Norbert CHRISTMANN, Kaiserslautern

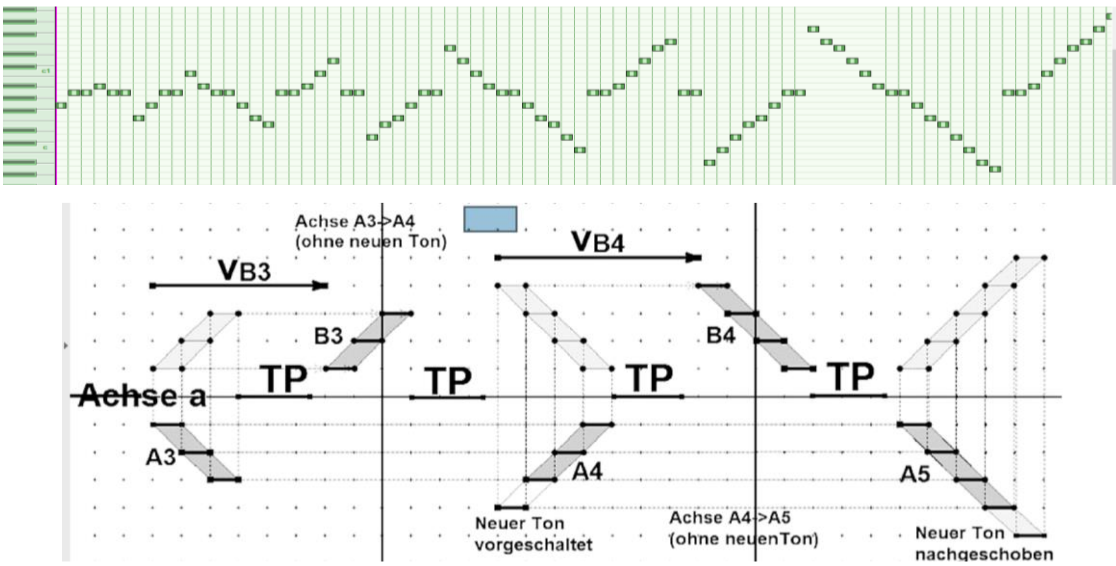
# Mathematik hinter der Musik – Musik über Mathematik Anregungen für den Mathematikunterricht in den Sekundarstufen

Dieser Beitrag stellt Anknüpfungspunkte (inkl. Literaturhinweise) zum Themenkreis Mathematik und Musik für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen zusammen, insbesondere solche, die Mathematiklehrende auch ohne Musikstudium unterrichten können. Dabei kann Softwarenutzung zur Überwindung der Scheu vor Anwendungen aus der Musik helfen.

## Geometrie und Musik

Hält man bei Tonereignissen Klangfarbe und Lautstärke konstant, so kann der verbleibende Ablauf eines Musikstückes im Tonhöhen-Zeit-Diagramm beschrieben werden, in Musiksoftware auch in Form der Pianorolldarstellung. In dieser kann analog zu DGS-Systemen gearbeitet werden, insbesondere können sehr gut musikalische Transformationen (Transposition, Umkehrung, Krebs) der Motive verfolgt werden. Vergleiche mit geometrischen Abbildungen bieten sich an, entsprechende Aufgaben finden sich in Schulbüchern (z. B. Fokus RP 8, Cornelsen Verlag, S. 96/97).

Die konsequente Geometrienutzung durch A. Pärt in „Spiegel im Spiegel“ beim schrittweisen Aufbau der F-Dur-Skala erkennt man in der Pianorolldarstellung, besonders deutlich in der DGS-Übertragung, bei der nur Skalentöne als Ordinate auftreten: Spiegelung von A3 an waagrechter a-Achse mit anschließender Translation führt zu B3. Spiegelung von A3 an passender senkrechter Achse mit Vorschalten des neuen Tons führt zu A4.




**Piano-Rolleditor- und DGS-Auszug der Melodiestimme A. Pärt: Spiegel im Spiegel**

**Beispiel zur Statistik: Intonation bei Blasinstrumenten**

Blasmusiker*innen stimmen einen Ton ihres Instrumentes mittels Stimmgerät auf die exakte Höhe ein, danach nutzen sie Grifftabellen zum Spielen. Dabei treten bauart- und fähigkeitsbedingt Abweichungen von der Norm auf.

**Abweichungen** werden bei Stimmgeräten **in Cent** angezeigt. Dazu wird eine Oktave gleichstufig in 1200 Miniintervalle unterteilt, jede Klaviertaste (Frequenz $f_0$) wird dabei quasi durch 100 Tasten (Frequenzen $f_0C^k$ (k = 0, …, 99 mit C = 2^(1/1200)) ersetzt. Die Abweichung in Cent zwischen dem Zielton mit Frequenz f und dem erreichten Ton mit Frequenz f‘ kann dann durch die Zahl der Tasten zwischen den zugehörigen Tasten beschrieben werden, durch C(f,f‘) := 1200 *lg($f/f_o$)/lg(2) auch berechnet werden.


**Naturtöne zum Grundton C, tiefes C nicht genutzt**

**Ventile einer Ventilposaune**

Für Blechblasinstrumente (z. B. Trompete) kann man die bauartbedingten Fehler grob begründen. Diese Instrumente nutzen die Naturtonreihen. Für Zwischentöne ist die Rohrlänge zu verlängern. Bei der Zugposaune geschieht dies über den Zug, bei Ventilinstrumenten muss der Schall bei gedrücktem Ventil einen zusätzlichen Bogen durchlaufen. Dadurch wird die aktuelle Frequenz niedriger. Die Länge der Ventilbögen wird so gewählt, dass beim Drücken des mittleren Ventils der Ton um einen Halbton (HT) erniedrigt wird, Drücken des ersten (dritten) Ventils senkt den Ton um einen Ganzton (drei HT). Durch gleichzeitiges Drücken mehrerer Ventile werden auch größere Erniedrigungen erreicht (1 (0) für Ventil (nicht) gedrückt) :

110: 3 HT;  011: 4HT;  101: 5HT;  111 6 HT.

Beim Ausgangston g‘ werden mit diesen Griffen e‘, d#‘, d‘, c#‘ erreicht.

Leider sind die so durch Mehrfachdrücken gebildeten Töne zu hoch, denn die Summe der zugehörigen Rohrverlängerungen ist zu klein.

Die erforderlichen Längen der Ventilbögen lassen sich leicht berechnen. Für die zu einer Rohrlänge L gehörende Frequenz *f* gilt $f \sim 1/L$. Ist die Ausgangsrohrlänge $L_o$ mit der Frequenz $f_o$ und $q$:= 2^(1/12), so gilt für die Frequenz $f(k)$ des Tones, der $k$ Halbtöne tiefer liegt als der zu $f_0$ gehörenden

$$f(k) = f_0 q^{-k}, \text{ über } f/f_0 = L_0/L(k) = q^{-k}$$

ergibt sich für die zugehörige Länge $L(k)$ die Bedingung $L(k) = q^k L_0$.

Daher gibt $p(k) := 100(q^k - 1)$ den Prozentsatz an, um den das Rohr zu verlängern ist, damit die Frequenz um k Halbtöne nach unten geht. Mit Hilfe der Centrechnung ergeben sich für die o.a. Zwischentöne e', d#', d', c#' (Rohrlängen $(q+q\hat{}2-1)L_o$, $(q+q\hat{}3)L_o$, $(q\hat{}2+q\hat{}3)L_o$, $(q+q\hat{}2+q\hat{}3)L_o$) in Cent die Abweichungen 10,6; 15,5; 30.3; 53,6, also bei weitem zu hohe Werte. Diese können nicht durch Ansatz allein ausgeglichen werden, daher müssen die Instrumentenbauer (z. B. durch zusätzliche Züge) nachhelfen. Generell zeigt sich, dass Modellrechnungen allein nicht zum Ziel führen, sondern auch experimentelle (handwerkliche) Methoden notwendig sind.

Wenn also in einer Klasse Musiker*innen sind, können mit denen **Intonationstabellen** (Stimmgerätausschläge zur Datensicherung filmen) aufgenommen werden, um diese für statistische Überlegungen zu nutzen. Für das weitere Vorgehen siehe Christmann (2012) (Arbeit auch im Netz abrufbar).

Die Auswertung kann mit dem von Van de Giessen (2011) beschriebenen Programm **VUstat** (vgl. Link) erfolgen. Dessen Modul **Metronom** zum Testen rhythmischer Fähigkeiten kann auch für unregelmäßige Rhythmen genutzt werden, z.B. für den 5/4-Takt mit Schlägen auf 1,4,5 oder auch 1, 2 und, 4, 5. Es ergeben sich beim Vergleich der Ergebnisse der Probanden eventuell heftige Diskussionen, aber keine eindeutigen Lösungen.

In den **Themenkreis Zufall als gestaltendes Mittel** kann z. B. mit dem Video zu M. Duchamps *„La marie mise a nue par ses célebataires, même: Erratum musical"* eingeführt werden (Link s.u.).

Durch die Aufgabe, Vorgaben aus dem Blockfötenquartett-Anfang von B. Margolis (Tonhöhen durch natürliche Zahlen 1, 2, …, 24 festlegen)

*70 '' Lange Töne tief; 10 '' Große Pause; 30 '' Bass Solo – Lange Töne in Sprüngen; 25 '' Tenor gebunden; 10 '' Alt gebunden; 20 '' Sopran gebunden; 5 '' G. P.; 15 '' Höhe Töne – schnelles staccato; 5 '' G. P.; 30'' Lange Töne – nur Akkorde.*

zu modellieren, erfahren die Lernenden die Bedeutung unterschiedlicher Verteilungen beim zufälligen Gestalten von Musik, vgl. auch die Methoden von I. Xenakis (kurz beschrieben in Christmann 2008).

Die Methode von **D. Cope**, vorhandene Musik in typische Bestandteile zu zerhacken, diese nach ihrer Funktion in „Urnen" sortiert zu sammeln und nach Vorgabe einer Form daraus durch Ziehen aus den Urnen zu neuen Werken zusammen zu setzen (Link s.u.), kann bei überschaubarem Ausgangsmaterial auch händisch genutzt werden. Beispiel: Man nehme einen Jazzstandard mit Akkordangaben, dazu ein Heft mit Jazz-Improvisationen im Stil von XY. Erwürfeln (nach geeigneten Mechanismus) halber Takte aus dem Heft gemäß Harmonien des Standards ergibt eine Improvisation zu diesem.

## Literatur

Block, J. (2011): Interkulturelle Aspekte im Mathematikunterricht: Tonsysteme. In: *Der Mathematikunterricht, Heft 1*, S. 24-34

Christmann, N. (2016): Spiegel im Spiegel – zur Geometrie hinter der Musik von Arvo Pärt. In Beyer, U. (Hrsg.): *Die Basis der Vielfalt, Geometrie als Grundlage und Anregung des Denkens, 10. Tagung der DGfGG*. Berlin usw.: Springer. S. 98-111

Christmann, N. (2012): Intonation von Blasinstrumenten im Statistikunterricht. In *Stochastik in der Schule* Jahrgang 32, Heft 2, S. 9-15.

Christmann, N. (Hrsg.) (2011): *Der Mathematikunterricht Heft 1, Schwerpunkt Mathematik und Musik*, darin Musikalische Koordinaten (S. 4-14), Mathematik gestaltet (mit) Musik (S. 15-23), Mathematik hinter dem Griffbrett der Gitarre (S. 35-43)

Christmann, N. (2008): Stochastik und Musik, Einige Ansätze für fächerübergreifenden Unterricht. In Eichler A. & Meyer J. (Hrsg.). *Anregungen zum Stochastikunterricht Band 4, Arbeitskreis „Stochastik in der Schule“* (S. 77-87). Hildesheim: Franzbecker

Christmann, N. (1998a): Unterrichtsprojekte zum Themenkreis Stochastik und Musik. In Christmann, N. (Hrsg.): *Mathematik in Verbindung mit Literatur, Philosophie und Musik. Skripten zur Fachdidaktik, Band 6 des Fachbereichs Mathematik der Universität Kaiserslautern.* S. 97-173

Christmann, N. (1998b): Der Akmui-Wobü-98-Blues. In: Hischer, H. (Hrsg.) Proceedings des AK Mathematik und Informatik, Hildesheim: Franzbecker. S. 131-136

Enders, B. (Hrsg.) (2005): *Mathematische Musik – musikalische Mathematik.* Saarbrücken: Pfau

Götze, H. & Wille, R. (Hrsg.) (1985): *Musik und Mathematik, Salzburger Musikgespräch 1984 unter Vorsitz von H. von Karajan.* Berlin usw.: Springer

Hall, D. E. (1997). *Musikalische Akustik, Ein Handbuch*. Mainz: Schott

Werner-Jensen, K. (1985): Mathematik und zeitgenössische Komponisten – eine Umfrage. In Götze & Wille (1985), S. 64-70

Schreiner, M. (2011): Der Klang von Musikinstrumenten – erklärt mit Hilfe der Synthese von Klängen. In: *Der Mathematikunterricht Heft 1*, S. 44-53

Van de Giessen, C. (2011): Statistik lernen mit einem Metronom. In: *Der Mathematikunterricht Heft 1*, S. 54-61

Wille, R. (1985): Musiktheorie und Mathematik. In: Götze & Wille (1985), S. 4-31.

### Internet-Links (Stand 1. März 2018)

https://vimeo.com/54930332: Video zu *La marie mise a nue par ses célebataires, même: Erratum musical* – Marcel Duchamp (1913)

https://www.youtube.com/watch?v=4n6aB4aasyg *:* Eine Aufführung der *Hauptsatzkantate* von F. Wille (Vertonung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung)

http://www.editions75.com/ Werke von Tom Johnson (mit Themen aus der Mathematik)

https://www.youtube.com/watch?v=6yXQinqLmqc Eine Aufführung *Narayanas Kühe* von Tom Johnson (Vertonung einer Rekursionsformel)

http://music.ucsc.edu/faculty/david-cope Homepage von D. Cope mit Beispielen zu seiner Methode, neue Klassiker mittels Computer zu erwürfeln

http://vustat.de/index.html Deutsche Homepage des in den Niederlanden entwickelten Statistikprogramms VUstat, Download einer Entwicklungsversion derzeit kostenlos