

SCHOLL, Theresa
Gießen

Ein Rechteck ist ein Trapez?! Lehramtsstudierende Philosophieren im Themengebiet Haus der Vierecke

An der Justus-Liebig-Universität Gießen wurde ein Lernmodul zur Wiederholung des Schulstoffes im Themenbereich der Geometrie entwickelt. In diesem Lernmodul wurden zusätzlich im Themengebiet Haus der Vierecke Aufträge zum Philosophieren eingebunden (Scholl, 2023). An diesen Aufträgen wird das folgende Forschungsanliegen verfolgt: *Welchen Beitrag können die verschiedenen Methoden des Philosophierens in Bezug auf das Begriffslernen der Lehramtsstudierenden leisten?*

Theoretischer Hintergrund zum Begriffslernen

Beim Begriffslernen sind in der Literatur verschiedene Stufenmodelle beschrieben, so haben u. a. das Ehepaar van Hiele das Lernen von Begriffen in Denkebenen formuliert: Räumlich-anschauungsgebundenes Denken, Geometrisch-analysierendes Denken, Geometrisch-abstrahierendes Denken, Geometrisch-schlussfolgerndes Denken und Strenge abstrakte Geometrie (Franke & Reinhold, 2016). Bei einer empirischen Untersuchung der beschriebenen Denkebenen haben Burger und Shaughnessy (1986) einen Leitfaden entwickelt, um das Begriffsdenken der Kinder diesen Denkebenen zuzuordnen. Dabei befinden sich Kinder auf dem geometrisch-analysierenden Denken, die Klasseninklusionen vermeiden, aber Eigenschaften benennen können und auf dem Geometrisch-abstrahierenden Denken, wenn Klasseninklusionen zugelassen werden. Das Ziel beim Lernen von Viereckstypen bezieht sich demnach sowohl auf deren Ordnung als auch auf die Kenntnis ihrer Eigenschaften. Hershkowitz (1990) unterscheidet bei den Eigenschaften der Viereckstypen relevante von irrelevanten Eigenschaften. Weiter beschreibt er beim Ermitteln von Viereckstypen drei prototypische Urteile, wobei in diesem Beitrag nur Typ 2 vorgestellt wird, weil dieser bei Interpretationen von Studierendenbearbeitungen im Lernmodul auftritt: "Typ 2: The prototypical example is used as the frame of reference, but the subject bases his or her judgement on the prototype's self-attributes and tries to impose them on other concept examples" (Hershkowitz, 1990, S. 83). In Bezug auf die Ordnung der Viereckstypen beschreibt Villers (1994), dass sie partitional und hierarchisch klassifiziert werden können, wobei bei einer partitionalen Klassifikation Viereckstypen disjunkt voneinander betrachtet, und bei einer hierarchischen Klassifikation Klasseninklusionen der Viereckstypen zugelassen werden. Aus der vorgestellten Theorie lässt sich folgern, dass Lernende, die Viereckstypen partitional klassifizieren, der Denkebene des

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Räumlich-anschauungebundenen Denkens oder Geometrisch-analysierenden Denkens zuzuordnen sind, und Lernende, die Viereckstypen hierarchisch klassifizieren, dem Geometrisch-abstrahierenden Denken.

Datenerhebung und Auswertung

Die Aufträge zum Philosophieren aus dem Lernmodell im Themenfeld Haus der Vierecke wurden unter Nutzung der fünf Methoden des Philosophierens Martens (2017) konzipiert: Phänomenologische Methode, hermeneutische Methode, analytische Methode, dialektische Methode und spekulative Methode (Scholl, 2023). Sie wurden in Zweiergruppen über eine Webkonferenz bearbeitet. Anschließend haben die Studierenden in Einzelarbeit asynchron einen erdachten Dialog geschrieben. Insgesamt sind dabei 35 erdachte Dialoge entstanden und 16 Bearbeitungprozesse videografiert. Bei der Auswertung der Daten wurden zunächst die erdachten Dialoge mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet, um anschließend ein Sample durchzuführen, bei dem vier Studierendenpaarungen ausgewählt wurden. Diese Bearbeitungen wurden ebenfalls mittels einer qualitativen Inhaltsanalyse ausgewertet. Ziel dieses Vorgehens ist es, Aktivitäten der Studierenden in Bezug auf das Begriffslernen zu beschreiben. Anschließend wurden von den ausgewählten Studierendenpaarungen die Bearbeitungsprozesse und die erdachten Dialoge mit einer Interaktionsanalyse ausgewertet, um die Philosophierprozesse im Detail im Hinblick auf die Verwendung der Begriffe, deren Klassifikationsart, die mit den Begriffen verbundenen Vorstellungen im Alltag und in der Mathematik sowie die Nutzung der Methoden des Philosophierens zu beschreiben. Nachfolgend sind Auszüge aus der zusammenfassenden Interpretation des Bearbeitungsprozesses der Studierenden S40 und S41 dargestellt.

Zusammenfassende Interpretation zu S40 und S41

Zu Beginn des Bearbeitungsprozesses klassifiziert S40 die Begriffe Rechteck und Parallelogramm hierarchisch. Die hierarchische Klassifikation der Begriffe Rechteck und Trapez akzeptiert S40 hingegen noch nicht und klassifiziert diese daher eher partitional. Auch im erdachten Dialog und in der Zusammenfassung der eigenen Position beschreibt S40 eine unerwünschte Begriffsbeziehungen in Bezug auf die Quizshowfrage zwischen Trapez und Rechteck und akzeptiert damit die hierarchische Klassifikation der Viereckstypen Rechteck und Trapez nicht. Dabei lässt sich vermuten, dass das Geometrisch-abstrahierende Denken bei S40 für die Begriffe Rechteck und Trapez noch nicht vollständig erreicht ist. Im Alltag verwendet S40 die Viereckstypen Parallelogramm und Trapez nicht, und unterscheidet diese daher sprachlich auch nicht. Rechtecke sieht S40 im Alltag häufiger, verwendet die

Begriffe im Alltag jedoch auch eher weniger. Zu den Viereckstypen Rechteck und Quadrat kann S40 einzelne Alltagsbeispiele sammeln und daran teilweise die Verwendung dieser Viereckstypen im Alltag diskutieren, dabei nutzt S40 die *phänomenologische Methode*. Die Begriffe Rechteck, Parallelogramm und Trapez sind für S40 ausschließlich Teil des Mathematikunterrichts. Im erdachten Dialog greift S40 die Verwendung der Viereckstypen im Alltag nicht auf, dies könnte daran liegen, dass für S40 die Viereckstypen im Alltag keine Relevanz haben. Vor- und Nachteile von hierarchischen Klassifikationen gibt S40 nicht an.

S41 akzeptiert direkt zu Beginn des Bearbeitungsprozesses die hierarchische Klassifikation zwischen Rechteck und Parallelogramm sowie Rechteck und Trapez. Als Darstellung der hierarchischen Klassifikation nutzt S41 das Haus der Vierecke, dabei erstellt S41 ein Begriffsnetz, untersucht verwandte Fälle, diskutiert die Enge der Definitionen des Quizmasters, dabei klärt S41 die Begriffe Rechteck, Parallelogramm und Rechteck innermathematisch und nutzt somit *die analytische Methode*. S41 greift diese Klassifikation und das Haus der Vierecke im erdachten Dialog auf, und stimmt der hierarchischen Klassifikation der Viereckstypen Rechteck und Trapez am Ende des erdachten Dialoges zu. Damit hat S41 im Gegensatz zu S40 das Geometrisch-abstrahierende Denken für die Begriffe Rechteck, Parallelogramm und Trapez erreicht. S41 bemerkt, dass die Klassifikation beim Quizmaster und der Zuschauerin von der jeweils gewählten Definition abhängt. S41 beschreibt, dass die Definitionen des Quizmasters zu den prototypischen Vorstellungen der Vierecke von S41 passen und man die Vierecke prototypisch entsprechend den Definitionen zeichnen würde. S41 nutzt die angegebenen irrelevanten Eigenschaften für diese Zeichnungen und beurteilt die Viereckstypen in der eigenen Vorstellung anhand von prototypischen Urteilen (Typ 2). Diese Vorstellungen spiegeln sich auch in der alltäglichen Verwendung der Begriffe von S41 wider, da S41 sich die Viereckstypen im Alltag prototypisch vorstellt. So unterscheidet S41 im Alltag die Begriffe Trapez und Rechteck voneinander und klassifiziert diese daher *partitional*. Die Begriffe Rechteck und Quadrat möchte S41 ebenso im Alltag unterscheiden. Bei Grenzfällen, bei dem ein prototypisches Rechteck in ein prototypisches Quadrat übergeht, kann S41 die Viereckstypen Quadrat und Rechteck nicht eindeutig unterscheiden. Als Alltagsbeispiele gibt S41 vor allem Beispiele aus dem Kontext Hausbau an, welche im erdachten Dialog übernommen werden, um festzuhalten, dass die Verwendung der Viereckstypen sich im Alltag gegenüber der Mathematik unterscheidet, dabei nutzt S41 die *phänomenologische Methode*. S41 kann Vorteile für hierarchische Klassifikationen angeben, und geht dabei auf die Übertragbarkeit der Flächeninhaltsformel eines Trapezes auf ein Rechteck ein. Diesen Vorteil greift S41 im

erdachten Dialog auf. Als Nachteil solcher Klassifikationen beschreibt S41, dass man die Viereckstypen mit diesen Definitionen nicht mehr klar voneinander abgrenzen kann. Dabei nutzt S41 die *dialektische Methode*, um den Sinn hierarchischer Klassifikationen der Viereckstypen zu diskutieren.

S40 und S41 sind sich bei der Klassifikation der Viereckstypen Rechteck und Trapez nicht einig, dieser Widerspruch wird bis zum Ende nicht aufgelöst. Das Gespräch wird inhaltlich von S41 dominiert, was dazu führt, dass S41 und S40 ihre verschiedenen Positionen nicht diskutieren und die dialektische Methode nicht vollständig nutzen.

Der Beitrag der Methoden des Philosophierens zum Begriffslernen

Die phänomenologische Methode trägt in Bezug auf das Begriffslernen dazu bei, die alltägliche Verwendung der Begriffe der Viereckstypen zu beschreiben und deren mathematischer Verwendung gegenüberzustellen. Die analytische Methode hilft dabei die mathematische Verwendung der Viereckstypen zu klären und sich selbst begrifflich zu vergewissern. Die dialektische Methode legt im hier vorgestellten Fall den Widerspruch zwischen hierarchischen und partitionalen Klassifikationen offen und regt so zur Diskussion der Vor- und Nachteile dieser Klassifikationsarten an. Die Methoden des Philosophierens erweisen sich somit als hilfreich, um begriffliches Lernen anzuregen und fachliche Hürden bei den Studierenden zu diagnostizieren.

Literatur

- Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31–48.
- Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*. Springer.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Hrsg.), *ICMI study series. Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (S. 70–95). Cambridge Univ. Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.006>
- Martens, E. (2017). *Methodik des Ethik- und Philosophieunterrichts. Philosophieren als elementare Kulturtechnik* (10. Aufl.). Hannover: Siebert.
- Scholl, T. (2023). Geometrische Begriffsbildung philosophierend fördern: Ein digitales Lernangebot. In J. Härterich, M. Kallweit, K. Rolka & T. Skill (Hrsg.), *Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik: Bd. 9. Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2021: Beiträge zum gleichnamigen Online-Symposium am 12. November 2021 aus Bochum* (S. 223–239). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA978392645.0>
- Villiers, M. de (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11–18.