

GELDERMANN, Laura & ROLKA, Katrin
Bochum

Entwicklung inhaltlicher Vorstellungen zum arithmetischen Mittel von Lernenden durch Darstellungsvernetzung

Theoretischer Hintergrund

Inhaltliche Vorstellungen zu mathematischen Begriffen und Operationen werden durch konkrete Handlungen mit Objekten, in Form von Bildern und schriftlichen Symbolen, sowie durch ihre Verbalisierung sichtbar und durch die Vernetzung dieser Darstellungsformen kann Verständnis diagnostiziert und gefördert werden (vgl. Cobb & Jackson, 2021; Duval, 2006). Das Vernetzen von Darstellungen beinhaltet das Wechseln zwischen verschiedenen Darstellungsformen und geht aber darüber hinaus, indem erklärt wird, wie die Darstellungen jeweils zusammenhängen (Renkl et al., 2013). Aufgaben mit Darstellungswechsel sollen daher dazu auffordern, zu erklären, wie die Struktur des Gegenstands oder der Operation in den Darstellungen zu erkennen ist, damit Verständnis diagnostiziert und gefördert werden kann.

Das arithmetische Mittel ist eine statistische Kennzahl, die zum Beschreiben und Vergleichen von Datensätzen verwendet wird, und daher für den Umgang mit Daten eine hohe Relevanz hat (vgl. Cai, 1998). Inhaltliches Verständnis zum arithmetischen Mittel beinhaltet neben einem Verständnis für die statistischen Aspekte des Begriffs auch inhaltliche Vorstellungen zum Rechenalgorithmus (vgl. Cai, 1998). Die Vorstellung des Ausgleichens liegt vor, wenn die Werte additiv ausgeglichen werden, bis alle Werte gleich groß sind. Unter der Vorstellung des gleichmäßigen Verteilens wird das Zusammenfassen und anschließende gleichmäßige Verteilen auf die Anzahl der Werte verstanden (vgl. Sill, 2016).

In dem vorliegenden Beitrag wird eine Aufgabe zur Diagnose und Förderung von Verständnis zum arithmetischen Mittel vorgestellt und der Lernweg eines Schülers damit skizziert.

Diagnose und Förderung von Verständnis zum arithmetischen Mittel

Mit besonderer Berücksichtigung der Darstellungsvernetzung wurde eine Aufgabe zur Diagnose und Förderung von inhaltlichen Vorstellungen zum arithmetischen Mittel entwickelt (Rolka & Geldermann, 2024). Darin wird zunächst gezeigt, wie eine Schülerin den Durchschnitt der Werte 3, 7 und 8 berechnet hat. Der Arbeitsauftrag lautet: „Zeige mit einem Bild, dass 6 der Durchschnitt dieser drei Zahlen ist: 3, 7 und 8“. Außerdem soll erklärt werden, wie der Durchschnitt in der bildlichen Darstellung zu erkennen ist.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Durch die zusätzlich eingeforderte Erklärung wird die Vernetzung der Darstellungen adressiert, sodass Verständnis sichtbar werden kann.

Im Anschluss findet eine Gruppenphase statt, in der sich die Lernenden zunächst arbeitsteilig mit jeweils einer Beispielbearbeitung der Aufgabe beschäftigen, die entweder die Vorstellung des Ausgleichens oder die Vorstellung des gleichmäßigen Verteilens zeigt. Zu jeder inhaltlichen Vorstellung gibt es zwei solcher Beispielbearbeitungen, über die sich die Lernenden anschließend zu viert austauschen. Im Rahmen einer Interviewstudie konnte bereits gezeigt werden, dass durch die Auseinandersetzung mit Beispielbearbeitungen inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel aktiviert werden (Geldermann & Rolka, 2024).

Abschließend wird die eigene Bearbeitung der Aufgabe nochmals in den Blick genommen und die Möglichkeit zur Überarbeitung gegeben. Durch die Reflexion kann eine Entwicklung der inhaltlichen Vorstellungen erkennbar werden.

Methode

Die Studie ist im QuaMath-Programm angesiedelt. Im Fortbildungsmodul „Daten und Zufall Jhg. 5–10“ führte eine Lehrkraft eine Erprobung der beschriebenen Aufgabe in einer 9. Klasse durch. Die Stichprobe bestand aus 16 Lernenden, die bereits das arithmetische Mittel aus dem Mathematikunterricht kannten und das beschriebene Material vollständig bearbeiteten. Die Auswertung der Lernendendokumente erfolgte mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Kuckartz & Rädiker, 2024). Als Kategorien dienten die inhaltlichen Vorstellungen ‚Ausgleichen‘ und ‚gleichmäßiges Verteilen‘. Wurden die Werte des Datensatzes und auch das arithmetische Mittel bildlich und verbal dargestellt, ohne dass eine inhaltliche Vorstellung identifiziert werden konnte, so wurde dies mit ‚Spuren‘ kodiert. Darstellungen, die weder inhaltliche Vorstellungen noch Spuren zeigten, wurden mit ‚keine Vorstellung‘ kodiert. Im Folgenden wird ein Einzelfall vorgestellt, der besonders anschaulich zeigt, wie sich die inhaltlichen Vorstellungen zum arithmetischen Mittel entwickeln können.

Lernweg von Noel

Beim Bearbeiten der Aufgabe zeigt Noel weder in der bildlichen Darstellung noch in der Erklärung inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel. Stattdessen stellt er die Formel lediglich mit anderen Symbolen dar und verbalisiert sie in der Erklärung (s. Abb. 1, links).

Nach dem gemeinsamen Austausch über die Beispielbearbeitungen zu der Aufgabe werden in dem vorgestellten Fall inhaltliche Vorstellungen in der Überarbeitung der eigenen Darstellung sichtbar. Aus den schriftlichen Bearbeitungen geht jedoch nicht hervor, wie dieser Prozess genau abgelaufen ist und welche Diskussionsmomente zu einer Entwicklung der inhaltlichen Vorstellungen beigetragen haben. Detailliertere Beobachtungen des gemeinsamen Gesprächs über die Beispielbearbeitungen können hier Einblicke geben, wie der Aushandlungsprozess in der Gruppe das Verständnis zum arithmetischen Mittel fördert.

Finanzierung

Diese Forschung ist Teil des QuaMath-Programms, das im Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) durchgeführt und von der Kultusministerkonferenz (KMK) gefördert wird.

Literatur

- Cai, J. (1998). Exploring Students' Conceptual Understanding of the Averaging Algorithm. *School Science and Mathematics*, 98(2), 93–98, [https://doi.org.10.1111/j.1949-8594.1998.tb17398.x](https://doi.org/https://doi.org.10.1111/j.1949-8594.1998.tb17398.x)
- Cobb, P. & Jackson, K. (2021). An empirically grounded system of supports for improving the quality of mathematics teaching on a large scale. *Implement. Replication Stud. Math. Educ.* 1, 77–110.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1) (pp. 103–131). <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Geldermann, L. & Rolka, K. (2024). Inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel von Schüler:innen durch die Vernetzung von Darstellungen diagnostizieren. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht, & P. Scherer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024* (S. 1589). WTM. <http://dx.doi.org/10.17877/DE290R-24918>
- Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2024). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Umsetzung mit Software und künstlicher Intelligenz* (6. Auflage). Juventa Verlag.
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01509-1_1
- Renkl, A., Berthold, K., Große, C. S. & Schwonke, R. (2013). Making better use of multiple representations: How fostering metacognition can help. In R. Azevedo & V. Aleven (Hrsg.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies* (S. 397–408). New York: Springer.
- Rolka, K. & Geldermann, L. (2024). *Aufgabe zum arithmetischen Mittel – Inhaltliche Vorstellungen diagnostizieren und fördern. Unterrichtsmaterial für Jahrgangsstufe 6–8*. DZLM. Open Educational Resources, dzlm.de
- Sill, H.-D. (2016). Inhaltliche Vorstellungen zum arithmetischen Mittel. *mathematik lehren* 197, 8 – 14.