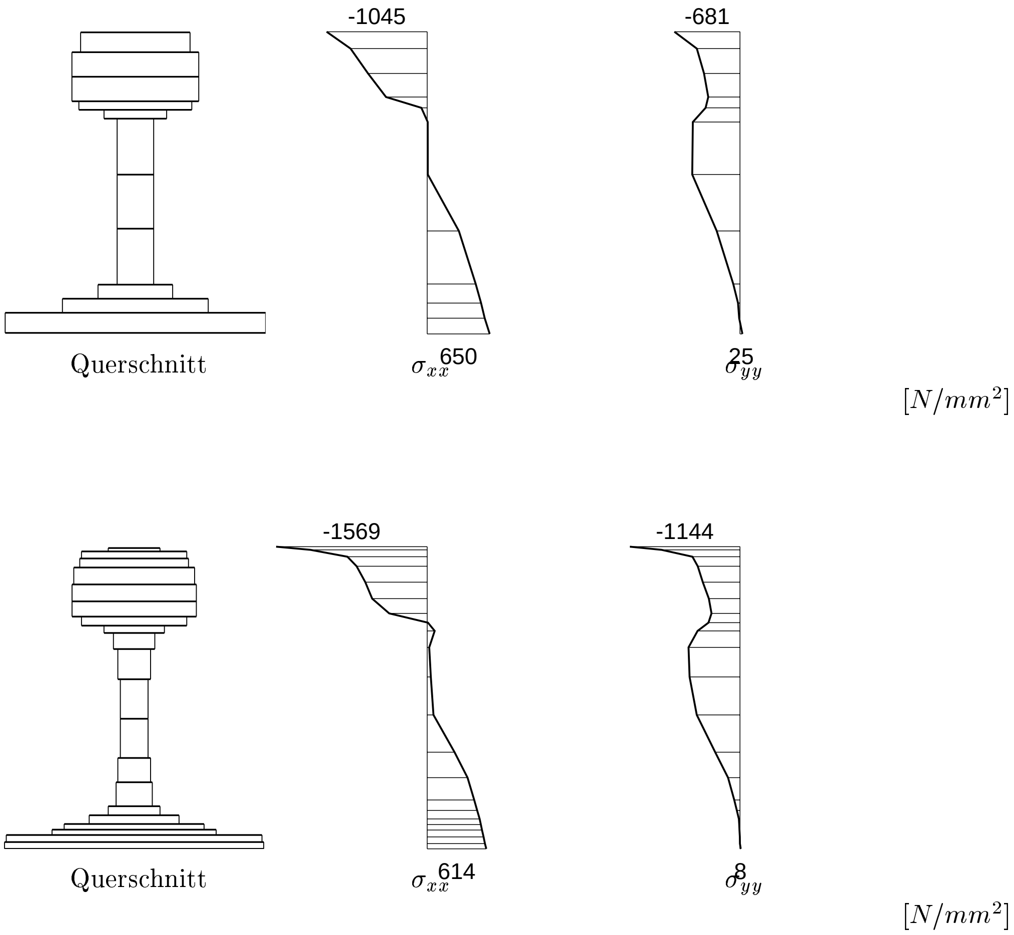


Abb. 7.12: Einfluss der Querschnitts-Diskretisierung auf die Spannungsverteilung der belasteten Schiene unter der Richtrolle

am linken Rand horizontal verschieblich gelagerte Schiene, diejenigen in Abbildung 7.15 und 7.16 für die am linken Rand unverschieblich gelagerte Schiene. Die Lage des Vertikalschnitts 1-1 wurde im unmittelbaren Kontaktbereich von Richtrolle und Schiene, Schnitt 2-2 im Übergangsbereich und die übrigen Schnitte weiter entfernt angeordnet.

Die axiale Normalspannungsverteilung in Abbildung 7.13 zeigt im Schnitt 1-1 direkt unterhalb der Rolle eine Spannungsspitze, die nach unten rasch abklingt. Im daneben liegenden Schnitt 2-2 fehlt diese Spannungsspitze und die maximale Ordinate reduziert sich um die Hälfte. Der Vergleich verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den Kontaktpressungen und den axialen Normalspannungen unterhalb der Kontaktzone, wie er auch aus den analytischen Lösungen der Scheibengleichungen bekannt ist, *Schleeh* [100]. Außerhalb des unmittelbaren Kontaktbereichs treten Normalspannungsverläufe auf, wie sie für die Balkentheorie typisch sind, wobei die gekrümmten Verläufe am Schienenkopf und -fuß durch den steifigkeitsmindernden Einfluss der Plastizierungen hervorgerufen werden. Bei den nach der Entlastung verbleibenden Eigenspannungen sind die Einflüsse des Anstellkontakts der Rolle allerdings kaum noch bemerkbar. Die Resteigenspannungsverläufe mit drei Nulldurchgängen sind auch für Balken charakteristisch, die einen elasto-plastischen Be- und Entlastungszyklus durchlaufen haben.

Die in Abbildung 7.14 dargestellten Schubspannungsverläufe zeigen im unmittelbaren Kontaktbereich ebenfalls einen ganz anderen Verlauf als außerhalb der Rollkontaktzone. Im Bereich von Schienenkopf und Schienenfuß ergeben sich nur geringe Schubspannungen, während die Maxima jeweils im relativ schmalen Schienensteg auftreten. Infolge der Haftreibungseffekte zwischen Rolle und Schiene tritt unterhalb der Rolle im Schnitt 1-1 eine Schubspannungsspitze auf. Die nach der Entlastung verbleibenden Schubeigenspannungen sind eher von geringer Größe, wobei an der Fahrfläche noch eine deutliche Spitze auftritt. Diese lokale Ungenauigkeit ist unter anderem darauf zurückzuführen, dass die Spannungen jeweils an den Gaußpunkten der Elemente ermittelt und auf die Elementränder extrapoliert werden.

Infolge der insgesamt steiferen Lagerung bei der unverschieblich gelagerten Schiene ergeben sich deutlich höhere Rollenkräfte, vergleiche die Abbildungen 7.20 und 7.21, und die Einflüsse des Rollkontakts treten in den Abbildungen 7.15 und 7.16 im Schnitt 1-1 wesentlich stärker hervor. Der qualitative Verlauf der axialen Normalspannung im Schnitt 1-1 bleibt hiervon allerdings unberührt und zeigt wieder den aus der Scheibentheorie bekannten Verlauf. Zur Trägermitte hin treten sehr geringe Normalspannungen auf, wobei sich der Momentennulldurchgang vom Rand des Schienenstegs (Schnitt 1-1) in die Mitte (Schnitt 4-4) verlagert. Die Eigenspannungen weisen im Bereich von Schienenkopf und Schienenfuß wieder ähnliche Verläufe auf wie bei der horizontal verschieblich gelagerten Schiene, während sie sich im Schienensteg deutlich davon unterscheiden. Dies ist hauptsächlich auf die stärkere Stegbeanspruchung infolge der höheren Kontaktpressungen zurückzuführen.

Auch bei den Schubspannungen im Schnitt 1-1 (Abbildung 7.16) sind die Auswirkungen der hohen Kontaktkräfte auf die Größe der Eigenspannungen zu erkennen. In den anderen Schnitten sind wieder die aus der Balkentheorie bekannten Verläufe zu sehen.

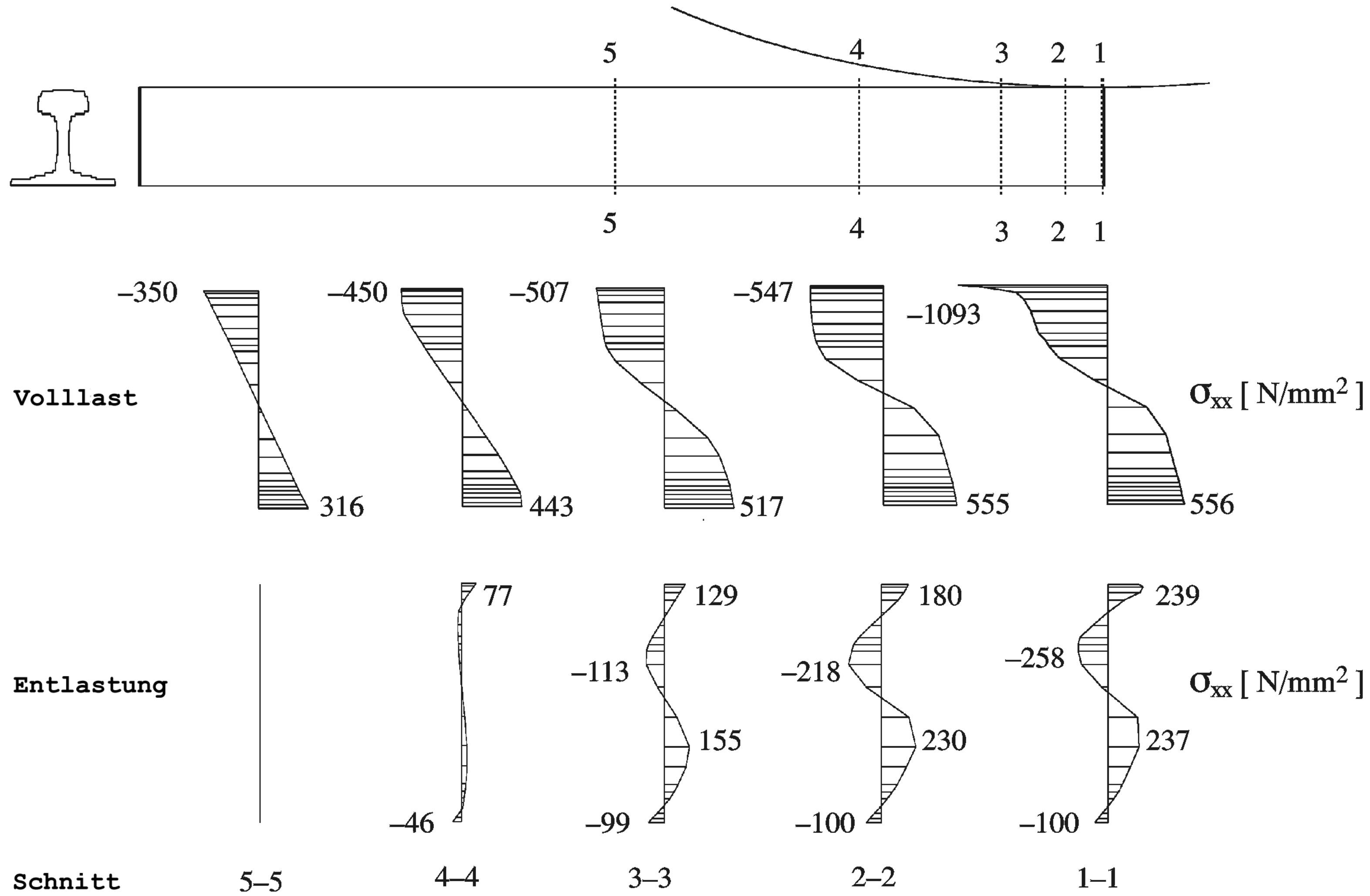


Abb. 7.13: Verteilung der axialen Normalspannungen σ_{xx} unter Volllast und nach Entlastung bei einseitig verschieblich gelagerte Schiene

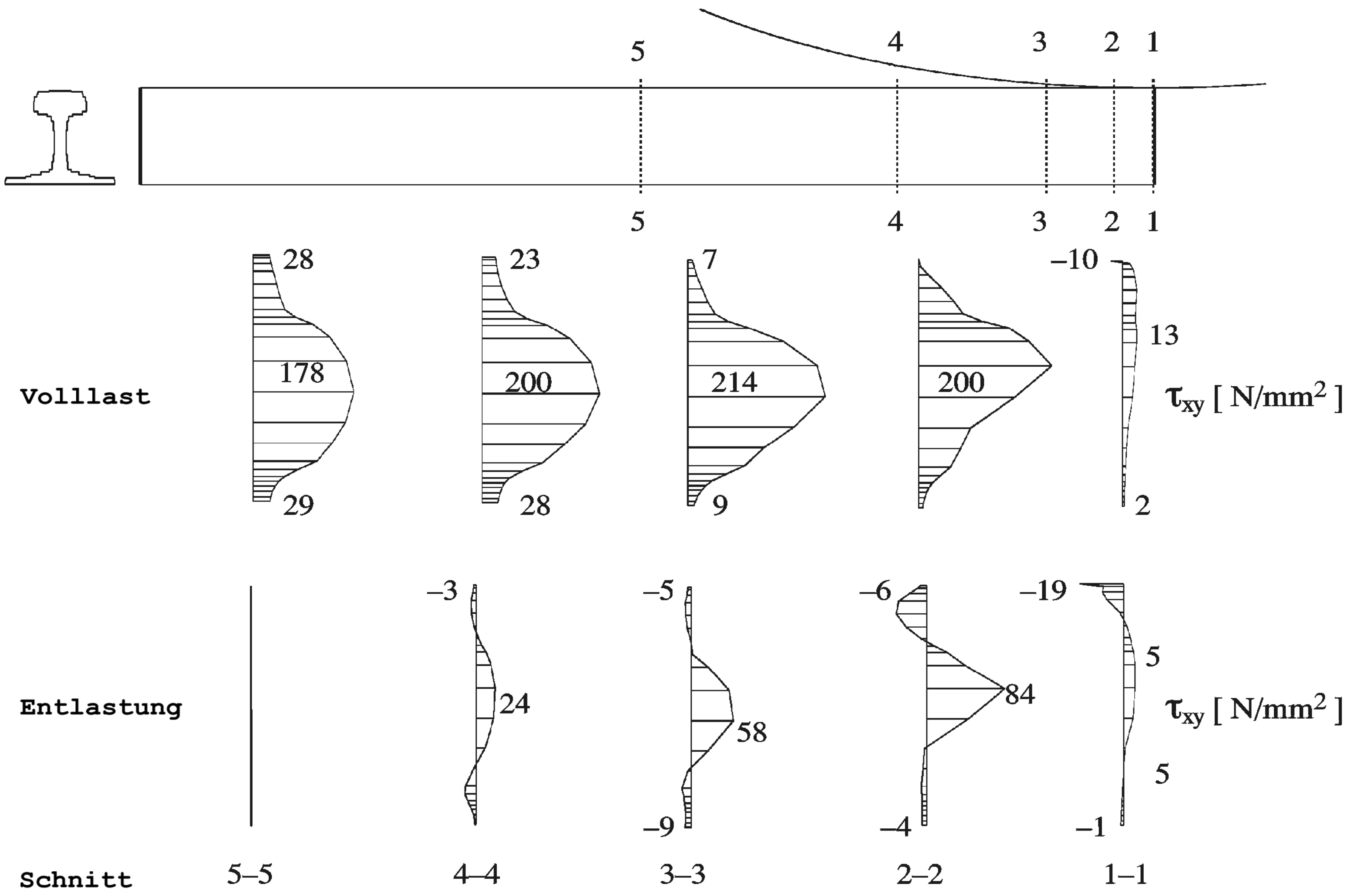


Abb. 7.14: Verteilung der Schubspannungen τ_{xy} unter Volllast und nach Entlastung bei einseitig verschieblich gelagerte Schiene

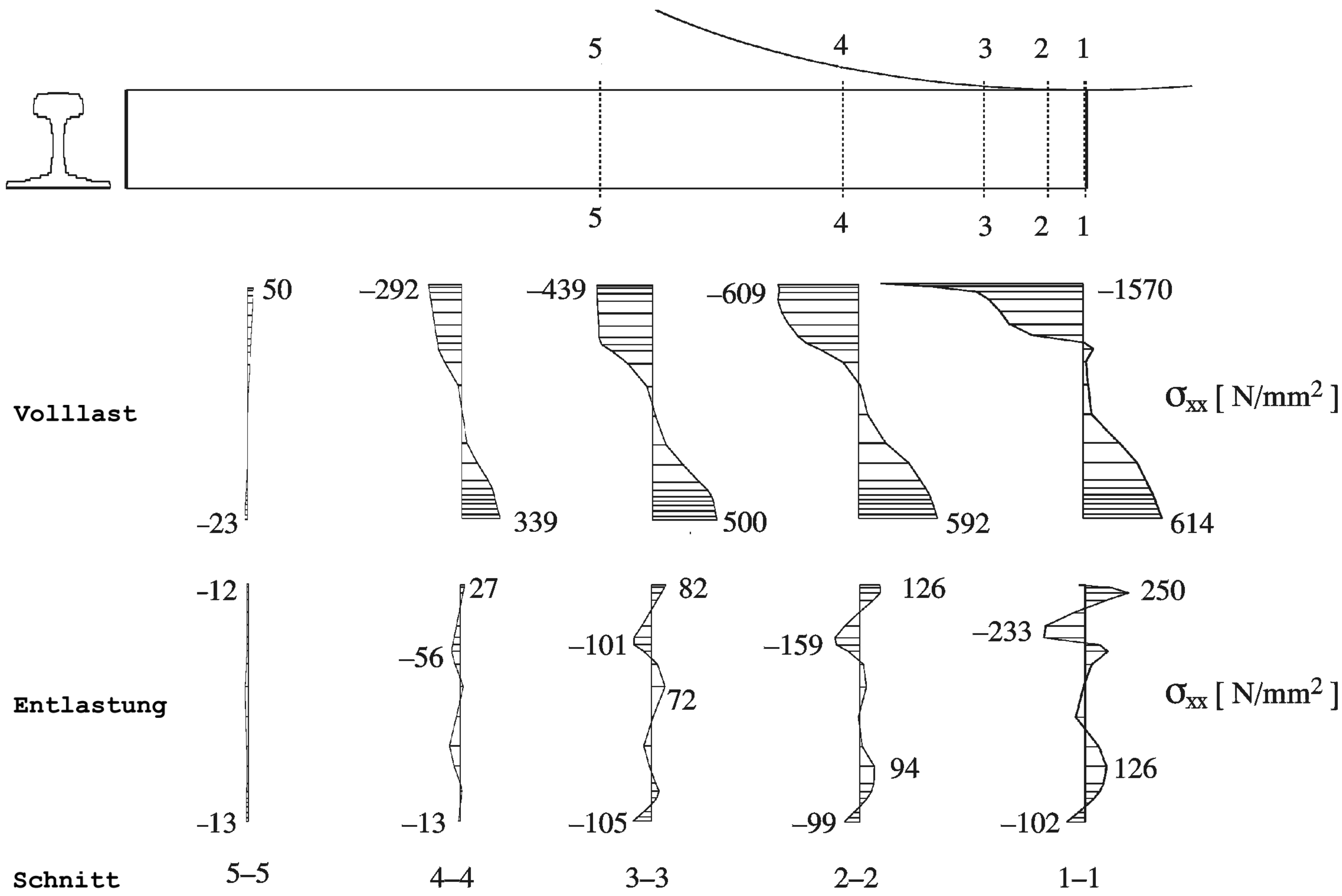


Abb. 7.15: Verteilung der axialen Normalspannungen σ_{xx} unter Volllast und nach Entlastung bei beidseitig unverschieblich gelagerte Schiene

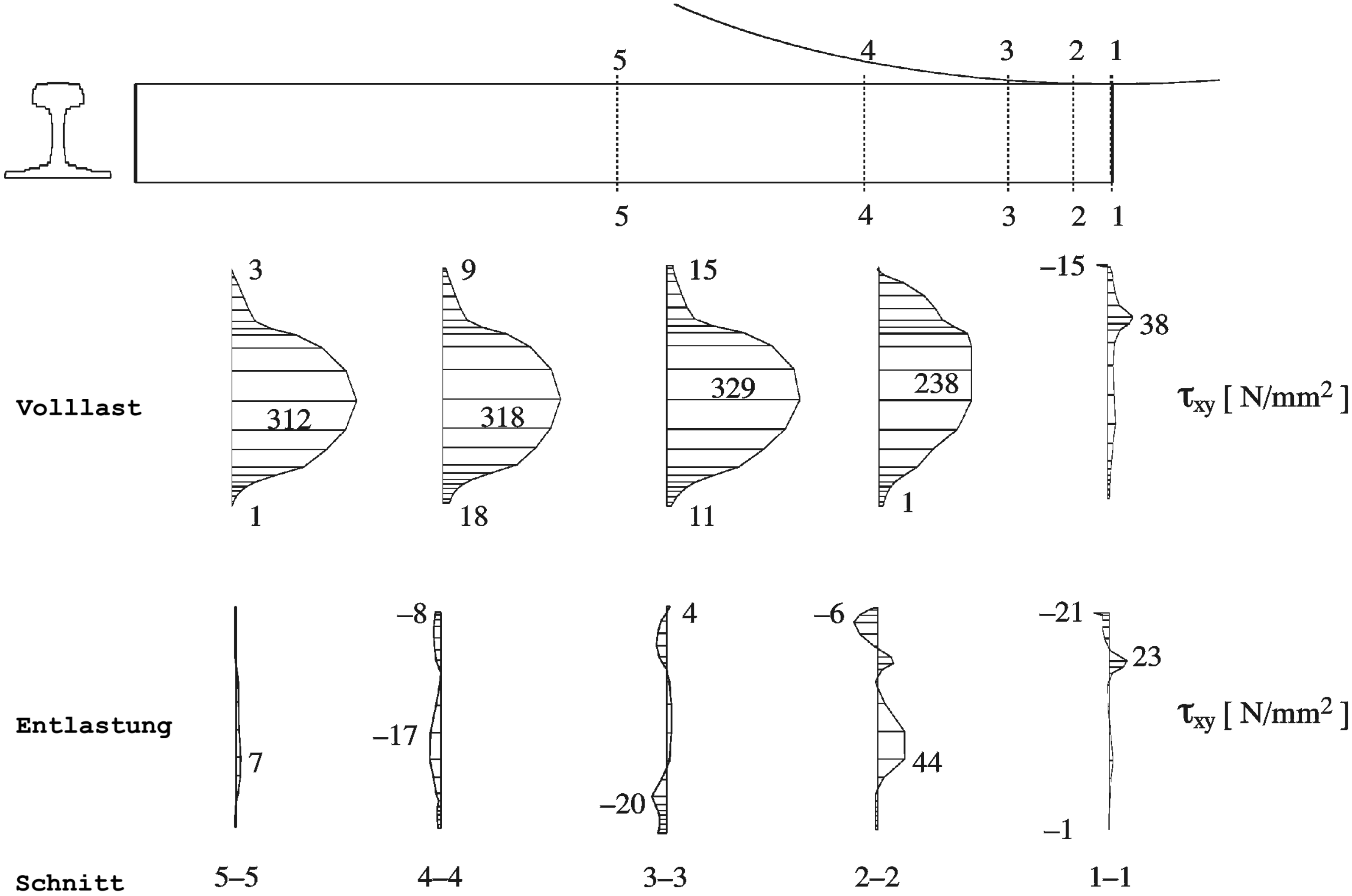


Abb. 7.16: Verteilung der Schubspannungen τ_{xy} unter Volllast und nach Entlastung bei beidseitig unverschieblich gelagerte Schiene

7.2.4 Plastizierung des Schienensegments

Mit steigendem Anstellgrad nehmen die Spannungen innerhalb der Schiene soweit zu, dass immer größere Bereiche des Materials plastizieren. Dieser Vorgang ist in den Abbildungen 7.18 und 7.19 dargestellt. Für die horizontal verschieblich gelagerte Schiene treten bei einem Anstellgrad von 7 mm bereits deutlich ausgeprägte Plastizierungen unmittelbar neben der Kontaktfläche sowie im Bereich des Schienenfußes auf. Direkt unterhalb der Richtrolle plastiziert der Schienenquerschnitt erst mit zunehmender Anstellung. An der linken Richtrolle treten ebenfalls aufgrund der dort anliegenden Kontaktpressungen lokal begrenzte Plastizierungen auf.

Bei der horizontal unverschieblich gelagerten Schiene treten dagegen schon bei einer Anstellung von 5 mm größere Plastizierungen im Bereich der Richtrollen auf, die hauptsächlich durch die hohen axialen Normalspannungen hervorgerufen werden. Mit zunehmender Richtrollenanstellung werden dann auch hier die plastischen Zonen zunehmend größer und bereits ab einer Anstellung von etwa 7 mm beginnt der Schienensteg von der Schwerachse aus zu plastizieren. Dieser Effekt ist vor allem auf die hohen Schubspannungen im Steg zurückzuführen.

7.2.5 Entwicklung der Kontaktknotenkräfte

Die schrittweise Zunahme des Anstellgrads verursacht eine Vergrößerung des Kontaktbereichs, so dass sich eine wachsende Anzahl von Randknoten an der Übertragung der Normal- und Tangentialspannungen beteiligt (Abbildung 7.17).

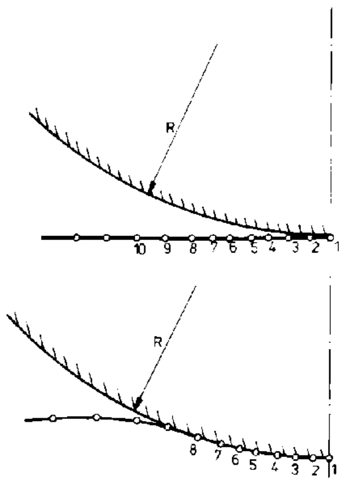


Abb. 7.17: Fahrflächendiskretisierung und Kontaktknoten zwischen Richtrolle und Schiene

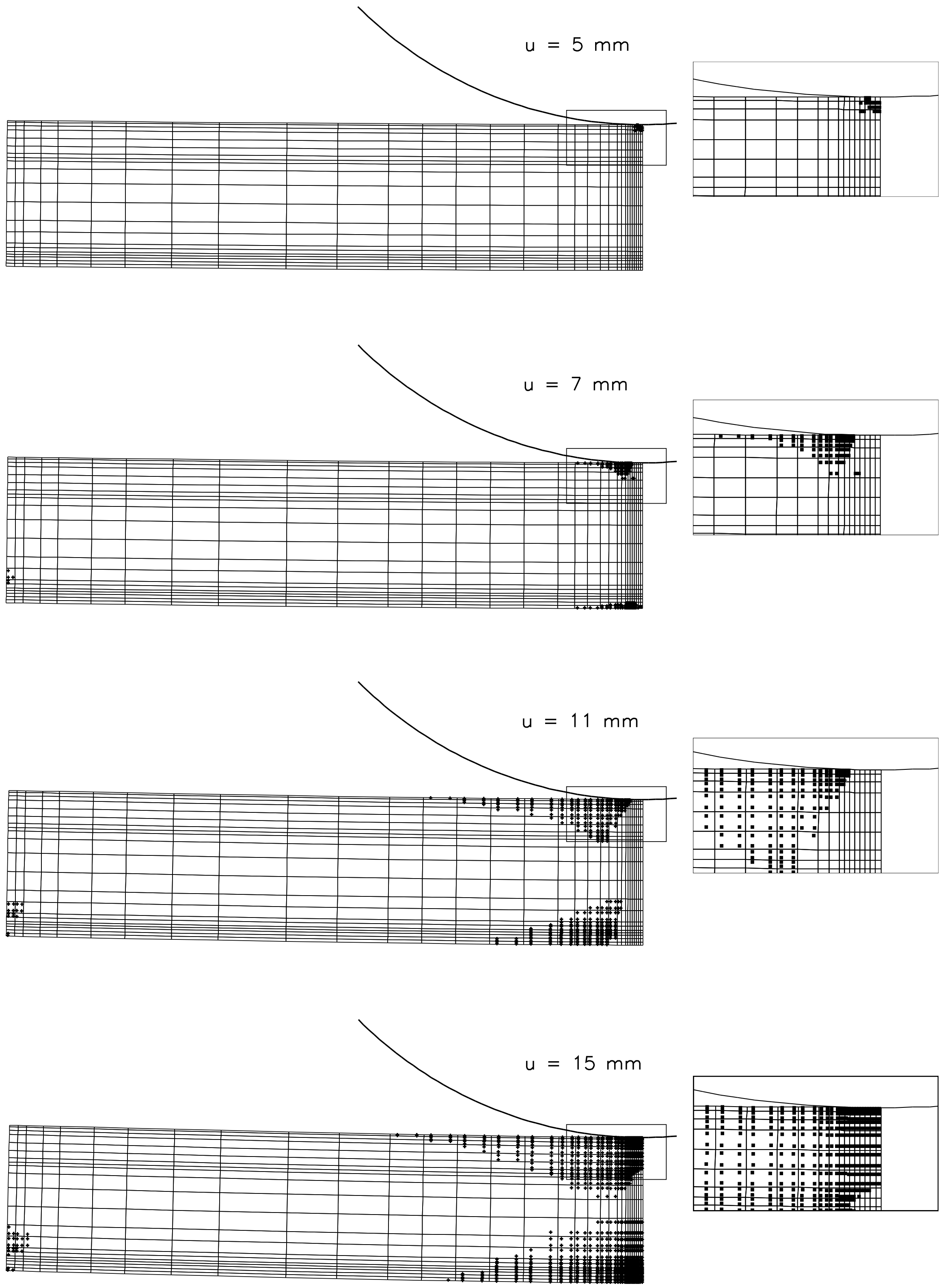


Abb. 7.18: Plastizierungsgeschichte der horizontal verschieblich gelagerten Schiene

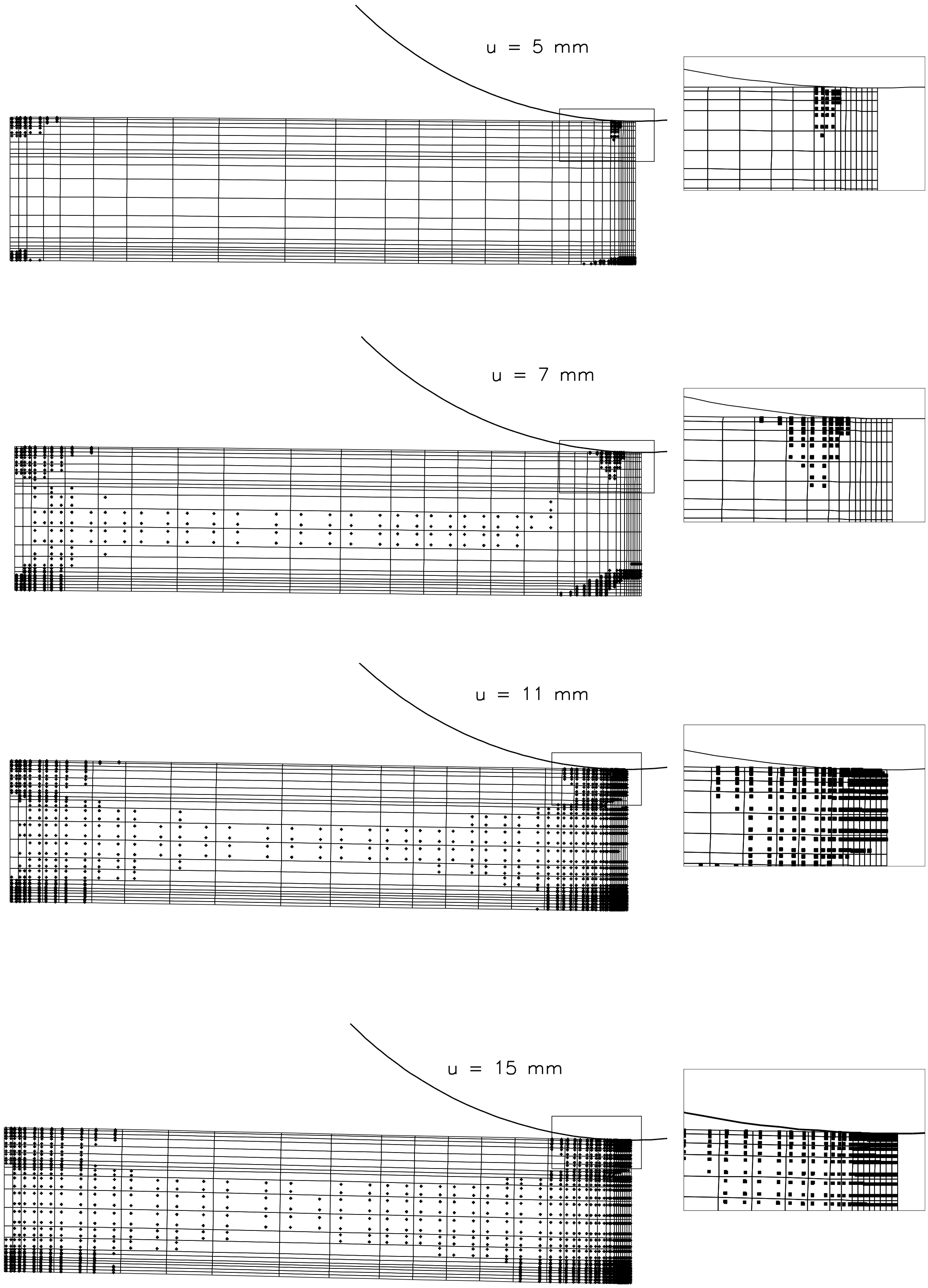


Abb. 7.19: Plastizierungsgeschichte der horizontal unverschieblich gelagerten Schiene

Wie in den Abbildungen 7.20 und 7.21 dargestellt, tritt bei gleichmäßiger Fahrflächendiskretisierung mit fortschreitender Richtrollenanstellung eine zunehmend gleichmäßigere Verteilung der Kontaktknotenkräfte auf. Bei der horizontal unverschieblich gelagerten Schiene tritt aufgrund der Elementlängenänderung in der Oberflächendiskretisierung am Knoten 9 eine höhere Knotenkraft auf. Wie die Abbildungen 7.20 und 7.21 verdeutlichen, sind die tangential zur Richtrolle verlaufenden Knotenkräfte deutlich kleiner als die der entsprechenden Normalkräfte. Die Tangentialkräfte erreichen nach eingetretenem Kontakt dabei relativ rasch ihre jeweiligen Maximalwerte und bleiben anschließend weitgehend konstant.

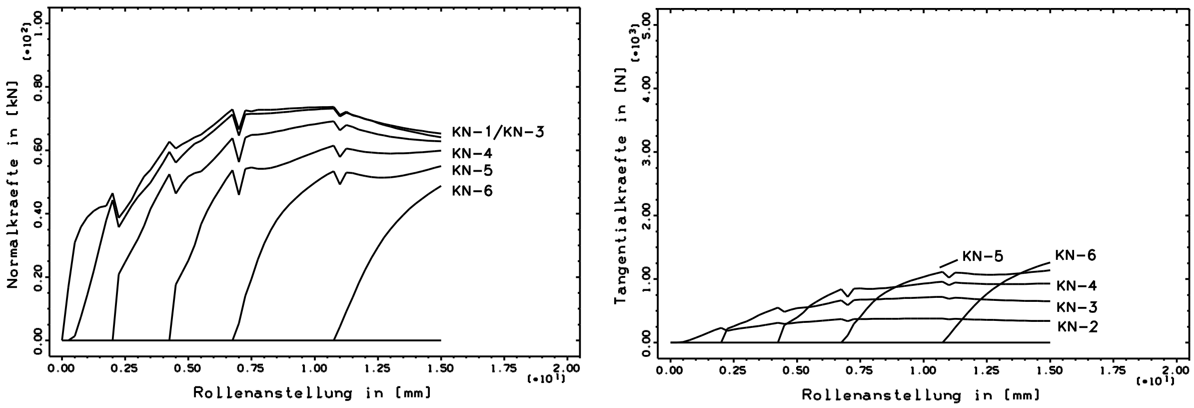


Abb. 7.20: Entwicklung der Kontaktkräfte in der horizontal verschieblich gelagerten Schiene

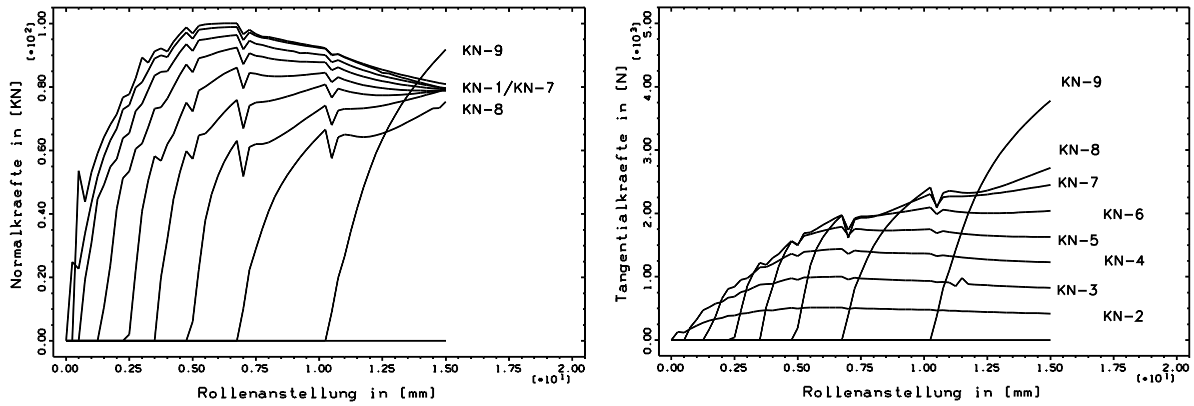


Abb. 7.21: Entwicklung der Kontaktkräfte in der horizontal unverschieblich gelagerten Schiene

7.2.6 Verteilung der Kontaktspannungen

Über die Transformation der Kontaktkräfte mit Hilfe der Lumped-Kontaktflächenmatrizen lässt sich eine Verteilung der Normal- und Tangentialspannungen in der Kontaktzone berechnen. In den Abbildungen 7.22 und 7.23 ist deren Abhängigkeit vom Anstellgrad bzgl. der verschiedenen kinematischen Lagerbedingungen der Schiene dargestellt. Zusätzlich ist die Lage der Elementknoten der Schienenoberfläche angegeben.

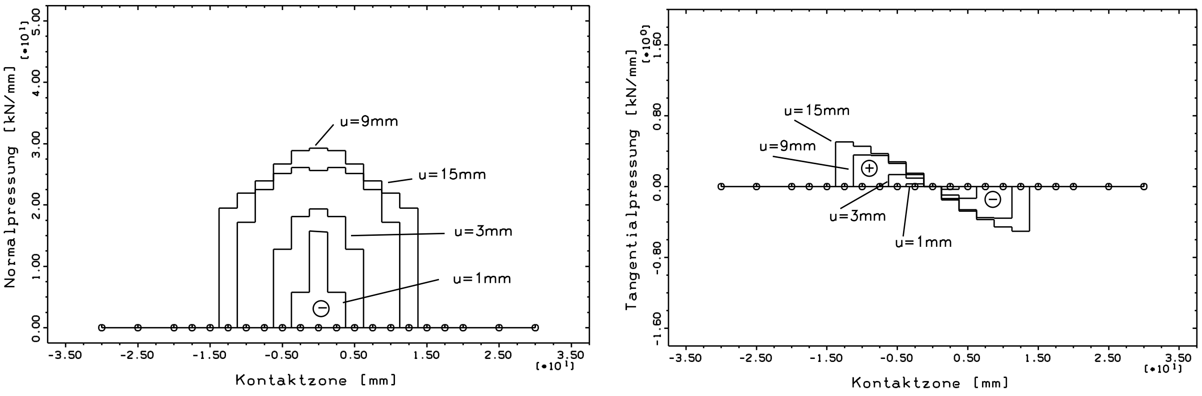


Abb. 7.22: Spannungsverteilungen in der Kontaktfläche bei der horizontal verschieblich gelagerten Schiene

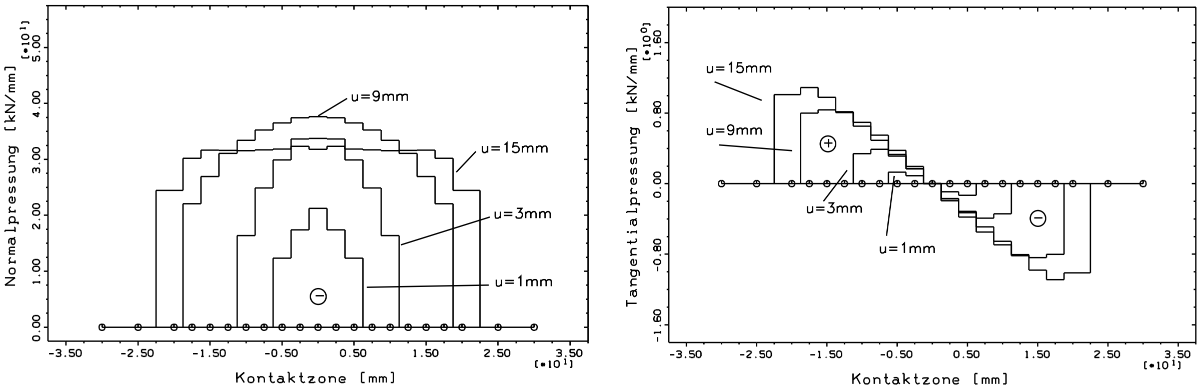


Abb. 7.23: Spannungsverteilungen in der Kontaktfläche bei der horizontal unverschieblich gelagerten Schiene

Bei kleiner Anstellungen lässt sich die Verteilung der Kontaktpressung durch eine Halbellipse annähern. Sie entspricht weitgehend der aus experimentellen Untersuchungen an stationären Rollen und Rädern bekannten Verteilung der Hertz'schen Pressung. Bei größeren Richtrollenanstellungen weitet sich jedoch die Verteilung zunehmend auf und geht bei hohen Kontaktkräften in eine annähernd rechteckige Form über. Ähnliche Ergebnisse wurden von *Follansbee/Sinclair* [30], *Hardy et al.* [37] und *Voyiadjis et al.* [113] beim Eindrücken eines Starrkörpers in einen elasto-plastischen Halbraum gewonnen. Auch dort änderte sich eine im Anfangsstadium annähernd elliptische Verteilung der Kontaktpressung mit steigender Belastung in einen eher rechteckigen Verlauf mit deutlichen Maxima am Rand der Kontaktzone. Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Annahme einer Hertz'schen Pressung nur für vergleichsweise kleine Richtrollenkräfte realistisch ist, während sich bei höheren Beanspruchungen sowohl qualitativ als auch quantitativ ganz andere Spannungsverteilungen einstellen.

Unter Annahme einer Coulomb'schen Reibung in der Kontaktzone entstehen die bekannten Tangentialspannungsverteilungen mit ihren Maxima am Rand der Kontaktzone und der Änderung der Wirkungsrichtung in Höhe der Rollenanstellachse. Vollständiges Haften liegt dabei nur im Inneren der Kontaktfläche vor. Die Verteilung entspricht damit weitgehend derjenigen, die sich auch beim Eindrücken einer starren Rolle in einen Halbraum unter Annahme Coulomb'scher Reibung ergibt, wobei sich die Kontaktfläche aus einer Haftzone, die von zwei Gleitzonen eingeschlossen wird, zusammensetzt.

7.3 Rollvorgang am Schienensegment

Abbildung 7.24 zeigt das zweidimensionale Finite-Elemente-Modell mit 1575 isoparametrischen Scheibenelementen, auf dessen Grundlage der Rollvorgang der Richtrolle über das Richtgut simuliert wird.

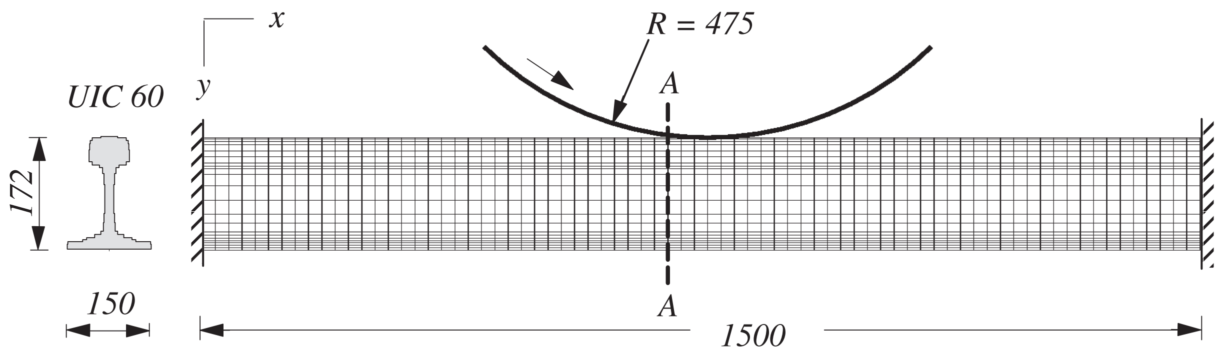


Abb. 7.24: 2-D-Modell eines Richtdreiecks mit diskretisierter Schiene, Richtrolle und den geometrischen Randbedingungen

Materialparameter und Querschnittsdiskretisierung entsprechen dem in Abschnitt 7.2.2 verwendeten Modell mit der feineren Querschnittsapproximation. Nach Erreichen der maximalen Anstellung von 15 mm beginnt die Richtrolle von der Mitte der Schiene aus bei gehaltener Anstellung über den Schienenkopf abzurollen.

7.3.1 Spannungsverteilung in der Schiene

In Abbildung 7.25 ist die Spannungsverteilung im Schnitt A-A bei $x \approx 720$ mm über die Querschnittshöhe dargestellt. Die $\cdots$ Linien zeigen die Verteilung der Spannungskom-

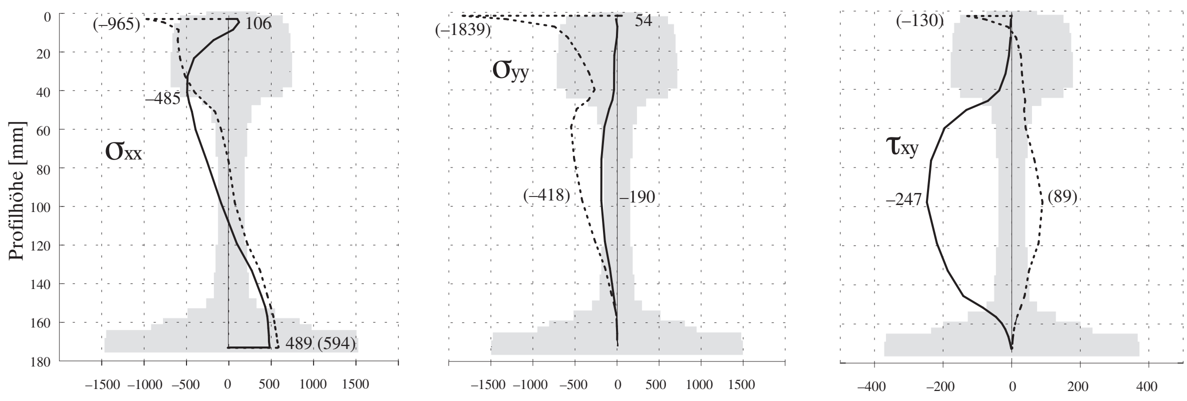


Abb. 7.25: Verteilung der Spannungskomponenten über die Schienenhöhe während (···) und nach (—) der Rollbelastung

ponenten unter direktem Rollkontakt, nach einer Rollendrehung von $2,7^o$ (Rollenachse: $x = 737.7\ mm$). Die — Linien zeigen die Verteilungen im gleichen Schnitt nach der Rollbeanspruchung. Die Rolle hat zu diesem Zeitpunkt eine Drehung von $14,6^o$ bei einer Achstellung von $x = 640,3\ mm$ erreicht. Die Form der axialen Normalspannungsverteilung σ_{xx} und der Schubspannungsverteilung τ_{xy} entspricht der nichtlinearen Spannungsverteilung des Schnittes 1-1 nach der Anstellung (Abb. 7.13-7.16). Die Rollbelastung verursacht einen Vorzeichenwechsel der σ_{xx}-Komponente im Schienenkopf und eine Verlagerung der neutralen Faser im Stegbereich.

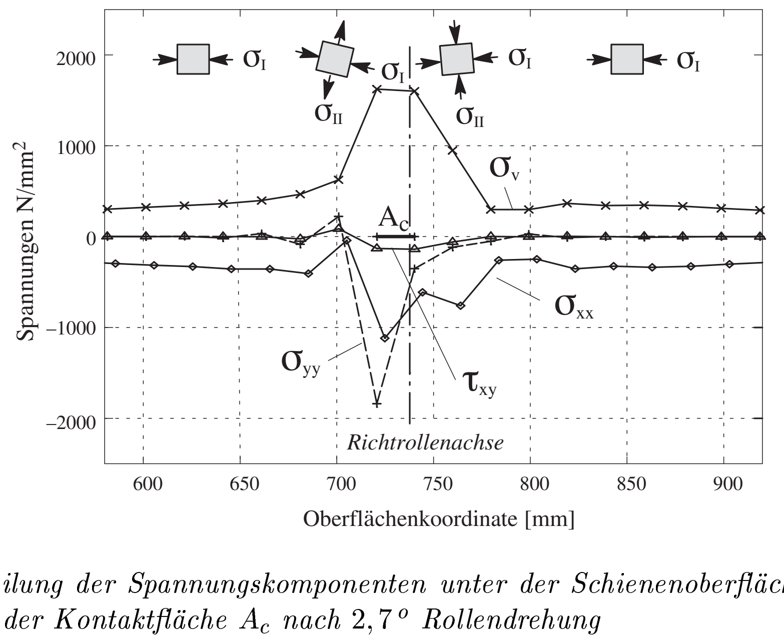


Abb. 7.26: Verteilung der Spannungskomponenten unter der Schienenoberfläche in der Umgebung der Kontaktfläche A_c nach $2,7^o$ Rollendrehung

Die Materialbeanspruchung an der Oberfläche infolge der Rollbelastung verdeutlicht Abbildung 7.26. Neben der Spannungsverteilung sind auch die Richtungen der Hauptspannungen an ausgewählten Punkten am oberen Bildrand dargestellt. Die Spannungskomponenten σ_{yy} und τ_{xy} treten erwartungsgemäß nur in der Umgebung der Kontaktzone auf, wobei sich ihre Wirkungsrichtung unterhalb der Kontaktzone ändert. Die größte Materialbeanspruchung entsteht unterhalb der Kontaktzone in Rollrichtung. Erst in endlicher Entfernung von der Kontaktzone reduziert sich die zweiachsiale Beanspruchung auf eine einachsiale Beanspruchung.

7.3.2 Plastizierung am Schienensegment

Infolge der Rollbewegung wird der Plastizierungszustand der Anstellung in Abbildung 7.27 auf die Umgebung des Rollkontaktbereichs lokalisiert, wie Abbildung 7.28 zeigt.

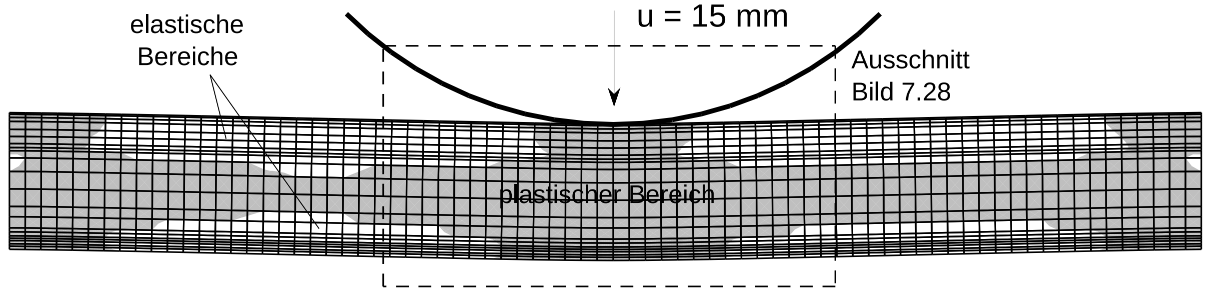


Abb. 7.27: Elasto-plastische Materialbeanspruchung vor Beginn der Rollphase

Dabei tritt eine Materialbeanspruchung ein, die sich vom Schienenkopf bis in den Steg, teilweise bis in den Schienenfuß hin ausbreitet. Ihr Zentrum ist in Richtung der Rollbewegung vor die Rollenachse verschoben. Der Einfluss der Diskretisierung auf die Kontaktpressung und damit auf den Plastizierungszustand in den dargestellten Rollinkrementen tritt deutlich hervor.

Die Rollbeanspruchung wird infolge der kleinen Kontaktzone $A_c \approx 20\ mm$ in der Regel über nur zwei Kontaktknoten eingeleitet. In Abhängigkeit der Rollenstellung verlagert sich die Rollbeanspruchung immer mehr über den ersten Kontaktknoten in Rollrichtung auf die Schiene, bis ein weiterer Elementknoten den Kontakt mit der Richtrolle aufnimmt. Die Kontaktzone besteht dann kurzzeitig aus zwei Kontaktelementen, mit einer maximalen Pressung in der Mitte, siehe Abb. 7.28 $1,4\,^o$. Löst sich ein Kontaktknoten im Austrittsbereich, setzt die Lastumlagerung auf den ersten Kontaktknoten wieder ein. Wie die Bildsequenz in 7.28 zeigt, führt diese Lastverlagerung auf eine eher komplexe numerische Plastizierungsgeschichte, bei der es auch zu elastischen Materialeinschlüssen kommt.

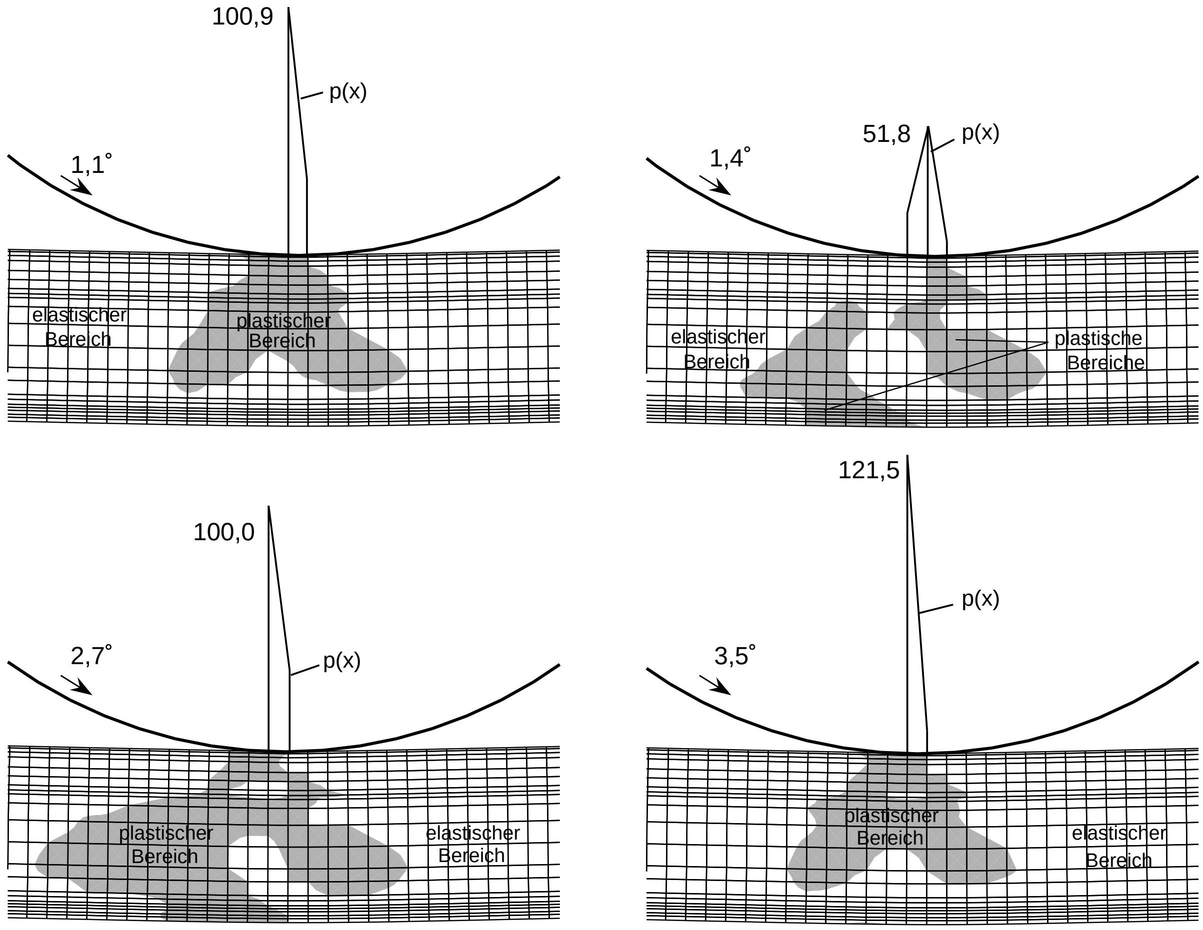


Abb. 7.28: Materialbeanspruchung und Kontaktpressung $p(x)$ in kN/mm^2 während des Rollenrichtvorgangs in verschiedenen Rollinkrementen

7.4 Druckumformung durch Längswalzen

Walzverfahren spielen bei der Verarbeitung von Metallen eine herausragende Rolle, da sich mit diesen Fertigungsverfahren eine Vielzahl von Halbzeugen und Fertigprodukten herstellen lassen. Als Vormaterial für die Herstellung von Walzerzeugnissen werden meist rechteckige Gussbarren, die warmgewalzt und anschließend bei Raumtemperatur kalt abgewalzt werden, verwendet. Da durch den Walzprozess das Walzgut durch eine meist mehrachsige Druckbeanspruchung weit über die Fließgrenze belastet wird, zählt es zu den Druckumformverfahren, *Dahl et al.* [22]. Je nach Dicke der Walzerzeugnisse wird zwischen Bändern und Blechen $t > 0,35\ mm$, Dünnbändern $t = 0,02 - 0,35\ mm$ und Folien $t = 0,007 - 0,02\ mm$ unterschieden. Abbildung 7.29 zeigt das Schema einer Strang- bzw. Bandwalzanlage mit zwei parallel rotierenden Walzen und seiner zweidimensionalen Modellbildung als Streifenelement.

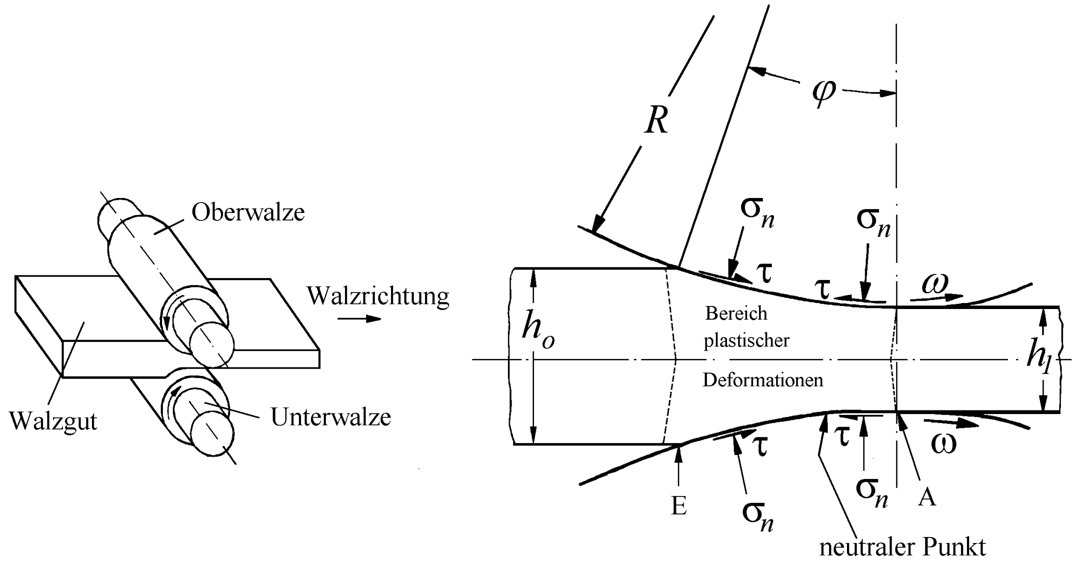


Abb. 7.29: Schematische Darstellung physikalischer und geometrischer Größen am Streifenelement im Walzspalt während einer Druckumformung durch Längswalzen

Aus experimentellen Untersuchungen, *Dahl et al.* [22], *Malinowski/Lenard* [79], ist bekannt, dass im Eintrittsbereich $\overline{\mathrm{EN}}$ (Nacheilzone) die Horizontalgeschwindigkeit des Walzguts langsamer ist als die Horizontalkomponente der Walzumfangsgeschwindigkeit. Im Austrittsbereich $\overline{\mathrm{NA}}$ (Voreilzone) hingegen ist die Geschwindigkeit des Walzguts schneller als die der Walzen, so dass ein stationärer Zustand im Walzspalt nur an einem Punkt, dem neutralen Punkt, auch Fließscheide genannt, vorliegt.

Aufgrund der Änderung der Relativgeschwindigkeit zwischen Walze und Walzgut ändert sich die Richtung der Reibspannungen in der Kontaktfläche am neutralen Punkt (Abbildung 7.29). Die Lage des neutralen Punktes ist a priori unbekannt und von den Reibbedingungen abhängig. Meist liegt er zwischen dem Austrittsquerschnitt und dem Halbwalzpunkt der Kontaktfläche.

7.4.1 Bandwalzen

Ein Stahlband mit einer Länge von $l = 100\ mm$ und einer Anfangshöhe von $h_0 = 80\ mm$ wird durch zwei Walzen mit einem Radius von $R = 80\ mm$ auf eine Dicke von $h_1 = 68\ mm$ gewalzt. Das entspricht einer Dickenreduzierung von $r = 15\ \%$. Die Diskretisierung des Walzguts erfolgt unter der Annahme eines symmetrischen Strukturverhaltens mit 160 4-Knoten-Scheibenelementen. Die Walzen werden als Starrkörperscheiben betrachtet. In der sich ausbildenden Rollkontaktfläche werden Reibeffekte durch ein Coulomb'sches Reibungsgesetz berücksichtigt. Das Materialverhalten des Walzguts im Bandwalzprozess wird durch einen ebenen Verzerrungszustand und eine von-Mises-Fießbedingung mit isotroper Verfestigung idealisiert. Abbildung 7.30 zeigt das Strukturmodell zur Simulation eines Bandwalzprozesses mit den verwendeten Materialparametern. In der numerischen Berechnung wird die Rolle um $\hat{u}_{\mathrm{y}} = 0,075\, h_o$ angestellt, bevor die Simulation des Walzprozesses mit einer Inkrementschrittweite von $0.1\,^o$ beginnt.

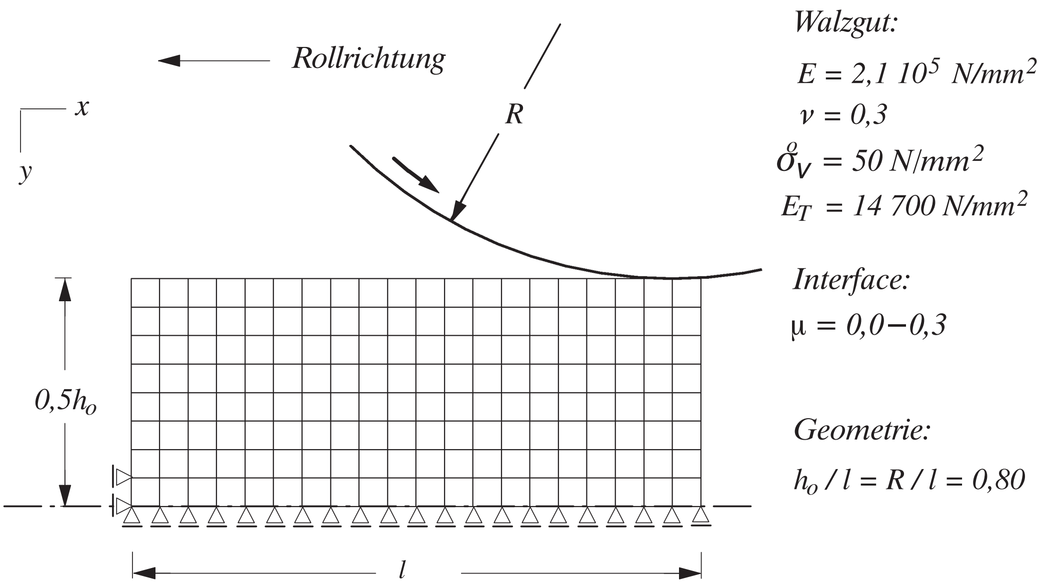


Abb. 7.30: Strukturmodell und Materialparameter für die Bandwalzsimulation

7.4.2 Numerische Ergebnisse

Abbildung 7.31 zeigt die Deformation des Walzgutes nach einer Walzrotation von $45,1\,^o$, wobei unterschiedliche Reibbedingungen in der Kontaktfläche wirken. Die Verschiebungsfigur aus dem Walzprozess ist dabei jeweils mit der verformten Lage am Ende der Anstellphase überlagert.

Die vor Beginn der Rollbewegung noch rechtwinklig zur Rollrichtung verlaufenden Elementlinien krümmen sich nach der Walzbeanspruchung in Walzrichtung, wobei der Einfluss der Reibung deutlich hervortritt. Im reibungsfreien Fall mit $\mu = 0$ wirken keine Reibkräfte, die Krümmung der vertikalen Elementlinien ist hier am größten und nimmt von der Symmetrieachse zum Walzrand hin stetig zu. Mit der Übertragung von Reibkräften sind die Elementlinien nicht mehr stetig gekrümmt, es kommt zur Krümmungsänderung in den oberflächennahen Bereichen. Je größer der Reibwert, desto deutlicher tritt die Bewegung des Walzguts in Walzrichtung über die gesamte Walzguthöhe in Erscheinung. Ohne

Reibung entsteht eine Verschiebungsfigur die, bis auf wenige Elemente nahe der Symmetrieachse, am freien Rand eine Bewegung gegen die Walzrichtung zeigt. Die Vorwärtsbewegung des Walzguts nimmt dabei vom Walzrand zur Symmetrieachse hin stetig zu.

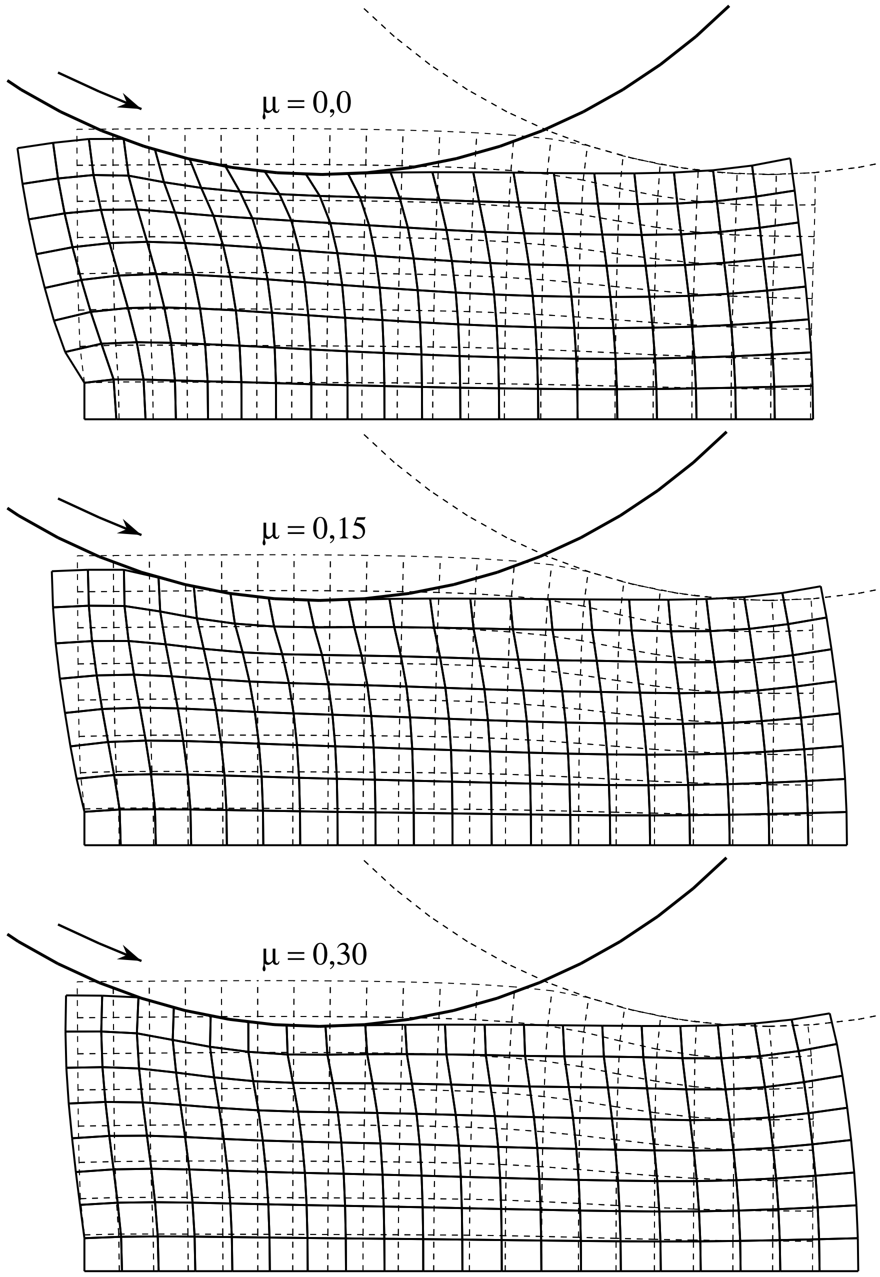


Abb. 7.31: Einfluss des Reibwerts auf das Deformationsverhalten des Walzguts

Kontaktpressung und Reibspannung zeigen die Abbildungen 7.32 und 7.33 zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Walzfortschritt. Die Verteilungen sind auf der Oberflächendiskretisierung des unverformten Randes dargestellt . Die Verteilung der Rollpressung in Abbildung 7.32 zeigt, dass die maximalen Ordinaten in der Nähe des Eintrittpunktes der Kontaktfläche auftreten. Von der Anstellphase 0 aus beginnen sich diese Kontaktspannungsspitzen mit fortschreitender Walzbewegung bis auf eine charakteristische Rollpressungsverteilung auszubilden. Diese Form der Kontaktspannungsentwicklung, mit einer Spitze nahe des Einlaufbereichs, ist ein Ergebnis der diskreten Umsetzung der Kontaktmechanik und sollte nicht mit dem experimentell beobachteten Peening-Effect nach *MacGregor/Palme* [78] identifiziert werden.

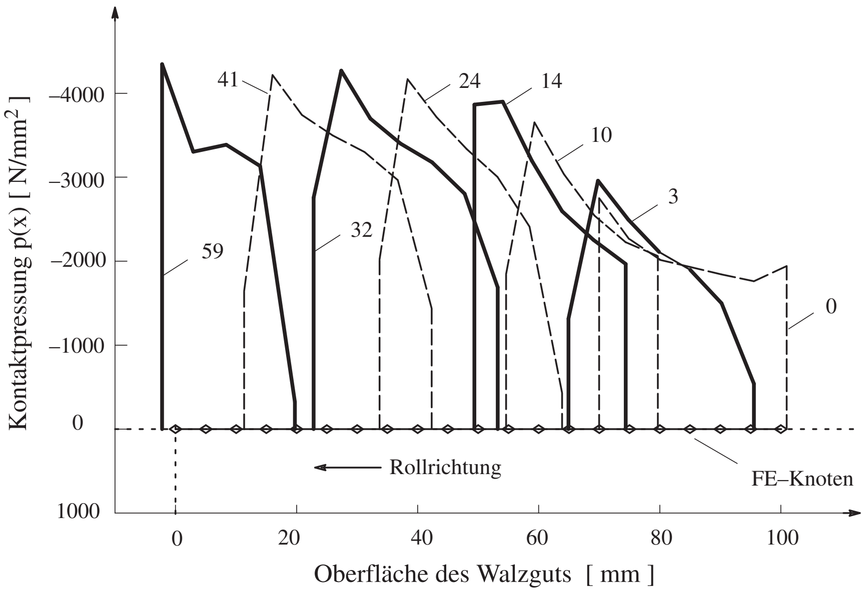


Abb. 7.32: Verteilung der Rollpressung in verschiedenen Walzschritten, $\mu = 0,15$

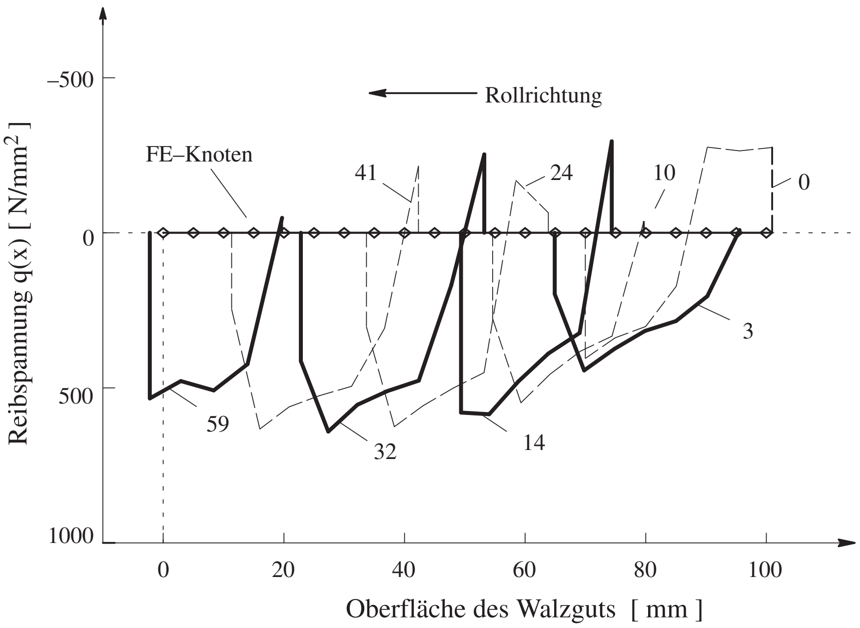


Abb. 7.33: Tangentiale Kontaktspannungen in verschiedenen Walzschritten, $\mu = 15$

Die Verteilung der tangentialen Kontaktspannungen verändert sich deutlich mit Beginn der Rollbewegung. Die bilaterale Reibspannungsverteilung aus der Anstellphase reduziert sich auf eine eher unilaterale Verteilung. Aus der Überlagerung der μfachen Rollpressung in Abbildung 7.32 mit den tangentialen Kontaktspannungsverteilungen in Abbildung 7.33 lassen sich die Gleit- und Haftbereiche in der Kontaktfläche identifizieren. In Gleitzonen ist die μ-fache Rollpressung mit der Reibspannung in Form und Größe identisch. Wie zu erkennen, besteht die Walzkontaktfläche aus einer Gleitzone im Eintrittsbereich und einer Haftzone im Austrittsbereich. Da im Auslaufbereich die Reibspannung ihre Wirkungsrichtung ändert, lokalisiert sich dort die Lage des neutralen Punktes.

Ein Vergleich normierter Kontaktspannungen in Abbildung 7.34 zeigt, dass mit größer werdendem Reibwert sich die Lage des neutralen Punktes vom Ende der Voreilzone hin zum Halbwalzpunkt der Kontaktfläche verschiebt.

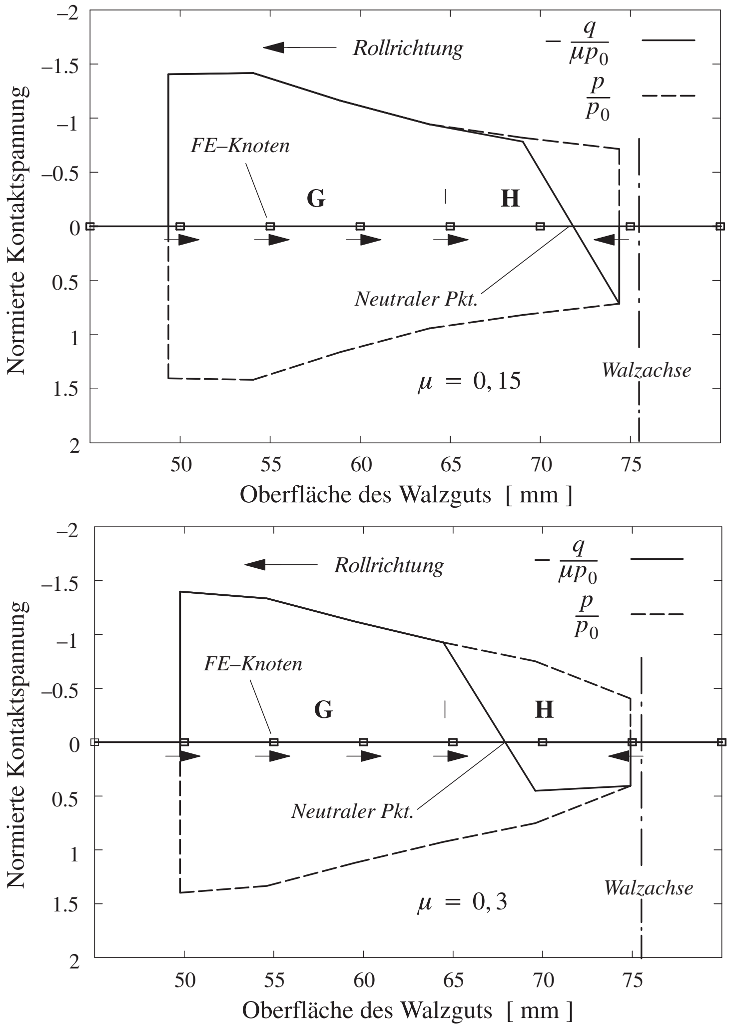


Abb. 7.34: Lage des neutralen Punktes bei $14,1^0$ Walzrotation in Abängigkeit des Reibwert μ

In die normierten Kontaktspannungsverteilungen sind die Haft- und Gleitbereiche, die Stellung der Walzachse und die Oberflächendiskretisierung der Anstellposition ebenfalls eingezeichnet. Die Normierung erfolgt dabei bzgl. der maximalen Rollpressung in der Anstellposition von $p_{o,0.15} = 2751,2\,N/mm^2$ bzw. $p_{o,0.3} = 2816,4\,N/mm^2$.

Die Materialbeanspruchung im Walzgut unter einer von-Mises-Fließbedingung mit isotroper Verfestigung ist in Abbildung 7.35 für einen Walzvorgang mit $\mu = 0,15$ dargestellt. Diese Darstellungen sollen ein Gesamtbild des numerischen Walzvorgangs vermitteln. Die Plastizierungsbereiche in den Walzschritten $2,1\,^o$ und $6,1\,^o$ charakterisieren den Bereich plastischer Verformungen im Walzprozess, der weit vor dem eigentlichen Walzenkontakt beginnt und mit Erreichen der Walzachse endet. Das Material entlastet dabei kurz vor der Stellung der Walzachse in der Walzoberfläche. In den verbleibenden Darstellungen wird der Plastizierungszustand bereits von den gewählten Auflagerbedingungen des Walzguts beeinflusst.

Abbildungen 7.36 zeigt den Einfluss der Reibung auf die Verteilung der Spannungskomponenten an der Oberfläche des Walzguts im Walzschritt $14,1\,^o$. Das Oberflächenmaterial wird einem dreidimensionalen Normalspannungszustand unterworfen, der vor und nach dem Walzkontakt aus Zug-, im Walzkontakt aus Druckspannungskomponenten besteht. Vor und hinter der Walzkontaktfläche $A_{c\mu}$ wird die Oberfläche des Stahlbands durch Zugspannungen beansprucht. In der unmittelbaren Umgebung des Erstkontakts mit der starren Walze zeigt sich ein Vorzeichenwechsel in allen Normalspanuungskomponenten, mit einem steilen Spanunngsgradienten. Der neutrale Punkt verlagert sich vom Ende der Kontaktlinie im reibungsfreien Fall mit steigendem Reibwert immer weiter in die Kontaktfläche, wie die Schubspannungsverteilungen τ_{xy} zeigen.

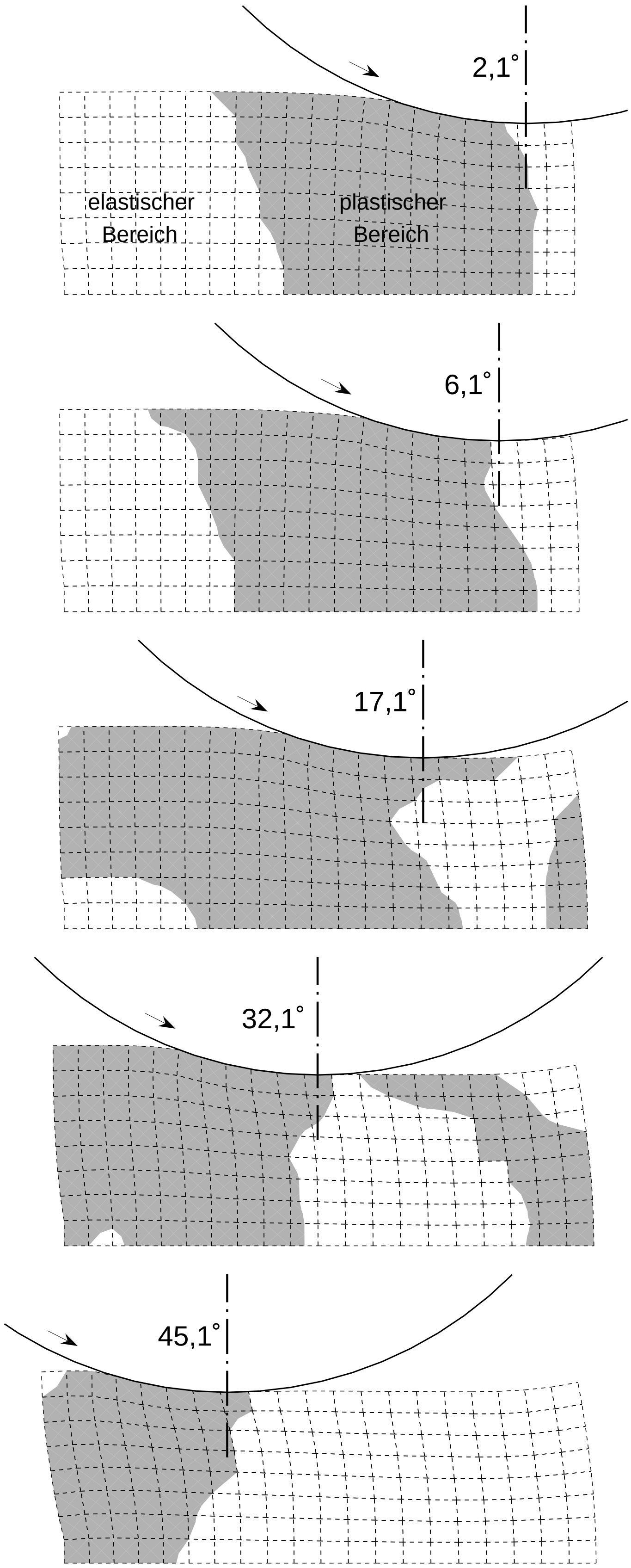


Abb. 7.35: Plastische Materialzonen im Walzgut unter fortschreitender Walzenrotation

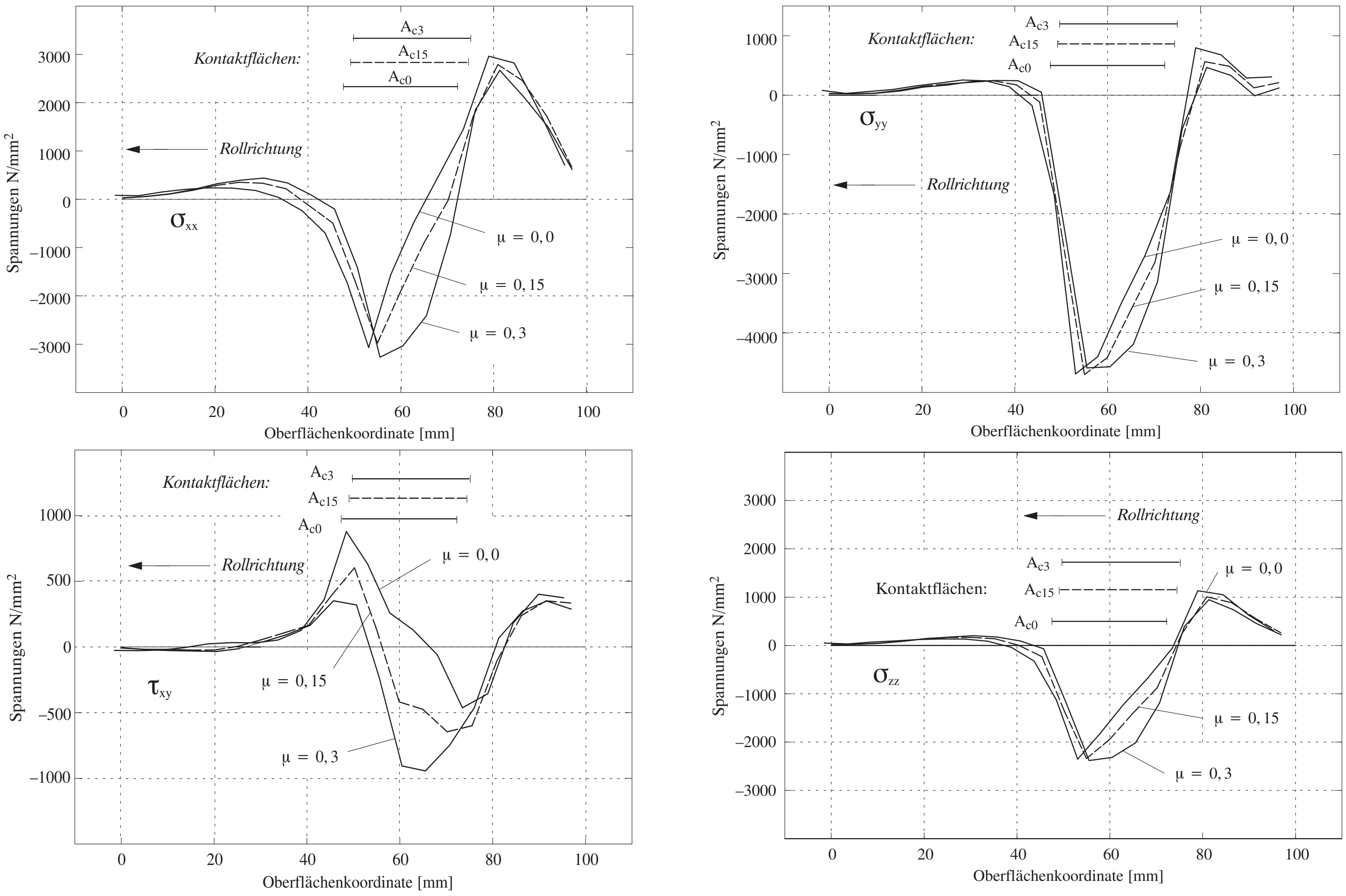


Abb. 7.36: Einfluss der Reibung auf die Spannungsverteilung entlang der Oberfläche des Walzguts nach einer Walzenrotation von $14,1^o$

7.4.3 Stabwalzen

Zum Vergleich der Simulation des Stahlbandwalzens wird ein Aluminiumstab mit einer Länge von $l = 30\ mm$ und einer Anfangshöhe von $h_0 = 10\ mm$ durch zwei Walzen mit einem Radius von $R = 40\ mm$ gewalzt. Dabei wird der Einfluss der Dickenreduzierungen von $r = 10, 20, 30\ \%$ auf die Kontaktspannungsverteilung untersucht. Abbildung 7.30 zeigt das Strukturmodell zur Simulation des Stabwalzens unter Ausnutzung der Symmetriebedingungen mit den verwendeten Materialparametern.

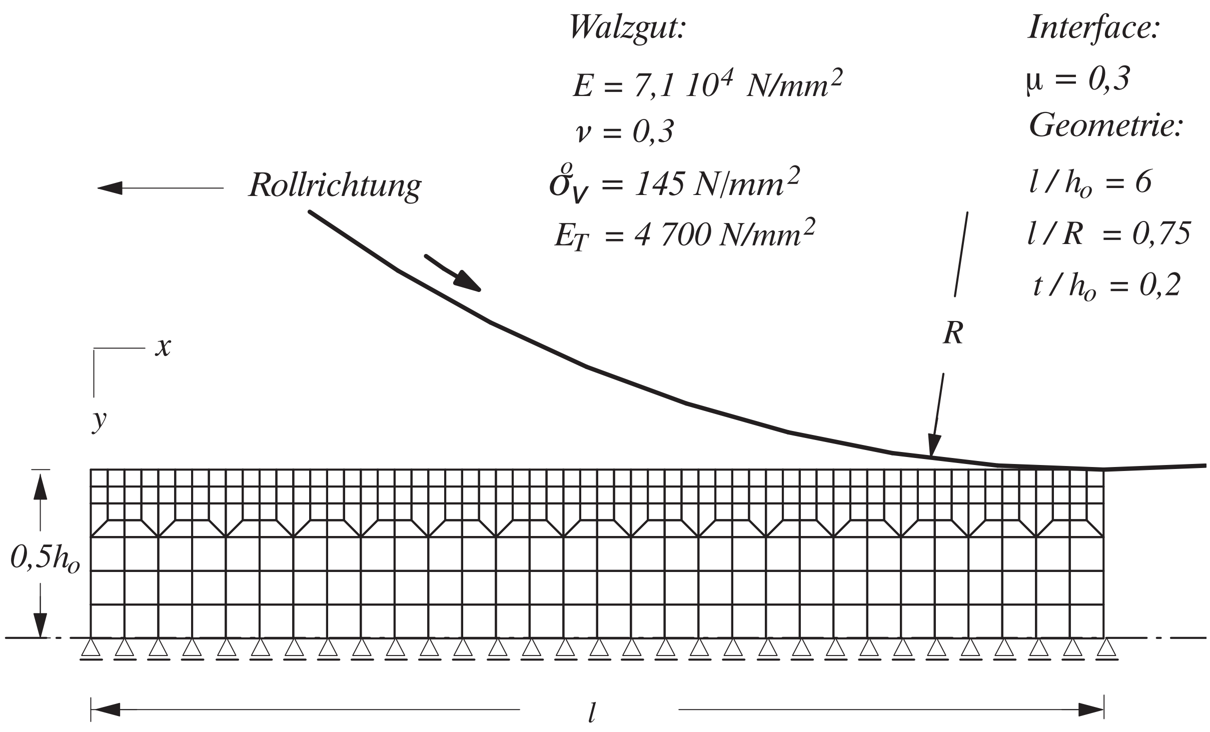


Abb. 7.37: Strukturmodell und Materialparameter für die Stabwalzsimulation

Die Diskretisierung des Walzguts erfolgt mit 300 4-Knoten-Scheibenelementen, wobei eine Netzverfeinerung an der potentiellen Kontaktfläche vorgenommen wurde. Das Coulomb'sche Reibungsgesetz in der Kontaktzone, ein ebener Spannungszustand für den Stabwalzprozess sowie eine von-Mises-Fießbedingung mit isotroper Verfestigung idealisieren das Materialverhalten.

7.4.4 Numerische Ergebnisse

Abbildung 7.38 zeigt die elasto-plastische Materialbeanspruchung während des Walzvorgangs bei einer Dickenreduktion von $r = 30\ \%$

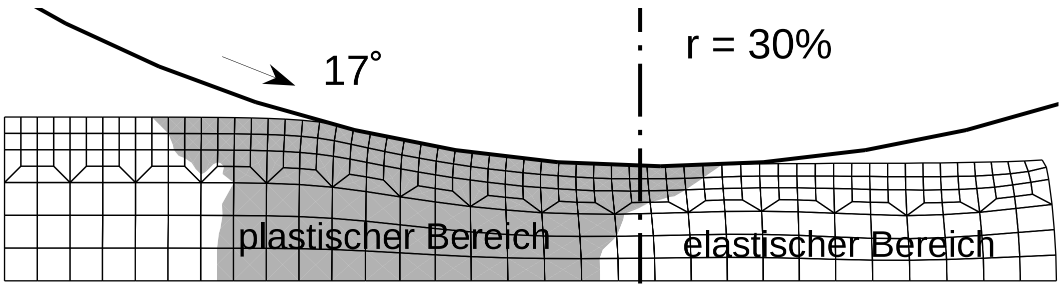


Abb. 7.38: Typisches Bild der Plastizierung des Walzguts in der Walzsimulation. Hier nach einer Starrkörperrotation der Walze von 17°, einer Dickenreduktion von $r = 30\,\%$ und einem Reibwert von $\mu = 0,3$

Mit abnehmender Dickenreduzierung $r = 30 \rightarrow 10\,\%$ bleibt die Form des plastischen Bereiches im Großen und Ganzen erhalten, nur ihr Ausdehnungsbereich verkleinert sich. Ein Vergleich mit Abbildung 7.35 zeigt, dass die plastische Materialbeanspruchung beim Stabwalzen in der Voreilzone nicht an der Achsenstellung der Walze endet. Sie verläuft von der Symmetrieachse zur Oberfläche des Walzguts nicht senkrecht, sondern schräg in Walzrichtung. In Rollrichtung hingegen zieht sich die Plastizierung von der Nacheilzone nicht mehr so weit in das noch zu walzende Walzgut, wie dies beim Bandwalzen in Abbildung 7.35 bei $6,1^{o}$ in Erscheinung tritt.

Die über eine Lumped-Transformation berechneten Kontaktspannungsverteilungen sind für unterschiedliche Dickenreduzierungen in Abbildung 7.39 für die Normal- und die Tangentialkontaktkräfte dargestellt. In der Darstellung wurden die Kontaktspannungen auf die Anfangsfließspannung $\mathring{\sigma}_{\mathrm{v}}$ normiert und die Kontaktfläche bzgl. der Achsenstellung der Walze ausgerichtet. Mit zunehmender Dickenreduzierung vergrößert sich wie zu erwarten

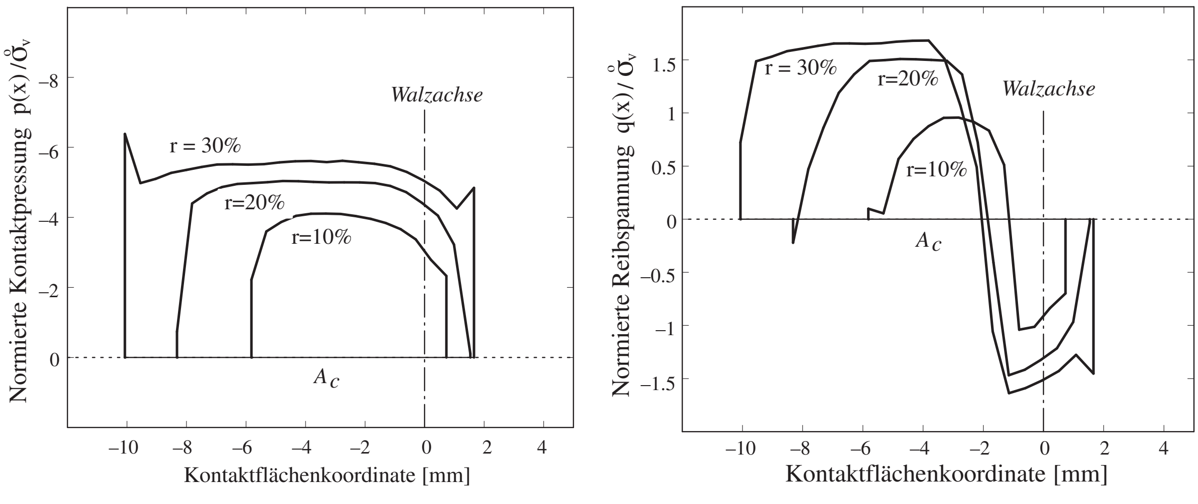


Abb. 7.39: Verteilung der Kontaktspannungen bei einer Dickenreduktion von $r = 10, 20, 30\ \%$ mit Reibung $\mu = 0,3$

die Rollkontaktfläche sowie die zur Dickenreduzierung erforderliche Rollenpressung $p(x)$. Sie zeigt infolge des inelastischen Materialverhaltens weder einen Peening-Effect, noch einen Friction-Hill, wie dies bei Walzen von Stahlbändern und Stäben beobachtet wird, *Mac Gregor/Palme* [78]. Die Form der Verteilung entspricht tendenziell den Versuchsergebnissen von *Mac Gregor/Palme*, die beim Walzen quadratischer Aluminiumstäbe nur leicht erhöhte Werte am Ein- und Austrittsbereich der Kontaktzone aus den Versuchsdaten errechneten. Je größer die Dickenreduzierung, desto ausgeprägter erscheint die Kontaktpressung in Form einer Rechteckverteilung. Auch hier sind die Spitzen an den Rändern der Kontaktpressung bei $r = 30\,\%$ eine Folge der FE-Diskretisierung der Kontaktzone. Sie sind das Ergebnis des numerischen Rechenverfahrens und zeigen die Unstetigkeit, mit der sich die Kontaktfläche ändert, an. Die Verteilung der Reibspannungen $q(x)$ in Abbildung 7.39 zeigt, dass bei zunehmender Dickenreduzierung der neutrale Punkt sich zum Mittelpunkt der Kontaktfläche hin verlagert. Die Verteilung der Haft- und Gleitbereiche ist in Abbildung 7.40 aufgezeichnet.

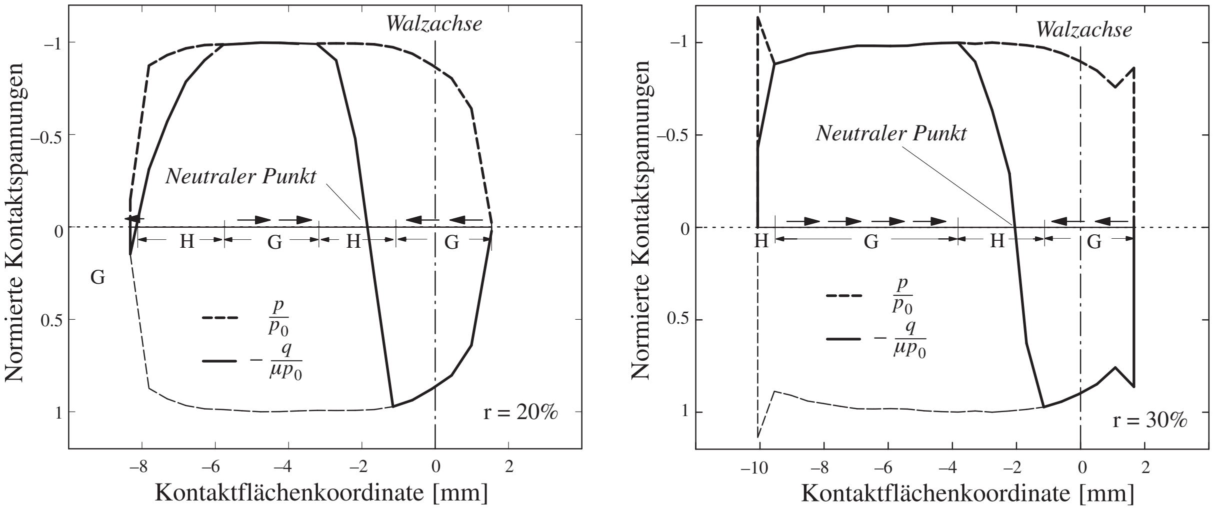


Abb. 7.40: Verteilung der Haft- und Gleitzonen bei unterschiedlicher Dickenreduktion

Die Kontaktspannungen wurden auf den Wert von $p_o = 730\ N/mm^2$ bzw. $p_o = 814\ N/mm^2$ normiert. Zur Kennzeichnung der Haft- und Gleitzonen wurde die Reibspannung auf die μ-fache maximale Rollpressung normiert. Wie die Ordinaten der Kontaktspannungen am Anfangs- und Endknoten der Kontaktzone ist auch das Auftreten von Haft- und Gleitbereichen am Rand der Kontaktzone stark vom aktuellen Inkrementschritt abhängig. In Abbildung 7.40 liegt die Walzachse in einer Gleitzone der Voreilzone, an die sich ein Haftbereich anschließt. Der Gleitbereich davor beschreibt die Länge der Nacheilzone. Ihre Größe wird durch die Dickenreduzierung und den aktuellen Inkrementschritt beeinflusst.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In den vorangestellten Kapiteln wurde über die Darstellung tribologischer Erkenntnisse und einer kontinuumsmechanischen Betrachtung des Festkörperkontakts ein zweidimensionaler Rollkontaktalgorithmus entwickelt. Mit der Implementierung in ein lehrstuhleigenes Finite-Elemente-Programm wurde die Analyse von unilateralen, reibbehafteten stationären Eindrück- und Rollkontaktproblemstellungen ermöglicht.

Grundlage der Formulierung einer Näherungslösung für den nichtlinearen Rollkontakt zwischen einem starren zylindrischen Körper und einem elasto-plastisch deformierbaren Kontinuum bildete dabei das Prinzip der virtuellen Arbeit. Aufgrund des dissipativen Charakters von plastischer Deformation und Reibung wurde ein inkrementell-iteratives Lösungsverfahren über die Linearisierung der virtuellen Arbeit auf der Referenzkonfiguration entwickelt. Dabei führt die Linearisierung der virtuellen Arbeit der Kontaktkräfte auf einen Interface-Materialtensor, der auf natürliche Weise eine Algebraisierung der Kontaktbedingungen in Analogie des Penaltyverfahrens einschließt.

Die Kontaktkinematik des Eindringverbots wurde dabei nicht wie in zahlreichen anderen Kontaktmodellen auf einer Normalenprojektion durchgeführt, sondern wurde an die Bewegungsrichtungen des Starrkörpers gekoppelt. Auf der Basis des Penaltyverfahrens wurde die Kontaktkinematik mit einem Node-to-Arc-Algorithmus umgesetzt.

Die Haft- und Gleitbedingungen in der Kontaktfläche wurden über ein Coulomb'sches Gleitkriterium beschrieben. Diese einfache Form der Idealisierung trockener Festkörperreibung lässt sich nur durch ein sehr rechenintensives Reibmodell numerisch umsetzten, wobei sich der auf der makroskopischen Ebene ermittelte Reibbeiwert stets als Mittelwert der mannigfaltigen tribophysikalischen und tribochemischen Einflussfaktoren darstellt. Obwohl eine eindeutige Parametrisierung des Reibkontakts derzeit noch nicht möglich ist, siehe *Krim* [67], lässt sich der Reibbeiwert mit verschiedenen mikro- und makroskopischen Kenngrößen der Kontaktoberflächen identifizieren und berechnen. Die Berücksichtigung eines von der Kontaktpressung abhängigen Reibwerts im Rollkontaktalgorithmus führte zu einem nicht konvergierenden Iterationsverfahren.

Der iterative Rollkontaktalgorithmus, der zur Erfüllung der unilateralen Kontaktbedingungen entwickelt wurde, basiert auf der Active-Set-Strategie. Der Algorithmus wurde für lineare und quadratische Elementranddiskretisierungen programmiert und getestet. Die Verwendung strukturabhängiger Penaltyfaktoren (*Wriggers/Nour-Omid* [118]) der in der globalen Systemsteifigkeitsmatrix zur Erfüllung geometrischen Kontaktbedingungen resultierte in einem nicht konvergierenden Iterationsverfahren. Konvergenz konnte nur mit konstanten Penaltyfaktoren erzielt werden. Auf der Suche nach einem globalen Gleichgewichtszustand erwies sich eine nichtlineare Inkrementierung der Kontaktknotenkräfte an Gleit- bzw. Zugkontaktknoten als sehr vorteilhaft.

Gute Erfolge wurden des Weiteren mit einer Beschränkung der Anzahl von zu lösenden und von neu hinzuzufügenden Kontaktknoten während der Kontaktiterationen erzielt. Auf der Suche nach der Kontaktfläche wurden Zugkontaktknoten immer nur einzeln aus dem Aktive Set entfernt bzw. maximal drei neue Penetrationsknoten in das jeweilige Aktive Set aufgenommen. Eine Restriktion bzgl. der Anzahl aktiver Gleitkontaktknoten war zum Erreichen der Konvergenz nicht erforderlich. Entscheidenden Einfluss auf das Konvergenzverhalten hatten auch die Toleranzschranken der geometrischen und physikalischen Kontaktbedingungen. Sehr kleine Toleranzschranken resultierten in einem oszillierenden Arbeitsbereich für das Aktive Set. Waren die Toleranzschranken über eine numerische Kontaktberechnung einmal kalibriert, konnten sie für alle weiteren numerischen Studien ohne Neuanpasssung verwendet werden.

Die Berechnung der Kontaktspannungsverteilung aus den Kontaktknotenkräften erfolgte mit Hilfe einer Kontaktflächenmatrix. Zur Berechnung der Kontaktflächenmatrix wurde die Diagonalisierungstechnik verwendet, da diese im Fall linearer Elementranddiskretisierung immer physikalisch sinnvolle Ergebnisse lieferte und hinsichtlich des Rechenaufwands sehr effektiv arbeitete. Bei quadratischer Kontaktranddiskretisierung lieferte die Methode der Kontaktflächentransformation, unabhängig vom Integrationsverfahren, physikalisch unsinnige Kontaktspannungsverteilungen, wenn nicht zusätzlich ein Glättungsalgorithmus verwendet wird.

Die Qualität der Kontaktspannungsverteilung steigt bei diesem Berechnungsverfahren mit zunehmender Knotendichte am Kontaktrand. Die damit verbundene höhere Netzdichte steigert dabei aber den Rechenaufwand in zunehmend unwirtschaftliche Höhen, wie der bereits bei eher grober Netzdichte benötigte Rechenaufwand der Simulation des reibbehafteten Stabwalzens zeigt. Für die Berechnung einer Rotationsbewegung von $0,1^o$ wurden im Durchschnitt 22 CPU-Minuten auf einer HP9000 K460EG mit einer PA8000 CPU benötigt.

Für eine Weiterführung der Studien ist eine Modellierung der Rolle als deformierbarer Körper sinnvoll, da Verformungen der Kontaktoberflächen auf die Kontaktspannungsverteilung im Allgemeinen nicht zu vernachlässigen ist. Aus experimentellen Studien ist bekannt, dass Glättung und Ebenmachen der Rollenoberfläche zu geometrischen Rollenimperfektionen führen, die eine Zunahme in den Kontaktpressungen verursachen können.

Trotz der experimentellen Studien zur Normalen-Annäherung und zur Anfangsverschiebung bei Festkörperkontakten fehlen bis heute Aussagen über die Übertragbarkeit der auf Mikroebene entwickelten Beziehungen und Kenngrößen auf kontinuumsmechanische Modelle trockener Reibkontakte. Hier sollten lokale Kontaktstudien mit dem Ziel durchgeführt werden, Reibgesetze zu entwickeln, die aus den tribologischen Erkenntnissen im Mikrobereich zu praktikablen Kontaktgesetzen im Makrobereich führen.

Sinnvoll erscheint auch die Entwicklung von globalen und lokalen Fehlerindikatoren für Kontaktprobleme, die Fehler in der Erfüllung der Kontaktbedingungen beurteilen und darüber den Einsatz adaptiver Finite-Elemente-Verfahren ermöglichen, siehe *Wriggers* [117]. Die Entwicklung effizienter Lösungsalgorithmen auf der Basis einer h-, p- oder hp-Version stellt weitere Anforderungen an den Kontaktalgorithmus. So sind bei Anwendung der h-Version nach einem Iterationsschritt geometrische und dynamische Kontaktzustände der letzten Gleichgewichtskonfiguration auf die neue Randdiskretisierung zu überführen. Mit dem Ansatz einer hp-Gebietszerlegung wird sich die Qualität der Berechnungsergebnisse verbessern lassen. Im Besonderen sollte der Netzgenerator bei Anwendung einer p- bzw. ph-Adaptivität die direkten Kontaktflächenelemente explizit ausschließen, da lineare Ansatzfunktionen die geometrischen und physikalischen Kontaktbedingungen ausreichend gut erfassen. Soll die p-Version auch auf die Diskretisierung der potentiellen Kontaktfläche Anwendung finden, kann dies zu physikalisch unbrauchbaren Ergebnissen führen ohne einen zusätzlichen Glättungsalgorithmus für die Kontaktspannungsberechnung in den Berechnungsalgorithmus zu integrieren.

Literaturverzeichnis

[1] Aliabadi, M.H.; Brebbia, C.A.: *Computational Methods in Contact Mechanics.* London, New York: Elsevier Applied Science, 1991.

[2] Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Stuttgart: B.G. Teubner, 1994.

[3] Asbeck, H.-O.; Heyder, M.: *Eigen- und Richtspannungen in walzneuen Schienen.* Eisenbahntechnische Rundschau 26 (1977), S. 217–222.

[4] Atala, H.F.; Rowe, F.W.: *Surface roughness changes during rolling.* Wear 32 (1975), S. 249–268.

[5] Back, N.; Burdekon, M.; Cowley, A.: *Review of the researach on fixed and sliding joints.* Advances in Mach. Tool Design and Research (1973), S. 87–97.

[6] Bathe, K.-J.; Chaudhary, A: *A solution method for planar and axisymmetric contact problems.* Int. J. Num. Meth. Eng. 21 (1985), S. 65–88.

[7] Bathe, K.J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis.* New York: Springer-Verlag, 1997.

[8] Becker, E.; Bürger, W.: *Kontinuumsmechanik.* Stuttgart: B.G. Teubner, 1975.

[9] Bentall, R.H.; Johnson, K.L.: *Slip in the rolling contact of two dissimilar elastic rollers.* Int. J. Mech. Sci. 9 (1967), S. 389–404.

[10] Bhargava, V.; Hahn, G.T.; Rubin, C.A.: *An elastic-plastic finite element model of rolling contact Part 1: Analysis of single contacts, Part 2: Analysis of repeated contacts.* J. Appl. Mech. 52 (1985), S. 67–82.

[11] Bhushan, B.: *Contact mechanics of rough surfaces in tribology: Single asperity contact.* Appl. Mech. Rev. 49 (1996), S. 275–290.

[12] Brünig, M.: *Ein Finite-Element-Modell zur numerischen Simulation des Rollenrichtens von schweren Schienen.* Diss. Mitteilung Nr. 89-5, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1989.

[13] Campos, L.T.; Oden, J.T.; Kikuchi, N.: *A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastostatics.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 34 (1982), S. 821–845.

[14] Carter, F.W.: *On the action of a locomotive driving wheel.* Proc. R. Soc. London A 122 (1926), S. 151–157.

[15] Chandra, A.: *Simulation of rolling processes by the boundary element method.* Comput. Mech. 4 (1989), S. 443–451.

[16] Chandrasekaran, N.; Haisler, W.E.; Goforth, R.E.: *A finite element solution method for contact problems with friction.* Int. J. Num. Meth. Eng. 24 (1987), S. 477–495.

[17] Chen, W.F.; Han, D.J.: *Plasticity for Strutural Engineers.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1988.

[18] Cheng, J.-H.; Kikuchi, N.: *An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 49 (1984), S. 71–108.

[19] Courtney-Pratt, J.S.; Eisner, E.: *The effect of a tangential force on the contact of metallic bodies.* Proc. R. Soc. London A 238 (1957), S. 529–550.

[20] Curnier, A.: *A theory of friction.* Int. J. Solids and Struct. 20 (1984) 7, S. 637–647.

[21] Czichos, H.: *Tribology - a systems approach to the science and technology of friction, lubrication and wear. Tribology Series 1.* Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Press, 1978.

[22] Dahl, W.; Kopp, R.; Pawelski, O.: *Umformtechnik, Plastomechanik und Werkstoffkunde.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1993.

[23] de Boer, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.

[24] Dumas, G.; Baronet, C.N.: *Elastoplastic identation of a half-space by an infinitely long rigid circular cylinder.* Int. J. Mech. Sci. 49 (1985), S. 71–108.

[25] Duvaut, G.; Lions, J.L.: *Inequalities in Mechanics and Physics.* Berlin: Springer-Verlag, 1976.

[26] Eldrege, K.R.; Tabor, D.: *The mechanics of rolling friction I. The plastic range.* Proc. R. Soc. Lond. A 229 (1955), S. 181–197.

[27] Eterovic, A.L.; Bathe, K.-J.: *An Interface Interpolation Scheme for Quadratic Convergence in the Finite Element Aanalysis of Contact Problems.* Nonlinear Computational Mechanics. State of the Art. S. 705–713. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1991.

[28] Felippa, C.A.: *Error analysis of penalty function techniques for constraint definition in linear algebraic systems.* Int. J. Num. Meth. Eng. 11 (1977), S. 709–728.

[29] Felippa, C.A.: *Iterative procedures for improving penalty function solutions of algebraic systems.* Int. J. Num. Meth. Eng. 12 (1978), S. 821–836.

[30] Follansbee, P.S.; Sinclair, G.B.: *Quasi-static normal indentation of an elastic-plastic halfspace by a rigid sphere.* Computers & Structures 20 (1984), S. 81.

[31] Fredriksson, B.: *Finite element solution of surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems.* Computers & Structures 6 (1976), S. 281–290.

[32] Ghabrial, S.L.; Zaghlool, S.A.: *The effect of surface roughness on static friction.* Int. J. Mach. Tool Des. Res. 14 (1974) 4, S. 299–309.

[33] Giannakopoulos, A.E.: *The return mapping method for the integration of friction constitutive relations.* Computers & Structures 32 (1989) 1, S. 157–167.

[34] GIESEKUS, H.: *Phänomenologische Rheologie.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1994.

[35] GLÄSER, H.: *New constitutive equations for the contact of deformable bodies with friction.* Acta Mech. 95 (1992), S. 103–116.

[36] GREENWOOD, J.A.: *The area of contact between rough surfaces and flats.* J. Lub. Technol. (1967), S. 81–91.

[37] HARDY, C.; BARONET, C.N.; TORDION, G.V.: *The elasto-plastic indentation of a half-space by rigid sphere.* Int. J. Num. Meth. Eng. 3 (1971), S. 451–462.

[38] HAYS, D.F.: *Researach in Mechanical Systems: Tribology.* ASME J. Tribol. 106 (1984), S. 14–23.

[39] HEARLE, A.D.; JOHNSON, K.L.: *Cumulative plastic flow in rolling and sliding line contact.* J. Appl. Mech. 54 (1987), S. 1–7.

[40] HELLER, W.; SCHWEITZER, R.: *Messungen der Verformungen einer Schiene während des Rollenrichtens.* Untersuchungsbericht NR. 41 120-FPT-P, KRUPP Stahl AG, Werk Rheinhausen, Qualitätswesen und Forschung, 1988.

[41] HELLER, W.; SCHWEITZER, R.: *Verschiebungen der Richtrollenachsen in der Rollenrichtmaschine während des Richtens von Schienen.* Untersuchungsbericht NR. 41 382-FPT-P, KRUPP Stahl AG, Werk Rheinhausen, Qualitätswesen und Forschung, 1988.

[42] HELLER, W.; SCHWEITZER, R.; BLANKE, H.: *Begleitende Untersuchungen zur Modellrechnung über die Entstehung von Eigenspannungen in Schienen während des Rollenrichtens.* Untersuchungsbericht NR. 40 384-Q-V, KRUPP Stahl AG, Werk Rheinhausen, Qualitätswesen und Forschung, 1985.

[43] HERTZ, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper.* J. Ang. Math. 92 (1882), S. 156–171.

[44] HIMMELBLAU, D.M.: *Applied nonlinear programming.* New York: McGraw-Hill, Inc., 1972.

[45] HUGHES, T.J.R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.* New Jersey: Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1987.

[46] HUGHES, T.J.R.; PISTER, K.S.: *Consistent linearization in mechanics of solids and structures.* Computers & Structures 8 (1978), S. 391–397.

[47] HUGHES, T.J.R.; TAYLOR, R.L.; SACKMAN, J.L.: *Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continuum Mechanics.* Report No. UCB/SESM-74/0, University of California, Berkeley, 1974.

[48] JACOBY, S.L.S.; KOWALIK, J.S.; PIZZO, J.T.: *Iterative methods for nonlinear optimization problems.* New York: Prentice Hall, Inc., 1972.

[49] JOHNSON, K.L.: *Rolling resistance of a rigid cylinder on an elastic-plastic surface.* Int. J. Mech. Sci. 14 (1972) 4, S. 145–148.

[50] JOHNSON, K.L.: *Contact Mechanics.* London, New York: Cambridge University Press, 1985.

[51] JOHNSON, K.L.: *The strength of surface in rolling contact.* Proc. Instn. Mech. Engrs. Part C: J. Mech. Eng. Sci. 203 (1989), S. 151–163.

[52] Ju, J.-W.; Taylor, R.L.: *A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Nonlinear Frictional Contact Problems.* Journal de Mécanique théorique et applique, Journal of theoretical and applied mechanics, Special issue, Supplement no. 1 to 7 (1988), S. 1–14.

[53] Kalker, J.J.: *A minimum principle for the law of dry friction with application to elastic cylinders in rolling contact Part 1: Fundamentals - Application to steady rolling, Part 2: Application to nonsteadily rolling elastic cylinders.* J. Appl. Mech. (1971), S. 875–887.

[54] Kalker, J.J.: *A survey of the mechanics of contact between solid bodies.* ZAMM 57 (1977): T3–T17.

[55] Kalker, J.J.: *Review of wheel-rail rolling contact theories.* In: The General Problem of Rolling Contact, AMD 40 (1979), S. 77–92.

[56] Kalker, J.J.: *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact.* Dordrecht, Bosten, London: Kluwer Academic, 1990.

[57] Kikuchi, N.: *A penalty finite element approximation of a class of unilateral contact problems. In: J.N. Reddy, ed., Penalty Methods in Finite Element Methods.* Acta Mech. 33 (1981), S. 865–877.

[58] Kikuchi, N.: *A smoothing technique for reduced integration penalty methods in contact problems.* Int. J. Num. Meth. Eng. 18 (1982), S. 343–350.

[59] Kikuchi, N.; J.T., Oden: *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods.* SIAM, Philadelphia, 1988.

[60] Kikuchi, N.; Skalski: *An elastio-plastic rigid punch problem using variational inequalities.* ASME (1982).

[61] Klarbring, A.: *Derivation and analysis of rate boundary-value problems of frictional contact.* Eur. J. Mech., A/Solids 9 (1990) 1, S. 53–85.

[62] Klarbring, A.; Mikelić, A.; Shillor, M.: *Friction contact problems with normal compliance.* Int. J. Engng. Sci. 26 (1988) 8, S. 811–832.

[63] Knothe, K.; Wang, G.: *Zur Theorie der Rollreibung zylindrischer Kunststofflaufräder.* Konstruktion (1989), S. 193–200.

[64] Kosinski, W.: *Field Singularities and Wave Analysis in Continuum Mechanics.* New York: John Wiley & Sons, 1986.

[65] Kragelski, I.V.: *Reibung und Verschleiss.* Berlin: VEB Verlag Technik, 1971.

[66] Kragelski, I.V.; Dobyčin, M.N.; Kombalov, V.S.: *Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiß.* München, Wien: Carl Hanser Verlag, 1987.

[67] Krim, J.: *Reibung auf atomarer Ebene.* Spektrum der Wissenschaft 12 (1996), S. 80–85.

[68] Landers, J.A.; Taylor, R.L.: *An augemented lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems.* Report No. UCB/SESM-85/09, University of California, Berkeley, 1985.

[69] Laursen, T.A.; Simo, J.C.: *A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 36 (1993), S. 3451–3485.

[70] Lee, C.H.: *Elastoplastic analysis of plain-strain and axisymmetric flat punch indentation by the finite-element method.* Int. J. Mech. Sci. 12 (1970), S. 349–370.

[71] Lee, E.H.: *Elastic-plastic deformation at the finite strains.* J. Appl. Mech. (1969), S. 1–6.

[72] Lehmann, T.: *Some remarks on the decomposition of deformations and mechanical work.* Int. J. Engng. Sci. 20 (1982), S. 281–288.

[73] Li, G.-J.; Kobyashi, S.: *Rigid-plastic finite-element analysis of plane strain rolling.* J. Eng. Ind. 104 (1982), S. 55–64.

[74] Liu, C.; Paul, B.: *Rolling contact with friction and non-hertzian pressure distribution.* J. Appl. Mech. 56 (1989), S. 814–820.

[75] Liu, Q.; Orisamolu, R.I.; Chernika, M.W.: *Consistent finite element discretization of distributed random loads.* Computers & Structures 51 No. 1 (1991), S. 39–45.

[76] Luenberger, D.G.: *Optimization by vector space methods.* New York: John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[77] Luenberger, D.G.: *Introduction to linear and nonlinear programming.* Massachusetts: Addison Wesley, Reading, 1984.

[78] MacGregor, C.W.; Palme, R.B.: *The distribution of contact pressures in the rolling of metals.* J. Basic Eng. (1959), S. 669–680.

[79] Malinowski, Z.; Lenard, J.G.: *Experimental substantiation of an elastoplastic finite element scheme for flat rolling.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 104 (1993), S. 1–17.

[80] Meier, H.: *Eigenspannungen in Eisenbahnschienen.* Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 91 (1936), S. 320–329.

[81] Merwin, J.E.; Johnson, K.L.: *An analysis of plastic deformation in rolling contact.* Proc. Instn. Mech. Engrs. 24 (1982) 9, S. 676.

[82] Michalowski, R.; Mróz, Z.: *Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems.* Arch. Mech. 30 (1978), S. 259–276.

[83] Moreau, J.J.: *On Unilateral Constraints, Friction and Plasticity. In: New Variational Techniques in Mathematical Physics.* C.I.M.E. Ediizioni Cremonese, Roma, 1974.

[84] Mori, K.; Osakada, K.; Oda, T.: *Simulation of plane-strain rolling by the rigid-plastic finite element method.* Int. J. Mech. Sci. 24 (1982) 9, S. 519–527.

[85] Neale, M.J.: *Tribology Handbook.* London: Butterworths, 1973.

[86] Nuri, K.A.; Halling, J.: *The Normal Approach between Rough Flat Surfaces in Contact.* Wear 32 (1975), S. 81–93.

[87] Oden, J.T.; Kikuchi, N.: *Finite Element Methods for Constrained Problems in Elasticity.* 18 (1982), S. 701–725.

[88] Oden, J.T.; Lin, T.L.: *On the general rolling contact problem for finite deformation of a viscoelastic cylinder.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 57 (1986), S. 297–367.

[89] Ogden, R.W.: *Non-linear elastic deformations.* Ellis Horwood Limited, 1984.

[90] Ortiz, M.; Popov, E.P.: *Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations.* Int. J. Num. Meth. Eng. 21 (1985), S. 1561–1576.

[91] Polzer, G.; Meissner, F.: *Grundlagen zur Reibung und Verschleiß.* Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1978.

[92] Prager, W.: *A new method of analyzing stress and strains in work-hardening solids.* 23 (1956), S. 493–496.

[93] Qin, Q.H.; He, X.Q.: *Variational principles, FE and MPT for analysis of non-linaer impact-contact problems.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 122 (1995), S. 205–222.

[94] Rabinowicz, E.: *Friction and Wear of Materials.* New York, London, Syndey: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

[95] Reddy, J.N.: *Penalty-Finite Element Methods in Mechanics.* Phoenix Arizona The American Society of Mechanical Engineers, 1982.

[96] Riemer, M.; Wauer, J.; Wedig, W.: *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik.* Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 1993.

[97] Rónda, J.; Bogacz, R.; Brzozowski, M.: *Infinitesimal and large strain in rolling contact problems.* Ing.-Arch. 56 (1986), S. 241–253.

[98] Schade, J.: *Eigen- und Schweißspannungen in Eisenbahnschienen.* Diss. Aachen, 1939.

[99] Schittkowski, K.: *Nonlinear Programming Codes.* Berlin Lecture Notes Econ. Math. Systems, 1980.

[100] Schleeh, W.: *Ein einfaches Verfahren zur Lösung von Scheibenaufgaben.* Beton- und Stahlbetonbau 3 (1964), S. 49–119.

[101] Schweitzer, R.; Flügge, J.; Heller, W.: *Einflüsse auf das Bruchverhalten von Schienen.* Stahl und Eisen, 1985.

[102] Simo, J.C.: *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I. Continuum formulation.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 66 (1988), S. 199–219.

[103] Simo, J.C.; R.L., Taylor: *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 48 (1985), S. 101–118.

[104] Symposium: *Numerical Methods in Mechanics of Contact Involving Friction.* Journal de Mécanique théorique et applique, Journal of theoretical and applied mechanics, Special issue, Supplement no. 1 to, 1988.

[105] Tabor, D.: *The mechanism of rolling friction II. The elastic range.* Proc. R. Soc. Lond. Series A. 229 (1955), S. 199–220.

[106] Tabor, D.: *Friction – The present state of our understanding.* J. Lub. Technol. 103 (1981), S. 169–179.

[107] Torstenfeld, B.R.: *Contact problems with friction in general purpose finite element computer programs.* Computers & Structures 16 (1983) 4, S. 487–493.

[108] Uppal, A.H.; Probert, S.D.: *Considerations govering the contact between a rough and flat surface.* Wear 22 (1972), S. 215–234.

[109] Uppal, A.H.; Probert, S.D.: *Mean separation and real contact between surfaces pressed together under high static loads.* Wear 23 (1973), S. 39–53.

[110] Uppal, A.H.; Probert, S.D.; Thomas, T.R.: *The real area of contact between a rough and a flat surface.* Wear 22 (1972), S. 163–183.

[111] Vajnberg, M.M.: *Variational methods for the study of nonlinear operators.* San Francisco, London: Holden-Day, 1964.

[112] Van, Vu T.: *Zur Behandlung von Stoßkontaktproblemen mit Reibung unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode.* Diss. Fachbereich Bauingenieur und Vermessungswesen der Universität Hanover, 1989.

[113] Voyiadjis, G.Z.; Poe, A.P.; Kiousis, P.D.: *Finite-strain, elastic-plastic solution for contact problems.* J. Eng. Mech. 112 (1986) 3, S. 273–292.

[114] Wang, G.; Knothe, K.: *Stress analysis for rolling contact between two viscoelastic cylinders.* J. Appl. Mech. 60 (1993): 310–317.

[115] Wendland, W.L.: *Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik.* ZAMM 18 Heft 2 (1995), S. 133.

[116] Woo, K.L.; Thomas, T.R.: *Contact of rough surfaces: A review of experimental work.* Wear 58 (1990), S. 331–340.

[117] Wriggers, P.: *Finite Element Algorithms for Contact Problems.* Arch. Comput. Meth. Eng. 2 (1995), S. 1–49.

[118] Wriggers, P.; Nour-Omid, B.: *Solution methods for contact problems.* University of California, Berkeley Report. No. UCB/SESM-84/09. (1984).

[119] Wunderlich, W.; Brünig, M.; Obrecht, H.: *Theoretisch-numerische Modellbildung und rechnerische Simulation zur Entstehung von Eigenspannungen beim Rollenrichten von Schienen.* Abschlußbericht zum Projekt 153 der Studiengesellschaft für Anwendungstechnik von Eisen und Stahl e.V., Düsseldorf, 1988.

[120] Wuttke, W.: *Tribophysik: Reibung und Verschleiß von Metallen.* München, Wien: Carl Hanser Verlag, 1987.

[121] Zhong, Z.-H.; Mackerle, J.: *Static Contact Problems - A Review.* Eng. Comput. 9 (1992), S. 3–37.

[122] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method, Vol. 1.* London: McGraw Hill, 1989.

[123] Zwirlein, O.; Schlicht, H.: *Werkstoffanstrengung bei Wälzbeanspruchung - Einfluß von Reibung und Eigenspannungen.* Z. Werkstofftech. 11 (1980), S. 1–14.