MÜLLER-SOMMER, Hartmut & Elschenbroich, Hans-Jürgen
Vechta; Korschenbroich

Zur räumlichen Satzgruppe des Pythagoras

In diesem Beitrag ist eine abgeschnittene Quaderecke der Ausgangspunkt für 3D-Versionen der Sätze der Pythagoras-Gruppe (Schmidt 2024, Elschenbroich 2025 und Müller-Sommer 2025). Die Untersuchungen werden mit der dynamischen Raumgeometrie-Software GeoGebra 3D durchgeführt.

Der Satz von Faulhaber

Eine 'Quaderecke' entsteht, wenn von einem Quader eine Raumecke schräg abgeschnitten wird. Die Quaderecke ist also eine dreiseitige Pyramide $ABCD$ mit der Schnittfläche ABC als Grundfläche und drei rechtwinkligen Dreiecken BCD, ACD und ABD als Seitenflächen (Abb. 1).

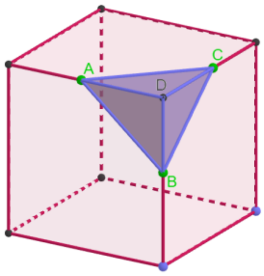

Abb. 1: Quaderecke

Folgender Satz wurde vom Ulmer Mathematiker Johannes Faulhaber (1580 - 1635) im Jahre 1622 publiziert:

Die Summe der Flächeninhaltsquadrate der drei rechtwinkligen Dreiecke ist so groß wie das Quadrat des Flächeninhalts der Schnittfläche.

Wird der Flächeninhalt eines Dreiecks ABC mit $[ABC]$ bezeichnet, so lautet der Satz von Faulhaber: $[ABC]^2 = [BCD]^2 + [ACD]^2 + [ABD]^2$.
Bezeichnet man die D gegenüberliegende Fläche ABC mit F_D, so lautet die Formel $F_A^2 + F_B^2 + F_C^2 = F_D^2$.

Thales 3D

Geht man nicht von einer abgeschnitten Quaderecke aus, wo die Existenz vor drei aneinanderstoßenden rechtwinkligen Dreiecken gesichert ist, sondern von einem beliebigen Dreieck ABC, so stellt sich die Frage, ob und wie man einen weiteren Punkt D konstruieren kann, so dass die Pyramide $ABCD$ bei D drei rechte Winkel in den Seitenflächen hat. Im günstigen Fall schneiden sich die drei Thaleskugeln in einem Punkt D und bilden eine dreiseitige Pyramide $ABCD$. Der Punkt D liegt auf einem Ellipsoid. Im Zugmodus stellt man durch Ziehen an A, B, oder C fest, dass dieser Schnittpunkt aber nicht

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

immer existiert, sondern nur dann, wenn der Lotfußpunkt von D im Inneren von ABC liegt. D liegt dann auf einem abgeschnittenen Ellipsoid (Elschenbroich 2025).

Pythagoras 3D Visualisierung

Der Satz von Faulhaber als 3D Version des Pythagoras-Satzes ist leicht zu formulieren, aber nicht einfach zu visualisieren, denn das Quadrat von Quadraten führt in die 4. Dimension. Die entscheidende Idee besteht dann darin, die Maßzahl einer vierdimensionalen Größe durch ein geeignetes dreidimensionales Objekt zu visualisieren (Abb. 2). Dazu werden hier an den Kanten der Raumecke (dreiseitigen Pyramide) passende Quader angesetzt (passend heißt, dass ihr dreidimensionales Volumen die richtige Maßzahl hat).

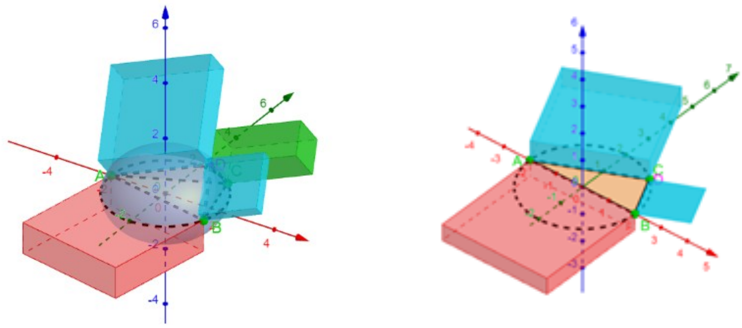

Abb. 2a, b: Dreidimensionale Visualisierung des 3D-Satzes von Pythagoras.

Wenn A und B auf der x-Achse liegen, entartet die dreiseitige Pyramide zu einem rechtwinkligen Dreieck und man erkennt darin die typische Pythagoras-Figur.

Ein-Blick in die 'innere' Geometrie der Quaderecke

Dass der Lotfußpunkt S von D auch der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist, zeigt die Vektorgeometrie. Die Höhensätze, angewandt auf die drei bei D rechtwinkligen inneren Dreiecke in Abb. 3a, führen sogar zu einem vektorfreien Nachweis der Höhenschnittpunkt-Eigenschaft des Punktes S.

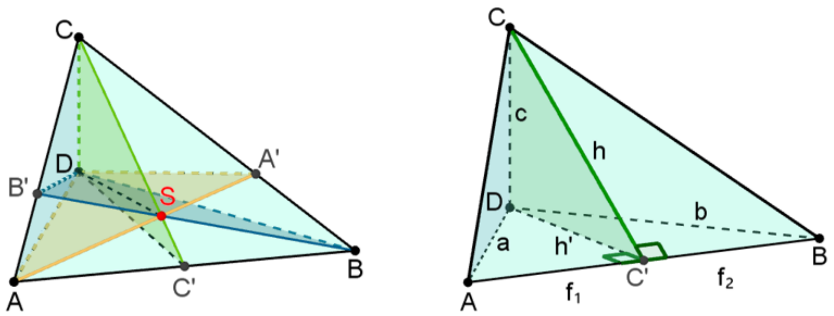

Abb. 3a, b: Höhenschnittpunkt und Höhenfußpunkte. Screenshot H. Müller-Sommer

Aus der Übereinstimmung der Höhenfußpunkte von ABC mit den Höhenfußpunkten der anliegenden rechtwinkligen Dreiecke (Abb. 3b) ergibt sich ein elementargeometrischer Beweis für den Satz von Faulhaber.

Räumliche Kathetensätze und räumliche Höhensätze

Dass es räumliche Analoga zu den ebenen Kathetensätzen und zum ebenen Höhensatz gibt, ist nicht selbstverständlich, denn der Analogiebildung von der Ebene in den Raum sind Grenzen gesetzt. So ist z. B. der räumliche Satz des Pythagoras nicht umkehrbar (Elschenbroich 2025).

Der Höhenfußpunkt der Höhe h eines bei C rechtwinkligen Dreiecks teilt die Hypotenuse c in die Abschnitte p und q auf. Analog hierzu teilt der Höhenfußpunkt H des Tetraeders $ABCD$ die „Hypotenusenfläche“ ABC in die Flächen der Teildreiecke ABH, BCH und CAH auf. Dieser Ansatz führt zu drei räumlichen Kathetensätzen (Abb. 4), deren Gültigkeit im Vortrag mit den Mitteln der Sekundarstufe I bewiesen wird.

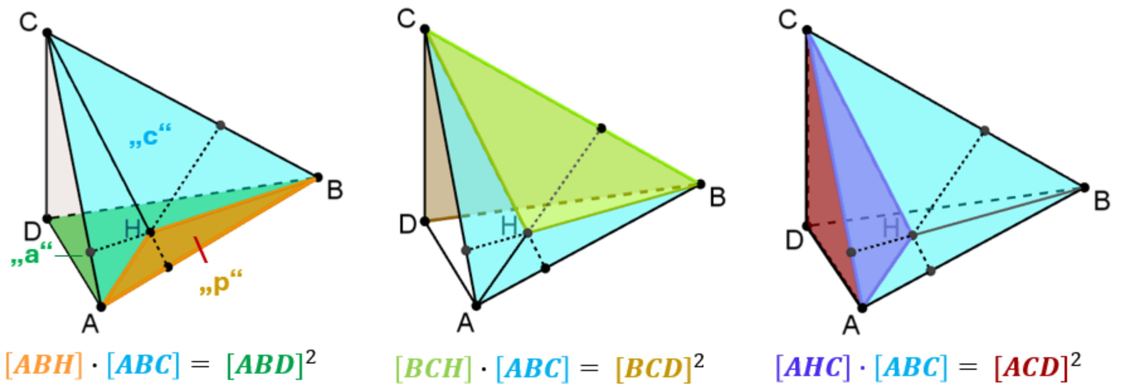

Abb. 4a -c: Drei räumliche Kathetensätze. Screenshot H. Müller-Sommer

So lässt sich beispielsweise die Beziehung $[ABH] \cdot [ABC] = [ABD]^2$ für das linke Bild der obigen Abbildung als ein räumliches Analogon des ebenen Kathetensatzes $p \cdot c = a^2$ deuten.

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Höhenquadrat gleich dem Produkt aus den beiden Hypotenusenabschnitten p und q. Die Flächen der Teildreiecke ABH, BCH und CAH könnten jeweils zusammen mit den pfeilspitzenförmigen Flächen ihrer Ergänzungsvierecke $AHBC$, $ABHC$ und $ABCH$ drei Paare räumlicher Hypotenusenabschnitte bilden. Ihre Produkte führen tatsächlich zu Flächeninhaltsquadraten von Dreiecken, die jeweils die Höhe DH haben und deren Grundseiten durch die Seitenlängen d, e, f des Dreiecks ABC gegeben sind (Abb. 5). Die Multiplikation aller drei Teildreiecksflächen von ABC führt zu einem räumlichen Höhensatz der 2. Art:
$[ABH] \cdot [BCH] \cdot [AHC] = [ABC] \cdot \frac{1}{4} DH^4$.

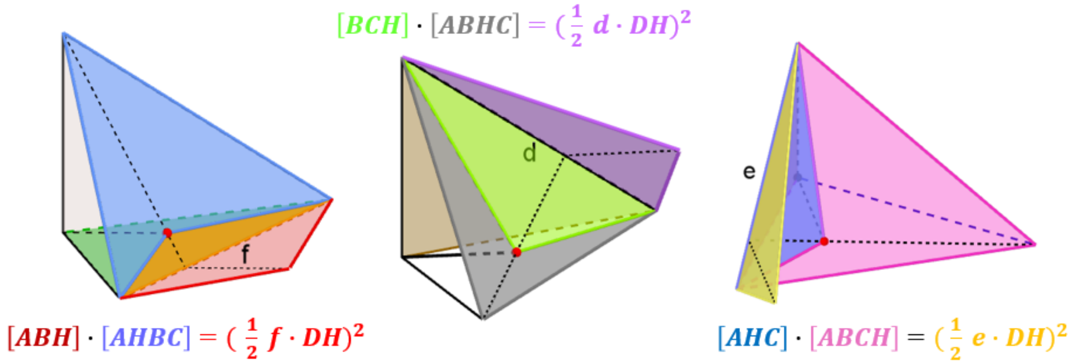

Abb. 5a -c: Drei räumliche Höhensätze der 1. Art. Screenshot H. Müller-Sommer

Alle räumlichen Katheten- und Höhensätze können als neue Sätze der Ebene gedeutet werden. Dies zeigt Abb. 6 für den räumlichen Höhensatz der 2. Art. Hier lässt sich der Flächeninhalt des gelben Rechtecks mithilfe des ebenen Höhensatzes durch den Term $\frac{1}{2}\,DH^2$ beschreiben.

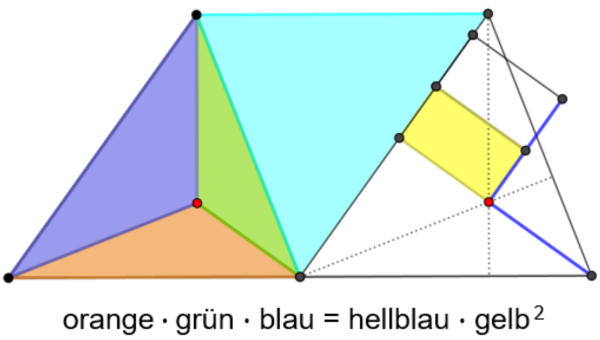

Abb. 6: Räumlicher Höhensatz der 2. Art. Screenshot H. Müller-Sommer

Literatur

Elschenbroich, H.-J. (2025): Von der Ebene in den Raum und zurück - Die Sätze von Thales und Pythagoras. Erscheint in: Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.): *Allgemeinbildender Geometrieunterricht - Sozial gerecht. Geometrisierung: Vom Phänomen zur Mathematik, vom Raum in die Ebene und zurück*. WTM.

Müller-Sommer, H. (2025): Zur räumlichen Satzgruppe des Pythagoras Erscheint in: Filler, A. & Lambert, A. (Hrsg.): *Allgemeinbildender Geometrieunterricht - Sozial gerecht. Geometrisierung: Vom Phänomen zur Mathematik, vom Raum in die Ebene und zurück*. WTM.

Schmidt, R. (2024): Von der Dreiecksgeometrie der Ebene in die Raumgeometrie. In: Elschenbroich, H.-J. & Sträßer, R. (Hrsg.): *Raumgeometrie mit digitalen Werkzeugen*. *Der Mathematikunterricht*, *2*/2024. S. 26 – 35.

Links

Elschenbroich, H.-J. (2023): Thales & Pythagoras - Von der Ebene in den Raum und zurück. GeoGebra Book https://www.geogebra.org/m/zmaswq68

Müller-Sommer, H. (2024): GeoGebra Book https://www.geogebra.org/m/jsegt7yp