

FLOREN, Henrik
Paderborn

Wissen von (angehenden) Lehrkräften zum Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate

Die Tatsache, dass Konzepte der Differentialrechnung vielen Lernenden nicht nur in sekundären, sondern auch in tertiären Bildungsgängen Schwierigkeiten bereiten (Thompson & Harel, 2021), wird bereits seit mehreren Jahrzehnten untersucht. Insbesondere besteht dieses Problem im Hinblick auf die Ableitung als lokale Änderungsrate. Die lokale Änderungsrate wird oft entlang des Übergangs von der durchschnittlichen Änderungsrate motiviert. Ein Ansatzpunkt zur näheren Betrachtung des Problems betrifft den Mathematikunterricht und Mathematiklehrkräfte. In der fachdidaktischen Literatur werden die Ableitung und das Konzept lokale Änderungsrate beschrieben und Vorschläge zur Unterrichtsvorbereitung gegeben (z.B. Greefrath et al., 2016). Bisher kaum untersucht ist allerdings die systematische Darlegung normativer Aussagen über Wissensinhalte von Lehrkräften. In dem diesem Beitrag zugrundeliegenden Forschungsvorhaben soll daher das Wissen von (angehenden) Mathematiklehrkräften im Hinblick auf den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate untersucht und verglichen werden, wozu als erstes die systematische Erfassung von Wissensinhalten für Lehrkräfte vorgenommen wird.

Einleitung und theoretischer Rahmen

In der Schulmathematik lernen Jugendliche neue Konzepte oft, indem sie auf dem Vorwissen zu einem verwandten Konzept aufbauen. Dies gilt insbesondere für den Erwerb des Ableitungsbegriffs inkl. seiner Grundvorstellung 'lokale Änderungsrate' (Greefrath et al., 2016). Der Ableitungsbegriff wird oft ausgehend von der durchschnittlichen Änderungsrate motiviert, welcher die Jugendlichen in der Sekundarstufe I vor allem im Zusammenhang mit Geradensteigungen begegnen. Allerdings bereiten diese mathematischen Konzepte Lernenden häufig Schwierigkeiten, die sich auf unvollständiges oder fehlerhaftes Wissen bzgl. Variablen, Funktionen, Änderungsraten selbst (Teuscher & Reys, 2010) und Grenzwerten zurückführen lassen. Auch im deutschsprachigen Raum lässt sich bei angehenden Mathematiklehrkräften eine schwächere Berücksichtigung der Änderungsraten-Sichtweise auf die Ableitung vermuten. In der Studie von Greefrath et al. (2023) aktivieren Studierende bei den meisten der ihnen vorgelegten Problemstellungen eher die Vorstellung der Ableitung als Tangentensteigung als die der lokalen Änderungsrate.

In diesem Forschungsvorhaben wird von der Perspektive ausgegangen, dass

Lehrkräfte auf Grundlage ihres Professionswissens handeln. Dieses wird bereits seit mehreren Jahrzehnten mit unterschiedlichen Konzeptualisierungen beforscht. Gegenstandsspezifisch ist allerdings noch weitestgehend unklar, über welches Wissen Lehrkräfte im Zusammenhang mit dem Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate verfügen. Um dieses genauer einschätzen und zukünftig gezielt ausbauen zu können, sind empirische Studien notwendig. Um einen theoretischen Vergleichspunkt zu schaffen, wird zunächst die Frage 'Über welche Wissensinhalte sollten Lehrkräfte im Hinblick auf den Übergang von durchschnittlicher zu lokaler Änderungsrate verfügen können?' beantwortet.

Methode

Huget (2024) entwickelt in ihrer Dissertation die Methode der didaktisch orientierten Rekonstruktion zur Strukturierung eines mathematischen Inhalts, die zur systematischen Generierung von normativen Aussagen über Lehrkräftewissen eingesetzt werden kann. Die Methode ist im Hinblick auf den Übergang von durchschnittlicher zu lokaler Änderungsrate besonders geeignet, weil sie über die Herausstellung von themen- bzw. konzeptspezifischen Wissensinhalten hinaus auch den systematischen Vergleich zwischen mehreren Konzepten ermöglicht.

Um Wissen über einen Lerninhalt auf Lehrkräfteebene in kleinere Einheiten (Wissensbausteine) zu zerlegen, wird in einer ersten Phase ein mathematisches Konzept ausgehend vom mathematischen Kern im Hinblick auf seine Bezugssysteme, das benötigte Vorwissen, Repräsentation auf verschiedenen Darstellungsebenen, verbundene Grundvorstellungen und grundlegende didaktische Konzepte (v.a. fundamentale Ideen und prototypische Beispiele) untersucht. In einer zweiten Phase werden die Zerlegungen auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht sowie eine Zuteilung der Wissensbausteine zu verschiedenen Wissensarten vorgenommen.

Allerdings beinhaltet die didaktisch orientierte Rekonstruktion nach Huget (2024) lediglich unmittelbar an den Lerninhalt anknüpfende Überlegungen. Demgegenüber wird beispielsweise die Beachtung von Lernvoraussetzungen der Lernenden, die z.B. Kattmann et al. (1997) in ihrem Modell der didaktischen Rekonstruktion vorsehen, nicht näher betrachtet. Da Wissen über Lernvoraussetzungen relevant für Lehrkräfte ist, wird das Modell der didaktisch orientierten Rekonstruktion (Huget, 2024) um weitere Aspekte aus mathematikdidaktischen Modellen ergänzt. Dazu wurden die Modelle der didaktischen Rekonstruktion nach Kattmann et al. (1997) und der "Four-level approach" nach Hußmann und Prediger (2016) hinsichtlich über rein stoffdidaktische Anteile hinausgehende Anteile untersucht. Die Gemeinsamkeit

dieser beiden Modelle gegenüber Huget (2024) ist die Beachtung der Lernendenperspektive auf den Lerninhalt. Bei Hußmann und Prediger (2016) wird diese anhand von drei Leitfragen thematisiert. Die Leitfragen zielen auf (1) typische individuelle Vorstellungen von Lernenden ab, (2) wie diese individuellen Vorstellungen mit intendierten Vorstellungen zusammenhängen und (3) inwieweit typische bzw. idiosynkratische Hürden bestehen. Zusätzlich werden diese Informationen mit ihren Konsequenzen zur Erstellung eines Lernpfades verknüpft.

Eine Adaption des Modells der didaktisch orientierten Rekonstruktion beläuft sich daher auf die Ergänzung um individuelle Lernendenvorstellungen und ihre typischen Hürden in Lernprozessen. Eine weitere Adaption der didaktisch orientierten Rekonstruktion betrifft die zu erfassenden Darstellungsebenen: Huget (2024) stellt bereits selbst heraus, dass die im Modell vorgesehene Unterteilung in die enaktive, ikonische und symbolische Ebene um eine sprachliche Ebene nach Prediger und Wessel (2013) ergänzt werden könnte, da diese für Diagnose und Förderung relevant sind.

Ergebnisse und Ausblick

Als Ergebnis einer didaktisch orientierten Rekonstruktion der Konzepte 'durchschnittliche Änderungsrate' und 'lokale Änderungsrate' konnten Wissensinhalte auf Lehrkraftebene über die beiden mathematischen Konzepte individuell identifiziert werden. Zur Strukturierung wurde eine Zuordnung der Wissensinhalte zu den jeweils für sie hintergründigen fundamentalen Ideen vorgenommen. In Abb. 1 ist der Ausschnitt eines Wissensnetzes dargestellt, das Wissensinhalte gegenüberstellt, die vor dem Hintergrund der fundamentalen Ideen 'Charakterisierung einer Funktion' und 'Optimierung' stehen.

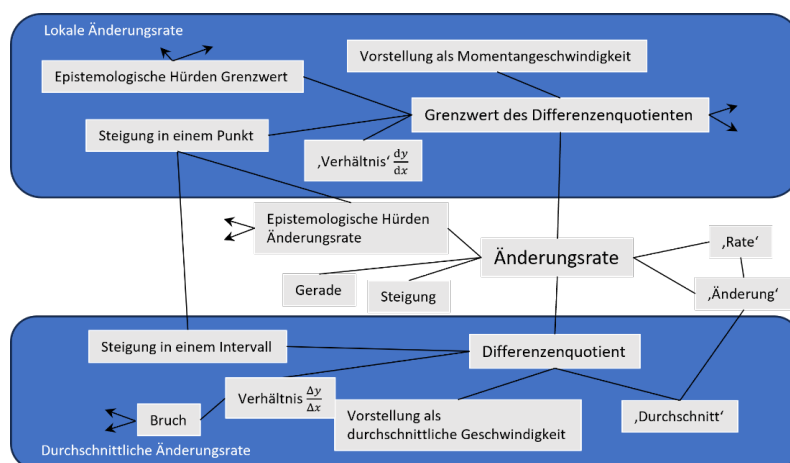


Abb. 1: Ausschnitt eines Wissensnetzes

Die Darstellung als Netz lässt anhand der Verbindungen einzelner Wissensinhalte eine reichhaltige Übersicht über Gemeinsamkeiten und Unterschiede

der Konzepte zu, welche zur Strukturierung und Orientierung im weiteren Forschungsverlauf verwendet wird. Im nächsten Forschungsschritt wird das Wissen angehender und praktizierender Mathematiklehrkräfte vor dem Hintergrund der Wissensinhalte erhoben, die im ersten Schritt identifiziert wurden. Da dieses mitunter komplexe Wissensformen beinhaltet, die insbesondere (Fehl-)Vorstellungen, Einstellungen und Unterrichtspraxis miteinschließen, wird das Wissen qualitativ erhoben. In halbstrukturierten Interviews soll das Wissen der teilnehmenden Lehrkräfte zur Lehre des Übergangs von durchschnittlicher zu lokaler Änderungsrate unter Rückblick auf die Wissensnetze rekonstruiert werden. Die Interviews werden vor dem Hintergrund fachlicher mathematischer Aspekte sowie konkreter ausgewählter Probleme aus der Unterrichtspraxis in Vignettenform, die zu typischen Schwierigkeiten Lernender korrespondieren, durchgeführt.

Literatur

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2023). Mathematics Students' Characteristics of Basic Mental Models of the Derivative. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 44(1), 143–169. <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9>
- Huget, J. (2024). *Die Methode der didaktisch orientierten Rekonstruktion: Systematisierung und beispielhafte Anwendung auf die Gesetze der großen Zahlen* (Bd. 11). Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-42642-2>
- Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33–67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>
- Kattmann, U., Duit, R., Gropengießer, H. & Komorek, M. (1997). Das Modell der Didaktischen Rekonstruktion – Ein Rahmen für naturwissenschaftsdidaktische Forschung und Entwicklung. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 3(3), 3–18.
- Prediger, S., & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 435–456. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0079-2>
- Teuscher, D., & Reys, R. E. (2010). Slope, rate of change, and steepness: do students understand these concepts? *The Mathematics Teacher*, 103(7), 519–524. <https://doi.org/10.5951/MT.103.7.0519>.
- Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas Foundational to Calculus Learning and Their Links to Students' Difficulties. *ZDM – Mathematics Education*, 53(3), 507–519. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01270-1>