

VON PAPE, Bodo
Oldenburg

"Ex Oriente Lux"

Vorgeschichte: Kubische Gleichungen

Als Anstoß für die Geschichte der kubischen Gleichungen mag ein Werk von Archimedes gelten: In „Über Kugel und Zylinder II“ stellt dieser ein Problem zur Teilung einer Kugel vor, das – aus heutiger Sicht – auf eine "Gleichung 3. Grades" führt. Eine Lösung fügt Archimedes nicht bei. Eutokios als Kommentator (um 500 AC) nimmt das zum Anlass, aus dem Fundus der Lösungen zum Delischen Problem 12 Lösungen vorzustellen. Dabei geht es primär um mentale Konstruktionen mit Kreisen und Geraden. In einigen Fällen kommen auch Kurven ins Spiel. – Mit dieser Übersicht nimmt die Geschichte der "Großen Probleme der Antike" ihren Anfang.

Um 850 war man in Bagdad bestrebt, wissenschaftliche Texte der Antike aus allen Regionen des Abbasiden-Reiches zusammenzutragen. Im "Haus der Weisheit" machte man sich mit Eifer daran, diese in das Arabische zu übersetzen und daraus zu lernen. Im Fokus standen Werke aus Medizin, Astronomie, Philosophie und Mathematik. Im Hinblick auf die Mathematik konzentrierte das Interesse sich auf die Werke von Euklid und Archimedes. Der Eutokios-Kommentar kam sozusagen "huckepack" mit. Ein wahrer Glücksfall für die Geschichte der Mathematik!

Diese Problemstellungen aus der Geometrie der Griechen werden aufgenommen und weiterbearbeitet. Ein zusätzlicher Impuls für die Beschäftigung mit Geometrie ist die Astronomie, anknüpfend an Ptolemäus (150 AC). Sie erfordert die Einführung von Längenmaßen und Winkelgrößen, Sätze zu deren Zusammenhänge (Trigonometrie) und Verfahren zu einer genauen Berechnung der Werte. Diese werden in Tafelwerken zusammengestellt.

Kubische Gleichungen: Die Errungenschaften des Orient

Bei uns galt die Zeit zwischen 800 und 1400 lange als „Das Finstere Mittelalter“. Historiker des Islam bezeichnen sie heute als „Das Goldene Zeitalter“. Das trifft insbesondere für die Wissenschaften zu. H. Suters Liste der „Mathematiker und Astronomen der Araber“ umfasst 528 Namen. Als Repräsentanten mögen gelten: Al Biruni (973-1048, Buchara), Omar Khayyam (1048-1138, Isfahan) und Al Kashi (1380-1429, Samarkand).

Der Kern der Region, der die Mehrheit der Forscher entstammt, erstreckt sich vom Osten Persiens bis nach Afghanistan und Usbekistan. Seinerzeit trug sie den Namen "Khorezmien". In Europa wurden die Erkenntnisse der Araber erst durch Übersetzungen/Übertragungen seit ca. 1850 bekannt.

Al Biruni gelingt es, die Konstruktion der Seitenlänge eines Neunecks in eine Gleichung umzusetzen. Seine Dreiteilungsgleichung für einen 60° -Winkel lässt sich auf alle Winkelgrößen (Sehnenlängen) übertragen.

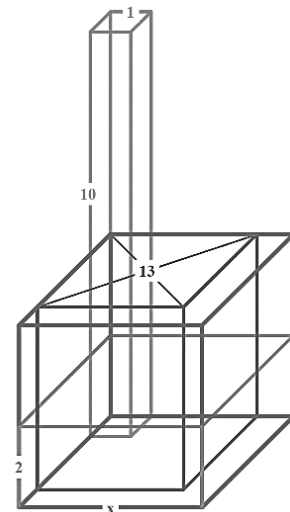
Al Kashi stellt für die Berechnung der Lösungen derartiger Gleichungen einen Algorithmus vor. Mit jedem der einfachen Rechenschritte verbessert sich die Genauigkeit um eine Dezimale. Al Kashi wird zudem auch die Formulierung des Kosinus-Satzes zugerechnet.

Die Entwicklung der Trigonometrie und das Erstellen von Tabellen – im Zuge der Astronomie – steht für die Mathematiker dieser Zeit im Mittelpunkt. Tabellen mit genauen Werten erweisen sich für Astronomie, Vermessung und Navigation als unverzichtbar.



Omar Khayyam geht in seiner Algebra das Lösen von kubischen Gleichungen umfassend an. Im Rahmen einer Aufschlüsselung nach Vorzeichen kommt er auf 19 Fälle. Für jeden stellt er eine Lösung vor. Auch die Anzahl der (positiven) Lösungen wird erörtert.

Omar Khayyam verformt zwei oder drei Quader, die durch die zu lösende Gleichung festgelegt sind, und fügt sie zu einem Würfel zusammen. Die Mittel dazu entnimmt er der griechischen Antike, der Kegelschnittlehre des Apollonius.



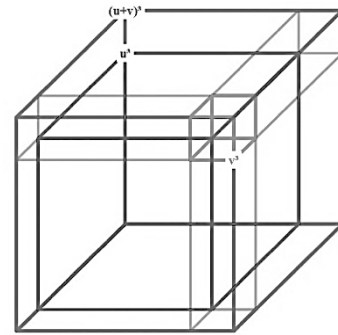
Kubische Gleichungen: Die Entwicklung in Europa

Im europäischen Westen setzt um 1500 eine eigenständige Weiterentwicklung der Mathematik aus der Antike ein. Erst mit der Übermittlung der antiken Texte, fand die Wissenschaft der Griechen – Philosophie, Mathematik, Medizin – Eingang in das Denken der Europäer und inspirierte sie zu einer Wiederbelebung der überlieferten Kultur, einer "Renaissance".

Was die Mathematik betrifft, so drückt ein Ansatz aus dem arabischen Raum der weiteren Entwicklung seinen Stempel auf, der „Algebraisch/Numerische“ von Al Kwarizmi (780-845). Der "Khorezmier" hatte aus seiner Heimat eine neue Darstellung der Zahlen nach Bagdad mitgebracht. ("Indische Zifferschreibweise") Vor allem hat er dann dort die Grundlagen der Algebra entwickelt, als Verfahren zur Bestimmung von Zahlwerten im Rahmen von Angelegenheiten des täglichen Lebens.

„Die Araber waren in ihrer Blütezeit den Europäern um 500 Jahre voraus.“
So heißt es.

Es bietet sich an, den Ansätzen der Araber die entsprechenden aus der europäischen Neuzeit gegenüberzustellen. Das Lösen kubischer Gleichungen durch Omar Khayyam und Al Kashi lässt sich weiterverfolgen mit dem Ansatz von Cardano (1544).



Cardano zerlegt einen Würfel gemäß der Formel für $(u+v)^3$, um die Seitenlänge eines Teilwürfels festzulegen. Damit folgt er dem Muster, das Al Kwarizmi für quadratische Gleichungen ins Spiel gebracht hatte.

Al Kashis Ansatz für das numerische Lösen läuft hinaus auf eine Fixpunkt-Iteration. Raphson bringt das Newton-Verfahren auf den Weg. Bei den Originalarbeiten von Raphson (1692) und Newton (1734) zeigt sich allerdings: Von dem, was heute unter diesen Namen weitergegeben wird, sind beide noch weit entfernt.

Zur Didaktik

Eine Abkehr von der eurozentrischen Sicht auf die Geschichte insgesamt erscheint zunehmend geboten. In den Medien mehren sich Sendungen, die dem "Goldene Zeitalter des Islam" ganz allgemein gewidmet sind. Die Mathematik bietet ein Feld, in dem die Bedeutung der Errungenschaften konkret belegt und näher ausgeführt werden kann.

Zudem: Im vergangenen Jahrhunderts prägten noch Mathematiker wie G. H. Hardy oder Helmut Hasse das Bild der Mathematik (Hardy 1940: "Oriental mathematics may be an interesting curiosity, but Greek mathematics is the real thing."; Hasse 1951: "Ich darf voraussetzen, daß wir uns darüber klar sind, welche Mathematik gemeint und welche nicht gemeint ist. Gemeint ist die Mathematik im Platonischen Sinne, also als eine Wissenschaft des Geistes, und nicht gemeint ist die Mathematik als eine Fähigkeit des Rechnens und Vermessens.")

Eben das Berechnen aber – unter Rückgriff auf Tafelwerke! – hat in den folgenden Jahrhunderten der Mathematik die Hochschätzung in vielen Bereichen des Lebens eingebracht. Auch hier scheint ein Umdenken geboten!

Was die Eignung der Thematik für die Schule angeht, so seien zwei Autoren von einschlägigen Werken dazu zitiert:

K. H. Strick: "Die Themen sind durchweg mit schulischem Vorwissen aus der Mittel- oder Oberstufe nachvollziehbar; in diesem Buch werden also keine mathematischen Theorien entwickelt, die deutlich über das an der

Schule erreichbare Niveau hinausgehen. Daher empfiehlt sich das Buch für alle, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, und ist auch für Arbeitsgemeinschaften an Schulen und als Anregung für Facharbeiten geeignet."

S. Linden: "Abiturienten sollten mit dem Verständnis von Chayyams Methode keinerlei Probleme haben, wenn nur einmal ihre moderne Formulierung verstanden ist. Die Lektüre dieser mathematischen Arbeiten lohnt sich dann doppelt: Die Freunde der Poesie und der Person Omar Chayyams erfahren so einiges Interessantes über den Autor; die Freunde der Mathematik erkennen, vielleicht zum ersten Mal, den engen Zusammenhang der islamischen Mathematik mit der modernen Schulmathematik."

Hinzuzufügen bleibt: Die Rekonstruktion der Lösungen mit Kegelschnitten wie auch die Umsetzung der numerischen Algorithmen bieten eine hervorragende Möglichkeit, die neuen Medien zur Geltung zu bringen, etwa ein Geometriesystem oder eine Tabellenkalkulation.

Im Hinblick auf die Bedeutung des Themas für die Lehrerbildung sei verwiesen auf die Telekom-Studie "Mathematik Neu Denken - Impulse für den Mathematikunterricht an den Universitäten" (2011):

"Mathematik war bereits seit Beginn der Kulturgeschichte eine Weise des Weltverstehens. Ohne mathematische Begriffe und Methoden wäre etwa die Entwicklung der Astronomie, des Kalenderrechnens oder der Landvermessung nicht vorstellbar."

"Der Kampf um die Lösung von Gleichungen höheren Grades ist ein außerordentlich spannendes Stück der Mathematikgeschichte, was es in jedem Fall verdient, erzählt zu werden."

Literatur

Al Khalili, J. (2012). *The House of Wisdom*. London: Penguin.

Al-Hassani, S. (2012). *1001 Inventions - The Enduring Legacy of Muslim Civilization*. Washington: National Geographic.

Beutelspacher, A. (2011). *Mathematik Neu Denken*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Juschke, A. (1964). *Geschichte Der Mathematik im Mittelalter*. Leipzig: Teubner.

Linden, S. (2017). *Die Algebra des Omar Chayyam*. München: Springer.

Pape, B. v. (2022). *Die Großen Probleme der Antike I, II*. Norderstedt: BoD.

Schoy, C. (1927). *Die Trigonometrischen Lehren des Persischen Astronomen Ahmad Al-Biruni*. Hannover: Orient-Buchhandlung.

Strick, K. (2020). *Mathematik - einfach genial*. Berlin: Springer.

Witmer, T. R. (1968). *The Great Art of the Rules of Algebra by Girolamo Cardano*. Cambridge, Massachusetts: M.I.I. Press.