

MÖLLER, Anne & ROTT, Benjamin
Essen, Köln

Begründen und Argumentieren rund um die Mittelsenkrechte

Vermutlich kennen viele Lehrpersonen folgende Beobachtungen: Trotz guter Leistungen in Klassenarbeiten gelingt es den Lernenden teilweise nicht langfristig auf die erlernten Wissensselemente zurückzugreifen.

Als Auszug aus einer Unterrichtsstudie mit vier siebten Klassen zum Inhalt der Mittelsenkrechten werden vier Lernende aus drei Klassen betrachtet: P133, P217, P231 und D120. Alle vier weisen in einem Test 1 zum inhaltlichen Vorwissen und in einem an die Unterrichtseinheit anschließenden Test 2, in dem die Ortslinien-Definition der Mittelsenkrechten und ihre Anwendungen in Begründungsaufgaben eingefordert werden, überdurchschnittlich gute Leistungen auf. Die Lernleistungen aus Test 2 werden in einem vergleichbaren Test 3 zeitlich später erneut abgefragt. Während drei der vier Lernenden ihre Leistungen aus Test 2 wiederholen oder sogar verbessern können, fallen die Leistungen von D120 deutlich ab. Dies fokussiert die Frage: Welche Unterschiede zwischen den vier leistungsstarken Schüler*innen können zur Verwendung der Mittelsenkrechten in Begründungszusammenhängen ausgemacht werden und inwiefern können diese die langfristige Leistungsentwicklung erklären?

Theoretischer Hintergrund

Eine grundlegende Idee zur Speicherung im Langzeitgedächtnis besteht darin, dass neues Wissen an bereits bestehende Wissensaspekte anknüpft. Je stärker die entstandenen Verknüpfungen sind, desto länger kann man sich an die neu erlernten Informationen erinnern (Woolfolk et al., 2008, S. 313 f.). Dabei wird zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen unterschieden. Zu dem konzeptuellen Wissen gehören für Mittelsenkrechte die beiden Wissensselemente Definition als Ortslinie und Definition als Senkrechte durch die Streckenmitte. Das prozedurale Wissen enthält Informationen über Prozesse und Abläufe, wie die Konstruktion der Mittelsenkrechten mit Zirkel und Lineal. Auf das konzeptuelle Wissen kann auf (interne oder externe) Nachfrage aktiv zurückgegriffen werden, solange dies nicht durch Überlagerung oder Vergessen verhindert wird (Woolfolk et al., 2008, S. 309 ff.). Auch sprachliche Schwierigkeiten können zu Hürden im Wissensaufbau führen, denn sprachlich schwachen Lernenden fehle tragfähige Grundvorstellungen (Prediger 2013, S. 1 ff.). Diese Wissensselemente zum Begriff der Mittelsenkrechten können durch Wissensselemente zu Mittelsenkrechten in Dreiecken, die sich aus dem Umkreismittelpunktsatz ergeben, erweitert wer-

den. Eine tabellarische Auflistung der Wissens Elemente zu Mittelsenkrechten wurde anhand stoffdidaktischer Analysen erstellt (vgl. Möller & Rott 2019) und wird hier für die Auswertung der Schülerlösungen herangezogen.

Das Studiendesign und die empirische Erhebung und Auswertung

Die hier ausgewerteten Interviews sind im Zusammenhang einer Vergleichsstudie zur Einführung der Mittelsenkrechten entstanden. Das Studiendesign beinhaltet drei Testzeitpunkte und zwei Interventionen, die sich in der Einführung der Mittelsenkrechten unterscheiden (vgl. Abb. 1). Jeweils zwei siebte Klassen eines Gymnasiums werden problemorientiert (P1 und P2) und zwei darbietend (D1 und D2) unterrichtet. Verwendete Materialien und Unterrichtsdauer sind möglichst gleich gehalten (vgl. Möller & Rott 2021). In beiden Unterrichtsansätzen wird die Mittelsenkrechte als Antwort auf die folgende Frage erarbeitet: Wo liegen alle Punkte, die gleich weit von zwei gegebenen Punkten entfernt sind?

Unter diesen Bedingungen soll überprüft werden, inwiefern ein problemorientierter Unterricht im Vergleich zu einem darbietenden Unterricht zur Mittelsenkrechte in derselben Unterrichtszeit zu vergleichbaren Lernleistungen und zu vergleichbaren Argumentationen bei den Lernenden führt.

Aus dem Datenpool der Interviewstudie konnten vier Schüler*innen ausgewählt werden, die sowohl in ihrem inhaltlichen Vorwissen (Test 1) als auch in einem direkt an den Unterricht anschließenden Test 2 besonders gut und untereinander vergleichbar abgeschlossen haben. Zu einem deutlich späteren Testzeitpunkt (Test 3) war ein enormer Leistungsabfall bei D120 zu beobachten, während die anderen drei abermals vergleichbare Leistungen aufwiesen. Die Auswertung der Einzelinterviews wird genutzt, um Erklärungsansätze hierfür zu erörtern.

Die Schüler*innen werden in der Einzelinterviewsituation aufge-

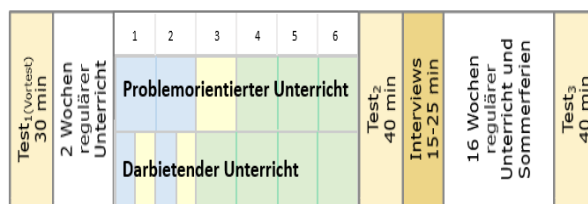


Abbildung 3: Überblick über das Design der Studie und Verortung der Interviewstudie.

	Jan und Selma diskutieren	P133	P217	P231	D120
I) Bewertung der Lösungsansätze.		+//	+//	+//	+//
Wissenselemente der Mittelsenkrechten	IIa) Die Mittelsenkrechte verläuft senkrecht zu BC .	+//	-	-	-
	IIb) Die Mittelsenkrechte verläuft durch die Mitte von BC .	+//	-	-	+//
	III) Wenn ein Punkt P auf der Mittelsenkrechten von AB liegt, dann hat er den gleichen Abstand zu den Punkten A und B .	+//	+//	+//	+//
Wissenselemente zu Mittelsenkrechten im Dreieck	IVa) In jedem Dreieck schneiden sich die Mittelsenkrechten der drei Seiten in einem Punkt (Umkreismittelpunktsatz in Dreiecken).	(in-direkt)	(in-direkt)	+//	(in-direkt)
	IVb) Der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten im Dreieck ist der Mittelpunkt M des Umkreises ...	+//	-	-	(in-direkt)
	IVc) ... mit $r = MA = MB = MC $	+//	-	+//	+//
	V) Da III) für jede der drei Mittelsenkrechten gilt, folgt für den Schnittpunkt S dieser, dass S den gleichen Abstand zu allen Streckenendpunkten besitzt.	+//	+//	+//	+// unvollständig

Abbildung 4: Auszug aus der Auswertungstabelle für die Analysen der Schülerlösungen.

fordert die vorgelegten Aufgabenstellungen zu bearbeiten und durch "lautes Denken" ihre Überlegungen mitzuteilen. Es werden die Schülerantworten zu der Aufgabe "Jan und Selma diskutieren" von allen vier Lernenden transkribiert und analysiert. Die Schüleräußerungen werden mithilfe einer Überblickstabelle (vgl. Abb. 2) zu den verwendeten Wissensselementen der Mittelsenkrechten aufgabenweise ausgewertet. Neben diesem fachlich-inhaltlichen Auswertungsaspekt (1) werden drei weitere Aspekte untersucht: 2) verwendete Argumentationen, 3) sprachliche Verwendungen und 4) Bearbeitungsdauer.

Zusammenfassung der Interviewauswertung

1) mathematisch-fachliche Wissensselemente: Alle vier Lernenden verwenden die drei für eine vollständige Argumentation benötigten Wissensselemente I), III) und V) (vgl. Abb. 2). P133 und D120 führen mehr Wissensselemente als nötig an.

2) Argumentationen: Allen Lernenden gelingt eine passende Argumentation zur Aufgabenlösung. P217 und P231 nutzen vergleichbare Argumentationen mithilfe des Ortslinienkonzeptes. P133 und D120 gelangen über den Umkreis (Zirkelschluss) zu einer Ortslinien-Argumentation.

3) Sprachliche Verwendungen: Allen vier Lernenden gelingt es sich in neuen Aufgabenkontexten über die Mittelsenkrechte und weitere Zusammenhänge angemessen auszudrücken. D120 zeigt als einziger Schwierigkeiten bei der (sprachlich) korrekten Verwendung des Ortslinien-Konzeptes der Mittelsenkrechten. Erst auf Nachfrage differenziert D120 zwischen den Punkten auf der Mittelsenkrechten und der Geraden selbst.

4) Bearbeitungsdauer: P217 und P231 benötigen deutlich weniger Zeit. Sie geben erlernte Argumentationen in eigenen Worten wieder. P133 und vor allem D120 benötigen länger. Die Argumentationen erscheinen neu hergeleitet.

Diskussion und Ausblick

Die Interviewanalysen aller vier Lernenden werden untereinander verglichen. Nachfolgend wird überlegt, inwiefern die vorgefundenen Unterschiede in den Interviews die nach unten abweichenden Leistungen von D120 in Test 3 erklären können.

Alle vier Lernenden nutzen die nötigen Wissensselemente zur Mittelsenkrechten. In den Bezügen zu den fachlichen Argumenten können keine Unterschiede festgestellt werden. Unterschiede bestehen in der logischen Beweisstruktur, so setzen P133 und D120 zu begründende Informationen bereits voraus. Dies ist beim anfänglichen Beweisen häufig festzustellen

(Brunner 2014, S. 85) und kann hier auch die längere Bearbeitungszeit erklären. Eine andere Erklärung liefert die Beobachtung, dass D120 Argumentationen neu zu konstruieren scheint. Informationen, die P217 und P231 als gelernte Inhalte aus dem Langzeitgedächtnis abzurufen scheinen, werden von D120 zögerlich genannt, anschließend sortiert und dann zusammengefügt. Das erinnert an den Unterschied zwischen Laien und Novizen.

Bei der sprachlichen Formulierung fasst D120 die Mittelsenkrechte nicht als Punktemenge auf. Mögliche Ursachen dafür sind: I) D120 formuliert unsauber und verwendet den kürzeren und vielleicht in der Alltagssprache gebräuchlicheren Begriff der Geraden. II) Das Ortslinien-Konzept ist nicht vollständig verstanden worden. Die Bedeutung, dass jeder Punkt auf der Mittelsenkrechten gleich weit von den beiden Streckenendpunkten entfernt ist, wurde nur in Ansätzen erkannt, so dass in der Interviewsituation Zusammenhänge und Begründungen neu konstruiert werden müssen.

Die Vermutung I) kann durch die folgende Aussage von D120 gestützt werden: „Ich bin nicht so gut im Erklären“. Auch für die Vermutung II) lassen sich Hinweise finden: Die falsche Verwendung des Umkreisradius und weitere kognitive Hürden können beobachtet werden. Eindeutige Interpretationen können anhand dieser Fallbeispiele nicht vorgenommen werden. Sie bieten einen Anlass für weitere Untersuchungen zu der Fragestellungen: Inwiefern können sprachliche Schwierigkeiten bei der Formulierung von mathematischen Konzepten, wie dem Ortslinienkonzept der Mittelsenkrechten, als Hinweis dafür dienen, dass möglicherweise eben diese mathematischen Konzepte, trotz aktuell guter Lernleistungen, langfristig nicht wieder abgerufen werden können?

Literatur

- Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Springer Spektrum (Mathematik im Fokus).
- Möller, A. & Rott, B. (2019). Die Mittelsenkrechte – stoffdidaktische Analyse und Bezüge zum Unterricht. In É. Vásárhelyi & J. Sjuts (Hrsg.), *Auch wenn A falsch ist, kann B wahr sein. Was wir aus Fehlern lernen können*. Ervin Deák zu Ehren (Mathematiklehren und -lernen in Ungarn). S. 191-206. Münster: WTM.
- Möller, A. & Rott, B. (2021). Problemlösend zur Mittelsenkrechten – Auswertung von Unterrichtseinstiegen. In B. Rott (Hrsg.), *Der Mathematikunterricht – Schwerpunkt Problemlösen im Mathematikunterricht 67(1)*, S. 4-14.
- Prediger, Susanne (2013). Sprachmittel für mathematische Verstehensprozesse – Einblicke in Probleme, Vorgehensweisen und Ergebnisse von Entwicklungsforschungsstudien. In A. Pallack (Hrsg.), *Impulse für eine zeitgemäße Mathematiklehrer-Ausbildung. MNU-Dokumentation der 16. Fachleitertagung Mathematik*, S. 26-36.
- Woolfolk, A., Hughes, M. & Walkup, V. (2008). *Psychology in education*. Harlow: Pearson Longman.