Zur Topologie bewerteter Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

Der Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Dortmund
vorgelegt von

Sebastian Scheel

28.05.2024

Dissertation

Zur Topologie bewerteter Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen

Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. Franz Kalhoff

Zweitgutachter: Prof. Dr. Detlev Hoffmann

Tag der mündlichen Prüfung: 02.09.2024

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Die Betrachtung projektiver Ebenen und ihrer geometrischen Eigenschaften ist ein klassisches Untersuchungsgebiet in der Geometrie, welches bereits seit mehreren Jahrhunderten Forschungsgegenstand vieler Mathematiker ist. Eine zentrale Rolle kommt in dieser Theorie dem *Satz von Desargues* zu: Dieser geometrische Schließungssatz ist bekanntermaßen in den klassischen projektiven Ebenen über einem (in dieser Arbeit stets nicht notwendig kommutativen) Körper erfüllt und erlaubt es ebenso, in einer projektiven Ebene, welche diesen erfüllt, bzgl. eines fest gewählten Viereckes Koordinaten derart einzuführen, dass die projektive Ebene gerade als projektive Ebene über einem Körper darstellbar ist. Ebenso sind bereits die projektiven Ebenen über kommutativen Körpern charakterisiert worden - sie sind genau die projektiven Ebenen, in denen das *Axiom von Pappus* gilt. In diesen Fällen ist es somit möglich, geometrische Eigenschaften der projektiven Ebene durch algebraische Eigenschaften einer zugrunde liegenden Koordinatenstruktur auszudrücken und zu charakterisieren.

Hall führte 1943 in seiner Arbeit [12] diesen bekannten Koordinatisierungsprozess nun für eine beliebige projektive Ebene durch und erhielt so als Koordinatenstruktur der projektiven Ebenen eine algebraische Struktur, welche heutzutage als *Ternärkörper* bekannt ist; ebenso wies er nach, dass in Analogie zum Körperfall ein gegebener Ternärkörper in natürlicher Weise eine projektive Ebene hervorbringt. Da in allgemeinen projektiven Ebenen neben der Existenz eines für die Koordinatisierung nötigen Viereckes nur die jeweils eindeutige Existenz von Verbindungsgeraden und Schnittpunkten zur Verfügung steht, weist ein Ternärkörper im Allgemeinen deutlich schwächere algebraische Eigenschaften als etwa ein Körper oder kommutativer Körper auf - am auffälligsten (und namensgebend) ist hierbei, dass bei dieser Konstruktion auf der koordinatisierenden Menge K nicht mehr zwei binäre, innere Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sondern stattdessen eine ternäre, innere Verknüpfung $T : K \times K \times K \longrightarrow K$ entsteht. Es ist zwar möglich, mittels der ternären Verknüpfung wieder zwei binäre Verknüpfungen auf K einzuführen; diese reichen im Allgemeinen aber nicht aus, um den Ternärkörper und damit die darüber liegende projektive Ebene eindeutig zu bestimmen.

Aus Sicht der projektiven Geometrie stellen die Ternärkörper als Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen somit eine Verallgemeinerung der Körper und der kommutativen Körper dar. Dieser Umstand motiviert natürlich die Übertragung vieler Konzepte und Ergebnisse für Körper und kommutative Körper auf das Niveau der Ternärkörper. Mit Hinblick auf den Gegenstand dieser Arbeit sind hierbei vor allem die *uniformen Bewertungen* auf Ternärkörpern von Kalhoff hervorzuheben, welche 1988 in [18] eingeführt worden sind und die Bewertungen der Körper und kommutativen Körper widerspiegeln. In dieser Arbeit werden wir einen speziellen Aspekt der uniformen Bewertungen auf Ternärkörpern aufgreifen und die *Topologien*, welche von diesen induziert werden, untersuchen. Das Ziel hierbei ist eine Charakterisierung dieser Topologien im Stil der Charakterisierung der Topologien bewerteter Körper von Kowalsky, Dürbaum [28].

Im Folgenden wird noch auf den Aufbau dieser Arbeit eingegangen und eine Übersicht über die einzelnen Kapitel gegeben.

Kapitel 1 befasst sich mit den grundlegenden Begriffen und Definitionen, die wir in dieser Arbeit betrachten werden. Ebenso werden wir bekannte Ergebnisse diskutieren und Beispiele aufführen. Im Vordergrund stehen hierbei die Einführung der Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen und ihrer Hierarchie sowie die Untersuchung der von der ternären Verknüpfung abgeleiteten binären Verknüpfungen. Wir werden daher ebenfalls den Begriff einer *Loop* einführen und diskutieren. Schließlich werden wir uniforme Bewertungen auf Ternärkörpern definieren, ihre zugehörige Topologie konstruieren und das Kapitel mit einer Liste uniform bewerteter Ternärkörper abschließen.

In Kapitel 2 werden wir unser Vorgehen bei der Charakterisierung der Topologien uniformer Bewertungen motivieren und zwei Aspekte hervorheben, die sich als maßgebend für die Übertragung der Klassifikation von Kowalsky, Dürbaum [28] herausstellen werden: Die Diskussion *nilpotenter* und *neutraler Elemente* eines topologischen Ternärkörpers sowie der Eigenschaft eines topologischen Ternärkörpers, *vom Typ V* zu sein. Zur Diskussion des ersten Aspektes werden wir in diesem Kapitel *Nilpotenzmengen* neu einführen und eine Übertragung des Beschränktheitsbegriffes topologischer Körper auf topologische Ternärkörper diskutieren. Anschließend werden *nilpotente* und *neutrale Elemente* topologischer Ternärkörper eingeführt und ihre Eigenschaften in Hinblick auf die Topologie untersucht.

Kapitel 3 befasst sich dann mit der Diskussion des zweiten obigen Aspektes: Hierzu werden wir topologische Ternärkörper vom Typ V durch eine Modifikation bzw. Verallgemeinerung der von Szambien [46] bereits eingeführten Übertragung dieses Begriffes auf topologische Ternärkörper definieren und einige direkte Folgerungen dieser Definition diskutieren. Anschließend werden wir diese Definition mit dem vorangegangenen Kapitel in Verbindung setzen und die nilpotenten und neutralen Elemente topologischer Ternärkörper vom Typ V untersuchen.

In Kapitel 4 befassen wir uns dann schließlich mit den Topologien uniformer Bewertungen auf Ternärkörpern. Zunächst werden wir die nilpotenten und neutralen Elemente sowie die Typ-V-Eigenschaft dieser topologischen Ternärkörper diskutieren und weiter den Begriff einer *uniformen Rang-1-Bewertung* einführen, welcher uns die Formulierung unserer angestrebten Charakterisierung erleichtern und diese verschönern wird. Diese Charakterisierung der Topologien uniformer Bewertungen wird uns schließlich in (4.12) als Übertragung von Kowalsky, Dürbaum [28] auf topologische Ternärkörper gelingen und einige Korollare nach sich ziehen, die vor allem die Topologien uniformer Bewertungen mit einer abelschen Wertegruppe in schöner Weise klassifizieren.

Das Ziel in Kapitel 5 ist es nun, die bisher erfolgte Charakterisierung der Topologien uniformer Bewertungen aus anderer Perspektive als eine Charakterisierung der topologischen Ternärkörper vom Typ V aufzufassen: Da sich im klassischen Fall topologischer kommutativer Körper vom Typ V die Topologie nicht nur als die Topologie einer Bewertung, sondern ebenfalls als die Topologie eines *Absolutwertes* des Körpers ergeben kann, stellt sich schnell die Frage nach der Übertragung dieses Konzeptes auf Ternärkörper und somit auf einen Abschluss der Charakterisierung topologischer Ternärkörper vom Typ V - zumindest im Fall eines beschränkten, erweiterten Radikals. Hierzu werden wir in kompletter Analogie zur Einführung der uniformen Bewertungen als Verallgemeinerung der Bewertungen von Körpern den Begriff eines *uniformen Absolutwertes* einführen und in der Tat nachweisen, dass ihre zugehörigen Topologien unsere Charakterisierung komplettieren. Die relativ ertraglose Suche nach Beispielen dieses Konzeptes - im Wesentlichen sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ die einzig bekannten, vollständigen Ternärkörper mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert - lässt allerdings wenig Hoffnung, hierbei 'neue' topologische Ternärkörper abgedeckt zu haben. Dieser Intuition folgend werden wir daher im Anschluss noch erfolgreich einige Kriterien über die eventuelle Nicht-Existenz für Ternärkörper mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert, welche nicht bereits Alternativkörper sind, behandeln.

In Kapitel 6 entfernen wir uns von der bisherigen Fragestellung der Topologien uniformer Bewertungen bzw. Absolutwerte sowie der topologischen Ternärkörper vom Typ V und wenden uns dem zweiten Themenbereich dieser Arbeit zu: der Konstruktion uniform bewerteter Quasikörper im Stile der Dickson-Konstruktion [8] endlicher Fastkörper. Da wir den Fokus dieser Arbeit auf den ersten Themenkomplex legen - und der Umfang dies widerspiegelt - , wird anstatt an dieser Stelle zu Beginn des sechsten Kapitels eine spezifische Einleitung in dieses Thema gegeben. Anschließend werden wir eine *v-treue Ableitung* eines uniform bewerteten Quasikörpers $(K, +, \cdot, v)$ als eine gewisse Familie von Automorphismen des Vektorraumes K, welche zugleich Isometrien des ultrametrischen Raumes (K, d_v) sind, einführen und nachweisen, dass diese stets eine weitere Quasikörper-Multiplikation $\diamond$ definiert, mit der $(K, +, \diamond, v)$ ebenfalls einen uniform bewerteten Quasikörper bildet, und dass in der Tat jede solche Quasikörper-Multiplikation auf diese Weise entstehen muss. Weiter werden wir die Auswirkungen sphärischer Vollständigkeit auf v-treue Ableitungen in diesem Zusammenhang betrachten.

Im letzten Kapitel 7 werden wir uns speziell den vollständigen, uniform bewerteten Quasikörpern $(K, +, \cdot, v)$ zuwenden, deren uniforme Bewertung v gerade die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ als Werteloop und eine triviale Einschränkung auf den Primkörper von K besitzt: Das Ziel ist es hierbei zu zeigen, dass diese stets mittels einer v-Ableitung aus einem bewerteten kommutativen Körper entstehen; insbesondere ist v also die Bewertung eines kommutativen Körpers, welcher dieselbe Addition wie K besitzt. Es wird uns sogar gelingen, diesen Körper als den Laurentreihenkörper eines kommutativen Körpers zu identifizieren, sodass v sich gerade als seine Grad-Bewertung ergibt. Als Abschluss der Arbeit werden wir eine Familie von Beispielen solcher diskret uniform bewerteter Quasikörper konstruieren.

Abschließend möchte ich noch den Menschen danken, die mir das Schreiben dieser Arbeit ermöglicht, mich beim Verfassen stets unterstützt und die nötige Motivation gegeben haben: Zunächst bedanke ich mich natürlich bei meinem Betreuer Franz Kalhoff, der mir eine Anstellung an der Universität ermöglichte, mir in vielen hilfreichen Gesprächen, welche ich stets mit neuen Ideen und Sichtweisen verließ, mit seinem Fachwissen zur Seite stand und mir dabei dennoch die Freiheit ließ, diese Arbeit stückweise meinen eigenen Interessen und Ansätzen entsprechend aufzubauen. Auch möchte ich mich bei meinen Kollegen und Kommilitonen am Lehrstuhl bedanken, deren Fragen und Gespräche stets meinen Blick auf das Thema neu schärften. Schließlich danke ich noch meiner Frau, die mir in allen Phasen dieses Prozesses stets zur Seite stand und mich immer unerschütterlich unterstützte.

Kapitel 1

Grundlegende Definitionen und bekannte Ergebnisse

In diesem ersten Kapitel möchten wir diejenigen Definitionen und bekannten Folgerungen festhalten, auf die wir im Laufe der Arbeit zurückgreifen werden. Auch die in den folgenden Kapiteln auftretenden Notationen sollen hier eingeführt werden. Schließlich werden noch einige Beispiele der auftretenden uniform bewerteten Koordinatenstrukturen aufgelistet.

Loops

Zunächst möchten wir uns den *Loops* zuwenden, welche als grundlegende binäre Struktur eine zentrale Rolle in dieser Arbeit einnehmen werden. In einer Loop stehen neben der eindeutigen Lösbarkeit zweier Arten von Gleichungen nur noch die Existenz eines neutralen Elementes zur Verfügung; insbesondere muss eine Loop nicht notwendig assoziativ sein. Sie stellen somit eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Gruppe dar.[1] Für eine Einführung in das Thema der Loops sei neben der Arbeit von Albert [1] vor allem auf das Buch von Bruck [3] verwiesen.

Viele der weiterführenden, strukturgebenden Definitionen von Gruppen sind bereits erfolgreich auf Loops übertragen worden; so ist etwa die Theorie von Loops mit einer *Anordnung*, welche die von Gruppen üblichen Monotoniegesetze erfüllt, gut ausgebaut worden. Ein guter Einstieg in das Thema der *angeordneten Loops* findet sich etwa im Buch von Priess-Crampe [34]; weiter sei zu diesem Thema auch auf den einführenden Paragraphen des Kapitels von Kalhoff, Priess-Crampe [6, §XIV] verwiesen.

[1] In der Literatur findet sich auch der Begriff *Quasigruppe mit neutralem Element* für eine Loop.

(1.1) Definition:

(a) Eine nicht leere Menge L zusammen mit einer binären, inneren Verknüpfung $\cdot : L \times L \longrightarrow L$ heißt *Loop*, wenn die folgenden Axiome gelten:

(L1) Für alle $x, y \in L$ existieren jeweils eindeutige $a, b \in L$ mit $x \cdot a = y$ und $b \cdot x = y$. Wir notieren diese Elemente als ${}_{x}\backslash^{y} := a$ bzw. ${}^{y}/_{x} := b$.

(L2) Es gibt ein Element $1 \in L$, sodass für alle $x \in L$ stets $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ gilt.

Eine Loop, in der das Assoziativgesetz gilt, ist daher bereits eine Gruppe.
Für eine Loop $(L, \cdot)$ in multiplikativer Schreibweise schreiben wir auch kurz $xy := x \cdot y$ für $x, y \in L$, wenn die Verknüpfung aus dem Kontext gegeben ist. Wir nennen eine Loop $(L, \cdot)$ *kommutativ*, wenn $xy = yx$ für alle $x, y \in L$ gilt.
Ist eine Loop $(L, +)$ in additiver Schreibweise gegeben, so wird ihr neutrales Element mit $0 \in L$ bezeichnet und für $x, y \in L$ schreiben wir die eindeutig existierenden Lösungen der obigen Gleichungen als $x + (y \boxminus x) := y$ bzw. $(y - x) + x := y$. Ebenso notieren wir für alle $x \in L$ in gewohnter Weise $-x := 0 - x$ sowie $\boxminus x := 0 \boxminus x$.

(b) Es seien $(L, \cdot)$ und $(L', \cdot')$ jeweils Loops. Eine Abbildung $\varphi : L \longrightarrow L'$ heißt *Loop-Homomorphismus*,[1] wenn $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot' \varphi(y)$ für alle $x, y \in L$ gilt.

(c) Es sei $(L, \cdot)$ eine Loop. Eine Teilmenge $M \subset L$ heißt *Unterloop von* L, wenn $(M, \cdot)$ mit der auf $M \times M$ eingeschränkten Loop-Verknüpfung wieder eine Loop bildet.

(d) Eine Loop $(L, \cdot, \leq)$ mit einer Ordnungsrelation[2] $\leq$ auf L heißt *angeordnete Loop*, wenn sie für alle $x, y, z \in L$ das Monotoniegesetz

$$x \leq y \qquad \Longrightarrow \qquad xz \leq yz \quad \text{und} \quad zx \leq zy$$

erfüllt. Für $x, y \in L$ mit $x \neq y$ und $x \leq y$ schreiben wir wie gewohnt auch $x < y$.

(e) Es sei $(L, \cdot)$ eine Loop. Eine Teilmenge $M \subset L$ heißt *normal (in L)*, wenn für alle $x, y \in L$ jeweils gelten:[3]

$$Mx = xM \ , \quad M(xy) = (Mx)y \ , \quad (xM)y = x(My) \ , \quad (xy)M = x(yM) \ .$$

(1.2) Bemerkung:

Es seien $(L, \cdot)$ eine Loop, $x, y \in L$ und $M \subset L$.

(a) (BRUCK [3, S.9]) Es gelten[4]

$${}^{(xy)}\!/_{y} = x = {}_{y}\backslash^{(yx)} \qquad \text{sowie} \qquad {}_{({}^{x}/_{y})}\backslash^{x} = y = {}^{x}\!/_{({}_{y}\backslash^{x})} \ .$$

[1] Wie bei Gruppen-Homomorphismen nennen wir einen surjektiven Loop-Homomorphismus auch *Loop-Epimorphismus* und einen bijektiven Loop-Homomorphismus einen *Loop-Isomorphismus*.

[2] Hiermit meinen wir eine reflexive, antisymmetrische, transitive, totale Relation auf L.

[3] Hierbei verwenden wir die gewohnte Komplexschreibweise $Mx := \{mx \in L \mid m \in M\}$; entsprechend auch für die anderen auftretenden Mengen.

[4] Für eine Loop $(L, +)$ in additiver Schreibweise gelten für alle $x, y \in L$ somit $(x + y) - y = x = (y + x) \boxminus y$ sowie $x - (x \boxminus y) = y = x \boxminus (x - y)$.

(b) (Albert [1, S.512]) M ist genau dann eine Unterloop von L, wenn M nicht leer und jeweils unter der Loop-Verknüpfung sowie den beiden einseitigen Quotientenbildungen $\cdot/.$ und $.\backslash\cdot$ abgeschlossen ist, d.h. genau dann, wenn $M \neq \emptyset$ ist und MM, ${}^{M}/_{M}$, ${}_{M}\backslash^{M} \subset M$ gelten.[1,2]

(c) (Smiley [45, Rem. 3]) M ist genau dann normal, wenn für alle $x, y \in L$ gilt:

$$(xM)y \quad = \quad x(yM) \quad = \quad (xy)M \ .$$

(d) Die Mengen $\emptyset$, $\{1\}$ und L sind offenbar[3] stets normale Teilmengen von L.

(e) (Bruck [3, S.61]) Ist M eine normale Unterloop von L, so bildet die Menge

$$L/M \quad := \quad \{ \ Mx \in \mathfrak{P}(L) \ \mid \ x \in L \ \}$$

zusammen mit der Komplexverknüpfung $(Mx)(My) := M(xy)$ für $x, y \in L$ eine Loop mit Einselement M.

(f) Ist $(L, \cdot, \leq)$ eine angeordnete Loop, so gelten für alle $x, y, z \in L$ offenbar[4] auch:

$$x \ \leq \ y \qquad \Longrightarrow \qquad {}^{x}/_{z} \ \leq \ {}^{y}/_{z} \ , \quad {}_{z}\backslash^{x} \ \leq \ {}_{z}\backslash^{y} \ , \quad {}^{z}/_{y} \ \leq \ {}^{z}/_{x} \ , \quad {}_{y}\backslash^{z} \ \leq \ {}_{x}\backslash^{z} \ .$$

(1.3) Beispiel:

(a) (Hughes [14, S.522], Priess-Crampe [34, S.7f.]) Ist ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r \neq 1$ fest gewählt, so bildet $\mathbb{R}$ zusammen mit der Verknüpfung

$$x \dot{+} y \quad := \quad \begin{cases} x + y & \text{falls } \ xy \geq 0 \\ x + ry & \text{falls } \ xy < 0 \ \text{ und } \ |x| \geq r|y| \\ r^{-1}x + y & \text{falls } \ xy < 0 \ \text{ und } \ |x| < r|y| \end{cases} \qquad \text{für } \ x, y \in \mathbb{R}$$

und der gewöhnlichen Anordnung auf $\mathbb{R}$ eine angeordnete Loop $(\mathbb{R}, \dot{+}, \leq)$ mit neutralem Element 0, welche weder assoziativ noch kommutativ ist.

(b) (Sklifos [44, S.36f.]) Die Menge $\mathbb{R}$ bildet zusammen mit der Verknüpfung

$$x \oplus y \quad := \quad \begin{cases} x + y + xy & \text{falls } \ x, y > 0 \\ x + y & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } \ x, y \in \mathbb{R}$$

und der gewöhnlichen Anordnung auf $\mathbb{R}$ eine angeordnete, kommutative Loop $(\mathbb{R}, \oplus, \leq)$ mit neutralem Element 0, welche nicht assoziativ ist.

[1] Hierbei verwenden wir erneut die gewohnte Komplexschreibweise $MM := \{ab \in L \mid a, b \in M\}$; entsprechend auch für die Mengen ${}^{M}/_{M}$ sowie ${}_{M}\backslash^{M}$.

[2] Für eine Loop $(L, +)$ in additiver Schreibweise ist $M \subset L$ somit genau dann eine Unterloop von L, wenn $M \neq \emptyset$ ist und $M + M$, $M - M$, $M \mathbin{=} M \ \subset \ M$ gelten.

[3] Betrachte für $x, y \in L$ die Gleichungen aus (c): Für $M = \emptyset$ sind die drei auftauchenden Mengen alle gleich $\emptyset$; für $M = \{1\}$ ergeben sich diese drei Mengen alle zu $\{xy\}$; und für $M = L$ entsprechenden diese drei Mengen jeweils wieder L, da die Links- bzw. Rechtsmultiplikation mit einem Element aus L nach (L1) bijektiv ist.

[4] Die ersten beiden Ungleichungen folgen direkt aus der Kontraposition des Monotoniegesetzes aus (1.1,d); und wäre in dieser Situation etwa ${}^{z}/_{x} < {}^{z}/_{y}$, so folgte mit dem Monotoniegesetz und der Transitivität der Widerspruch $z \ = \ {}^{z}/_{x} \cdot x \ < \ {}^{z}/_{y} \cdot x \ \leq \ {}^{z}/_{y} \cdot y \ = \ z$; die letzte Ungleichung folgt analog hierzu.

In dem folgenden Satz werden wir einige einfache Aussagen für normale Teilmengen einer Loop festhalten. Da in der Literatur allerdings meist *normale Unterloops* anstatt beliebiger normaler Teilmengen im Zentrum der Untersuchung stehen, werden wir die Behauptungen dieses Satzes explizit nachweisen. Für die Diskussion einiger dieser Behauptungen für normale Unterloops siehe etwa Albert [1, S.513ff.] oder Bruck [3, §IV.1].

(1.4) Lemma:

Es seien $(L,\cdot)$ eine Loop, die Teilmengen $M, M_i, N \subset L$ $(i \in I)$ normal[1] sowie $N' \subset L$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Es gelten

$$ {}^{M}/_{N'} = M \cdot {}^{1}/_{N'} \qquad \text{und} \qquad {}_{N'}\backslash^{M} = M \cdot {}_{N'}\backslash^{1} \qquad \text{sowie} \qquad {}^{M}/_{N} = {}_{N}\backslash^{M} . $$

(b) Die Mengen

$$ \bigcap_{i\in I} M_i \ , \quad \bigcup_{i \in I} M_i \ , \quad M\backslash N \ , \quad MN \ , \quad {}^{M}/_{N} = {}_{N}\backslash^{M} $$

sind jeweils wieder normale Teilmengen von L.

(c) Sind M, N und N' zusätzlich unter der Loop-Verknüpfung abgeschlossen, so auch die Mengen MN' und ${}^{M}/_{N} = {}_{N}\backslash^{M}$.

Beweis: *Zu (a):* Die ersten beiden Aussagen folgen sofort aus der Normalität von M, da für alle $x \in L$

$$ \begin{aligned} & \big({}^{M}/_{x}\big)x = M = M({}^{1}/_{x} \cdot x) = \big(M \cdot {}^{1}/_{x}\big)x \\ \text{sowie} \quad & x\big({}_{x}\backslash^{M}\big) = M = (x \cdot {}_{x}\backslash^{1})M = x\big({}_{x}\backslash^{1} \cdot M\big) = x\big(M \cdot {}_{x}\backslash^{1}\big) \end{aligned} $$

gelten. Für die dritte Gleichung ist mit dem bereits Gezeigten nur noch ${}^{1}/_{N} = {}_{N}\backslash^{1}$ nachzuweisen; dies folgt aber direkt aus der Tatsache, dass für alle $x \in L$ stets gilt:

$$ x \in {}^{1}/_{N} \iff 1 \in xN = Nx \iff x \in {}_{N}\backslash^{1} . $$

Zu (b): Nach (1.2,c) ist eine Teilmenge von L offenbar genau dann normal, wenn sie für alle $x, y \in L$ unter den vier Abbildungen[2]

$$ L \longrightarrow L \ , \qquad z \mapsto {}_{(xy)}\backslash^{((xz)y)} \ , \quad {}_{(xy)}\backslash^{(x(yz))} \ , \quad {}_{x}\backslash^{(((xy)z)/y)} \ , \quad {}_{x}\backslash^{(y\backslash((xy)z))} $$

[1] Hierbei bezeichne I eine beliebige, nicht leere Indexmenge.

[2] Bei Bruck [3, §IV.1] sind normale Unterloops von L in ähnlicher Weise beschrieben und entsprechende Eigenschaften untersucht worden; so findet sich die Behauptung für den Durchschnitt normaler Unterloops dort etwa als Theorem 1.2 und die Behauptung für das Produkt zweier normaler Unterloops in Lemma 1.5. Im Zusammenhang normaler Unterloops ergibt sich die Betrachtung der anderen Mengen natürlich nicht.

jeweils abgeschlossen ist. Da diese vier Zuordnungen nach (L1) jeweils bijektiv auf L und die Teilmengen M_i, M, N $(i \in I)$ nach Voraussetzung jeweils unter diesen abgeschlossen sind, sind es offenbar auch die Mengen $\bigcap_{i\in I} M_i$, $\bigcup_{i\in I} M_i$ sowie $M\backslash N$. Da für alle $x, y \in L$

$$\begin{aligned}\big(x(MN)\big)y &= \big((xM)N\big)y = \big((xM)y\big)N = \big((xy)M\big)N = (xy)(MN)\\ &= \big((xy)M\big)N = \big(x(yM)\big)N = x\big((yM)N\big) = x\big(y(MN)\big)\end{aligned}$$

gilt, ist nach (1.2,c) auch die Menge MN normal. Mit (a) und dem bereits Bewiesenen ist für die Normalität von ${}^{M}\!/\!_{N} = {}_{N}\backslash^{M}$ nur noch die Normalität von ${}^{1}\!/\!_{N}$ nachzuweisen. Für alle $x, y, z \in L$ gelten hierbei

$$\begin{aligned} & {}_{(xy)}\backslash^{((xz)y)} \in {}^{1}\!/\!_{N} \iff 1 \in {}_{(xy)}\backslash^{((xz)y)} \cdot N\\ \iff\ & xy \in (xy)\Big({}_{(xy)}\backslash^{((xz)y)} \cdot N\Big) = \big((xz)y\big)N = \big((xz)N\big)y\\ \iff\ & x \in (xz)N = x(zN) \iff 1 \in zN \iff z \in {}^{1}\!/\!_{N}\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & {}_{(xy)}\backslash^{(x(yz))} \in {}^{1}\!/\!_{N} \iff 1 \in {}_{(xy)}\backslash^{(x(yz))} \cdot N\\ \iff\ & xy \in (xy)\Big({}_{(xy)}\backslash^{(x(yz))} \cdot N\Big) = \big(x(yz)\big)N = x\big((yz)N\big)\\ \iff\ & y \in (yz)N = y(zN) \iff 1 \in zN \iff z \in {}^{1}\!/\!_{N}\ ,\end{aligned}$$

d.h. es folgen für alle $x, y \in L$ stets

$$\begin{aligned} {}_{(xy)}\backslash^{((x\,\cdot\,{}^{1}/_{N})y)} = {}^{1}\!/\!_{N} \quad \text{sowie} \quad {}_{(xy)}\backslash^{(x(y\,\cdot\,{}^{1}/_{N}))} = {}^{1}\!/\!_{N}\ ,\\ \text{also} \quad (x \cdot {}^{1}\!/\!_{N})y = x(y \cdot {}^{1}\!/\!_{N}) = (xy) \cdot {}^{1}\!/\!_{N}\ .\end{aligned}$$

Mit (1.2,c) ist ${}^{1}\!/\!_{N}$ daher bereits normal und die Behauptung gezeigt.

Zu (c): Gelten $MM \subset M$ und $N'N' \subset N'$, so auch $(MN')(MN') = (MM)(N'N') \subset MN'$. Mit (a) und dem bereits Bewiesenen genügt es für die Abgeschlossenheit von ${}^{M}\!/\!_{N} = {}_{N}\backslash^{M}$ unter der Loop-Verknüpfung zu zeigen, dass ${}^{1}\!/\!_{N}$ unter dieser abgeschlossen ist; seien hierfür $x, y \in {}^{1}\!/\!_{N}$ gegeben. Wegen ${}^{1}\!/\!_{N} = {}_{N}\backslash^{1}$ nach (1.2,d) und (a) sind nach (1.2,a) dann ${}^{1}\!/\!_{y}, {}_{x}\backslash^{1} \in N$ und es folgt

$$\begin{aligned} & {}^{1}\!/\!_{y} \cdot {}_{x}\backslash^{1} \in NN \subset N\ , \quad \text{d.h.} \quad 1 \in {}^{1}\!/\!_{N} \cdot ({}^{1}\!/\!_{y} \cdot {}_{x}\backslash^{1}) \overset{\text{(b)}}{=} ({}^{1}\!/\!_{N} \cdot {}^{1}\!/\!_{y}) \cdot {}_{x}\backslash^{1}\ ,\\ \text{also} \quad & x \in {}^{1}\!/\!_{N} \cdot {}^{1}\!/\!_{y} \quad \text{und damit} \quad xy \in ({}^{1}\!/\!_{N} \cdot {}^{1}\!/\!_{y})y \overset{\text{(b)}}{=} {}^{1}\!/\!_{N}\ .\end{aligned}$$

Somit gilt in der Tat ${}^{1}\!/\!_{N} \cdot {}^{1}\!/\!_{N} \subset {}^{1}\!/\!_{N}$.

$\square$

Ternärkörper

Das Hauptaugenmerk werden wir in dieser Arbeit auf die Untersuchung gewisser Ternärkörper legen: Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ergeben sich die Ternärkörper als die Koordinatenstrukturen beliebiger, projektiver Ebenen und spiegeln bestimmte geometrische Aspekte dieser in ihren algebraischen Eigenschaften wider. Ebenso wie diese geometrischen Merkmale projektiver Ebenen in Abstufungen auftreten,[1] ergibt sich in natürlicher Weise eine Hierarchie unter den Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen, von denen wir im Folgenden die für diese Arbeit relevanten einführen möchten. Für eine Einführung in die Koordinatisierung projektiver Ebenen verweisen wir neben der ursprünglichen Arbeit von HALL [12] ausdrücklich auf das Buch von PICKERT [32].

Bei der Theorie *topologischer Ternärkörper* und ihrer Eigenschaften beziehen wir uns auf die Arbeit von SALZMANN [36] sowie das Buch von SALZMANN et al. [37], insbesondere §41.

Schließlich werden wir noch das *Radikal* eines Ternärkörpers einführen: Seine Definition ermöglicht es, einige der gewohnten Rechengesetze bezüglich der Nebenklassen des Radikals - trotz der eingeschränkten algebraischen Eigenschaften eines Ternärkörpers und der wenigen aus diesen resultierenden Rechenregeln - anwenden zu können. Für die Definitionen des Radikals und des darauf aufbauenden *erweiterten Radikals* verweisen wir auf die Arbeit von KALHOFF [17]; die entsprechenden Rechenregeln befinden sich etwa in den Arbeiten [20], [21] sowie [22] von KALHOFF.

(1.5) Definition und Satz:

(a) Eine Menge K mit $|K| \geq 2$ zusammen mit einer ternären, inneren Verknüpfung $T : K \times K \times K \longrightarrow K$ heißt *Ternärkörper*, wenn die folgenden Axiome gelten:

- (T1) Es gibt Elemente $0, 1 \in K$ mit $0 \neq 1$, sodass für alle $m, x, c \in K$ stets $T(m, 0, c) = T(0, x, c) = c$ und $T(m, 1, 0) = T(1, m, 0) = m$ gelten.
- (T2) Für alle $m, n, c, d \in K$ mit $m \neq n$ existiert genau ein $u \in K$ mit $T(m, u, c) = T(n, u, d)$.
- (T3) Für alle $m, x, v \in K$ existiert genau ein $c \in K$ mit $T(m, x, c) = v$.
- (T4) Für alle $x, y, v, w \in K$ mit $x \neq y$ existiert genau ein $(m, c) \in K^2$ mit $T(m, x, c) = v$ und $T(m, y, c) = w$.

(b) Es seien (K, T) ein Ternärkörper und die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ definiert durch[2]

$$x + y \;:=\; T(1, x, y) \qquad \text{und} \qquad x \cdot y \;:=\; T(x, y, 0) \qquad \text{für } \; x, y \in K \; .$$

Dann bilden $(K, +)$ eine Loop mit neutralem Element 0 sowie $(K^*, \cdot)$ eine Loop[3]

[1] So impliziert das *Axiom von Pappus* bereits das *Axiom von Desargues* vgl. PICKERT [32, §5.2].

[2] Alternativ wird in einiger Literatur auch die Definition $x + y := T(x, 1, y)$ für $x, y \in K$ verwendet; wir orientieren uns aber an der Konstruktion aus PICKERT [32, S.38f.], auf welche sich jeweils auch die Arbeiten von KALHOFF beziehen, vgl. etwa [17, S.101].

[3] Hierbei bezeichne in gewohnter Weise $K^* := K\backslash\{0\}$.

mit neutralem Element 1. In unserer Notation verwenden wir stets *Punkt-vor-Strich-Rechnung*, d.h. wir schreiben oft $xy + z := (x \cdot y) + z$ etc. für $x, y, z \in K$.

(c) Zwei Ternärkörper (K, T) und (K', T') heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : K \longrightarrow K'$ gibt, welche $\varphi\big(T(m, x, c)\big) = T'\big(\varphi(m), \varphi(x), \varphi(c)\big)$ für alle $m, x, c \in K$ erfüllt; wir nennen diese Abbildung φ einen *Ternärkörper-Isomorphismus.*[1]

(d) Ein Ternärkörper $(K, T, \mathscr{T})$ mit einer Topologie auf K heißt *topologischer Ternärkörper*, wenn die Abbildung T sowie die Abbildungen aus (T2)-(T4) jeweils stetig[2] sind.

(e) Es sei (K, T) ein Ternärkörper. Die normale Unterloop von $(K^*, \cdot)$, die von allen $r \in K^*$ erzeugt wird, für die es $a, b, c, d, m, n, u, x \in K$ mit $a \neq b$, $m \neq n$, $u \neq x$ und $T(m, u, c) = T(n, u, d)$ gibt, sodass mindestens eine der Gleichungen

$$\begin{array}{rrcl} & T(m,x,a) \;-\; T(m,x,b) & = & r(a-b) \\ \text{oder} & T(n,x,d) - T(m,x,c) & = & r\big((n-m)(x-u)\big) \end{array}$$

gilt, heißt *Radikal von* (K, T) und wird mit $R := R(K, T)$ bezeichnet. Die normale Unterloop von $(K^*, \cdot)$, die von R und allen $r \in K^*$ erzeugt wird, für die es $x, y, z \in K^*$

$$\text{mit} \qquad x(yz) \;=\; r\big((xy)z\big) \qquad \text{oder} \qquad xy \;=\; r(yx)$$

gibt, heißt *erweitertes Radikal von* (K, T) und wird mit $R_a := R_a(K, T)$ bezeichnet.

(f) Es sei (K, T) ein Ternärkörper. Wegen $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in K$ sagen wir, dass eine Teilmenge $M \subset K$ *normal* ist, wenn $M \backslash \{0\} \subset K^*$ eine normale Teilmenge der Loop $(K^*, \cdot)$ ist.[3]

(1.6) Satz: (Kalhoff [20], [22])

Es seien (K, T) ein Ternärkörper, $M, M', N \subset K$ Teilmengen mit $RM \subset M$ und $RM' \subset M'$ sowie $x \in K$. Dann gelten:

(a) M ist normal in $(K, +)$. [20, Lem. 1.3(1-4)]

(b) $M - M' \;=\; M \boxminus M'$. [4]

(c) $-(MN) \;=\; (-M)N \;=\; M(-N)$. [20, Lem. 1.3(7)]

(d) $M - N \;=\; M + (-N)$ und $N - M \;=\; N + (-M)$. [22, Lem. 1.3(3)]

(e) $x(M + M') \;=\; xM + xM'$ und $N(M + M') \;\subset\; NM + NM'$. [20, Lem. 1.3(5)]

[1] Offenbar bildet ein Ternärkörper-Isomorphismus stets das Null- bzw. Einselement von (K, T) auf dasjenige von (K', T') ab; insbesondere ist ein Ternärkörper-Isomorphismus jeweils ein Loop-Isomorphismus der additiven bzw. multiplikativen Loop von (K, T) auf die von (K', T').

[2] bzgl. der jeweiligen Produkt- bzw. der entsprechenden Spur-Topologie auf den Definitionsbereichen

[3] Möchten wir stattdessen ausdrücken, dass M eine normale Teilmenge der Loop $(K, +)$ ist, so sagen wir explizit, dass M *normal in* $(K, +)$ ist.

[4] Dies ist eine sofortige Konsequenz aus (a) und (1.4,a) in additiver Schreibweise.

(f) $(M+M')x \;=\; Mx+M'x$ und $(M+M')N \;\subset\; MN+M'N\,.$ [20, Lem. 1.3(6)]

(g) Sind M, M' zusätzlich normal, so ist auch $M+M'$ normal.[1] [2]

(1.7) Bemerkung:

Es seien (K,T) ein Ternärkörper und $M \subset K$.

(a) (K,T) bildet sowohl zusammen mit der diskreten als auch der indiskreten Topologie auf K jeweils einen topologischen Ternärkörper.[3]

(b) (HOFMANN, STRAMBACH [6, S.255f.]) Ist $(K,T,\mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper, so sind $(K,+,\mathscr{T})$ und $(K^*,\cdot,\mathscr{T})$ *topologische Loops*.[4] Insbesondere sind sowohl die Links- und Rechtsaddition mit einem Element $x \in K$ als auch die Links- und Rechtsmultiplikation mit einem Element $y \in K^*$ Homöomorphismen des topologischen Raumes $(K,\mathscr{T})$. Somit operiert die Homöomorphismengruppe des topologischen Raumes $(K,\mathscr{T})$ stets *2-transitiv*[5] auf K.

(c) Die Mengen

$$\pm R \;:=\; R \cup (-R) \qquad \text{sowie} \qquad \pm\, R_a \;:=\; R_a \cup (-R_a)$$

sind jeweils normale Unterloops[6] von $(K^*,\cdot)$.

(d) (KALHOFF [21, S.66]) Die Faktorloop K^*/R_a ist eine abelsche Gruppe. Somit gelten:

(i) Ist $R_aM \subset M$, so ist M normal.[7]

(ii) Ist $R_aM \subset M$ und sind Elemente $x_1,...,x_n \in K$ gegeben ($n \in \mathbb{N}$), so ist die Menge $M(x_1 \cdot ... \cdot x_n)$ unabhängig von der Klammerung und der Reihenfolge des Produktes $x_1 \cdot ... \cdot x_n$.

[1] im Sinne von (1.5,f) bzgl. der multiplikativen Loop $(K^*,\cdot)$

[2] Die Gleichungen aus (1.2,c) für $M+M'$ folgen direkt aus den entsprechenden Gleichungen für M und M' sowie den Rechenregeln aus (e),(f); beachte, dass diese wegen $R(Mx)=(RM)x \subset Mx$ ebenfalls für Mengen der Gestalt Mx mit $x \in K$ gelten.

[3] Ist $\mathscr{T}$ die diskrete, d.h. $\mathscr{T}=\mathfrak{P}(K)$, oder indiskrete, d.h. $\mathscr{T}=\{\emptyset, K\}$, Topologie auf K, so sind T sowie die Abbildungen aus (T2)-(T4) trivialerweise stetig. Diese Topologien werden bei der Definition topologischer Ternärkörper daher manchmal ausgeschlossen, siehe etwa SALZMANN et al. [37, Def. 41.3].

[4] D.h. sowohl die drei Abbildungen $K \times K \longrightarrow K$, $(x,y) \;\mapsto\; x+y,\; x-y,\; x \boxminus y$, als auch die drei Abbildungen $K^* \times K^* \longrightarrow K^*$, $(x,y) \;\mapsto\; xy,\; {}^x\!/_y,\; {}_y\backslash^x$, sind alle stetig bzgl. $\mathscr{T}$, vgl. HOFMANN, STRAMBACH [6, Def. IX.1.1]. Für die Spur-Topologie von $\mathscr{T}$ auf K^* schreiben wir hierbei erneut $\mathscr{T}$.

[5] D.h. zu $(w,x),(y,z) \in K \times K$ mit $w \neq x$ und $y \neq z$ gibt es stets einen Homöomorphismus φ des topologischen Raumes $(K,\mathscr{T})$ mit $\varphi(w)=y$ und $\varphi(x)=z$.

[6] Wir führen die Diskussion für das Radikal R; für R_a ist diese komplett analog: Nach (1.4,b) in additiver Schreibweise ist die Menge $-R = \boxminus R$ wieder normal; und erneut mit (1.4,b) dann auch $\pm R$. Insbesondere spielt die Wahl der Art der Differenz keine Rolle. Nach KALHOFF [21, Lem. 0.1(4)] sowie (1.6,c) ist weiter $(-R)(-R)=R$; und mit (1.6,c) ebenfalls $R(-R)=(-R)R=-(RR)=-R$. Schließlich ist mit (1.4,a) für die Abgeschlossenheit von $\pm R$ unter den beiden einseitigen Quotientenbildungen nur noch ${}^1\!/_{(-R)} \subset -R$ zu zeigen: Dies folgt, da für alle $r \in R$ nach (1.6,b,c) stets $1 \in R = Rr = (-(\boxminus R))r = (-(-R))r = (-R)(-r)$ gilt; beachte, dass diese Rechenregeln wegen $R(-R)=-R$ ebenfalls für die Menge $-R$ gelten.

[7] Dieser Argumentationsschritt wird in ähnlicher Form auch in KALHOFF [23, S.154] vollzogen.

(1.8) Definition und Satz:

(a) (Pickert [32, S.89f.]) Ein Ternärkörper (K, T) heißt *linear*, wenn

$$T(m, x, c) \;=\; mx + c \qquad \text{für alle } \; m, x, c \in K$$

gilt. In diesem Fall ist die ternäre Verknüpfung T also bereits durch die beiden Loop-Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ vollständig bestimmt und $(K, +, \cdot)$ bildet eine *Doppelloop*.[1] Ist $(K, +, \cdot)$ dagegen eine Doppelloop, so bildet (K, T) mit obiger Definition der ternären Verknüpfung T wieder einen linearen Ternärkörper.

Da die Begriffe *linearer Ternärkörper* und *Doppelloop* im Sinne aus (a) gleichwertig sind, werden wir einen linearen Ternärkörper meist als $(K, +, \cdot)$ notieren.[2]

(b) (Pickert [32, S.90]) Ein linearer Ternärkörper $(K, +, \cdot)$ heißt *Cartesischer Körper*, wenn die additive Loop $(K, +)$ assoziativ (und damit bereits eine Gruppe) ist.
Eine Menge K mit $|K| \geq 2$ und zwei binären, inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist genau dann ein Cartesischer Körper, wenn die folgenden Axiome gelten:

(C1) $(K, +)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 0.

(C2) Es gibt ein Element $1 \in K^*$, sodass für alle $x \in K$ stets $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ gilt.

(C3) Für alle $x \in K$ gilt $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

(C4) Für alle $x, y, z \in K$ mit $x \neq y$ existiert genau ein $a \in K$ mit $-xa + ya = z$.

(C5) Für alle $x, y, z \in K$ mit $x \neq y$ existiert genau ein $b \in K$ mit $bx - by = z$.

(c) (Pickert [32, S.90ff.], André [2, S.173f.]) Ein Cartesischer Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *(Links-)Quasikörper*, wenn er das *linksseitge Distributivgesetz*[3] erfüllt.
Eine Menge K mit $|K| \geq 2$ und zwei binären, inneren Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ ist genau dann ein (Links-)Quasikörper, wenn die folgenden Axiome gelten:

(Q1) $(K, +)$ ist eine Gruppe mit neutralem Element 0.

(Q2) $(K^*, \cdot)$ ist eine Loop mit neutralem Element 1.

(Q3) Für alle $x \in K$ gilt $0 \cdot x = 0$.

(Q4) Für alle $x, y, z \in K$ mit $x \neq y$ existiert genau ein $a \in K$ mit $-xa + ya = z$.

(Q5) Für alle $x, y, z \in K$ gilt $x(y + z) = xy + xz$.

Die additive Gruppe $(K, +)$ eines (Links-)Quasikörpers ist stets kommutativ. Durch

$$N(K) \;:=\; \left\{ z \in K \;\middle|\; (x+y)z \;=\; xz + yz \;,\;\; (xy)z \;=\; x(yz) \;\text{ für alle } x, y \in K \right\}$$

[1] Für die axiomatische Definition einer Doppelloop sei auf Pickert [32, S.61ff., S.89f.] verwiesen; wir werden diese im Laufe der Arbeit nicht benötigen und uns an dieser Stelle daher auf die Axiome eines Cartesischen Körpers sowie eines Quasikörpers beschränken.

[2] Die ternäre Verknüpfung T ist dann stets durch $T(m, x, c) = mx + c$ für alle $m, x, c \in K$ gegeben.

[3] Hiermit ist das Distributivgesetz aus (Q5) gemeint. In analoger Weise ist die Definition eines *Rechts-Quasikörpers* als ein Cartesischer Körper mit dem *rechtsseitigen Distributivgesetz* möglich; alle Aussagen und Formulierungen dieses Abschnittes übertragen sich auf diese, indem man die Reihenfolge aller Multiplikationen sowie die Worte 'links' und 'rechts' vertauscht. Beachte, dass in der Arbeit von André [2] ein Quasikörper als ein Rechts-Quasikörper in unserem Sinne definiert ist. In dieser Arbeit werden wir stets (Links-)Quasikörper betrachten, für die wir dann einfach *Quasikörper* schreiben.

ist der *Kern* des Quasikörpers K definiert; $N(K)$ bildet einen Körper[1] und K ist ein Rechts-Vektorraum[2] über $N(K)$. Ist $k \subset N(K)$ der Primkörper von $N(K)$, so nennen wir k auch den *Primkörper von K*.

(d) Ein (Links-)Quasikörper $(K, +, \cdot)$ heißt *(Links-)Fastkörper*, wenn die multiplikative Loop $(K^*, \cdot)$ assoziativ (und damit bereits eine Gruppe) ist.[3]

(e) Ein (Links-)Quasikörper $(K, +, \cdot)$ heißt *Alternativkörper*, wenn er ebenfalls das *rechtsseitige Distributivgesetz* erfüllt und in der multiplikativen Loop $(K^*, \cdot)$ die folgende Abschwächung des Assoziativgesetzes gilt:[4]

$$x(xy) \;=\; (xx)y \qquad \text{und} \qquad (xy)y \;=\; x(yy) \qquad \text{für alle } \; x, y \in K \; .$$

(f) Ein Alternativkörper $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper*,[5] wenn die multiplikative Loop $(K^*, \cdot)$ assoziativ (und damit bereits eine Gruppe) ist.

(g) Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *kommutativer Körper*, wenn die multiplikative Gruppe $(K^*, \cdot)$ kommutativ ist.

Uniforme Bewertungen

Wir werden uns nun einem weiteren, strukturgebenden Aspekt der Theorie der Ternärkörper zuwenden, welcher im Zentrum dieser Arbeit stehen soll: den *uniform bewerteten Ternärkörpern*. Der Begriff der *uniformen Bewertung* eines Ternärkörpers entsteht hierbei aus der Verallgemeinerung des Bewertungsbegriffes kommutativer Körper auf die schwächeren Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen und sind von Kalhoff [18] eingeführt worden. Signifikant erlaubt die Forderung, dass jedes Element des Radikals auf das neutrale Element der Werteloop abgebildet wird, eine Vielzahl an Rechenregeln im Argument einer uniformen Bewertung und so die Übertragung vieler Folgerungen der klassischen Bewertungstheorie auf uniform bewertete Ternärkörper. In den folgenden Arbeiten [18], [20], [21], [22] von Kalhoff sind viele Eigenschaften uniformer Bewertungen und des mit diesen eng verknüpften Begriffs eines *uniformen Bewertungsringes* in Analogie zur klassischen Theorie untersucht worden, von denen wir an dieser Stelle die für unsere Zwecke relevantesten wiedergeben werden.

[1] mit der von K vererbten Addition und Multiplikation; beachte, dass Körper in dieser Arbeit nicht notwendig kommutativ sein müssen, vgl. (f).

[2] mit der Quasikörper-Addition als Vektoraddition sowie der Einschränkung der Quasikörper-Multiplikation auf $K \times N(K)$ als Skalarmultiplikation

[3] Auch hier kann analog der Begriff eines *Rechts-Fastkörpers* eingeführt werden; in dieser Arbeit werden stets Links-Fastkörper betrachtet und daher einfach *Fastkörper* für diese geschrieben.

[4] Eine Loop mit dieser Eigenschaft wird auch *alternativ* genannt, siehe hierzu auch Pickert [32, S.157ff.].

[5] Beachte, dass Körper meist als kommutativ vorausgesetzt werden - ein nicht notwendig kommutativer Körper wird dann *Schiefkörper* genannt. Wir folgen bei den Definitionen dieser Arbeit dem klassischen, geometrischen Benennungsschema.

Abschließend werden in diesem Abschnitt einige Beispiele uniform bewerteter Ternärkörper gesammelt. Hierbei soll besonders die jeweilige Echtheit der uniform bewerteten Koordinatenstrukturen hervorgehoben werden, d.h. dass es sich bei diesen Beispielen um uniform bewertete Ternärkörper / Cartesische Körper / Quasikörper handelt, welche nicht bereits lineare Ternärkörper / Quasikörper / Körper etc. sind.

Im gesamten Abschnitt - und damit für den Rest des Kapitels - sei (K,T) ein Ternärkörper.

(1.9) Definition:

(a) Es sei $(\Gamma,\cdot,\leq)$ eine angeordnete Loop und $0 \notin \Gamma$ ein Element mit $0 < \Gamma$.[1] Eine *uniforme Bewertung auf* (K,T) *mit Werteloop* Γ ist eine surjektive[2] Abbildung $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ von K auf $\Gamma \cup \{0\}$, welche für alle $x, y \in K$ die folgenden Axiome erfüllt:

(V1) $v(x) = 0 \iff x = 0$.

(V2) $v(xy) = v(x)v(y)$.

(V3) $v(x-y) \leq \max\{v(x),\ v(y)\}$.

(V4) $v(r) = 1$ für alle $r \in R(K,T)$.

Wir nennen (K,T,v) dann auch einen *uniform bewerteten Ternärkörper*. Die uniforme Bewertung v heißt weiter *trivial*, wenn $\Gamma = \{1\}$ ist - andernfalls *nicht trivial*.

(b) Wir nennen zwei uniform bewertete Ternärkörper (K,T,v) und (K',T',v') *als uniform bewertete Ternärkörper isomorph*, wenn es einen Ternärkörper-Isomorphismus $\varphi : K \longrightarrow K'$ gibt, welcher zusätzlich $v = v' \circ \varphi$ erfüllt.

(c) Ein *uniformer Bewertungsring auf* (K,T) ist eine Teilmenge $A \subset K$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

(A1) $(A,+)$ ist eine Loop.

(A2) $AA \subset A$.

(A3) $R(K,T) \subset A$.

(A4) A ist normal.[3]

(A5) Für alle $x \in K$ gilt $x \in A$ oder ${}^1\!/_x \in A$.[4]

Der Bewertungsring A heißt *trivial*, wenn $A = K$ ist - andernfalls *nicht trivial*.

[1] Dies bedeutet in gewohnter Weise $0 < \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$; ebenso gelte im Folgenden $0 \cdot \gamma = \gamma \cdot 0 := 0$ für $\gamma \in \Gamma$.

[2] Beachte, dass im Falle einer nicht notwendig surjektiven Abbildung $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$, welche die Axiome (V1)-(V4) erfüllt, die Menge $\Delta := v(K^*)$ nach (V1) und (V2) eine (angeordnete) Unterloop von Γ und die Nachbeschränkung $v : K \longrightarrow \Delta \cup \{0\}$ mit (V1) somit eine surjektive Abbildung ist, welche offenbar immer noch die Axiome (V1)-(V4) erfüllt. Die Forderung der Surjektivität von v in der Definition beugt somit einfach dem immer wiederkehrenden Rückzug auf diesen Fall vor.

[3] im Sinne von (1.5,f) bzgl. der multiplikativen Loop $(K^*,\cdot)$

[4] Beachte, dass aufgrund von (1.4,b) mit A auch die Menge $K\backslash A$ normal ist und daher insbesondere ${}^1\!/_{(K\backslash A)} = {}_{(K\backslash A)}\backslash^1$ gilt; unter Voraussetzung von (A4) ist das Axiom (A5) somit dazu äquivalent, dass für alle $x \in K$ stets $x \in A$ oder ${}_x\backslash^1 \in A$ ist. Die Wahl des linksinversen Elements ${}^1\!/_x$ vor dem rechtsinversen Element ${}_x\backslash^1$ in (A5) weist somit keinen praktischen Vorteil auf.

(d) Ist v eine uniforme Bewertung auf (K,T), so definieren wir die beiden Teilmengen $I_v, A_v \subset K$ durch

$$I_v \;:=\; \{\, x \in K \;|\; v(x) \;<\; 1 \,\} \qquad \text{sowie} \qquad A_v \;:=\; \{\, x \in K \;|\; v(x) \;\leq\; 1 \,\} \,.$$

(1.10) Satz und Definition:

(a) (KALHOFF [20, S.796]) Ist v eine uniforme Bewertung auf (K,T), so ist A_v ein uniformer Bewertungsring von (K,T). Hierbei ist A_v genau dann trivial, wenn v es ist.[1]

(b) (KALHOFF [20, Thm. 1.4]) Ist A ein uniformer Bewertungsring von (K,T), so bildet die Faktorloop K^*/A zusammen mit der mengentheoretischen Inklusion eine angeordnete Loop und die Abbildung

$$v_A \;:\; K \;\longrightarrow\; K^*/A \;\cup\; \{\{0\}\} \;, \qquad x \;\mapsto\; Ax \;,$$

ist eine uniforme Bewertung auf (K,T) mit Werteloop K^*/A. Hierbei ist v_A genau dann trivial, wenn A es ist.[2]

(c) (KALHOFF [20, Thm. 1.4]) In den Situationen von (a) und (b) gilt $A_{v_A} = A$ und die beiden uniformen Bewertungen v_{A_v} und v sind *äquivalent*,[3] d.h. die obigen Beziehungen sind (bis auf eventuelle Äquivalenz) eineindeutig.

(d) (KALHOFF [20, §2], [22, Prop. 1.7]) Ist v eine uniforme Bewertung auf (K,T) mit Werteloop Γ, so wird durch

$$d_v \;:\; K \times K \;\longrightarrow\; \Gamma \cup \{0\} \;, \qquad (x,y) \;\mapsto\; v(x-y) \;,$$

eine *Ultrametrik* auf K definiert. Wir nennen (K,T,v) *vollständig*, wenn der ultrametrische Raum (K,d_v) vollständig ist; und ebenso heißt (K,T,v) *sphärisch vollständig*, wenn (K,d_v) es ist.[4] Definieren wir für jedes $x \in K$ die *Kugeln*

$$B(x,\gamma) \;:=\; \{\, y \in K \;|\; d_v(x,y) = v(x-y) < \gamma \,\} \qquad \text{um } x \text{ mit Radius } \gamma \in \Gamma \,,$$

so bilden die Kugeln $\big(B(x,\gamma)\big)_{\gamma\in\Gamma}$ die Umgebungsbasis[5] von x einer nicht indiskreten[6] Topologie $\mathscr{T}_v$ auf K, mit der $(K,T,\mathscr{T}_v)$ einen topologischen Ternärkörper bildet. Hierbei ist die Topologie $\mathscr{T}_v$ genau dann diskret, wenn v trivial ist.[7]

[1] In [20] ist v nach Voraussetzung stets nicht trivial; wegen $v(K^*) = \Gamma$ ist die Äquivalenz aber offensichtlich.

[2] Erneut ist die Äquivalenz $K^*/A = \{A\} \iff A = K$ offensichtlich.

[3] In dem Sinne, dass es einen ordnungstreuen Loop-Isomorphismus $\sigma : \Gamma \longrightarrow K^*/A_v$ der Werteloop von v auf die Werteloop von v_{A_v} mit $v_{A_v} = \sigma \circ v$ gibt.

[4] Für die Definition einer Ultrametrik mit beliebiger, angeordneter Bildmenge sei auf PRIESS-CRAMPE [35] verwiesen; ebenso sind dort die Definitionen eines *sphärisch vollständigen* - dort *sphärisch kompakt* genannt - sowie eines *vollständigen* ultrametrischen Raumes zu finden.

[5] In dem Sinne, dass die Menge $B(x,\gamma)$ für $\gamma \in \Gamma$ stets eine Umgebung von x und jede Umgebung von x Obermenge einer Kugel um x ist.

[6] Denn wegen $v(1) = 1$ ist etwa $1 \notin B(0,1)$ und $B(0,1)$ somit eine Umgebung von 0, welche ungleich K ist.

[7] Denn offenbar gibt es genau dann ein $\gamma \in \Gamma$ mit $B(0,\gamma) \subset \{0\}$, wenn $\Gamma = \{1\}$ ist.

(1.11) Satz: (Kalhoff [17], [21], [22])

Für alle Teilmengen $M \subset K$ mit $RM \subset M$ und alle Elemente $c, d, m, n, u, x, y, z \in K$ mit $T(m, u, c) = T(n, u, d)$ gelten:

(a) $M\big(T(m, x, c) - T(m, x, d)\big) \;=\; M(c - d)$. [1]

(b) $M\big(T(m, x, c) - T(n, x, d)\big) \;=\; M\big((m - n)(x - u)\big)$. [1]

(c) $M\big(T(m, x, c) - T(m, y, c)\big) \;=\; M\big(m(x - y)\big)$. [22, Lem. 1.3(6)]

(d) $M\big(T(m, x, c) - T(n, x, c)\big) \;=\; M\big((m - n)x\big)$. [22, Lem. 1.3(6)]

(e) $M(x - y) \;=\; M\big((x + z) - (y + z)\big)$. [21, Lem. 0.1(1)]

(f) $M(x - y) \;=\; M\big((z + x) - (z + y)\big)$. [21, Lem. 0.1(1)]

(g) $M(x - y) \;=\; M\big(-(y - x)\big)$. [22, Lem. 1.3(5)]

(h) $M(x - y) \;=\; M\big((-y) + x\big)$. [17, Lem. 2.2(3)][2]

(i) $M(x + y) \;=\; M\big(x - (-y)\big)$. [17, Lem. 2.2(4)][2]

(j) $M\big(x(-y)\big) \;=\; M\big((-x)y\big) \;=\; M\big(-(xy)\big)$. [21, Lem. 0.1(5)]

(k) $M(xy - xz) \;=\; M\big(x(y - z)\big)$. [21, Lem. 0.1(2)]

(l) $M(xz - yz) \;=\; M\big((x - y)z\big)$. [21, Lem. 0.1(2)]

Ist v eine uniforme Bewertung auf (K, T), so haben somit insbesondere die Vertreter der obigen Nebenklassen jeweils denselben Wert unter v,[3] d.h. für alle Elemente der obigen Gestalt gelten somit:

(a) $v\big(T(m, x, c) - T(m, x, d)\big) \;=\; v(c - d)$.

(b) $v\big(T(m, x, c) - T(n, x, d)\big) \;=\; v\big((m - n)(x - u)\big)$.

(c) $v\big(T(m, x, c) - T(m, y, c)\big) \;=\; v\big(m(x - y)\big)$.

(d) $v\big(T(m, x, c) - T(n, x, c)\big) \;=\; v\big((m - n)x\big)$.

$\vdots$ etc.

Bezieht sich daher in der Arbeit eine Gleichung für eine uniforme Bewertung auf diesen Satz, so ist hierbei stets dieser Zusammenhang gemeint.

[1] Diese beiden Regeln folgen direkt aus der Definition des Radikals, vgl. auch die Begründung dieser Gleichungen für uniforme Bewertungen bei Kalhoff [18, Prop. 1.2(1)].

[2] Beachte, dass diese Behauptungen durch Multiplikation der dortigen Aussagen mit M folgen, vgl. dem Argumentationsschritt im Beweis von Kalhoff [21, Lem. 0.1].

[3] Denn sind Elemente $a, b \in K$ mit $Ra = Rb$ gegeben, so gibt es ein $r \in R$ mit $a = rb$ und aus (V2) und (V4) folgt direkt $v(a) = v(rb) = v(r)v(b) = v(b)$, vgl. auch den Beweis von [18, Prop. 1.2] mittels der Gleichungen für das Radikal aus Kalhoff [17, Lem. 2.2].

(1.12) Satz: (KALHOFF [18])

Es sei v eine uniforme Bewertung auf (K, T). Für alle $x, y \in K$ gelten:

(a) $v(x - y) \;=\; v(y - x)$ [18, Prop. 1.2(2)]

(b) $v(x - y) \;=\; v(x \boxminus y)$ [1]

(c) $v(x) \;=\; v(-x) \;=\; v(\boxminus x)$ [2]

(d) $v(x \pm y) \;\leq\; \max\big\{v(x),\ v(y)\big\}$ [18, Prop. 1.3]

(e) $v(x) \neq v(y) \quad\Longrightarrow\quad v(x - y) \;=\; v(x + y) \;=\; \max\big\{v(x),\ v(y)\big\}$ [18, Prop. 1.3]

Die Eigenschaft (e) heißt auch *Dominanzprinzip* der uniformen Bewertung v.

(1.13) Beispiel:

(a) (TSCHETWERUCHIN [49], GRUNDHÖFER, SALZMANN [6, Prop. XI.11.7], KALHOFF [22, S.219]) Es seien $(K, +, \cdot, v)$ ein uniform bewerteter, sphärisch vollständiger Cartesischer Körper und φ eine Isometrie von (K, d_v) mit $\varphi(0) = 0$ sowie $\varphi(1) = 1$. Mit der neuen ternären Verknüpfung

$$T'(m, x, c) \quad := \quad \begin{cases} \varphi^{-1}\big(\varphi(m)\varphi(x) + \varphi(c)\big) & \text{falls } \ v(m) < 1 \\ mx + c & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } \ m, x, c \in K$$

bildet (K, T', v) einen uniform bewerteten, sphärisch vollständigen Ternärkörper mit Nullelement 0 und Einselement 1, welcher im Allgemeinen nicht linear ist.

(b) (MOULTON [30], PICKERT [32, S.93f.], KALHOFF [22, Prop. 3.5]) Es sei $(K, +, \cdot, v)$ ein uniform bewerteter Körper[3] und ein $k \in K$ mit $k \neq 1$ und $v(k) = 1$ fest gewählt. Mit der neuen Multiplikation

$$x \diamond y \quad := \quad \begin{cases} xky & \text{falls } \ v(x), v(y) < 1 \\ xy & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } \ x, y \in K$$

bildet $(K, +, \diamond, v)$ einen uniform bewerteten Cartesischen Körper mit Einselement 1, in welchem weder das linksseitige noch das rechtsseitige Distributivgesetz erfüllt ist.

(c) (KALHOFF [19, §1, §2], [22, Prop. 3.2]) Es seien $(\Gamma, \cdot, \leq)$ eine angeordnete Loop, $0 \notin \Gamma$ ein Element mit $0 < \Gamma$ und $(K, +, \cdot)$ ein Cartesischer Körper. Für eine Abbildung $x : \Gamma \longrightarrow K$ definieren wir

$$\text{den } \textit{Träger} \text{ von } x \text{ durch} \quad s(x) \;:=\; \big\{\ \gamma \in \Gamma \ \big|\ x_\gamma \neq 0\ \big\}$$

$$\text{und den } \textit{Grad} \text{ von } x \text{ durch} \quad \delta(x) \;:=\; \begin{cases} \max\big(s(x)\big) & \text{falls dieses existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

[1] Die Behauptung folgt direkt aus (1.11,f) mittels $v(x \boxminus y) = v\big((y + (x \boxminus y)) - y\big) = v(x - y)$ für alle $x, y \in K$.

[2] Dies ist eine sofortige Konsequenz aus (a) und (b) mit jeweils $x = 0$.

[3] nicht notwendig kommutativ, vgl. (1.8,f)

Diejenigen Abbildungen $x : \Gamma \longrightarrow K$, die einen *anti-wohlgeordneten* Träger[1] besitzen, heißen *formale Potenzreihen auf* Γ *über* K. Wir schreiben (mit einem Symbol $t \notin K$)

$$x_\gamma \;:=\; x(\gamma) \qquad \text{sowie} \qquad \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma t^\gamma \;:=\; x$$

und bezeichnen die Menge aller formalen Potenzreihen auf Γ über K mit $K((\Gamma))$. Mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma t^\gamma\Big) + \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma t^\gamma\Big) &:= \sum_{\gamma\in\Gamma} (x_\gamma + y_\gamma) t^\gamma \\ \text{sowie}^2 \quad \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma t^\gamma\Big) \cdot \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma t^\gamma\Big) &:= \sum_{\gamma\in\Gamma} \Big(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \alpha\beta=\gamma}} x_\alpha y_\beta\Big) t^\gamma \end{aligned}$$

für $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma t^\gamma,\ \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma t^\gamma \in K((\Gamma))$ bildet $\big(K((\Gamma)),+,\cdot\big)$ einen Cartesischen Körper, auf welchem durch

$$\delta \;:\; K((\Gamma)) \longrightarrow \Gamma\cup\{0\}\,, \qquad x \;\mapsto\; \begin{cases} \delta(x) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases},$$

eine uniforme Bewertung mit Werteloop Γ gegeben ist. Der uniform bewertete Cartesische Körper $\big(K((\Gamma)),+,\cdot,\delta\big)$ ist sphärisch vollständig.

(d) (André [2, S.185], Kalhoff [21, Ex. 2.6]) Die Menge $\mathbb{C}$ bildet zusammen mit der gewöhnlichen Addition sowie der neuen Multiplikation

$$x \diamond y \;:=\; \begin{cases} x\overline{y} & \text{falls } |x| = 2 \\ xy & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } x,y\in\mathbb{C}$$

einen Quasikörper $(\mathbb{C},+,\diamond)$ mit Einselement 1, in welchem weder das rechtsseitige Distributivgesetz noch das Assoziativgesetz der Multiplikation erfüllt ist. Für sein Radikal gilt $R(\mathbb{C},+,\diamond) = R_a(\mathbb{C},+,\diamond) = \mathbb{C}^*$.

(e) (Kalhoff [22, Prop. 3.7]) Es seien $(K,+,\cdot,v)$ ein uniform bewerteter, sphärisch vollständiger Quasikörper, k sein Primkörper und $(\Phi_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ eine Familie von Automorphismen des k-(Rechts-)Vektorraumes K, welche zugleich Isometrien von (K,d_v) sind und $\Phi_\gamma(1) = 1$ für alle $\gamma\in\Gamma$ sowie $\Phi_1 = \mathrm{id}_K$ erfüllen. Mit der neuen Multiplikation

$$x \diamond y \;:=\; \begin{cases} x\Phi_{v(x)}(y) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{für } x,y\in K$$

bildet $(K,+,\diamond,v)$ einen uniform bewerteten, sphärisch vollständigen Quasikörper mit Einselement 1. Dieser erfüllt im Allgemeinen weder das rechtsseitige Distributivgesetz noch das Assoziativgesetz der Multiplikation.[3]

[1] Hiermit sind diejenigen Abbildungen $x : \Gamma \longrightarrow K$ gemeint, für die jede nicht leere Teilmenge von $s(x)$ ein größtes Element besitzt. Im Gegensatz zur Konstruktion in [19] wählen wir hier direkt die duale Ordnung auf Γ (und somit als formale Potenzreihen diejenigen Abbildungen mit anti-wohlgeordnetem anstatt wohlgeordnetem Träger), um mit der Gradabbildung eine uniforme Bewertung in unserem Sinne zu erhalten, siehe [19, Prop, 2.2].

[2] Hierbei sei die Reihenfolge der Summanden in den auftretenden (stets endlichen) Summen der Gestalt $\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \alpha\beta=\gamma}} x_\alpha y_\beta$ in absteigender Folge nach α bzgl. der Ordnung in Γ gegeben.

[3] Vgl. hierzu das explizite Beispiel in [22, S.222].

Kapitel 2

Nilpotente & neutrale Elemente

Die Untersuchung der topologischen Körper, deren Topologie von einer Bewertung oder einem Absolutwert des Körpers induziert wird, ist in den 1940er-Jahren von Shafarevich [42], Kaplansky [24] und Zelinsky [53] begonnen worden. Diese mündete ein paar Jahre später in der Arbeit von Kowalsky und Dürbaum [28], welche schließlich eine Charakterisierung dieser Körpertopologien lieferte. Für eine modernisierte Aufarbeitung dieses Beweises für kommutative Körper sei auf das entsprechende Kapitel im Buch von Engler und Prestel [10, §B] verwiesen, auf welches wir im Folgenden des Öfteren Bezug nehmen.

Das Ziel des ersten Teiles dieser Arbeit ist es nun, diesen klassischen Satz über die Topologien bewerteter Körper auf das größere Gebiet der Topologien uniform bewerteter Ternärkörper zu übertragen und eine Charakterisierung dieser topologischen Ternärkörper zu erreichen.

Die Charakterisierung dieser Topologien fußt auf der Untersuchung *(analytisch) nilpotenter* Elemente;[1] die Konstruktion eines Bewertungsringes, dessen zugehörige Bewertung eine gegebene Topologie erzeugt, wird hierbei mittels einer Fallunterscheidung über die Existenz eines von Null verschiedenen, (analytisch) nilpotenten Elementes geführt. Die klassische Definition (analytisch) nilpotenter Elemente stellt sich allerdings für die Übertragung dieses Konzeptes auf Ternärkörper nicht als praktikabel heraus,[2] sodass wir stattdessen die Folgerung aus Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 10][3] dieser Definition als Ausgangspunkt für unsere Verallgemeinerung wählen, welcher eine entscheidende Rolle im Beweis dieser Charakterisierung zukommt. Dieses Kapitel soll der Einführung nilpotenter und neutraler Elemente in topologischen Ternärkörpern sowie der Diskussion ihrer allgemeinen Eigenschaften dienen.

In diesem Kapitel sei (K, T) stets ein Ternärkörper. Weiter bezeichne $x^{\mathbb{N}}$ für $x \in K^*$ die Menge aller Produkte x^n mit $n \in \mathbb{N}$ bei beliebigen Klammerungen dieser Produkte.

[1] Dies sind Elemente $x \in K^*$, für die zu jeder Umgebung U von 0 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in U$ für alle $n \geq n_0$ existiert, vgl. etwa Shafarevich [42, S.133] sowie Kaplansky [24, S.528].

[2] Da die Multiplikation in einem Ternärkörper nicht notwendig (potenz-)assoziativ ist, ist zunächst etwa nicht klar, ob für $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte, eine beliebige oder alle Klammerungen des Produktes x^n betrachtet werden sollen.

[3] Siehe auch Engler, Prestel [10, Lem. B.10(2)]; dort wird aus der Nicht-Nilpotenz eines Elementes $x \in K^*$ die Beschränktheit der Menge $\{x^{-n} \in K^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ bzgl. der Topologie gefolgert.

Nilpotenzmengen

(2.1) Definition und Satz:

Für ein Element $x \in K^*$ sei die Teilmenge $\langle x \rangle \subset K^*$ definiert als die minimale,[1] normale, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von K^*, welche x enthält, d.h. durch

$$\langle x \rangle \quad := \quad \bigcap_{\substack{x \,\in\, X \,\subset\, K^* \\ X \text{ normal mit } XX \subset X}} X \;.^{2}$$

Diese Menge heißt *Nilpotenzmenge von x*. Für alle $x, y \in K^*$ sowie $r \in R$ und $s \in R_a$ gelten:

(a) $x \in \langle y \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x \rangle \subset \langle y \rangle$.

(b) $\langle xy \rangle \subset \langle x \rangle \langle y \rangle$.

(c) $\langle r \rangle \subset R$ und $\langle -r \rangle \subset \pm R$.

(d) $\langle s \rangle \subset R_a$ und $\langle -s \rangle \subset \pm R_a$.

(e) $x^{\mathbb{N}} \subset \langle x \rangle \subset R_a x^{\mathbb{N}}$.

Beweis: *Zu (a):* Gilt $x \in \langle y \rangle$, so ist $\langle y \rangle$ offenbar eine normale, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von K^*, welche x enthält, und nach Konstruktion folgt direkt $\langle x \rangle \subset \langle y \rangle$. Umgekehrt folgt aus $\langle x \rangle \subset \langle y \rangle$ nach Definition sofort $x \in \langle x \rangle \subset \langle y \rangle$.

Zu (b): Die Menge $\langle x \rangle \langle y \rangle$ ist als Produkt normaler, multiplikativ abgeschlossener Teilmengen von K^* nach (1.4,b,c) wieder eine normale, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von K^*, welche wegen $x \in \langle x \rangle$ und $y \in \langle y \rangle$ insbesondere xy enthält. Nach Konstruktion gilt daher $\langle xy \rangle \subset \langle x \rangle \langle y \rangle$.

Zu (c,d): Da die Mengen R, $\pm R$, R_a und $\pm R_a$ nach (1.7,c) jeweils normale Unterloops von K^* sind, enthalten sie nach Konstruktion mit einem Element x auch bereits seine gesamte Nilpotenzmenge $\langle x \rangle$.

Zu (e): Da $x^{\mathbb{N}}$ offenbar multiplikativ abgeschlossen ist, ist die Menge $R_a x^{\mathbb{N}}$ nach (1.7,d(i)) und (1.4,c) eine normale, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von K^*, welche x enthält, und nach Konstruktion folgt direkt $\langle x \rangle \subset R_a x^{\mathbb{N}}$. Weiter muss die Menge $\langle x \rangle$ wegen ihrer multiplikativen Abgeschlossenheit mit dem Element x auch alle Produkte x^n mit $n \in \mathbb{N}$ bei beliebigen Klammerungen enthalten, d.h. es gilt $x^{\mathbb{N}} \subset \langle x \rangle$.

□

[1] bzgl. der mengentheoretischen Inklusion

[2] Da K^* selbst eine normale, multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von K^* ist, welche offenbar stets alle $x \in K^*$ enthält, ist die Indexmenge dieses Durchschnittes niemals leer und es treten keine Fragen zur Wohldefiniertheit der Menge $\langle x \rangle$ auf. Weiter ist $\langle x \rangle$ als Schnitt normaler, multiplikativ abgeschlossener Teilmengen von K^*, welche x enthalten, nach (1.4,b) wieder eine solche Teilmenge von K^* - und minimal mit diesen Eigenschaften nach Konstruktion.

(2.2) Satz:

Für alle $x, y, z \in K^*$ gelten:

(a) $\langle {}^{x}/_{y} \rangle = \langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle$.

(b) $\langle x \rangle = \langle {}^{(yx)}/_{y} \rangle = \langle {}_{y}\backslash^{(xy)} \rangle$.

(c) $\langle x \rangle = \langle {}^{1}/_{({}^{1}/_{x})} \rangle = \langle {}_{({}_{x}\backslash^{1})}\backslash^{1} \rangle$.

(d) $\langle {}^{x}/_{y} \rangle = \langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle = \langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle$.

(e) $\langle {}^{1}/_{x} \rangle = \langle {}^{y}/_{(xy)} \rangle = \langle {}^{y}/_{(yx)} \rangle$.

(f) $\langle {}^{x}/_{y} \rangle = \langle {}^{1}/_{y} \cdot x \rangle = \langle x \cdot {}_{y}\backslash^{1} \rangle = \langle {}^{1}/_{({}^{y}/_{x})} \rangle = \langle {}_{({}_{x}\backslash^{y})}\backslash^{1} \rangle$.

(g) $\langle {}^{1}/_{(xy)} \rangle = \langle {}^{1}/_{x} \cdot {}^{1}/_{y} \rangle = \langle {}^{1}/_{y} \cdot {}_{x}\backslash^{1} \rangle = \langle {}_{x}\backslash^{1} \cdot {}_{y}\backslash^{1} \rangle = \langle {}^{({}^{1}/_{y})}/_{x} \rangle = \langle {}_{y}\backslash^{({}_{x}\backslash^{1})} \rangle$.

Beweis: *Zu (a):* Nach der Definition und Normalität der Mengen $\langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle$, $\langle {}^{x}/_{y} \rangle$ gelten

$$x = y \cdot {}_{y}\backslash^{x} \in y \langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle = \langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle \, y \ , \qquad \text{d.h.} \qquad {}^{x}/_{y} \in \langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle \ ,$$

sowie
$$x = {}^{x}/_{y} \cdot y \in \langle {}^{x}/_{y} \rangle \, y = y \langle {}^{x}/_{y} \rangle \ , \qquad \text{d.h.} \qquad {}_{y}\backslash^{x} \in \langle {}^{x}/_{y} \rangle \ ,$$

und mit (2.1,a) sind bereits $\langle {}^{x}/_{y} \rangle \subset \langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle$ sowie $\langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle \subset \langle {}^{x}/_{y} \rangle$, also $\langle {}^{x}/_{y} \rangle = \langle {}_{y}\backslash^{x} \rangle$.

Zu (b,c): Diese Gleichungen folgen direkt aus (a) mittels

$$\langle x \rangle = \langle {}_{y}\backslash^{(yx)} \rangle \overset{\text{(a)}}{=} \langle {}^{(yx)}/_{y} \rangle \qquad \text{und} \qquad \langle x \rangle = \langle {}^{(xy)}/_{y} \rangle \overset{\text{(a)}}{=} \langle {}_{y}\backslash^{(xy)} \rangle$$

sowie
$$\langle x \rangle = \langle {}_{({}^{1}/_{x})}\backslash^{1} \rangle \overset{\text{(a)}}{=} \langle {}^{1}/_{({}^{1}/_{x})} \rangle \qquad \text{und} \qquad \langle x \rangle = \langle {}^{1}/_{({}_{x}\backslash^{1})} \rangle \overset{\text{(a)}}{=} \langle {}_{({}_{x}\backslash^{1})}\backslash^{1} \rangle \ .$$

Zu (d): Zunächst gilt nach Definition und Normalität der Menge $\langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle$

$$xz = {}^{(xz)}/_{(yz)} \cdot (yz) \in \langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle \, (yz) = \big(\langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle \, y \big) z \ ,$$

d.h. es folgt
$$x \in \langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle \, y \qquad \text{und damit} \qquad {}^{x}/_{y} \in \langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle \ .$$

Ebenso ist mit der Definition und Normalität der Menge $\langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle$ auch

$$zx = {}^{(zx)}/_{(zy)} \cdot (zy) \in \langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle \, (zy) = z \big(\langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle \, y \big) \ ,$$

d.h. es folgt
$$x \in \langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle \, y$$

und damit
$$xz \in \big(\langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle \, y \big) z = \langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle \, (yz) \ ,$$

also
$${}^{(xz)}/_{(yz)} \in \langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle \ .$$

Nach der Definition und Normalität der Menge $\langle {}^{x}/_{y} \rangle$ gilt schließlich

$$x = {}^{x}/_{y} \cdot y \in \langle {}^{x}/_{y} \rangle \, y \ ,$$

d.h. es folgt
$$zx \in z \big(\langle {}^{x}/_{y} \rangle \, y \big) = \langle {}^{x}/_{y} \rangle \, (zy) \qquad \text{und damit} \qquad {}^{(zx)}/_{(zy)} \in \langle {}^{x}/_{y} \rangle \ .$$

Mit (2.1,a) folgt somit insgesamt $\langle {}^{x}/_{y} \rangle = \langle {}^{(xz)}/_{(yz)} \rangle = \langle {}^{(zx)}/_{(zy)} \rangle$.

Zu (e): Die Gleichungen folgen direkt aus (d) mittels

$$\langle {}^1/_x \rangle \overset{\text{(d)}}{=} \langle {}^{(1\,\cdot\, y)}/_{(xy)} \rangle = \langle {}^y/_{(xy)} \rangle \quad \text{und} \quad \langle {}^1/_x \rangle \overset{\text{(d)}}{=} \langle {}^{(y\,\cdot\,1)}/_{(yx)} \rangle = \langle {}^y/_{(yx)} \rangle \ .$$

Zu (f): Mit (d) und (a) folgt zunächst

$$\langle {}^1/_{({}^y/_x)} \rangle \overset{\text{(d)}}{=} \langle {}^{(1\,\cdot\,x)}/_{({}^y/_x\,\cdot\,x)} \rangle = \langle {}^x/_y \rangle = \langle {}^{(x\,\cdot\,1)}/_{(x\,\cdot\,{}_x\backslash^y)} \rangle \overset{\text{(d)}}{=} \langle {}^1/_{({}_x\backslash^y)} \rangle \overset{\text{(a)}}{=} \langle {}_{({}_x\backslash^y)}\backslash^1 \rangle \ .$$

Es sind somit nur noch die ersten beiden Gleichungen zu zeigen: Nach Definition und Normalität der Menge $\langle {}^1/_y \cdot x \rangle$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} {}^1/_y \cdot x \ &\in\ \langle {}^1/_y \cdot x \rangle \ =\ ({}^1/_y \cdot y)\,\langle {}^1/_y \cdot x \rangle \ =\ {}^1/_y \cdot \big(\langle {}^1/_y \cdot x \rangle\, y\big) \ , \\ \text{d.h. es folgt} \quad x \ &\in\ \langle {}^1/_y \cdot x \rangle\, y \quad \text{und damit} \quad {}^x/_y \ \in\ \langle {}^1/_y \cdot x \rangle \ . \end{aligned}$$

Ebenso ist mit der Definition und Normalität der Menge $\langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle$ auch

$$\begin{aligned} x \cdot {}_y\backslash^1 \ &\in\ \langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle \ =\ \langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle\,(y \cdot {}_y\backslash^1) \ =\ \big(y\,\langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle\big) \cdot {}_y\backslash^1 \ , \\ \text{d.h. es folgt} \quad x \ &\in\ y\,\langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle \\ \text{und damit} \quad {}^1/_y \cdot x \ &\in\ {}^1/_y \cdot \big(y\,\langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle\big) \ =\ ({}^1/_y \cdot y)\,\langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle \ =\ \langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle \ . \end{aligned}$$

Nach der Definition und Normalität der Menge $\langle {}^x/_y \rangle$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} x \ &=\ {}^x/_y \cdot y \ \in\ \langle {}^x/_y \rangle\, y \ , \\ \text{d.h. es folgt} \quad x \cdot {}_y\backslash^1 \ &\in\ \big(\langle {}^x/_y \rangle\, y\big) \cdot {}_y\backslash^1 \ =\ \langle {}^x/_y \rangle\,(y \cdot {}_y\backslash^1) \ =\ \langle {}^x/_y \rangle \ . \end{aligned}$$

Mit (2.1,a) folgt somit insgesamt $\langle {}^x/_y \rangle = \langle {}^1/_y \cdot x \rangle = \langle x \cdot {}_y\backslash^1 \rangle$.

Zu (g): Mit (f) und (a) folgt zunächst

$$\langle {}^{({}^1/_y)}/_x \rangle \overset{\text{(f)}}{=} \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle \overset{\text{(f)}}{=} \langle {}^1/_y \cdot {}_x\backslash^1 \rangle \overset{\text{(f)}}{=} \langle {}_x\backslash^1 \cdot {}_y\backslash^1 \rangle \overset{\text{(f)}}{=} \langle {}^{({}_x\backslash^1)}/_y \rangle \overset{\text{(a)}}{=} \langle {}_y\backslash^{({}_x\backslash^1)} \rangle \ .$$

Es ist somit nur noch die erste Gleichung zu zeigen: Nach Definition und Normalität der Menge $\langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} {}^1/_x \cdot {}^1/_y \ &\in\ \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle \ =\ ({}^1/_x \cdot x)\,\langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle \ =\ {}^1/_x \cdot \big(\langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle\, x\big) \ , \\ \text{d.h. es folgt} \quad {}^1/_y \ &\in\ \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle\, x \\ \text{und damit} \quad 1 \ &=\ {}^1/_y \cdot y \ \in\ \big(\langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle\, x\big) y \ =\ \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle\,(xy) \ , \\ \text{also} \quad {}^1/_{(xy)} \ &\in\ \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle \ . \end{aligned}$$

Weiter ist ebenso mit der Definition und Normalität der Menge $\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle$

$$1 \;=\; {}^1\!/_{(xy)} \cdot (xy) \;\in\; \langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle\,(xy) \;=\; \big(x\,\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle\big)y\ ,$$

$$\text{d.h. es folgt} \qquad {}^1\!/_y \;\in\; x\,\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle$$

$$\text{und damit} \qquad {}^1\!/_x \cdot {}^1\!/_y \;\in\; {}^1\!/_x \cdot \big(x\,\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle\big) \;=\; ({}^1\!/_x \cdot x)\,\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle \;=\; \langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle\ .$$

Mit (2.1,a) folgt somit insgesamt $\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle = \langle {}^1\!/_x \cdot {}^1\!/_y \rangle$.

□

Wir möchten an dieser Stelle noch zwei weitere Rechenregeln für Nilpotenzmengen im Stile von (2.2) diskutieren, welche für Ternärkörper im Allgemeinen **nicht** gelten:

- Für $x, y \in K^*$ gilt im Allgemeinen $\langle xy \rangle \neq \langle yx \rangle$; betrachte als explizites Beispiel hierzu etwa die angeordnete Loop $\Gamma := (\mathbb{R}, \dot{+}, \leq)$ aus (1.3,a) mit $r := 2$ sowie den uniform bewerteten Cartesischen Körper $\big(\mathbb{R}((\Gamma)), +, \cdot, \delta\big)$ der formalen Potenzreihen auf Γ über $\mathbb{R}$ aus (1.13,c): Wegen[1]

$$\delta({}^1\!/_t \cdot t) \;=\; \delta(1) \;=\; 0$$

$$\text{und} \qquad \delta(t \cdot {}^1\!/_t) \;=\; \delta(t) \,\dot{+}\, \delta({}^1\!/_t) \;=\; 1 \,\dot{+}\, (\dot{-}1) \;=\; 1 \,\dot{+}\, (-2) \;=\; -\tfrac{3}{2}$$

  ist $t \cdot {}^1\!/_t \notin \{1\} = \langle 1 \rangle = \langle {}^1\!/_t \cdot t \rangle$, also insbesondere $\langle t \cdot {}^1\!/_t \rangle \neq \langle {}^1\!/_t \cdot t \rangle$.

  Für alle $x, y \in K^*$ gilt allerdings stets

$$\langle {}^1\!/_{({}^1\!/_y)} \cdot x \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle x \cdot {}_{({}^1\!/_y)}\backslash^1 \rangle \;=\; \langle xy \rangle \;=\; \langle {}^1\!/_{({}_x\backslash^1)} \cdot y \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle y \cdot {}_{({}_x\backslash^1)}\backslash^1 \rangle\ .$$

- Für $x, y \in K^*$ gilt im Allgemeinen $\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle \neq \langle {}_y\backslash^1 \cdot {}^1\!/_x \rangle$; d.h. die vierte mögliche Gestalt der Nilpotenzmenge aus (2.2,g) muss nicht notwendig mit den dort aufgezählten übereinstimmen. Betrachte in derselben Situation wie oben den uniform bewerteten Cartesischen Körper $\big(\mathbb{R}((\Gamma)), +, \cdot, \delta\big)$: Wegen[1]

$$\delta({}^1\!/_{({}^1\!/_t \cdot t)}) \;=\; \delta({}^1\!/_1) \;=\; \delta(1) \;=\; 0$$

$$\begin{aligned}\text{und} \qquad \delta({}_t\backslash^1 \cdot {}^1\!/_{({}^1\!/_t)}) \;&=\; \delta({}_t\backslash^1) \,\dot{+}\, \delta({}^1\!/_{({}^1\!/_t)}) \;=\; (\,\dot{=}\,1) \,\dot{+}\, \big(\dot{-}(\dot{-}1)\big) \\ &=\; (-\tfrac{1}{2}) \,\dot{+}\, \big(\dot{-}(-2)\big) \;=\; (-\tfrac{1}{2}) \,\dot{+}\, 4 \;=\; \tfrac{15}{4}\end{aligned}$$

  ist ${}_t\backslash^1 \cdot {}^1\!/_{({}^1\!/_t)} \notin \{1\} = \langle 1 \rangle = \langle {}^1\!/_{({}^1\!/_t \cdot t)} \rangle$, also insbesondere $\langle {}^1\!/_{({}^1\!/_t \cdot t)} \rangle \neq \langle {}_t\backslash^1 \cdot {}^1\!/_{({}^1\!/_t)} \rangle$.

  Für alle $x, y \in K^*$ gelten mit der obigen Betrachtung allerdings stets

$$\langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1\!/_x \cdot {}^1\!/_y \rangle \overset{\text{s.o.}}{=} \langle {}^1\!/_{({}^1\!/_{({}^1\!/_y)})} \cdot {}^1\!/_x \rangle \;=\; \langle {}_{\widetilde{y}}\backslash^1 \cdot {}^1\!/_x \rangle \quad \text{mit } \widetilde{y} \;:=\; {}^1\!/_{({}^1\!/_{({}^1\!/_{({}^1\!/_y)})})}$$

$$\text{und} \quad \langle {}^1\!/_{(xy)} \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}_x\backslash^1 \cdot {}_y\backslash^1 \rangle \overset{\text{s.o.}}{=} \langle {}_y\backslash^1 \cdot {}_{(({}_x\backslash^1)\backslash^1)}\backslash^1 \rangle \;=\; \langle {}_y\backslash^1 \cdot {}^1\!/_{\widetilde{x}} \rangle \quad \text{mit } \widetilde{x} \;:=\; {}_{({}_{(({}_x\backslash^1)\backslash^1)}\backslash^1)}\backslash^1\ .$$

[1] Für ein $\gamma \in \Gamma$ bezeichne $\dot{-}\gamma$ bzw. $\dot{=}\,\gamma$ hierbei das links- bzw. rechtsinverse Element von γ in der Loop Γ, d.h. dasjenige Element aus Γ mit $(\dot{-}\gamma) \,\dot{+}\, \gamma = 0$ bzw. $\gamma \,\dot{+}\, (\,\dot{=}\,\gamma) = 0$.

(2.3) Satz:

Für alle $x \in K^*$ gelten:

(a) $\langle {}^1\!/\!_x \rangle \;=\; \langle {}_x\backslash^1 \rangle \;=\; {}^1\!/\!_{\langle x \rangle} \;=\; {}_{\langle x \rangle}\backslash^1$.

(b) ${}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}} \;\subset\; \langle {}^1\!/\!_x \rangle \;\subset\; R_a \cdot {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}}$.

Beweis: *Zu (a):* Für alle $x \in K^*$ gelten zunächst $\langle {}^1\!/\!_x \rangle = \langle {}_x\backslash^1 \rangle$ nach (2.2,a) sowie ebenso ${}^1\!/\!_{\langle x \rangle} = {}_{\langle x \rangle}\backslash^1$ nach (1.2,d) und (1.4,a). Nach (1.2,d) und (1.4,b,c) ist ${}^1\!/\!_{\langle x \rangle}$ ebenfalls normal und multiplikativ abgeschlossen mit ${}^1\!/\!_x \in {}^1\!/\!_{\langle x \rangle}$, sodass nach Konstruktion $\langle {}^1\!/\!_x \rangle \subset {}^1\!/\!_{\langle x \rangle}$ für alle $x \in K^*$ gilt.
Aus dem bereits Bewiesenen folgt dann auch die andere Inklusion, denn für alle $x \in K^*$ ist

$$\langle x \rangle \overset{(2.2,c)}{=} \langle {}^1\!/\!_{({}^1\!/\!_x)} \rangle \overset{\text{s.o.}}{\subset} {}^1\!/\!_{\langle {}^1\!/\!_x \rangle} \;, \qquad \text{d.h.} \qquad {}^1\!/\!_{\langle x \rangle} \;=\; {}_{\langle x \rangle}\backslash^1 \;\subset\; {}_{({}^1\!/\!_{\langle {}^1\!/\!_x \rangle})}\backslash^1 \;=\; \langle {}^1\!/\!_x \rangle \;.$$

Zu (b): Da die Faktorloop K^*/R_a nach (1.7,d) eine abelsche Gruppe ist, folgt die Behauptung für alle $x \in K^*$ direkt mittels

$$ {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}} \overset{(2.1,e)}{\subset} {}^1\!/\!_{\langle x \rangle} \overset{(a)}{=} \langle {}^1\!/\!_x \rangle \overset{(2.1,e)}{\subset} R_a({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}} \overset{(1.7,d)}{=} R_a \cdot {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}} \;.$$

□

Beschränktheit in topologischen Ternärkörpern

Die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/\!_x \rangle = {}^1\!/\!_{\langle x \rangle}$ wird sich im weiteren Verlauf als geeignete Verallgemeinerung der Menge $\{x^{-n} \in K^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ herausstellen, deren Beschränktheit im klassischen Beweis topologischer Körper eine Folge der Nicht-Nilpotenz des Elementes $x \in K^*$ gewesen ist.[1] Beachte, dass im Falle eines kommutatives Körpers diese beiden Mengen wegen $R_a = \{1\}$, vgl. Kalhoff [23, S.154], und (2.3,b) zusammenfallen.

Nach der obigen Diskussion einiger Eigenschaften von Nilpotenzmengen werden wir uns im Folgenden daher dem zweiten Aspekt dieser Verallgemeinerung widmen und einen *Beschränktheitsbegriff* für topologische Ternärkörper einführen: Hierbei orientieren wir uns stark an der entsprechenden Definition von Beschränktheit in topologischen Ternärkörpern von Szambien [46, S.181] sowie dem Beschränktheitsbegriff topologischer Körper von Kowalsky, Dürbaum [28, S.138f.].[2]

Im Folgenden sei $(K, T, \mathscr{T})$ stets ein topologischer Ternärkörper.

[1] vgl. erneut Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 10] bzw. auch Engler, Prestel [10, Lem. B.10(2)]

[2] In Szambien [46, S.181] ist ein *beidseitiger* Beschränktheitsbegriff eingeführt worden, den wir aber nicht in der dortigen Stärke benötigen werden. Wir kombinieren diesen daher mit dem *einseitigen* Beschränktheitsbegriff aus Kowalsky, Dürbaum [28, S.138f.].

(2.4) Definition: (vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, S.138f.], Szambien [46, S.181])

Es sei $M \subset K$ eine Teilmenge von K.

(a) M heißt *links-beschränkt*, wenn für alle Umgebungen U von 0 stets eine Umgebung V von 0 mit $VM \subset U$ existiert.

(b) M heißt *rechts-beschränkt*, wenn für alle Umgebungen U von 0 stets eine Umgebung V von 0 mit $MV \subset U$ existiert.

(c) M heißt *beschränkt*, wenn M sowohl links- als auch rechts-beschränkt ist.[1]

(d) M heißt *links-unbeschränkt* bzw. *rechts-unbeschränkt*, wenn M nicht links-beschränkt bzw. nicht rechts-beschränkt ist.

(e) M heißt *unbeschränkt*, wenn M nicht beschränkt ist, d.h. wenn M links- oder rechts-unbeschränkt ist.

(2.5) Satz:

(a) (vgl. Engler, Prestel [10, Cor. B.4]) Die Menge K ist genau dann links- oder rechts-beschränkt, wenn die Topologie $\mathscr{T}$ diskret oder indiskret ist.[2]

(b) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.3(3)]) Jede Teilmenge einer links- bzw. rechts-beschränkten Teilmenge von K ist wieder links- bzw. rechts-beschränkt.

(c) Endliche Vereinigungen links- bzw. rechts-beschränkter Teilmengen von K sind wieder links- bzw. rechts-beschränkt.

(d) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.3(2)]) Endliche Teilmengen von K sind beschränkt.

(e) Eine normale Teilmenge von K ist genau dann links-beschränkt, wenn sie rechts-beschränkt ist. In diesem Fall ist sie also bereits beschränkt.
Insbesondere ist jede normale, unbeschränkte Teilmenge von K sowohl links- als auch rechts-unbeschränkt.

(f) (vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 2]) Sind $M \subset K$ eine normale, beschränkte sowie $N \subset K$ eine links- bzw. rechts-beschränkte Teilmenge von K, so ist die Menge $MN = NM$ wieder links- bzw. rechts-beschränkt.

Beweis: *Zu (a):* Ist $\mathscr{T}$ diskret, d.h. ist $\{0\}$ eine Umgebung von 0, so gilt für alle Umgebungen U von 0 stets $\{0\} \cdot K = K \cdot \{0\} = \{0\} \subset U$ und K ist somit beschränkt.
Ist $\mathscr{T}$ dagegen indiskret, d.h. ist K die einzige Umgebung von 0, so ist K wegen $KK \subset K$ ebenfalls beschränkt.

[1] Diese Definition stimmt mit dem Beschränktheitsbegriff von Szambien [46, S.181] überein.

[2] In diesem Fall ist K nach (e) dann bereits beschränkt.

Ist $\mathscr{T}$ dagegen weder diskret noch indiskret, so gibt es eine Umgebung U von 0 mit $U \neq K$ und für alle Umgebungen V von 0 gilt $VK = KV = K \not\subset U$ (denn es gibt stets ein Element $x \in V \backslash \{0\}$, da $\mathscr{T}$ nicht diskret ist), d.h. K ist sowohl links- als auch rechts-unbeschränkt.

Zu (b): Es seien $M \subset K$ eine links- bzw. rechts-beschränkte Teilmenge von K und $N \subset M$ eine Teilmenge von M. Ist eine Umgebung U von 0 gegeben, so gibt es dann eine Umgebung V von 0 mit $VM \subset U$ bzw. $MV \subset U$ und es folgt direkt auch $VN \subset VM \subset U$ bzw. $NV \subset MV \subset U$.

Zu (c): Es seien $M, N \subset K$ links- bzw. rechts-beschränkte Teilmengen von K. Ist eine Umgebung U von 0 gegeben, so gibt es dann Umgebungen V, V' von 0 mit $VM, V'N \subset U$ bzw. $MV, NV' \subset U$ und die Umgebung $W := V \cap V'$ von 0 erfüllt

$$\begin{array}{rrcccccc} & W(M \cup N) & = & (WM) \cup (WN) & \subset & (VM) \cup (V'N) & \subset & U \\ \text{bzw.} & (M \cup N)W & = & (MW) \cup (NW) & \subset & (MV) \cup (NV') & \subset & U\,. \end{array}$$

Iterativ folgt die Behauptung dann auch für beliebige endliche Vereinigungen links- bzw. rechts-beschränkter Teilmengen von K.

Zu (d): Offenbar ist $\emptyset$ stets beschränkt. Mit (c) genügt es daher, die Beschränktheit von einelementigen Teilmengen $\{x\} \subset K$ zu zeigen: Im Fall $x = 0$ ist für alle Umgebungen U von 0 offenbar $U \cdot \{x\} = \{x\} \cdot U = \{0\} \subset U$. Ist dagegen $x \neq 0$ und eine Umgebung U von 0 gegeben, so sind ${}^{U}\!/_{x}$ und ${}_{x}\backslash^{U}$ ebenfalls Umgebungen[1] von 0 mit ${}^{U}\!/_{x} \cdot \{x\} = \{x\} \cdot {}_{x}\backslash^{U} = U$.

Zu (e): Es sei $M \subset K$ eine normale Teilmenge von K. Dann gilt für alle Umgebungen V von 0 insbesondere $VM = MV$ und die Teilmenge M ist somit genau dann links-beschränkt, wenn sie rechts-beschränkt ist, d.h. genau dann, wenn sie beschränkt ist. Mit der Kontraposition dieser Aussage folgt die zweite Behauptung.

Zu (f): Ist in dieser Situation eine Umgebung U von 0 gegeben, so gibt es dann Umgebungen V, V' von 0 mit $MV \subset U$ und $V'N \subset V$ bzw. $NV' \subset V$ und es folgt

$$\begin{array}{rrcccccc} & V'(MN) & = & M(V'N) & \subset & MV & \subset & U \\ \text{bzw.} & (MN)V' & = & M(NV') & \subset & MV & \subset & U\,. \end{array}$$

$\square$

(2.6) Satz:

Es sei R beschränkt. Dann gilt:

(a) (vgl. KOWALSKY, DÜRBAUM [28, Satz 2]) Sind $M, N \subset K$ links- bzw. rechts-beschränkte Teilmengen von K, so sind auch die Mengen $M + N$, $M - N$ und $M \boxminus N$ jeweils wieder links- bzw. rechts-beschränkt.

[1] Denn die Rechts- und Linksmultiplikation mit x ist jeweils stetig mit $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

Ist sogar R_a beschränkt, so gelten weiter:

(b) Jede links- oder rechts-beschränkte Teilmenge von K ist bereits beschränkt.[1]

(c) (vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 2]) Sind $M, N \subset K$ jeweils beschränkte Teilmengen von K, so ist auch die Menge MN wieder beschränkt.

Beweis: *Zu (a):* Ist eine Umgebung U von 0 gegeben, so existiert zunächst eine Umgebung[2] V von 0 mit $V + V \subset U$. Da in dieser Situation die Mengen RM und RN nach (2.5,f) wieder links- bzw. rechts-beschränkt sind, gibt es dann Umgebungen W, W' von 0 mit $W(RM), W'(RN) \subset V$ bzw. $(RM)W, (RN)W' \subset V$ und die Umgebung $\widetilde{W} := W \cap W'$ von 0 erfüllt

$$\begin{array}{rrcl} & \widetilde{W}(M+N) & \subset & \widetilde{W}\big((RM)+(RN)\big) \stackrel{(1.6,e)}{\subset} \widetilde{W}(RM)+\widetilde{W}(RN) \\ & & \subset & W(RM)+W'(RN) \;\subset\; V+V \;\subset\; U \\ \text{bzw.} & (M+N)\widetilde{W} & \subset & \big((RM)+(RN)\big)\widetilde{W} \stackrel{(1.6,f)}{\subset} (RM)\widetilde{W}+(RN)\widetilde{W} \\ & & \subset & (RM)W+(RN)W' \;\subset\; V+V \;\subset\; U\ . \end{array}$$

Somit ist die Summe zweier links- bzw. rechts-beschränkter Teilmengen von K stets wieder links- bzw. rechts-beschränkt. Da $-R$ nach (1.7,c) normal und wegen $-R = (-1)R$, vgl. (1.6,c), nach (2.5,d,f) auch beschränkt ist, sind nach (2.5,f) ebenso die Mengen $(-R)M$ und $(-R)N$ links- bzw. rechts-beschränkt. Somit folgt die Links- bzw. Rechts-Beschränktheit von $M - N$ bereits aus dem Bewiesenen und (2.5,b) mittels

$$M - N \;\subset\; M - (RN) \stackrel{(1.6,d)}{=} M + \big(-(RN)\big) \stackrel{(1.6,c)}{=} M + \big((-R)N\big)\ .$$

Also ist ebenso diese einseitige Differenz zweier links- bzw. rechts-beschränkter Teilmengen von K stets wieder links- bzw. rechts-beschränkt. Schließlich sind nach (2.5,f) die Mengen RM und RN links- bzw. rechts-beschränkt und die Links- bzw. Rechts-Beschränktheit von $M \boxminus N$ folgt schließlich aus dem Obigen und (2.5,b) durch

$$M \boxminus N \;\subset\; (RM) \boxminus (RN) \stackrel{(1.6,b)}{=} (RM) - (RN)\ .$$

Zu (b): Ist $M \subset K$ eine links-beschränkte Teilmenge von K und weiter eine Umgebung U von 0 gegeben, so gibt es Umgebungen V, W von 0 mit $R_aV \subset U$ sowie $WM \subset V$ und es folgt auch

$$MW \;\subset\; R_a(MW) \;=\; R_a(WM) \;\subset\; R_aV \;\subset\; U\ .$$

Ist $M \subset K$ dagegen eine rechts-beschränkte Teilmenge von K und eine Umgebung U von 0 gegeben, so gibt es analog Umgebungen V, W von 0 mit $R_aV \subset U$ sowie $MW \subset V$ und es gilt ebenfalls

$$WM \;\subset\; R_a(WM) \;=\; R_a(MW) \;\subset\; R_aV \;\subset\; U\ .$$

[1] In diesem Fall stimmt unser Beschränktheitsbegriff natürlich mit dem von Szambien [46, S.181] überein.

[2] Denn die Addition $+$ ist stetig mit $0 + 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

In beiden Fällen ist M somit bereits beschränkt.

Zu (c): Es seien beschränkte Teilmengen $M, N \subset K$ von K gegeben; mit (b) genügt es zu zeigen, dass die Menge MN rechts-beschränkt ist. In dieser Situation ist die Menge $R_a M$ nach (2.5,f) beschränkt - ist daher eine Umgebung U von 0 gegeben, so gibt es insbesondere Umgebungen V, W von 0 mit $(R_a M)V \subset U$ und $NW \subset V$ und es folgt

$$(MN)W \quad \subset \quad R_a\big((MN)W\big) \quad = \quad R_a\big(M(NW)\big) \quad = \quad (R_a M)(NW) \quad \subset \quad (R_a M)V \quad \subset \quad U \; .$$

□

Nilpotente & neutrale Elemente

Nach der Betrachtung dieser beiden Aspekte haben wir nun alles an der Hand, um unseren Begriff *nilpotenter* und *neutraler* Elemente einzuführen.

(2.7) Definition: (vgl. KOWALSKY, DÜRBAUM [28, Satz 10])[1]

(a) Ein Element $x \in K$ heißt *nilpotent*,[2] wenn $x = 0$ gilt oder $x \neq 0$ und die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/\!_x \rangle$ unbeschränkt ist. Wir bezeichnen die Menge der nilpotenten Elemente von $(K, T, \mathscr{T})$ mit

$$N_0 \quad := \quad \{0\} \;\cup\; \big\{\; x \in K^* \;\;\big|\;\; \langle {}^1\!/\!_x \rangle \text{ ist unbeschränkt } \big\} \quad \subset \quad K \; .$$

(b) Ein Element $x \in K^*$ heißt *neutral*, wenn sowohl x als auch ${}^1\!/\!_x$ nicht nilpotent sind, d.h. wenn die Nilpotenzmengen[3] $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1\!/\!_x \rangle$ jeweils beschränkt sind. Die Menge der neutralen Elemente von $(K, T, \mathscr{T})$ notieren wir als

$$N^\times \quad := \quad \big\{\; x \in K^* \;\;\big|\;\; \langle x \rangle \text{ und } \langle {}^1\!/\!_x \rangle \text{ sind jeweils beschränkt } \big\} \quad \subset \quad K^* \; .$$

(c) Schließlich bezeichnen wir die Mengen der nilpotenten und neutralen Elemente von $(K, T, \mathscr{T})$ mit

$$\begin{aligned} N \quad &:= \quad N_0 \;\dot\cup\; N^\times \\ &= \quad \{0\} \;\cup\; \big\{\; x \in K^* \;\;\big|\;\; \langle {}^1\!/\!_x \rangle \text{ unbeschränkt oder } \langle x \rangle \, , \langle {}^1\!/\!_x \rangle \text{ beschränkt } \big\} \; . \end{aligned}$$

[1] Siehe erneut auch ENGLER, PRESTEL [10, Lem. B.10(2)].

[2] Da bei uns keine Verwechselungsgefahr mit Nilpotenzbegriffen anderer Gebiete (wie etwa der Gruppentheorie etc.) besteht, werden wir in dieser Arbeits stets einfach nur *nilpotent* anstatt *analytisch nilpotent* schreiben.

[3] Beachte, dass nach (2.2,c) stets $\langle {}^1\!/\!_{({}^1\!/\!_x)} \rangle = \langle x \rangle$ für alle $x \in K^*$ gilt.

(2.8) Satz:

(a) Die Mengen N_0, $N^\times$ und N sind jeweils normal.

(b) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11(6)]) $N^\times$ ist eine normale Unterloop von $(K^*,\cdot)$.

(c) Ist $\mathscr{T}$ diskret oder indiskret, so sind $N_0=\{0\}$ sowie $N^\times=K^*$ und $N=K$.

(d) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11(4)]) Das Produkt eines nilpotenten mit einem neutralen Element ist wieder nilpotent, d.h. es gelten

$$N_0N^\times \;=\; N^\times N_0 \;=\; N_0 \qquad \text{und} \qquad NN^\times \;=\; N^\times N \;=\; N\ .$$

(e) Das Produkt eines nicht nilpotenten mit einem neutralen Element ist wieder nicht nilpotent, d.h. es gelten

$$\begin{aligned} & (K\backslash N_0)N^\times \;=\; N^\times(K\backslash N_0) \;=\; K\backslash N_0 \\ \text{und}\quad & (K\backslash N)N^\times \;=\; N^\times(K\backslash N) \;=\; K\backslash N\ . \end{aligned}$$

(f) Das Produkt zweier nicht nilpotenter Elemente ist wieder nicht nilpotent, d.h. es gelten

$$(K\backslash N_0)(K\backslash N_0) \;=\; K\backslash N_0 \qquad \text{und} \qquad (K\backslash N)(K\backslash N) \;\subset\; K\backslash N\ .$$

(g) (vgl. Engler, Prestel [10, S.195]) Es gelten

$$1/(K\backslash N_0) \;=\; (K\backslash N_0)\backslash 1 \;\subset\; N \qquad \text{und} \qquad 1/(K\backslash N) \;=\; (K\backslash N)\backslash 1 \;\subset\; N_0\ .$$

Beweis: *Zu (a):* Wir zeigen für die Normalität von N_0, dass $N_0\backslash\{0\}$ eine normale Teilmenge von K^* ist, vgl. (1.5,f), und führen für die Dauer dieses Beweises hierfür die Notation $N_0^* := N_0\backslash\{0\}$ ein. Da für alle $n,x,y\in K^*$

$$\begin{aligned} & \big\langle 1/\big((xy)\backslash((xn)y)\big)\big\rangle \overset{(2.2,d)}{=} \big\langle (xy)/((xn)y)\big\rangle \overset{(2.2,d)}{=} \big\langle x/(xn)\big\rangle \overset{(2.2,e)}{=} \big\langle 1/n\big\rangle \\ \text{sowie}\quad & \big\langle 1/\big((xy)\backslash(x(yn))\big)\big\rangle \overset{(2.2,d)}{=} \big\langle (xy)/(x(yn))\big\rangle \overset{(2.2,d)}{=} \big\langle y/(yn)\big\rangle \overset{(2.2,e)}{=} \big\langle 1/n\big\rangle \end{aligned}$$

gelten, ist die Nilpotenzmenge $\langle 1/n\rangle$ somit genau dann unbeschränkt, wenn die beiden obigen Nilpotenzmengen jeweils unbeschränkt sind. Also ist n genau dann nilpotent, wenn die Elemente $(xy)\backslash((xn)y)$ und $(xy)\backslash(x(yn))$ jeweils nilpotent sind, und es folgen

$$\begin{aligned} & (xy)\backslash((xN_0^*)y) \;=\; N_0^* \qquad \text{und} \qquad (xy)\backslash(x(yN_0^*)) \;=\; N_0^*\ , \\ \text{d.h.}\quad & (xN_0^*)y \;=\; x(yN_0^*) \;=\; (xy)N_0^*\ . \end{aligned}$$

Somit ist N_0^* nach (1.2,c) bereits normal. Ebenso gelten für alle $n,x,y\in K^*$

$$\begin{aligned} & \big\langle (xy)\backslash((xn)y)\big\rangle \overset{(2.2,a)}{=} \big\langle ((xn)y)/(xy)\big\rangle \overset{(2.2,d)}{=} \big\langle (xn)/x\big\rangle \overset{(2.2,b)}{=} \langle n\rangle \\ \text{sowie}\quad & \big\langle (xy)\backslash(x(yn))\big\rangle \overset{(2.2,a)}{=} \big\langle (x(yn))/(xy)\big\rangle \overset{(2.2,d)}{=} \big\langle (yn)/y\big\rangle \overset{(2.2,b)}{=} \langle n\rangle\ , \end{aligned}$$

d.h. die Nilpotenzmenge $\langle n \rangle$ ist genau dann beschränkt, wenn die beiden obigen Nilpotenzmengen jeweils beschränkt sind. Zusammen mit dem obigen Ergebnis ist n also genau dann neutral, wenn die Elemente ${}_{(xy)}\backslash^{((xn)y)}$ und ${}_{(xy)}\backslash^{(x(yn))}$ jeweils neutral sind. Erneut folgen

$$ {}_{(xy)}\backslash^{((xN^\times)y)} \;=\; N^\times \qquad \text{sowie} \qquad {}_{(xy)}\backslash^{(x(yN^\times))} \;=\; N^\times \ , $$

$$ \text{d.h.} \qquad (xN^\times)y \;=\; x(yN^\times) \;=\; (xy)N^\times \ . $$

Erneut ist $N^\times$ nach (1.2,c) bereits normal. Schließlich ist $N = N_0 \cup N^\times$ als Vereinigung normaler Mengen wieder normal, vgl. (1.4,b).

Zu (b): Mit (a) ist nur die Unterloop-Eigenschaft für $N^\times$ zu zeigen: Zunächst ist offenbar $\langle {}^1/_1 \rangle = \langle 1 \rangle = \{1\}$ und diese Menge nach (2.5,d) beschränkt, d.h. es ist $1 \in N^\times$. Seien nun $x, y \in N^\times$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle x \rangle$, $\langle {}^1/_x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle {}^1/_y \rangle$ jeweils beschränkt. Es sind $xy, {}^x/_y, {}_y\backslash^x \in N^\times$ zu zeigen - betrachte hierfür

$$
\begin{aligned}
\langle xy \rangle &\overset{(2.1,b)}{\subset} \langle x \rangle \langle y \rangle \ , \\
\langle {}^1/_{(xy)} \rangle &\overset{(2.2,g)}{=} \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_x \rangle \langle {}^1/_y \rangle \ , \\
\langle {}_y\backslash^x \rangle &\overset{(2.2,a)}{=} \langle {}^x/_y \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1/_y \cdot x \rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_y \rangle \langle x \rangle \\
\text{sowie} \qquad \langle {}^1/_{({}_y\backslash^x)} \rangle &\overset{(2.2,a)}{=} \langle {}_{({}_y\backslash^x)}\backslash^1 \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1/_{({}^x/_y)} \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1/_x \cdot y \rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_x \rangle \langle y \rangle \ .
\end{aligned}
$$

Nach (2.5,f,b) sind mit $\langle x \rangle$, $\langle {}^1/_x \rangle$, $\langle y \rangle$, $\langle {}^1/_y \rangle$ damit auch die Nilpotenzmengen

$$ \langle xy \rangle \ , \quad \langle {}^1/_{(xy)} \rangle \ , \quad \langle {}^x/_y \rangle \ , \quad \langle {}^1/_{({}^x/_y)} \rangle \ , \quad \langle {}_y\backslash^x \rangle \quad \text{sowie} \quad \langle {}^1/_{({}_y\backslash^x)} \rangle $$

beschränkt, d.h. die Elemente xy, ${}^x/_y$ und ${}_y\backslash^x$ sind jeweils wieder neutral.

Zu (c): Ist $\mathscr{T}$ diskret oder indiskret, so ist K und damit jede Teilmenge von K beschränkt, vgl. (2.5,a,b). Insbesondere sind für alle $x \in K^*$ die Nilpotenzmengen $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1/_x \rangle$ beschränkt, d.h. nach Definition sind $N_0 = \{0\}$ sowie $N^\times = K^*$ und $N = K$.

Zu (d): Mit (a) gelten offenbar $N_0 N^\times = N^\times N_0$ sowie $NN^\times = N^\times N$; und wegen $1 \in N^\times$ nach (b) ist weiter $N_0 \subset N_0 N^\times$. Zum Nachweis der Inklusion $N_0 N^\times \subset N_0$ seien ein $x \in N_0$ und ein $y \in N^\times$ gegeben. Im Fall $x = 0$ ist $xy = 0 \in N_0$ und nichts zu zeigen; es sei im Folgenden daher $x \neq 0$, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle {}^1/_x \rangle$ unbeschränkt und $\langle y \rangle$ beschränkt. Dann gilt

$$ \langle {}^1/_x \rangle \overset{(2.2,e)}{=} \langle {}^y/_{(xy)} \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1/_{(xy)} \cdot y \rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_{(xy)} \rangle \langle y \rangle \ . $$

Wäre $\langle {}^1/_{(xy)} \rangle$ beschränkt, so folgte mit (2.5,f,b) auch die Beschränktheit von $\langle {}^1/_x \rangle$; im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\langle {}^1/_{(xy)} \rangle$ unbeschränkt sein, d.h. es ist $xy \in N_0$.
Mit dem bereits Bewiesenen folgt dann schließlich auch

$$ NN^\times \;=\; (N_0 \cup N^\times)N^\times \;=\; (N_0 N^\times) \cup (N^\times N^\times) \;\overset{(b)}{=}\; N_0 \cup N^\times \;=\; N \ . $$

Zu (e): Mit (a) gelten offenbar $(K\backslash N_0)N^\times = N^\times(K\backslash N_0)$ sowie $(K\backslash N)N^\times = N^\times(K\backslash N)$; und wegen $1 \in N^\times$ nach (b) ist weiter $K\backslash N \subset (K\backslash N)N^\times$. Zum Nachweis der Inklusion $(K\backslash N)N^\times \subset K\backslash N$ seien ein $x \in K\backslash N$ und ein $y \in N^\times$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle x\rangle$ unbeschränkt und $\langle {}^1/_x\rangle\,, \langle y\rangle\,, \langle {}^1/_y\rangle$ jeweils beschränkt. Dann gelten

$$\begin{array}{rcl} & \langle {}^1/_{(xy)}\rangle \overset{(2.2,g)}{=} \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y\rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_x\rangle\,\langle {}^1/_y\rangle \\ \text{sowie} & \langle x\rangle = \langle {}^{(xy)}/_y\rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1/_y \cdot (xy)\rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_y\rangle\,\langle xy\rangle\ . \end{array}$$

Nach (2.5,f,b) ist damit auch $\langle {}^1/_{(xy)}\rangle$ beschränkt - und wäre $\langle xy\rangle$ beschränkt, so folgte mit (2.5,f,b) auch die Beschränktheit von $\langle x\rangle$; im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\langle xy\rangle$ unbeschränkt und $\langle {}^1/_{(xy)}\rangle$ beschränkt sein, d.h. es ist $xy \in K\backslash N$.
Mit dem bereits Bewiesenen folgt dann schließlich auch

$$\begin{aligned} (K\backslash N_0)N^\times &= \big(K\backslash(N\backslash N^\times)\big)N^\times = \big((K\backslash N)\cup N^\times\big)N^\times \\ &= \big((K\backslash N)N^\times\big)\cup(N^\times N^\times) \overset{(b)}{=} (K\backslash N)\cup N^\times = K\backslash N_0\ . \end{aligned}$$

Zu (f): Sind zum Nachweis von $(K\backslash N)(K\backslash N) \subset K\backslash N$ Elemente $x, y \in K\backslash N$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle x\rangle\,, \langle y\rangle$ jeweils unbeschränkt und $\langle {}^1/_x\rangle\,, \langle {}^1/_y\rangle$ jeweils beschränkt, so gelten

$$\begin{array}{rcl} & \langle {}^1/_{(xy)}\rangle \overset{(2.2,g)}{=} \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y\rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_x\rangle\,\langle {}^1/_y\rangle \\ \text{sowie} & \langle x\rangle = \langle {}^{(xy)}/_y\rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1/_y \cdot (xy)\rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1/_y\rangle\,\langle xy\rangle\ . \end{array}$$

Nach (2.5,f,b) ist damit auch $\langle {}^1/_{(xy)}\rangle$ beschränkt - und wäre $\langle xy\rangle$ beschränkt, so folgte mit (2.5,f,b) auch die Beschränktheit von $\langle x\rangle$; im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\langle xy\rangle$ unbeschränkt und $\langle {}^1/_{(xy)}\rangle$ beschränkt sein, d.h. es ist $xy \in K\backslash N$.
Wegen $1 \in N^\times \subset K\backslash N_0$ nach (b) ist offenbar $K\backslash N_0 \subset (K\backslash N_0)(K\backslash N_0)$; und mit dem bereits Bewiesenen folgt dann schließlich auch

$$\begin{aligned} (K\backslash N_0)(K\backslash N_0) &= \big((K\backslash N)\cup N^\times\big)\big((K\backslash N)\cup N^\times\big) \\ &= \big((K\backslash N)(K\backslash N)\big) \cup \big((K\backslash N)N^\times\big) \cup \big(N^\times(K\backslash N)\big) \cup (N^\times N^\times) \\ &\overset{(e),(b)}{\subset} (K\backslash N)\cup(K\backslash N)\cup(K\backslash N)\cup N^\times = K\backslash N_0\ . \end{aligned}$$

Zu (g): Nach (a), (1.2,d) und (1.4,b) sind die Mengen $K\backslash N_0$ und $K\backslash N$ wieder normal und es gelten bereits ${}^1/_{(K\backslash N_0)} = {}_{(K\backslash N_0)}\backslash^1$ und ${}^1/_{(K\backslash N)} = {}_{(K\backslash N)}\backslash^1$ nach (1.2,d) und (1.4,a). Ist ein $x \in K\backslash N_0$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmenge $\langle {}^1/_x\rangle$ beschränkt, so können zwei Fälle eintreten:

- Ist $\langle {}^1/_{({}^1/_x)}\rangle$ ebenfalls beschränkt, so ist nach Definition ${}^1/_x \in N^\times$.

- Ist $\langle {}^1/_{({}^1/_x)}\rangle$ dagegen unbeschränkt, so ist nach Definition ${}^1/_x \in N_0$.

Insgesamt ist also in beiden Fällen ${}^1/_x \in N$, d.h. es ist ${}^1/_{(K\backslash N_0)} \subset N$.

Ist stattdessen ein $y \in K \backslash N$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle y \rangle$ unbeschränkt und $\langle {}^{1}\!/_{y} \rangle$ beschränkt, so ist wegen $\langle y \rangle = \langle {}^{1}\!/_{({}^{1}\!/_{y})} \rangle$, vgl. (2.2,c), nach Definition bereits ${}^{1}\!/_{y} \in N_0$. Somit gilt auch ${}^{1}\!/_{(K \backslash N)} \subset N_0$.

$\square$

(2.9) Lemma:

Es seien $\mathscr{T}$ nicht diskret und U eine normale, beschränkte Umgebung von 0.

(a) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.5])[1] Die Menge

$$V \; := \; \left\{ \, x \in K \;\middle|\; Ux \subset U \, \right\} \; \subset \; K$$

ist eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0.

(b) Bildet die Familie $(Ux)_{x \in K^*}$ eine Kette,[2] so gilt für die in (a) konstruierte normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0 zusätzlich ${}^{1}\!/_{(K \backslash V)} \subset V$.

Beweis: *Zu (a):* Wegen der Beschränktheit von U gibt es insbesondere eine Umgebung W von 0 mit $UW \subset U$, d.h. nach Konstruktion ist $W \subset V$ und V damit ebenfalls eine Umgebung von 0. Da nach Definition weiter $UV \subset U$ gilt und $\mathscr{T}$ nicht diskret ist, existiert insbesondere ein $x \in U \backslash \{0\}$ mit $xV \subset U$. Also ist

$$V \;\subset\; {}^{U}\!/_{x} \;\stackrel{(1.4,\text{a})}{=}\; U \cdot {}^{1}\!/_{x}$$

und nach (2.5,d,f,b) ist damit auch V beschränkt. Weiter gilt für alle $x, y \in V$

$$U(xy) \;=\; (Ux)y \;\subset\; Uy \;\subset\; U \; ,$$

d.h. es ist $xy \in V$ und V daher multiplikativ abgeschlossen. Schließlich ist nur noch die Normalität von V zu zeigen - für alle $x, y \in K^*$ und $v \in V$ gelten hierbei[3]

$$U \cdot {}_{(xy)}\backslash^{((xv)y)} \;=\; {}_{(xy)}\backslash^{((x(Uv))y)} \;\subset\; {}_{(xy)}\backslash^{((xU)y)} \;=\; {}_{(xy)}\backslash^{((xy)U)} \;=\; U \; ,$$

$$U \cdot {}_{x}\backslash^{(((xy)v)/y)} \;=\; {}_{x}\backslash^{(((xy)(Uv))/y)} \;\subset\; {}_{x}\backslash^{(((xy)U)/y)} \;=\; {}_{x}\backslash^{(((xU)y)/y)} \;=\; {}_{x}\backslash^{(xU)} \;=\; U \; ,$$

$$U \cdot {}_{(xy)}\backslash^{(x(yv))} \;=\; {}_{(xy)}\backslash^{(x(y(Uv)))} \;\subset\; {}_{(xy)}\backslash^{(x(yU))} \;=\; {}_{(xy)}\backslash^{((xy)U)} \;=\; U \; ,$$

$$U \cdot {}_{y}\backslash^{({}_{x}\backslash((xy)v))} \;=\; {}_{y}\backslash^{({}_{x}\backslash((xy)(Uv)))} \;\subset\; {}_{y}\backslash^{({}_{x}\backslash((xy)U))} \;=\; {}_{y}\backslash^{({}_{x}\backslash(x(yU)))} \;=\; {}_{y}\backslash^{(yU)} \;=\; U \; .$$

Damit folgen

$${}_{(xy)}\backslash^{((xV)y)} \; , \quad {}_{x}\backslash^{(((xy)V)/y)} \; , \quad {}_{(xy)}\backslash^{(x(yV))} \; , \quad {}_{y}\backslash^{({}_{x}\backslash((xy)V))} \quad \subset \quad V \; ,$$

$$\text{d.h.} \qquad (xV)y \;=\; x(yV) \;=\; (xy)V \; .$$

Mit (1.2,c) ist V daher bereits normal.

[1] siehe auch Kowalsky, Dürbaum [28, S.143]

[2] bzgl. der mengentheoretischen Inklusion

[3] Beachte, dass für normale Teilmengen M von K in analoger Weise zu (1.4,a) auch $M \cdot {}_{y}\backslash^{x} = {}_{y}\backslash^{(Mx)}$ für alle $x, y \in K^*$ gilt, denn es ist stets $y(M \cdot {}_{y}\backslash^{x}) \;=\; M(y \cdot {}_{y}\backslash^{x}) \;=\; Mx \;=\; y \cdot {}_{y}\backslash^{(Mx)}$.

Zu (b): Ist in dieser Situation ein $x \in K \backslash V$ gegeben, so gilt nach Konstruktion $Ux \not\subset U$. Da $(Ux)_{x \in K^*}$ eine Kette bildet, muss in diesem Fall daher $U \subset Ux$ gelten. Wegen der Normalität von U folgt hieraus dann $U \cdot {}^1\!/_x = {}^U\!/_x \subset U$, d.h. ${}^1\!/_x \in V$, vgl. (1.4,a).

$\square$

(2.10) Satz: (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.10(1)])

Es sei U eine normale, beschränkte Umgebung von 0.

(a) Für die Menge N_0 der nilpotenten Elemente gilt: Es ist $N_0 = \{0\}$ oder N_0 ist eine normale Umgebung von 0.

(b) Die Menge N der nilpotenten und neutralen Elemente ist eine normale Umgebung von 0. Hierbei ist $N = K$ genau dann, wenn $N_0 = \{0\}$ gilt.

Beweis: *Zu (a):* Nach (2.8,a) ist N_0 stets normal. Betrachte den Fall $N_0 \neq \{0\}$; nach (2.8,c) ist $\mathscr{T}$ dann insbesondere nicht diskret und nach (2.9,a) gibt es eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0.
Es sei nun ein $x \in N_0 \backslash \{0\}$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/_x \rangle$ unbeschränkt. Es genügt zu zeigen, dass für dieses nilpotente Element dann $Vx \subset N_0$ gilt, - denn da mit V auch Vx eine Umgebung[1] von 0 ist, ist N_0 dann ebenfalls eine Umgebung von 0. Sei daher ein $y \in Vx$ gegeben: Ist $y = 0$, so ist $y \in N_0$ nach Definition. Ist dagegen $y \neq 0$, so existiert ein $v \in V \backslash \{0\}$ mit $y = vx$, d.h. mit ${}_v\backslash^y = x$. Da V normal und multiplikativ abgeschlossen ist, ist in dieser Situation $\langle v \rangle \subset V$ und es folgt

$$\langle {}^1\!/_x \rangle \quad = \quad \langle {}^1\!/_{(v\backslash y)} \rangle \quad \overset{(2.2,a)}{=} \quad \langle {}_{(v\backslash y)}\backslash^1 \rangle \quad \overset{(2.2,f)}{=} \quad \langle {}^1\!/_y \cdot v \rangle \quad \overset{(2.1,b)}{\subset} \quad \langle {}^1\!/_y \rangle \, \langle v \rangle \quad \subset \quad \langle {}^1\!/_y \rangle \, V \ .$$

Wäre $\langle {}^1\!/_y \rangle$ beschränkt, so folgte mit (2.5,f,b) auch die Beschränktheit von $\langle {}^1\!/_x \rangle$; im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\langle {}^1\!/_y \rangle$ unbeschränkt sein, d.h. es ist $y \in N_0$.

Zu (b): Nach (2.8,a) ist N stets normal. Im Fall $N_0 = \{0\}$ folgt mit (2.8,g) sofort $K^* = {}^1\!/_{K^*} \subset N$, d.h. es ist $N = K$ und dies trivialerweise eine Umgebung von 0.
Ist dagegen $N_0 \neq \{0\}$, so ist N_0 nach (a) eine Umgebung von 0; und N wegen $N_0 \subset N$ damit ebenfalls. Erneut ist $\mathscr{T}$ nach (2.8,c) dann insbesondere nicht diskret und nach (2.9,a) gibt es eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0. Dann ist auch $N_0 \cap V$ eine Umgebung von 0, d.h. es existiert insbesondere ein Element $x \in (N_0 \cap V) \backslash \{0\}$. Die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/_x \rangle$ ist daher nach Definition unbeschränkt und $\langle x \rangle$ wegen $\langle x \rangle \subset V$ nach (2.5,b) beschränkt; d.h. mit (2.2,c) ist also ${}^1\!/_x \in K \backslash N$. Insbesondere ist damit $N \neq K$.

$\square$

[1] Denn die Rechtsmultiplikation mit x ist offen mit $0 \cdot x = 0$, vgl. (1.7,c).

Es lassen sich aber leider nicht alle gewünschten Eigenschaften der Menge der nilpotenten Elemente aus dem klassischen Fall topologischer kommutativer Körper übertragen: So ist etwa die multiplikative Abgeschlossenheit der Menge N_0 nicht notwendig gegeben, da ohne weitere Kenntnisse über die Existenz gewisser normaler Umgebungen von 0 nicht klar ist, ob es Elemente $x \in N_0 \backslash \{0\}$ gibt, für die sowohl $\langle {}^1/_x \rangle$ als auch $\langle x \rangle$ unbeschränkt sind.[1]

Schon für topologische Körper ist diese multiplikative Abgeschlossenheit nicht unbedingt gegeben und muss vorausgesetzt werden, siehe Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 18], oder etwa aus der Beschränktheit der Kommutatorgruppe gefolgert werden, siehe Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 19]. Wir werden später in (3.6,c) ebenfalls sehen, dass für topologische Ternärkörper vom Typ V in Verallgemeinerung hierzu die multiplikative Abgeschlossenheit von N_0 eine Konsequenz der Beschränktheit des erweiterten Radikals R_a ist.[2]

Zunächst können wir nur eine Liste an Kriterien für die multiplikative Abgeschlossenheit von N_0 - und damit auch die multiplikative Abgeschlossenheit von N - zusammenstellen:

(2.11) Satz:

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $N_0 N_0 \ \subset \ N_0$.

(ii) $1 \ \notin \ N_0 N_0$.

(iii) $N_0 \ = \ \{0\} \ \cup \ \big\{ \ x \in K^* \ \big| \ \langle x \rangle \text{ ist beschränkt und } \langle {}^1/_x \rangle \text{ ist unbeschränkt} \ \big\}$.

(iv) $N \ \ = \ \{0\} \ \cup \ \big\{ \ x \in K^* \ \big| \ \langle x \rangle \text{ ist beschränkt} \ \big\}$.

(v) $N_0 \ = \ \{0\} \ \cup \ \big({}^1/_{(K \backslash N)} \big)$.

(vi) $N \ \ = \ \{0\} \ \cup \ \big({}^1/_{(K \backslash N_0)} \big)$.

(vii) Für alle $x \in K^*$ ist $\langle x \rangle$ oder $\langle {}^1/_x \rangle$ beschränkt.

(viii) Für alle $x, y \in K^*$ mit $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ unbeschränkt ist auch $\langle xy \rangle$ unbeschränkt.

(b) Ist N_0 multiplikativ abgeschlossen, so gelten weiter

$$N_0 N \ = \ N N_0 \ = \ N_0 \qquad \text{und} \qquad NN \ = \ N \ .$$

(c) Ist $N_0 \neq \{0\}$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt eine normale, beschränkte Umgebung U von 0 so, dass die Familie $(Ux)_{x \in K^*}$ eine Kette[3] bildet.

(ii) Es gibt eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0 mit ${}^1/_{(K \backslash V)} \subset V$.

[1] Betrachten wir stattdessen die Definition nilpotenter Elemente für kommutative Körper, so ist die multiplikative Abgeschlossenheit sofort klar, vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11(1)].

[2] Beachte, dass für kommutative Körper stets $R_a = \{1\}$ nach Kalhoff [23, S.154] gilt und dies nach (2.5,c) trivialerweise beschränkt ist; und dass für Körper das erweiterte Radikal nach Definition gerade der Kommutatorgruppe entspricht.

[3] bzgl. der mengentheoretischen Inklusion

Sind diese Eigenschaften erfüllt,[1] so sind N_0 und N jeweils normale, multiplikativ abgeschlossene Umgebungen von 0 mit ${}^1/_{(K\backslash N)} \subset N_0 \subset N$.

Beweis: *Zu (a):* (i $\Longrightarrow$ ii): Wäre in dieser Situation $1 \in N_0 N_0$, so folgte hieraus insbesondere $1 \in N_0 N_0 \subset N_0$; im Widerspruch zu $1 \in N^\times$ nach (2.8,b).

(ii $\Longrightarrow$ iii): Offenbar gilt in (iii) stets die Inklusion $\supset$. Für die Inklusion $\subset$ sei nun ein $x \in N_0 \backslash \{0\}$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmenge $\langle {}^1/_x \rangle$ unbeschränkt. Wäre $\langle x \rangle = \langle {}^1/_{({}^1/_x)} \rangle$, vgl. (2.2,c), ebenfalls unbeschränkt, so folgte ${}^1/_x \in N_0$ und damit $1 = {}^1/_x \cdot x \in N_0 N_0$; im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\langle x \rangle$ in der Tat beschränkt sein.

(iii $\Longrightarrow$ iv): Die Behauptung folgt direkt aus der Voraussetzung sowie $N = N_0 \cup N^\times$.

(iv $\Longrightarrow$ v): Wegen $0 \in N_0$ und (2.8,g) gilt stets die Inklusion $\supset$. Für die Inklusion $\subset$ sei nun ein $x \in N_0 \backslash \{0\}$ gegeben, d.h. die Nilpotenzmenge $\langle {}^1/_x \rangle$ unbeschränkt. Nach Voraussetzung ist dann ${}^1/_x \notin N$ und es folgt $x = ({}^1/_x)\backslash 1 \in (K\backslash N)\backslash 1 = {}^1/_{(K\backslash N)}$, vgl. (2.8,g).

(v $\Longrightarrow$ vi): Die Behauptung folgt direkt aus der Voraussetzung sowie

$$
{}^1/_{(K\backslash N_0)} \quad = \quad {}^1/_{((K\backslash N)\,\cup\, N^\times)} \quad = \quad \left({}^1/_{(K\backslash N)}\right) \cup \left({}^1/_{N^\times}\right) \quad \overset{(2.8,b)}{=} \quad \left({}^1/_{(K\backslash N)}\right) \cup N^\times \ .
$$

(vi $\Longrightarrow$ vii): Nach Voraussetzung gilt dann auch

$$
K\backslash N \quad = \quad K^* \Big\backslash \left({}^1/_{(K\backslash N_0)}\right) \quad = \quad {}^1/_{(N_0\backslash\{0\})} \ .
$$

Ist daher ein $x \in K^*$ mit $\langle {}^1/_x \rangle$ unbeschränkt gegeben, so ist nach Definition $x \in N_0$ und somit ${}^1/_x \in K\backslash N$, d.h. $\langle x \rangle = \langle {}^1/_{({}^1/_x)} \rangle$, vgl. (2.2,c), ist insbesondere beschränkt.

(vii $\Longrightarrow$ viii): Sind $x, y \in K^*$ mit $\langle x \rangle$ und $\langle y \rangle$ unbeschränkt gegeben, so ist nach Voraussetzung insbesondere $\langle {}^1/_y \rangle$ beschränkt. Weiter gilt

$$
\langle x \rangle \quad = \quad \langle {}^{(xy)}/_y \rangle \quad \overset{(2.2,f)}{=} \quad \langle {}^1/_y \cdot (xy) \rangle \quad \overset{(2.1,b)}{\subset} \quad \langle {}^1/_y \rangle \, \langle xy \rangle \ .
$$

Wäre $\langle xy \rangle$ beschränkt, so folgte mit (2.5,f,b) auch die Beschränktheit von $\langle x \rangle$; im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $\langle xy \rangle$ unbeschränkt sein.

(viii $\Longrightarrow$ i): Es seien $x, y \in N_0$ gegeben. Im Fall $0 \in \{x, y\}$ folgt sofort $xy = 0 \in N_0$; es sei im Folgenden daher $x, y \neq 0$, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle {}^1/_x \rangle, \langle {}^1/_y \rangle$ unbeschränkt. Mit der Voraussetzung ist dann auch $\langle {}^1/_{(xy)} \rangle = \langle {}^1/_x \cdot {}^1/_y \rangle$, vgl. (2.2,g), unbeschränkt, d.h. es ist in der Tat $xy \in N_0$.

[1] Im folgenden Kapitel werden wir in der Lage sein, unter einer (für die Betrachtung der Topologien uniformer Bewertungen notwendigen) Zusatzvoraussetzung diese Aussage in die Äquivalenz mitaufzunehmen, vgl. hierzu (3.5,b).

Zu (b): Mit (2.8,a) gilt offenbar $N_0N = NN_0$; und wegen $1 \in N$ nach (2.8,b) ist weiter $N_0 \subset N_0N$. Die Inklusion $N_0N \subset N_0$ folgt aus der Voraussetzung mittels

$$N_0N \;=\; N_0(N_0 \cup N^\times) \;=\; (N_0N_0) \cup (N_0N^\times) \overset{(2.8,d)}{\subset} N_0 \cup N_0 \;=\; N_0 \,.$$

Hieraus folgt dann auch sofort

$$NN \;=\; (N_0 \cup N^\times)N \;=\; (N_0N) \cup (N^\times N) \overset{(2.8,d)}{=} N_0 \cup N \;=\; N \,.$$

Zu (c): <u>(i $\Longrightarrow$ ii):</u> Wegen (2.8,c) kann die Topologie $\mathscr{T}$ in dieser Situation nicht diskret sein und die Behauptung folgt daher direkt aus (2.9,b).

<u>(ii $\Longrightarrow$ i):</u> Wir zeigen, dass die Familie $(Vx)_{x \in K^*}$ in diesem Fall bereits eine Kette bildet; seien hierzu $x, y \in K^*$ gegeben. Betrachte die folgende Fallunterscheidung:

- Ist $x/y \in V$, so folgt direkt

$$Vx \;=\; V(x/y \cdot y) \;=\; (V \cdot x/y)y \;\subset\; (VV)y \;\subset\; Vy \,.$$

- Ist dagegen $x/y \notin V$, so ist nach Voraussetzung $1/(x/y) \in 1/(K\backslash V) \subset V$ und es folgt

$$1 \;\in\; V \cdot x/y \,, \qquad \text{d.h.} \qquad Vy \;\subset\; V\big((V \cdot x/y)y\big) \;=\; (VV)(x/y \cdot y) \;\subset\; Vx \,.$$

Für den Nachweis des Zusatzes sei nun eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0 mit $1/(K\backslash V) \subset V$ aus (ii) gegeben. Wir zeigen im Folgenden die Eigenschaft aus (a(vii)); sei hierfür ein $x \in K^*$ mit $\langle x \rangle$ unbeschränkt gegeben. Wäre $x \in V$, so folgte auch $\langle x \rangle \subset V$, weil V normal und multiplikativ abgeschlossen ist, und mit (2.5,b) wäre $\langle x \rangle$ beschränkt; im Widerspruch zur Voraussetzung. Somit muss stattdessen $1/x \in 1/(K\backslash V) \subset V$ gelten und mit analoger Argumentation ist daher $\langle 1/x \rangle \subset V$ beschränkt. Wegen $N_0 \neq \{0\}$ sind N_0 und N in dieser Situation nach (2.10,a) und (b) also normale, multiplikativ abgeschlossene Umgebungen von 0; und es ist $1/(K\backslash N) \subset N_0 \subset N$ nach (2.8,g). □

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir nun noch Zusammenhänge der Menge der nilpotenten bzw. nilpotenten und neutralen Elemente mit der Addition des zugrunde liegenden Ternärkörpers: Im Gegenzug zum klassischen Fall bewerteter Körper, vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 2], ist die Beschränktheit der Summe bzw. Differenz zweier beschränkter Mengen erst unter der Voraussetzung der Beschränktheit des Radikals klar.

Abschließend werden wir für den Fall, dass sogar das erweiterte Radikal beschränkt ist, noch nachweisen, dass die Nilpotenz eines Elementes $x \in K^*$ (in unserem Sinne) bereits vollständig durch die Unbeschränktheit der Menge $1/x^{\mathbb{N}}$ bestimmt ist - in diesem Fall spiegelt unsere Definition die Folgerung aus Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 10] bzw. Engler, Prestel [10, Lem. B.10(2)] vollends wider.[1]

[1] Diese wird sich für uns dabei sogar als Äquivalenz herausstellen, auch ohne weitere Voraussetzungen.

(2.12) Satz:

Es sei R beschränkt. Dann gelten:

(a) Es ist $\pm R \subset N^\times$.

(b) Es gelten $RN_0 = N_0$ sowie $RN^\times = N^\times$ und $RN = N$; insbesondere sind N_0, $N^\times$ und N jeweils normal in $(K,+)$.

(c) Das additive Links- und Rechtsinverse eines nilpotenten bzw. neutralen Elementes ist wieder nilpotent bzw. neutral, d.h es gelten

$$N_0 \;=\; -N_0 \;=\; \boxminus N_0\;, \quad N^\times \;=\; -N^\times \;=\; \boxminus N^\times \quad \text{und} \quad N \;=\; -N \;=\; \boxminus N\;.$$

(d) Es gelten

$$N_0 + N_0 \;=\; N_0 - N_0 \;=\; N_0 \boxminus N_0\;, \qquad N^\times + N^\times \;=\; N^\times - N^\times \;=\; N^\times \boxminus N^\times$$

$$\text{und} \qquad N + N \;=\; N - N \;=\; N \boxminus N\;.$$

(e) Es gilt

$$N_0 + N^\times \;=\; N^\times + N_0 \;=\; N_0 - N^\times \;=\; N^\times - N_0 \;=\; N_0 \boxminus N^\times \;=\; N^\times \boxminus N_0\;.$$

Ist sogar R_a beschränkt, so gelten weiter:

(f) Es ist $\pm R_a \subset N^\times$.

(g) Die Menge der nilpotenten Elemente besitzt die Darstellung

$$\begin{aligned} N_0 \;&=\; \{0\} \;\cup\; \left\{\, x \in K^* \;\middle|\; ({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}} \;\text{ ist unbeschränkt}\,\right\} \\ &=\; \{0\} \;\cup\; \left\{\, x \in K^* \;\middle|\; {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}} \;\text{ ist unbeschränkt}\,\right\}\;. \end{aligned}$$

Beweis: *Zu (a,f):* Es sei ein $r \in \pm R$ bzw. ein $s \in \pm R_a$ gegeben. Da $\pm R$ bzw. $\pm R_a$ nach (1.7,c) eine normale Unterloop von K^* ist, sind dann auch $\langle r\rangle\,,\langle {}^1\!/\!_r\rangle \subset \pm R$ bzw. $\langle s\rangle\,,\langle {}^1\!/\!_s\rangle \subset \pm R_a$. Weil mit R bzw. R_a auch $-R = (-1)R$ bzw. $-R_a = (-1)R_a$, vgl. (1.6,c), nach (2.5,d,f) beschränkt sind, ist nach (2.5,c) ebenso die Menge $\pm R$ bzw. $\pm R_a$ beschränkt und es folgt somit die Beschränktheit der Nilpotenzmengen $\langle r\rangle\,,\langle {}^1\!/\!_r\rangle$ bzw. $\langle s\rangle\,,\langle {}^1\!/\!_s\rangle$, vgl. (2.5,b). Somit ist r bzw. s in dieser Situation neutral und es folgt $\pm R \subset N^\times$ bzw. $\pm R_a \subset N^\times$.

Zu (b): Wegen $1 \in R$ sind offenbar $N_0 \subset RN_0$ sowie $N^\times \subset RN^\times$. Da nach (a) insbesondere $R \subset N^\times$ ist, gelten weiter

$$RN_0 \;\subset\; N^\times N_0 \;\overset{(2.8,\text{d})}{=}\; N_0 \qquad \text{und} \qquad RN^\times \;\subset\; N^\times N^\times \;\overset{(2.8,\text{b})}{=}\; N^\times\;.$$

Hieraus folgt dann schließlich ebenfalls

$$RN \;=\; R(N_0 \cup N^\times) \;=\; (RN_0) \cup (RN^\times) \;=\; N_0 \cup N^\times \;=\; N\;.$$

Nach (1.6,a) sind N_0, $N^\times$ und N dann bereits normal in $(K,+)$.

Zu (c): Nach (b) gelten die Gleichungen $\boxminus N_0 = -N_0$ sowie $\boxminus N^\times = -N^\times$ und $\boxminus N = -N$ jeweils direkt wegen (1.6,b). Ebenso folgen

$$\begin{aligned} & -N_0 \overset{\text{(b)}}{=} -(RN_0) \overset{\text{(1.6,c)}}{=} (-R)N_0 \overset{\text{(a)}}{\subset} N^\times N_0 \overset{\text{(2.8,d)}}{=} N_0 \\ \text{sowie} \quad & -N^\times \overset{\text{(b)}}{=} -(RN^\times) \overset{\text{(1.6,c)}}{=} (-R)N^\times \overset{\text{(a)}}{\subset} N^\times N^\times \overset{\text{(2.8,b)}}{=} N^\times\ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann bereits die jeweils andere Inklusion mittels

$$\begin{aligned} & N_0 = -(\boxminus N_0) = -(-N_0) \subset -N_0 \\ \text{und} \quad & N^\times = -(\boxminus N^\times) = -(-N^\times) \subset -N^\times\ . \end{aligned}$$

Schließlich gilt damit auch

$$-N = -(N_0 \cup N^\times) = (-N_0) \cup (-N^\times) = N_0 \cup N^\times = N\ .$$

Zu (d): Nach (b) gelten die Gleichungen $N_0 \boxminus N_0 = N_0 - N_0$ sowie $N^\times \boxminus N^\times = N^\times - N^\times$ und $N \boxminus N = N - N$ direkt wegen (1.6,b). Ebenso folgen mit (b) dann

$$\begin{aligned} & N_0 - N_0 \overset{\text{(1.6,d)}}{=} N_0 + (-N_0) \overset{\text{(c)}}{=} N_0 + N_0\ , \\ & N^\times - N^\times \overset{\text{(1.6,d)}}{=} N^\times + (-N^\times) \overset{\text{(c)}}{=} N^\times + N^\times \\ \text{sowie} \quad & N - N \overset{\text{(1.6,d)}}{=} N + (-N) \overset{\text{(c)}}{=} N + N\ . \end{aligned}$$

Zu (e): Nach (b) gelten die Gleichungen $N_0 \boxminus N^\times = N_0 - N^\times$ und $N^\times \boxminus N_0 = N^\times - N_0$ direkt wegen (1.6,b). Wegen (b) ist ebenfalls $N_0 + N^\times = N^\times + N_0$ und es gelten weiter

$$\begin{aligned} & N_0 - N^\times \overset{\text{(1.6,d)}}{=} N_0 + (-N^\times) \overset{\text{(c)}}{=} N_0 + N^\times \\ \text{und} \quad & N^\times - N_0 \overset{\text{(1.6,d)}}{=} N^\times + (-N_0) \overset{\text{(c)}}{=} N^\times + N_0\ . \end{aligned}$$

Zu (g): Es sei ein $x \in K^*$ gegeben. Dann gelten nach (2.1,e) und (2.3,b)

$$({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}}\ ,\ \ {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}} \subset \langle {}^1\!/\!_x \rangle \subset R_a ({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}}\ ,\ \ R_a \cdot {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}}\ .$$

Ist $({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}}$ bzw. ${}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}}$ unbeschränkt, so muss nach (2.5,b) also auch $\langle {}^1\!/\!_x \rangle$ unbeschränkt sein; und ist $({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}}$ bzw. ${}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}}$ beschränkt, so ist nach (2.6,c) auch $R_a({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}}$ bzw. $R_a \cdot {}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}}$ beschränkt und damit auch $\langle {}^1\!/\!_x \rangle$, vgl. (2.5,b).
Also ist x genau dann nilpotent, wenn $({}^1\!/\!_x)^{\mathbb{N}}$ und ${}^1\!/\!_{x^{\mathbb{N}}}$ jeweils unbeschränkt ist.

$\square$

Kapitel 3

Topologische Ternärkörper vom Typ V

Nachdem wir im letzten Kapitel bereits mit den nilpotenten und neutralen Elementen die Werkzeuge für die gewünschte Charakterisierung der Topologien uniformer Bewertungen im Stile von Kowalski, Dürbaum [28] untersucht haben, werden wir uns nun dem Hauptkriterium für die Existenz einer uniformen Bewertung, welche eine gegebene Topologie induziert, zuwenden: Nämlich der Eigenschaft, ob ein topologischer Ternärkörper vom *Bewertungstyp* oder kurz vom *Typ V* ist.

Im Falle eines Körpers ist diese Eigenschaft bei Kowalski, Dürbaum [28] dadurch gegeben, dass für jede Umgebung U von 0 die Menge $(K \backslash U)^{-1}$ beschränkt ist; es sind mehrere hierzu äquivalente Eigenschaften bekannt, welche etwa auch die Formulierung dieses Begriffes in topologischen Ringen zulassen,[1] siehe hierzu etwa Shell [43, §16.3 Thm. 3, §16.5 Thm. 2].

Von Szambien [46, S.181] ist in Verallgemeinerung dieses Konzeptes bereits ein Begriff für einen topologischen Ternärkörper *vom Typ V* eingeführt und untersucht worden: Dort heißt $(K, T, \mathscr{T})$ *vom Typ V*, wenn für jede Umgebung U von 0 die Menge ${}^{(K \backslash U)}\backslash{}^{1}$ (beidseitig) beschränkt ist. Diese Eigenschaft ist nach Kalhoff [20, Prop. 2.4] in der Tat notwendig für die Topologien uniformer Bewertungen. Es stellt sich allerdings heraus, dass wir anstatt der Forderung beidseitiger Beschränktheit nur Beschränktheit bzgl. einer beliebigen Seite benötigen und dass die Wahl der Menge ${}^{(K \backslash U)}\backslash{}^{1}$ der rechtsinversen Elemente von $K \backslash U$ keinen praktischen Vorzug vor der Menge der ${}^{1}/_{(K \backslash U)}$ der linksinversen Elemente aufweist, sodass wir in dieser Arbeit die folgende Abschwächung dieser Definition betrachten werden:

(3.1) Definition: (vgl. Szambien [46, S.181])

Ein topologischer Ternärkörper $(K, T, \mathscr{T})$ heißt *vom Typ V*, wenn für jede Umgebung U von 0 (mindestens) eine der Mengen

$${}^{1}/_{(K \backslash U)} \quad \text{oder} \quad {}^{(K \backslash U)}\backslash{}^{1} \qquad \text{links- oder rechts-beschränkt ist.}$$

[1] So wird ein topologischer Ring etwa *vom Typ V* genannt, wenn das Produkt zweier von 0 weg beschränkter Mengen wieder von 0 weg beschränkt ist, siehe Shell [43, §16.3 Def. 2]

Jeder topologische Ternärkörper vom Typ V im Sinne von SZAMBIEN [46, S.181] ist insbesondere auch ein topologischer Ternärkörper vom Typ V in diesem Sinne.

Bevor wir uns nun der Übertragung einiger klassischer Ergebnisse topologischer Körper vom Typ V bzw. der Anpassung der Resultate SZAMBIENS [46] auf unsere abgeschwächte Definition widmen werden, möchten wir noch einmal folgendes Lemma für allgemeine topologische Ternärkörper formulieren:

(3.2) Lemma:

Es sei $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper.

(a) Ist $\mathscr{T}$ diskret oder indiskret, so ist $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V.[1]

(b) (GRUNDHÖFER, SALZMANN [6, S.314])[2] Ist $\mathscr{T}$ nicht indiskret, so ist $(K, \mathscr{T})$ bereits ein regulärer Hausdorff-Raum.

(c) (vgl. SHELL [43, §16.3 Thm. 2]) Für jede Umgebung U von 0 mit $1 \notin UU$ gelten

$$(K\backslash U) \;\cup\; \big({}^1/_{(K\backslash U)}\big) \;=\; K^* \qquad \text{und} \qquad (K\backslash U) \;\cup\; \big({}_{(K\backslash U)}\backslash^1\big) \;=\; K^* \,.$$

Insbesondere sind also $U \subset \{0\} \cup ({}^1/_{(K\backslash U)})$ sowie $U \subset \{0\} \cup ({}_{(K\backslash U)}\backslash^1)$ und diese beiden Mengen somit ebenfalls Umgebungen von 0.

(d) (vgl. SHELL [43, §16.3 Thm. 2]) Für jede normale Umgebung U von 0 mit $UU \neq K$ und alle $x \in K\backslash(UU)$ gilt

$$(K\backslash U) \;\cup\; \big(x \cdot {}^1/_{(K\backslash U)}\big) \;=\; K^* \,.$$

Insbesondere ist für alle $x \in K\backslash(UU)$ also $U \subset \{0\} \cup (x \cdot {}^1/_{(K\backslash U)})$ und die Menge $\{0\} \cup ({}^1/_{(K\backslash U)})$ somit ebenfalls eine normale Umgebung von 0.

Beweis: *Zu (a):* Nach (2.5,a,b) ist in diesem Fall jede Teilmenge von K beschränkt; also für jede Umgebung U von 0 insbesondere die beiden Mengen ${}^1/_{(K\backslash U)}$ und ${}_{(K\backslash U)}\backslash^1$.

Zu (c): Offenbar gelten wegen $0 \in U$ stets die Inklusionen $(K\backslash U) \cup ({}^1/_{(K\backslash U)}) \subset K^*$ sowie $(K\backslash U) \cup ({}_{(K\backslash U)}\backslash^1) \subset K^*$. Existierten weiter $x, y \in K^*$ mit $x \notin (K\backslash U) \cup ({}^1/_{(K\backslash U)})$ oder $y \notin (K\backslash U) \cup ({}_{(K\backslash U)}\backslash^1)$, so müssten jeweils $x, y \in U$ und ${}_x\backslash^1, {}^1/_y \in U$ gelten; dies führte aber zum Widerspruch $1 = x \cdot {}_x\backslash^1 \in UU$ bzw. $1 = {}^1/_y \cdot y \in UU$. Somit gilt bei den beiden Inklusionen jeweils sogar Gleichheit.
Insbesondere gelten daher auch $U\backslash\{0\} \subset {}^1/_{(K\backslash U)}$ sowie $U\backslash\{0\} \subset {}_{(K\backslash U)}\backslash^1$, d.h. es sind weiter $U \subset \{0\} \cup ({}^1/_{(K\backslash U)})$ sowie $U \subset \{0\} \cup ({}_{(K\backslash U)}\backslash^1)$ und diese beiden Mengen ebenfalls Umgebungen von 0.

[1] Sogar im Sinne von SZAMBIEN [46, S.181]; beachte, dass diese Topologien in der dortigen Definition ausgeschlossen sind, die Behauptung für diese aber trivial erfüllt ist.

[2] Beachte, dass die diskrete Topologie dort ausgeschlossen, die Behauptung für diese aber trivial erfüllt ist.

Zu (d): Es sei ein $x \in K\backslash(UU)$ gegeben. Erneut ist die Inklusion $(K\backslash U) \cup (x \cdot {}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)}) \subset K^*$ wegen $0 \in U$ und $x \neq 0$ klar. Existierte wieder ein $y \in K^*$ mit $y \notin (K\backslash U) \cup (x \cdot {}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)})$, so müsste $y \in U$ und ${\scriptstyle (x\backslash y)}\backslash^1 \in U$ gelten; hiermit wäre aber auch

$$1 \;\in\; {}_x\backslash^y \cdot U \;, \qquad \text{d.h. es wäre} \qquad x \;\in\; x({}_x\backslash^y \cdot U) \;=\; (x \cdot {}_x\backslash^y)U \;=\; yU \;,$$

woraus der Widerspruch $x \in yU \subset UU$ folgte. Also gilt auch in diesem Fall bei der Inklusion sogar Gleichheit.
Insbesondere gilt daher auch $U\backslash\{0\} \subset x \cdot {}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)}$, d.h. es ist weiter $U \subset \{0\} \cup (x \cdot {}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)})$. Somit gilt ebenfalls ${}_x\backslash^U \subset \{0\} \cup ({}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)})$; und da mit U auch ${}_x\backslash^U$ eine Umgebung[1] von 0 ist, ist es somit auch $\{0\} \cup ({}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)})$. Weiter ist diese Menge nach (1.2,d) und (1.4,b) normal.

$\square$

(3.3) Satz und Definition:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper vom Typ V und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret.

(a) Für jede normale Umgebung U von 0 ist die Menge ${}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)} = {\scriptstyle (K\backslash U)}\backslash^1$ beschränkt.

(b) (vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 8]) $(K, T, \mathscr{T})$ ist *lokal links- oder rechts-beschränkt*, d.h. es existiert eine links- oder rechts-beschränkte Umgebung von 0.

(c) Eine normale Umgebung U von 0 ist genau dann beschränkt, wenn $UU \neq K$ gilt.

(d) Ist eine links- oder rechts-beschränkte Umgebung U von 0 gegeben, so gilt für alle normalen Teilmengen $M \subset K$:

$$M \text{ ist beschränkt} \qquad \Longleftrightarrow \qquad UM \;\neq\; K \;.$$

Beweis: *Zu (a):* Es sei eine normale Umgebung U von 0 gegeben. Nach (1.2,d) und (1.4,b) ist dann auch die Menge ${}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)} = {\scriptstyle (K\backslash U)}\backslash^1$ normal; da sie nach Voraussetzung links- oder rechts-beschränkt ist, ist sie mit (2.5,e) daher bereits beschränkt.

Zu (b): Da $(K, \mathscr{T})$ nach (3.2,b) ein Hausdorff-Raum ist, existiert insbesondere eine Umgebung V von 0 mit $1 \notin V$. Weiter gibt es eine Umgebung[2] U von 0 mit $UU \subset V$, d.h. insbesondere mit $1 \notin UU$. Mit (3.2,c) folgen daher $U \subset \{0\} \cup ({}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)})$ sowie $U \subset \{0\} \cup ({\scriptstyle (K\backslash U)}\backslash^1)$. Da $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V ist, ist eine der Mengen ${}^1\!/\!{\scriptstyle (K\backslash U)}$ oder ${\scriptstyle (K\backslash U)}\backslash^1$ links- oder rechts-beschränkt; und damit ist auch U links- oder rechts-beschränkt, vgl. (2.5,d,c,b).

Zu (c): Es sei eine normale Umgebung U von 0 gegeben. Ist U beschränkt und wäre $UU = K$, so wäre nach (2.5,f) auch K beschränkt und die Topologie nach (2.5,a) daher diskret oder indiskret - im Widerspruch zur Voraussetzung.

[1] Denn die Linksmultiplikation mit x ist stetig mit $x \cdot 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

[2] Denn die Ternärkörper-Multiplikation ist stetig mit $0 \cdot 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

Gilt dagegen $UU \neq K$, so gibt es ein $x \in K\backslash(UU)$ und mit (3.2,d) folgt $U \subset \{0\} \cup (x \cdot {}^1/_{(K\backslash U)})$. Da $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V ist, ist die Menge ${}^1/_{(K\backslash U)}$ nach (a) beschränkt und mit (1.2,d) sowie (1.4,b) normal; und somit ist auch $x \cdot {}^1/_{(K\backslash U)}$ nach (2.5,d,f) beschränkt. Also ist auch U nach (2.5,d,c,b) beschränkt.

Zu (d): Es seien eine links- oder rechts-beschränkte Umgebung U von 0 sowie eine normale Teilmenge $M \subset K$ gegeben. OBdA[1] sei hierbei $0 \notin M \neq \emptyset$. Wir zeigen im Folgenden die Kontraposition der Behauptung.
Ist $UM = K$ und wäre M beschränkt, so wäre nach (2.5,f) auch K links- oder rechts-beschränkt und $\mathscr{T}$ nach (2.5,a) somit diskret oder indiskret - im Widerspruch zur Voraussetzung.
Ist M dagegen unbeschränkt, so muss für alle Umgebungen V von 0 stets $M \not\subset {}^1/_{(K\backslash V)}$ oder $M \not\subset {}_{(K\backslash V)}\backslash^1$ gelten, da eine dieser Mengen links- oder rechts-beschränkt ist und M ansonsten nach (2.5,b,e) beschränkt wäre. Somit gilt für alle Umgebungen V von 0

$$ {}_{M}\backslash^{1} \overset{(1.4,a)}{=} {}^1/_{M} \quad \not\subset \quad K\backslash V \ , \qquad \text{d.h.} \qquad ({}^1/_{M}) \ \cap \ V \ \neq \ \emptyset \ . $$

Da für alle $x \in K^*$ mit U auch ${}_{x}\backslash^{U}$ eine Umgebung[2] von 0 ist, folgt hieraus insbesondere $({}^1/_{M}) \cap ({}_{x}\backslash^{U}) \neq \emptyset$ für alle $x \in K^*$. Somit existiert für alle $x \in K^*$ ein Element $u \in U$ mit

$$ {}_{x}\backslash^{u} \ \in \ {}^1/_{M} \ , \qquad \text{d.h. mit} \qquad 1 \ \in \ {}_{x}\backslash^{u} \cdot M \ , $$

$$ \text{also mit} \qquad x \ \in \ x({}_{x}\backslash^{u} \cdot M) \ = \ (x \cdot {}_{x}\backslash^{u})M \ = \ uM \ . $$

Daher ist für alle $x \in K^*$ stets $x \in UM$ und wegen $0 \in UM \subset K$ folgt somit $UM = K$.

□

(3.4) Satz: (vgl. Szambien [46, Prop. 4])

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper vom Typ V und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret. Die Topologie $\mathscr{T}$ ist dann minimal unter allen nicht indiskreten Topologien auf K, mit denen (K, T) einen topologischen Ternärkörper bildet, d.h. ist $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ eine gröbere nicht indiskrete Topologie auf K und $(K, T, \mathscr{T}')$ ebenfalls ein topologischer Ternärkörper, so gilt bereits $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$.

Beweis: Es sei eine nicht indiskrete Topologie $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ auf K gegeben, sodass $(K, T, \mathscr{T}')$ ebenfalls einen topologischen Ternärkörper bildet. Da nach (1.7,b) sowohl die Homöomorphismengruppe von $(K, \mathscr{T})$ als auch die von $(K, \mathscr{T}')$ jeweils 2-transitiv auf K operiert, genügt es zum Nachweis der anderen Inklusion zu zeigen, dass jede Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ebenfalls eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}'$ ist. Sei hierfür eine Umgebung U von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ gegeben.

[1] Denn im Fall $M = \emptyset, \{0\}$ ist die Behauptung mit (2.5,d) klar; und gehe im Fall $\{0\} \subsetneq M$ ansonsten zu der Menge $M\backslash\{0\}$ über, welche nach (1.5,f) normal und mit (2.5,d,c,b) genau dann beschränkt ist, wenn M es ist - beachte hierbei auch $UM = U(M\backslash\{0\})$ wegen $0 \in U$ und $M\backslash\{0\} \neq \emptyset$.

[2] Denn die Linksmultiplikation mit x ist stetig mit $x \cdot 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

Da $(K, \mathscr{T}')$ nach (3.2,b) ein Hausdorff-Raum ist, existiert insbesondere eine Umgebung V' von 0 bzgl. $\mathscr{T}'$ mit $1 \notin V'$. Weiter gibt es dann eine Umgebung[1] V von 0 bzgl. $\mathscr{T}'$ mit $VV \subset V'$, d.h. insbesondere mit $1 \notin VV$. Mit (3.2,c) folgen daher $V \subset \{0\} \cup ({}^1\!/\!_{(K\backslash V)})$ sowie $V \subset \{0\} \cup ({}_{(K\backslash V)}\backslash^1)$. Da $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$ gilt und $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V ist, ist eine der Mengen ${}^1\!/\!_{(K\backslash U)}$ oder ${}_{(K\backslash U)}\backslash^1$ bzgl. $\mathscr{T}$ links- oder rechts-beschränkt; und damit ist auch V bzgl. $\mathscr{T}$ links- oder rechts-beschränkt, vgl. (2.5,d,c,b).
Daher existiert eine Umgebung W von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ mit $WV \subset U$ oder $VW \subset U$; und da $\mathscr{T}$ nicht diskret ist, gibt es insbesondere ein $w \in W\backslash\{0\}$ mit $wV \subset U$ oder $Vw \subset U$, d.h. mit $V \subset {}_w\backslash^U$ oder $V \subset {}^U\!/\!_w$. Somit ist auch eine der Mengen ${}_w\backslash^U$ und ${}^U\!/\!_w$ eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}'$ - und in beiden Fällen ist U ebenfalls eine Umgebung[2] von 0 bzgl. $\mathscr{T}'$.

$\square$

Nun folgt die in (2.11) angekündigte Äquivalenz, welche die multiplikative Abgeschlossenheit der Menge der nilpotenten Elemente eines topologischen Ternärkörpers vom Typ V an die Existenz gewisser normaler Umgebungen von 0 knüpft:

(3.5) Satz:

Es sei $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper vom Typ V mit $N_0 \neq \{0\}$.

(a) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11(3)]) Existiert eine normale, beschränkte Umgebung U von 0 und ist N_0 multiplikativ abgeschlossen, so sind N_0, $N^\times$ und N jeweils beschränkt.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Die Menge N_0 der nilpotenten Elemente ist eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0.

(ii) Es gibt eine normale Umgebung U von 0 mit $UU \neq K$ so, dass die Familie $(Ux)_{x \in K^*}$ eine Kette[3] bildet.

(iii) Es gibt eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0 mit ${}^1\!/\!_{(K\backslash V)} \subset V$.

(iv) Es gibt eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung W von 0 mit $(K\backslash W)(K\backslash W) \subset K\backslash W$.

(v) Es gibt eine normale Umgebung $\widetilde{W}$ von 0 mit $(K\backslash\widetilde{W})(K\backslash\widetilde{W}) \subset K\backslash\widetilde{W}$ und $1 \notin \widetilde{W}\widetilde{W}$.

(c) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11]) Sind die Eigenschaften aus (b) erfüllt, so ist die Menge N der nilpotenten und neutralen Elemente eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0 mit ${}^1\!/\!_{(K\backslash N)} \subset N_0 \subset N$.

[1] Denn die Ternärkörper-Multiplikation ist stetig mit $0 \cdot 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

[2] Denn die Links- bzw. die Rechtsmultiplikation mit w ist offen mit $w \cdot 0 = 0 \cdot w = 0$, vgl. (1.7,b).

[3] bzgl. der mengentheoretischen Inklusion

Beweis: Zunächst sei bemerkt, dass $\mathscr{T}$ wegen $N_0 \neq \{0\}$ in dieser Situation weder diskret noch indiskret sein kann, vgl. (2.8,c).

Zu (a): Wegen $N_0, N^\times \subset N$ genügt es mit (2.5,b) zu zeigen, dass N beschränkt ist. Wegen (2.10,a) ist N_0 in dieser Situation eine normale Umgebung von 0 und aufgrund der multiplikativen Abgeschlossenheit von N_0 gilt $N = \{0\} \cup ({}^1/_{(K\backslash N_0)})$ nach (2.11,a(vi)). Da $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V ist, ist daher ${}^1/_{(K\backslash N_0)}$ mit (3.3,a) bereits beschränkt - und damit auch N nach (2.5,d,c).

Zu (b): (ii $\Longleftrightarrow$ iii): Wegen (3.3,c) entspricht diese Äquivalenz bereits der aus (2.11,c).

(i $\Longrightarrow$ iv): In dieser Situation ist N_0 wegen (2.8,f) bereits die gesuchte Umgebung von 0.

(iv $\Longrightarrow$ v): Ist $1 \notin WW$, so ist W bereits die gesuchte Umgebung von 0. Ist dagegen $1 \in WW$ (und damit insbesondere auch $1 \in W$), so betrachte stattdessen die Menge $\widetilde{W} := \{0\} \cup ({}^1/_{(K\backslash W)})$: Da nach (3.3,c) $WW \neq K$ gilt, ist $\widetilde{W}$ nach (3.2,d) eine normale Umgebung von 0. Weiter ist $\widetilde{W}$ nach (1.4,c) multiplikativ abgeschlossen, da $K\backslash W$ es ist, und wegen $1 \notin K\backslash W$ ist $1 \notin \widetilde{W} \supset \widetilde{W}\widetilde{W}$. Schließlich ist auch $K\backslash\widetilde{W}$ multiplikativ abgeschlossen, denn es ist

$$K\backslash\widetilde{W} \quad = \quad K^*\backslash\big({}^1/_{(K\backslash W)}\big) \quad = \quad {}^1/_{(W\backslash\{0\})}$$

und $W\backslash\{0\}$ nach Voraussetzung multiplikativ abgeschlossen, vgl. erneut (1.4,c).

(v $\Longrightarrow$ iii): Setze $V := \{0\} \cup ({}^1/_{(K\backslash\widetilde{W})})$: Wegen $1 \notin \widetilde{W}\widetilde{W}$ ist V nach (3.2,d) eine normale Umgebung von 0 mit $\widetilde{W} \subset V$. Weiter ist V multiplikativ abgeschlossen, da $K\backslash\widetilde{W}$ es ist, vgl. (1.4,c); und beschränkt wegen (3.3,a) und (2.5,d,c). Schließlich erfüllt diese Menge

$${}^1/_{(K\backslash V)} \quad = \quad {}^1/_{(K^*\backslash({}^1/_{(K\backslash\widetilde{W})}))} \quad = \quad {}^1/_{({}^1/_{(\widetilde{W}\backslash\{0\})})} \quad = \quad {}^1/_{((\widetilde{W}\backslash\{0\})\backslash 1)} \quad = \quad \widetilde{W}\backslash\{0\} \quad \subset \quad V\,.$$

(iii $\Longrightarrow$ i): Nach (2.11,c) ist N_0 in dieser Situation eine normale, multiplikativ abgeschlossene Umgebung von 0, welche nach (a) dann ebenfalls beschränkt ist.

Zu (c): Nach (b) und (2.11,c) ist N dann eine normale, multiplikativ abgeschlossene Umgebung von 0 mit ${}^1/_{(K\backslash N)} \subset N_0 \subset N$, welche nach (a) ebenso beschränkt ist.

□

Abschließend werden wir nun topologische Ternärkörper vom Typ V mit beschränktem erweiterten Radikal betrachten und in diesem Fall sowohl unsere Definition nilpotenter Elemente mit der klassischen für Körper aus KOWALSKY, DÜRBAUM [28] als auch unsere Definition topologischer Ternärkörper vom Typ V mit der von SZAMBIEN [46] in Verbindung setzen:

(3.6) Satz und Definition:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper vom Typ V, $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret und R_a beschränkt. Dann gelten:

(a) Für jede Umgebung U von 0 sind die Mengen $1/(K\setminus U)$ und $(K\setminus U)\backslash 1$ jeweils beschränkt.[1]

(b) (vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 8]) $(K, T, \mathscr{T})$ ist *lokal beschränkt*, d.h. es existiert eine beschränkte Umgebung von 0. Insbesondere gibt es sogar eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0.

(c) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11]) Es ist $N_0 = \{0\}$ oder N_0 ist eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0.

(d) (vgl. Engler, Prestel [10, Lem. B.11]) Ist $N_0 \neq \{0\}$, so ist N eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0 mit $1/(K\setminus N) \subset N_0 \subset N$.

(e) (vgl. Kowalsky, Dürbaum [28, Satz 10]) Die Menge der nilpotenten Elemente besitzt die Darstellung[2]

$$N_0 \quad = \quad \left\{ x \in K \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für alle Umgebungen } U \text{ von 0 gibt es ein } n_0 \in \mathbb{N}, \\ \text{sodass für alle } n \geq n_0 \text{ stets } x^n \in U \text{ bei allen Klam-} \\ \text{merungen der Produkte } x^n \text{ gilt} \end{array} \right\}.$$

Beweis: *Zu (a):* Es sei eine Umgebung U von 0 gegeben. Da $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V ist, ist dann $1/(K\setminus U)$ oder $(K\setminus U)\backslash 1$ links- oder rechts-beschränkt - und damit ist nach (2.6,b) eine der beiden Mengen bereits beschränkt. Da die Faktorloop K^*/R_a nach (1.7,d) eine abelsche Gruppe ist, gilt $R_a \cdot 1/(K\setminus U) = R_a \cdot (K\setminus U)\backslash 1$; und da R_a beschränkt ist, folgt mit (2.6,c) und (2.5,b) aus der Beschränktheit der einen dann auch die Beschränktheit der anderen Menge.

Zu (b): Nach (3.3,b) existiert eine links- oder rechts-beschränkte Umgebung U von 0, welche mit (2.6,b) dann bereits beschränkt ist. Setzen wir $V := R_aU$, so ist V wegen $U \subset V$ ebenfalls eine Umgebung von 0, welche nach (2.6,c) wieder beschränkt ist; und weiter ist V wegen $R_aV = V$ normal, vgl. (1.7,d(i)). Somit ist V eine normale, beschränkte Umgebung von 0 und die Behauptung folgt aus (2.9,a).

Zu (c): Ist $N_0 \neq \{0\}$, so ist N_0 nach (b) und (2.10,a) eine normale Umgebung von 0. Mit (3.5,a) genügt es nun zu zeigen, dass N_0 multiplikativ abgeschlossen ist - hierfür weisen wir direkt die Eigenschaft aus (2.11,a(vii)) nach.
Sei hierzu ein $x \in K^*$ so gegeben, dass die Nilpotenzmenge $\langle 1/x \rangle$ unbeschränkt ist. Nach (2.3,b) und (2.5,b) muss dann auch die Menge $R_a \cdot 1/x^{\mathbb{N}}$ unbeschränkt sein. Weiter existiert

[1] Jeder topologischen Ternärkörpers vom Typ V mit beschränktem, erweiterten Radikal ist also ebenfalls ein topologischer Ternärkörper vom Typ V im Sinne von Szambien [46, S.181]; es gilt sogar nun zusätzlich, dass die Menge der Linksinversen $1/(K\setminus U)$ ebenfalls beschränkt ist.

[2] Da nach Kalhoff [23, S.154] für kommutative Körper stets $R_a = \{1\}$ gilt und dies nach (2.5,c) trivialerweise beschränkt ist, fällt für kommutative Körper vom Typ V unsere Definition nilpotenter Elemente also mit der klassischen zusammen.

nach (b) eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung U von 0; oBdA[1] sei hierbei $R_a U = U$. Es gilt dann

$$U \cdot {}^1\!/_{x^{\mathbb{N}}} \;=\; (R_a U) \cdot {}^1\!/_{x^{\mathbb{N}}} \;=\; U(R_a \cdot {}^1\!/_{x^{\mathbb{N}}}) \overset{(3.3,\mathrm{d})}{=} K \;,$$

insbesondere gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit[2]

$$1 \in U \cdot {}^1\!/_{x^n} \;, \qquad \text{d.h. mit} \qquad x^n \in \big(U \cdot {}^1\!/_{x^n}\big)x^n \;=\; U({}^1\!/_{x^n} \cdot x^n) \;=\; U \;.$$

Aufgrund der multiplikativen Abgeschlossenheit von U ist dann auch $(x^n)^k \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Klammerungen dieser Produkte. Wir zeigen nun, dass in dieser Situation

$$Ux^{\mathbb{N}} \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} Ux^i$$

gilt.[3] Die Inklusion $\supset$ ist hierbei natürlich klar; für die Inklusion $\subset$ sei nun ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ fest gewählt. Division von m durch n mit Rest in der Art $m = kn + r$ mit $k, r \in \mathbb{N}$ und $0 < r \leq n$ liefert dann

$$Ux^m \;=\; Ux^{kn+r} \overset{(1.7,\mathrm{d(ii)})}{=} \big(U(x^n)^k\big)x^r \;\subset\; (UU)x^r \;\subset\; Ux^r \;,$$

d.h. die Mengengleichheit ist gezeigt. Somit ist die Menge $Ux^{\mathbb{N}}$ die endliche Vereinigung der Mengen Ux, Ux^2, ..., Ux^n; da diese nach (2.5,d,f) jeweils beschränkt sind, muss nach (2.5,c) also auch $Ux^{\mathbb{N}}$ beschränkt sein. Da $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret ist, ist K nach (2.5,a) unbeschränkt; d.h. insbesondere muss $Ux^{\mathbb{N}} \neq K$ gelten. Wegen

$$K \;\neq\; Ux^{\mathbb{N}} \;=\; (R_a U)x^{\mathbb{N}} \;=\; U(R_a x^{\mathbb{N}})$$

folgt mit (3.3,d) hieraus, dass die Menge $R_a x^{\mathbb{N}}$ und damit auch $\langle x \rangle$ beschränkt ist, vgl. (2.1,e) und (2.5,b).

Zu (d): Die Behauptung folgt direkt aus (c) und (3.5,c).

Zu (e): Nach (b) existiert eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung U von 0 mit oBdA[1] $R_a U = U$.
Für die Inklusion $\subset$ sei ein $x \in N_0$ gegeben. Ist $x = 0$, so gilt für jede Umgebung V von 0 sofort $0^n = 0 \in V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Klammerung des Produktes. Es sei im Folgenden daher $x \neq 0$, d.h. die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/_x \rangle$ unbeschränkt. Nach dem Beweis von (c) bzw. (2.11,a(vii)) sind die Nilpotenzmenge $\langle x \rangle$ und nach (2.1,e) insbesondere die Menge $x^{\mathbb{N}}$ dann beschränkt. Setzen wir in dieser Situation $V := Ux^{\mathbb{N}}$, so ist diese Menge wegen $Ux \subset V$ wieder eine Umgebung[4] von 0, welche wegen $R_a V = V$ nach (1.7,d(i)) normal und wegen (2.6,c) ebenso beschränkt ist. Weiter erfüllt sie

$$Vx \;=\; (Ux^{\mathbb{N}})x \;=\; U(x^{\mathbb{N}} \cdot x) \;\subset\; Ux^{\mathbb{N}} \;=\; V \;.$$

---

[1] Gehe ansonsten zur normalen, multiplikativ abgeschlossenen, beschränkten Umgebung $R_a U$ von 0 über, vgl. (1.4,b,c) und (2.6,c).

[2] unabhängig von der Umklammerung des Produktes x^n wegen $R_a U = U$, vgl. (1.7,d(ii))

[3] erneut unabhängig von der Klammerung der Produkte $x^3, ..., x^n$, da $R_a U = U$ gilt, vgl. (1.7,d(ii))

[4] Denn die Rechtsmultiplikation mit x ist offen mit $0 \cdot x = 0$, vgl. (1.7,b).

Es sei nun eine beliebige Umgebung W von 0 gegeben. Da V beschränkt und $\mathscr{T}$ nicht diskret ist, existiert dann insbesondere ein $y \in K^*$ mit $Vy \subset W$. Da $1/x^{\mathbb{N}}$ nach (2.12,g) unbeschränkt ist, muss nach (a) und (2.5,b) insbesondere

$$1/x^{\mathbb{N}} \not\subset 1/(K\backslash(Vy)) \,, \qquad \text{d.h.} \qquad x^{\mathbb{N}} \cap (Vy) \neq \emptyset \,,$$

gelten.[1] Somit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x^{n_0} \in Vy \subset W$ für alle Klammerungen dieses Produktes x^{n_0}, da $R_a(Vy) = (R_aV)y = Vy$ gilt, vgl. (1.7,d(ii)). Induktiv folgt hieraus $x^n \in Vy \subset W$ für alle $n \geq n_0$ und alle Klammerungen der Produkte x^n, denn gilt $x^m \in Vy$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und jede Klammerung des Produktes x^m, so folgt direkt für alle Klammerungen des Produktes x^{m+1} ebenso

$$\begin{aligned} x^{m+1} \;&\in\; R_a x^{m+1} \overset{(1.7,\mathrm{d(ii)})}{=} R_a(x^m \cdot x) \;\subset\; R_a\big((Vy)x\big) \;=\; R_a\big(y(Vx)\big) \\ &\subset\; R_a(yV) \;=\; (R_aV)y \;=\; Vy \;\subset\; W \,. \end{aligned}$$

Somit ist x in der Tat ein Element mit der geforderten Eigenschaft.
Für die Inklusion $\supset$ sei nun ein $x \in K$ so gegeben, dass für alle Umgebungen W von 0 stets ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in W$ für alle $n \geq n_0$ und alle Klammerungen der Produkte x^n existiert. Im Fall $x = 0$ ist $x \in N_0$ klar; im Folgenden sei daher $x \neq 0$. Da für alle $y \in K^*$ mit U auch $_y\backslash^U$ eine Umgebung[2] von 0 ist, folgt für alle $y \in K^*$ hieraus insbesondere die Existenz eines $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine Klammerung des Produktes x^{n_0} mit

$$x^{n_0} \;\in\; {_y\backslash^U} \,, \qquad \text{d.h. mit} \qquad yx^{n_0} \;\in\; U \,, \qquad \text{also mit} \qquad y \;\in\; U/x^{n_0} \overset{(1.4,\mathrm{a})}{=} U \cdot 1/x^{n_0} \,.$$

Daher ist für alle $y \in K^*$ stets $y \in U \cdot 1/x^{\mathbb{N}}$ und wegen $0 \in U \cdot 1/x^{\mathbb{N}} \subset K$ folgt somit

$$K \;=\; U \cdot 1/x^{\mathbb{N}} \;=\; (R_aU) \cdot 1/x^{\mathbb{N}} \;=\; U(R_a \cdot 1/x^{\mathbb{N}}) \,.$$

Nach (3.3,d) ist die Menge $R_a \cdot 1/x^{\mathbb{N}}$ somit unbeschränkt; und da R_a beschränkt ist, muss nach (2.6,c) somit $1/x^{\mathbb{N}}$ unbeschränkt sein. Mit (2.12,g) ist daher $x \in N_0$.

□

[1] Denn Vy ist eine Umgebung von 0, da die Rechtsmultiplikation mit y offen mit $0 \cdot y = 0$ ist, vgl. (1.7,b).

[2] Denn die Linksmultiplikation mit y ist stetig mit $y \cdot 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

Kapitel 4

Topologien uniformer Bewertungen

Nach der Diskussion nilpotenter und neutraler Elemente in Kapitel 2 sowie topologischer Ternärkörper vom Typ V in Kapitel 3 schlagen wir nun den Bogen zu den Topologien uniformer Bewertungen. Wie in Kalhoff [20, Prop. 2.4] bereits gezeigt worden ist, liefern die Topologien uniformer Bewertungen stets einen topologischen Ternärkörper vom Typ V im Sinne von Szambien [46, S.181] - und damit insbesondere auch einen topologischen Ternärkörper vom Typ V in unserem Sinne.[1]

Auch die nilpotenten und neutralen Elemente dieser Topologien lassen sich durch die uniforme Bewertung leicht charakterisieren: Die neutralen Elemente ergeben sich genau als die Urbilder einer gewissen[2] normalen, konvexen Unterloop Δ der Werteloop Γ unter der uniformen Bewertung v; und die nilpotenten Elemente sind gerade die Elemente, die unter v einen Wert annehmen, der kleiner als jedes Element aus Δ ist.

Das Ziel dieses Kapitels ist schließlich die Klassifizierung der Topologien uniformer Bewertungen im Stile von Kowalski, Dürbaum [28], welche uns in (4.12) gelingen wird. Zunächst möchten wir aber für die Topologien uniformer Bewertungen auf Ternärkörpern noch einmal explizit die folgenden - bereits in (1.10,d) erwähnten - Ergebnisse festhalten:

(4.1) Satz: (Kalhoff [20, Cor. 2.3])

Es seien (K, T, v) ein uniform bewerteter Ternärkörper, v nicht trivial und Γ die Werteloop von v. Definieren wir für jedes $x \in K$ die Kugeln

$$B(x,\gamma) \quad := \quad \left\{\ y \in K \ \middle|\ d_v(x,y) = v(x-y) < \gamma\ \right\} \qquad \text{um } x \text{ mit Radius } \gamma \in \Gamma\ ,$$

so bildet die Familie $\big(B(x,\gamma)\big)_{\gamma\in\Gamma}$ die Umgebungsbasis von x einer Topologie $\mathscr{T}_v$ auf K, welche weder diskret noch indiskret ist und mit der $(K, T, \mathscr{T}_v)$ einen topologischen Ternärkörper bildet.

[1] Genauer werden wir in (4.2,a) sehen, dass für diese Topologien die Begriffe von Links-, Rechts- und beidseitiger Beschränktheit sogar alle zusammenfallen.

[2] Siehe (4.5) und (4.6) für genauere Details.

Uniforme Bewertungen und nilpotente Elemente

Unsere Absicht ist nun, die Aussagen dieses Abschnittes[1] nur auf Grundlage der Eigenschaften aus (4.1) zu formulieren, sodass wir sie nicht nur auf die Topologien uniformer Bewertungen, sondern in Kapitel 5 auch auf die Topologien *uniformer Absolutwerte* anwenden können.

Hierfür seien im gesamten Abschnitt daher

- $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper,
- $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret
- sowie $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ eine surjektive Abbildung von K auf eine angeordnete Loop $\Gamma \neq \{1\}$ mit einem Element $0 < \Gamma$ derart, dass die Axiome (V1), (V2) und (V4) einer uniformen Bewertung erfüllt sind und das System $\big(B(x,\gamma)\big)_{\gamma\in\Gamma}$ eine Umgebungsbasis von $x \in K$ der Topologie $\mathscr{T}$ bildet.

Für diese Abbildung v seien die Mengen

$$I_v \;:=\; \big\{\; x \in K \;\big|\; v(x) < 1 \;\big\} \qquad \text{und} \qquad A_v \;:=\; \big\{\; x \in K \;\big|\; v(x) \leq 1 \;\big\}$$

wie gewohnt definiert.

(4.2) Satz:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ und $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ wie oben beschrieben. Dann gelten:

(a) Für alle Teilmengen $M \subset K$ sind äquivalent:
  (i) M ist beschränkt.
  (ii) M ist links- oder rechts-beschränkt.
  (iii) Es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ mit $v(M) < \gamma$.
  (iv) Es gibt ein $\gamma \in \Gamma$ mit $v(M) \leq \gamma$.

(b) (vgl. Kalhoff [18, Rem. 1.1]) Die Mengen I_v und A_v sind jeweils normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebungen von 0 mit ${}^1/_{(K\setminus A_v)} \subset I_v \subset A_v$.

(c) (vgl. Kalhoff [20, Prop. 2.4]) Für jede Umgebung U von 0 sind die Mengen ${}^1/_{(K\setminus U)}$ und ${}_{(K\setminus U)}\backslash{}^1$ jeweils beschränkt; insbesondere ist $(K, T, \mathscr{T})$ also vom Typ V.

(d) R ist beschränkt.

(e) Ist Γ eine abelsche Gruppe, so gilt $R_a \subset A_v \setminus I_v$; insbesondere ist R_a beschränkt.

Beweis: *Zu (a):* (i $\Longrightarrow$ ii), (iii $\Longrightarrow$ iv): Jeweils klar.

[1] Genauer die Sätze (4.2) bis einschließlich (4.6).

<u>(ii $\Longrightarrow$ iii):</u> Nach Voraussetzung ist $I_v = B(0,1)$ eine Umgebung von 0. Ist M links-beschränkt, so gibt es insbesondere ein $x \in K^*$ mit $xM \subset I_v$, da $\mathscr{T}$ nicht diskret ist. Für alle $y \in M$ folgt dann

$$v(x)v(y) \;=\; v(xy) \;<\; 1\,, \qquad \text{d.h.} \qquad v(y) \;<\; {}_{v(x)}\backslash 1\,.$$

Mit der Wahl $\gamma := {}_{v(x)}\backslash 1 \in \Gamma$ gilt somit $v(M) < \gamma$. Ist M dagegen rechts-beschränkt, so gibt es analog ein $x \in K^*$ mit $Mx \subset I_v$ und für alle $y \in M$ folgt ebenso

$$v(y)v(x) \;=\; v(yx) \;<\; 1\,, \qquad \text{d.h.} \qquad v(y) \;<\; {}^1/_{v(x)}\,.$$

In diesem Fall gilt für $\gamma := {}^1/_{v(x)} \in \Gamma$ also $v(M) < \gamma$.

<u>(iv $\Longrightarrow$ i):</u> Es seien ein $\gamma \in \Gamma$ mit $v(M) \leq \gamma$ sowie eine Umgebung U von 0 gegeben. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $\delta \in \Gamma$ mit $B(0,\delta) \subset U$ und die Mengen $V := B(0, {}^\delta/_\gamma)$ und $W := B(0, {}_\gamma\backslash^\delta)$ sind ebenfalls Umgebungen von 0. Für alle $x \in M$ sowie alle $v \in V$ und $w \in W$ folgen dann

$$\begin{aligned} v(vx) \;&=\; v(v)v(x) \;<\; {}^\delta/_\gamma \cdot \gamma \;=\; \delta \\ \text{und} \qquad v(xw) \;&=\; v(x)v(w) \;<\; \gamma \cdot {}_\gamma\backslash^\delta \;=\; \delta\,. \end{aligned}$$

Somit gelten

$$VM \;\subset\; B(0,\delta) \;\subset\; U \qquad \text{sowie} \qquad MW \;\subset\; B(0,\delta) \;\subset\; U$$

und M ist damit beschränkt.

Zu (b): Nach Voraussetzung sind $I_v = B(0,1)$ und damit auch A_v Umgebungen von 0, welche nach (a) jeweils beschränkt sind. Da $v|_{K^*}$ nach (V1) und (V2) ein Loop-Epimorphismus von $(K^*,\cdot)$ auf $(\Gamma,\cdot)$ ist, sind I_v und A_v als Urbilder der normalen,[1] multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma < 1\}$ bzw. $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \leq 1\}$ von Γ wieder normal und multiplikativ abgeschlossen. Weiter ist für alle $x \in K\backslash A_v$ stets $v(x) > 1$ und daher $v({}^1/_x) < 1$, d.h. es gilt ${}^1/_{(K\backslash A_v)} \subset I_v$.

Zu (c): Es sei eine Umgebung U von 0 gegeben; nach Voraussetzung gibt es dann ein $\gamma \in \Gamma$ mit $B(0,\gamma) \subset U$. Für alle $x \in K\backslash U$ gilt daher $v(x) \geq \gamma$ und es folgen

$$v({}^1/_x) \;=\; {}^1/_{v(x)} \;\leq\; {}^1/_\gamma \qquad \text{und} \qquad v({}_x\backslash 1) \;=\; {}_{v(x)}\backslash 1 \;\leq\; {}_\gamma\backslash 1\,.$$

Nach (a) sind die Mengen ${}^1/_{(K\backslash U)}$ und ${}_{(K\backslash U)}\backslash 1$ daher jeweils beschränkt.

Zu (d): Die Behauptung folgt direkt aus (V4) und (a).

Zu (e): Da $v|_{K^*}$ nach (V1) und (V2) ein Loop-Epimorphismus von $(K^*,\cdot)$ auf $(\Gamma,\cdot)$ ist,

[1] Die Normalität dieser beiden Mengen folgt direkt aus dem Monotoniegesetz der angeordneten Loop Γ; so ist etwa $v\big({}_{(xy)}\backslash^{((xz)y)}\big) \;=\; {}_{(v(x)v(y))}\backslash^{((v(x)v(z))v(y))} \;<\; {}_{(v(x)v(y))}\backslash^{(v(x)v(y))} \;=\; 1$ für alle $x, y \in K^*$ und $z \in I_v$ und damit $(xI_v)y \subset (xy)I_v$ etc.

genügt es zum Nachweis der ersten Behauptung, diese für alle Erzeuger von R_a nachzuweisen. Für alle radikalen Elemente $r \in R$ ist dies hierbei nach (V4) klar; ist $r \in K^*$ dagegen ein Element mit

$$x(yz) \;=\; r\big((xy)z\big) \qquad \text{oder} \qquad xy \;=\; r(yx)$$

für bestimmte $x, y, z \in K^*$, so folgt in beiden Fällen direkt

$$\begin{aligned} v(r) &= v\big({}^{(x(yz))}/_{((xy)z)}\big) = \tfrac{v(x(yz))}{v((xy)z)} = \tfrac{v(x)v(y)v(z)}{v(x)v(y)v(z)} = 1 \\ \text{bzw.} \quad v(r) &= v\big({}^{(xy)}/_{(yx)}\big) = \tfrac{v(xy)}{v(yx)} = \tfrac{v(x)v(y)}{v(y)v(y)} = 1\,. \end{aligned}$$

Somit gilt $v(r) = 1$ für alle $r \in R_a$. Die Beschränktheit von R_a folgt dann direkt aus (a). □

(4.3) Satz:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ und $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ wie oben beschrieben. Dann gelten:

(a) Es ist $N_0 = \{0\}$ oder N_0 ist eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0.

(b) Ist $N_0 \neq \{0\}$, so ist N eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0 mit ${}^1/_{(K\setminus N)} \subset N_0 \subset N$.

(c) Für alle $x \in K$ sind äquivalent:
  (i) $x \in N_0$.
  (ii) Es existiert ein $y \in N_0$ mit $v(x) \leq v(y)$.
  (iii) Für alle $z \in N^\times$ ist $v(x) < v(z)$.

(d) Für alle $x \in K^*$ sind äquivalent:
  (i) $x \in N^\times$.
  (ii) Es existiert ein $y \in N^\times$ mit $v(x) = v(y)$.
  (iii) Es existieren $y, y' \in N^\times$ mit $v(y) \leq v(x) \leq v(y')$.
  (iv) Es existiert ein $y \in N^\times$ mit $v(y) \leq v(x) \leq v({}^1/_y)$.
  (v) Für alle $z \in N_0\setminus\{0\}$ ist $v(z) < v(x) < v({}^1/_z)$.

(e) Für alle $x \in N_0\setminus\{0\}$ und $y \in N^\times$ ist

$$v(x) \;<\; v(y),\ v({}^1/_y),\ v({}_y\backslash{}^1) \;<\; v({}^1/_x),\ v({}_x\backslash{}^1)\,.$$

(f) Es gelten $N_0 \subset I_v$ sowie $A_v\setminus I_v \subset N^\times$ und $A_v \subset N$.

Beweis: *Zu (a):* Mit (4.2,b,c) folgt die Behauptung direkt aus (3.5,b).

Zu (b): Die Behauptung folgt mit (4.2,c) und (a) direkt aus (3.5,c).

Zu (c): <u>(i $\Longrightarrow$ ii):</u> Klar.

<u>(ii $\Longrightarrow$ iii):</u> Es seien ein $y \in N_0$ mit $v(x) \leq v(y)$ sowie ein $z \in N^\times$ gegeben. Ist $y = 0$, so folgt $v(x) = 0$ und damit sofort $v(x) = 0 < v(z)$ wegen $z \neq 0$. Es sei im Folgenden daher $y \neq 0$, d.h. die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/_y \rangle$ unbeschränkt.
Wäre in dieser Situation $v(z) \leq v(x)$, so folgte insbesondere $v(z) \leq v(y)$, d.h. ${}^z\!/_y \in A_v$. Da A_v normal und multiplikativ abgeschlossen ist, folgte hieraus $\langle {}^z\!/_y \rangle \subset A_v$ und damit

$$\langle {}^1\!/_y \rangle \overset{(2.2,e)}{=} \langle {}^z\!/_{(zy)} \rangle \overset{(2.2,d)}{=} \langle {}^{({}^z\!/_y)}\!/_z \rangle \overset{(2.2,f)}{=} \langle {}^1\!/_z \cdot {}^z\!/_y \rangle \overset{(2.1,b)}{\subset} \langle {}^1\!/_z \rangle \, \langle {}^z\!/_y \rangle \quad \subset \quad \langle {}^1\!/_z \rangle \, A_v \ .$$

Da z neutral und A_v beschränkt ist, wäre somit $\langle {}^1\!/_z \rangle \, A_v$ nach (2.5,f) beschränkt - und damit auch $\langle {}^1\!/_y \rangle$ nach (2.5,b); im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss $v(x) < v(z)$ gelten.

<u>(iii $\Longrightarrow$ i):</u> Es gelte nun $v(x) < v(z)$ für alle $z \in N^\times$. Im Fall $x = 0$ ist die Behauptung klar; es sei im Folgenden daher $x \neq 0$.
Wegen $1 \in N^\times$ gilt dann insbesondere $v(x) < v(1) = 1$, d.h. es ist $x \in I_v$. Da I_v normal und multiplikativ abgeschlossen ist, folgt hieraus $\langle x \rangle \subset I_v$ und die Nilpotenzmenge $\langle x \rangle$ ist nach (2.5,b) beschränkt. Nach (2.11,a(iv)) und (a) gilt somit $x \in N$; und weil nach Voraussetzung offenbar $x \notin N^\times$ ist,[1] folgt hieraus bereits $x \in N_0$.

Zu (d): <u>(i $\Longrightarrow$ ii)</u>, <u>(ii $\Longrightarrow$ iii):</u> Jeweils klar.

<u>(iii $\Longrightarrow$ iv):</u> Es seien $y, y' \in N^\times$ mit $v(y) \leq v(x) \leq v(y')$ gegeben. Ist $v(y') \leq v({}^1\!/_y)$, so folgt direkt $v(y) \leq v(x) \leq v(y') \leq v({}^1\!/_y)$ mit $y \in N^\times$. Ist dagegen $v(y') > v({}^1\!/_y)$, so folgt

$$v(y'\backslash 1) \;=\; v(y')\backslash 1 \;<\; v({}^1\!/_y)\backslash 1 \;=\; v\big(({}^1\!/_y)\backslash 1\big) \;=\; v(y) \;\leq\; v(x) \;\leq\; v(y') \;=\; v\big({}^1\!/_{(y'\backslash 1)}\big)$$

mit $y'\backslash 1 \in N^\times$.[2]

<u>(iv $\Longrightarrow$ v):</u> Es seien ein $y \in N^\times$ mit $v(y) \leq v(x) \leq v({}^1\!/_y)$ sowie ein $z \in N_0 \backslash \{0\}$ gegeben. Nach (c) gilt dann $v(z) < v(y)$, d.h. es ist auch $v({}^1\!/_y) < v({}^1\!/_z)$ und es folgt

$$v(z) \;<\; v(y) \;\leq\; v(x) \;\leq\; v({}^1\!/_y) \;<\; v({}^1\!/_z) \ .$$

<u>(v $\Longrightarrow$ i):</u> Es gelte nun $v(z) < v(x) < v({}^1\!/_z)$ für alle $z \in N_0 \backslash \{0\}$. Hieraus folgt für alle $z \in N_0 \backslash \{0\}$ dann ebenfalls

$$v(z) \;=\; v\big(({}^1\!/_z)\backslash 1\big) \;=\; v({}^1\!/_z)\backslash 1 \;<\; v(x)\backslash 1 \;=\; v(x\backslash 1) \ .$$

Insbesondere muss also $x\backslash 1 \notin N_0$ gelten[3] und es folgt

$$x \;=\; {}^1\!/_{(x\backslash 1)} \;\in\; {}^1\!/_{(K\backslash N_0)} \overset{(2.8,g)}{\subset} N \ .$$

Da aber nach Voraussetzung offenbar $x \notin N_0$ ist,[4] muss bereits $x \in N^\times$ gelten.

[1] Denn es ist $v(x) \not< v(x)$.

[2] Beachte, dass $N^\times$ nach (2.8,b) eine Loop ist.

[3] Denn es ist $v(x\backslash 1) \not< v(x\backslash 1)$.

[4] Denn es ist $x \neq 0$ sowie $x \notin N_0 \backslash \{0\}$ wegen $v(x) \not< v(x)$.

Zu (e): Da mit $y \in N^\times$ auch die Elemente ${}^1\!/_y$ und ${}_y\backslash^1$ nach (2.8,b) jeweils neutral sind, ist lediglich $v(x) < v(y) < v({}^1\!/_x),\ v({}_x\backslash^1)$ für alle $x \in N_0\backslash\{0\}$ und $y \in N^\times$ zu zeigen; die erste Ungleichung folgt dabei bereits aus (c) und es gilt stets $v(y) < v({}^1\!/_x)$ nach (d).
Wären schließlich ein $x \in N_0\backslash\{0\}$ und ein $y \in N^\times$ mit $v({}_x\backslash^1) \leq v(y)$ gegeben, so folgte auch $v({}^1\!/_y) \leq v(x)$ und nach (c) damit bereits der Widerspruch ${}^1\!/_y \in N_0$.

Zu (f): Wegen $1 \in N^\times$ gilt nach (c) insbesondere $v(x) < v(1) = 1$ für alle $x \in N_0$, d.h. es ist $N_0 \subset I_v$. Ist weiter ein $x \in K^*$ mit $v(x) = 1$ gegeben, so ist insbesondere $v(x) = v(1)$ mit $1 \in N^\times$ und nach (d) folgt direkt $x \in N^\times$, d.h. es ist auch $A_v\backslash I_v \subset N^\times$.
Für die letzte Behauptung ist mit dem gerade Bewiesenen nur noch $I_v \subset N$ zu zeigen: Sei hierfür ein $x \in I_v$ gegeben. Ist $v(x) < v(y)$ für alle $y \in N^\times$, so folgt $x \in N_0$ nach (c); und gibt es stattdessen ein $y \in N^\times$ mit $v(y) \leq v(x)$, so ist insbesondere $v(y) \leq v(x) < 1 = v(1)$ mit $y, 1 \in N^\times$ und es gilt $x \in N^\times$ nach (d). In beiden Fällen ist also $x \in N$.

$\square$

(4.4) Lemma:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ und $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ wie oben beschrieben; zusätzlich gelte $N_0 = \{0\}$. Weiter seien eine Teilmenge $\Delta \subset \Gamma$, ein $\gamma \in \Gamma$ mit ${}^1\!/_\gamma < \Delta < \gamma$ sowie ein $x \in K^*$ mit $v(x) = \gamma$ gegeben. Definieren wir die Mengen $\Lambda, \Delta' \subset \Gamma$ durch

$$\Lambda \quad := \quad v(\langle x \rangle) \ \cup\ \left({}^1\!/_{v(\langle x \rangle)}\right) \ \overset{(2.3,a)}{=}\ v(\langle x \rangle) \ \cup\ v(\langle {}^1\!/_x \rangle) \quad \subset \quad \Gamma$$

$$\text{und} \qquad \Delta' \quad := \quad \left\{ \delta \in \Gamma \;\middle|\; \exists\, \gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda : \quad \gamma_1 \ \leq\ \delta\ \leq\ \gamma_2 \right\} \quad \subset \quad \Gamma\ ,$$ [1]

so ist Δ' eine normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\Delta \subsetneqq \Delta' \neq \Gamma$.

Beweis: Es seien $\Delta \subset \Gamma$, $\gamma \in \Gamma$ und $x \in K^*$ wie oben gegeben und die Mengen Λ und Δ' entsprechend definiert. Da $v|_{K^*}$ nach (V1) und (V2) ein Loop-Epimorphismus von $(K^*, \cdot)$ auf $(\Gamma, \cdot)$ ist, sind $v(\langle x \rangle)$ und $v(\langle {}^1\!/_x \rangle)$ als Bilder normaler Teilmengen wieder normal; und mit (1.4,b) ist somit auch Λ normal. Weiter gilt

$${}^1\!/_\Lambda \ \overset{(1.4,a)}{=}\ {}_\Lambda\backslash^1 \quad = \quad \left({}_{v(\langle x \rangle)}\backslash^1\right) \ \cup\ \left({}_{({}^1/_{v(\langle x \rangle)})}\backslash^1\right) \quad = \quad \left({}^1\!/_{v(\langle x \rangle)}\right) \ \cup\ v(\langle x \rangle) \quad = \quad \Lambda\ .$$

Wir weisen im Folgenden nun die geforderten Eigenschaften an Δ' nach.

Δ' ist konvex: Es seien $\delta_1, \delta_2 \in \Delta'$ und ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\delta_1 \leq \gamma \leq \delta_2$ gegeben. Nach Konstruktion von Δ' gibt es dann insbesondere $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda$ mit $\gamma_1 \leq \delta_1$ und $\delta_2 \leq \gamma_2$, d.h.

$$\gamma_1 \quad \leq \quad \delta_1 \quad \leq \quad \gamma \quad \leq \quad \delta_2 \quad \leq \quad \gamma_2\ .$$

Somit ist ebenfalls $\gamma \in \Delta'$.

$\Delta \subsetneqq \Delta'$: Wegen $\gamma = v(x) \in v(\langle x \rangle) \subset \Lambda$ und ${}^1\!/_\gamma = v({}^1\!/_x) \in v(\langle {}^1\!/_x \rangle) \subset \Lambda$ ist nach Konstruktion offenbar $\gamma, {}^1\!/_\gamma \in \Delta'$. Aus ${}^1\!/_\gamma < \Delta < \gamma$ folgen daher sowohl $\gamma, {}^1\!/_\gamma \in \Delta'\backslash\Delta$ als auch $\Delta \subset \Delta'$ mit der Konvexität von Δ'.

[1] Mit dieser Definition ist $\Delta' = \mathrm{conv}(\Lambda)$ nichts anderes als die konvexe Hülle von Λ in Γ.

<u>Δ' ist normal:</u> Es seien $\alpha, \beta \in \Gamma$ und ein $\delta \in \Delta'$ gegeben; nach Konstruktion gibt es dann $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda$ mit $\gamma_1 \leq \delta \leq \gamma_2$. Da Λ normal ist, gelten mit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda$ dann auch

$$ {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{((\alpha\gamma_i)\beta)} \;,\quad {}^{\alpha}\backslash{}^{(((\alpha\beta)\gamma_i)/\beta)} \;,\quad {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{(\alpha(\beta\gamma_i))} \;,\quad {}^{\beta}\backslash{}^{(\alpha\backslash((\alpha\beta)\gamma_i))} \quad \in \quad \Lambda \qquad \text{für} \qquad i = 1,2 \;. $$

Mit Hilfe des Monotoniegesetzes folgen aus der Gleichung $\gamma_1 \leq \delta \leq \gamma_2$ dann

$$ \begin{array}{rccccc} & {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{((\alpha\gamma_1)\beta)} & \leq & {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{((\alpha\delta)\beta)} & \leq & {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{((\alpha\gamma_2)\beta)} \;, \\ & {}^{\alpha}\backslash{}^{(((\alpha\beta)\gamma_1)/\beta)} & \leq & {}^{\alpha}\backslash{}^{(((\alpha\beta)\delta)/\beta)} & \leq & {}^{\alpha}\backslash{}^{(((\alpha\beta)\gamma_2)/\beta)} \;, \\ & {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{(\alpha(\beta\gamma_1))} & \leq & {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{(\alpha(\beta\delta))} & \leq & {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{(\alpha(\beta\gamma_2))} \\ \text{sowie} & {}^{\beta}\backslash{}^{(\alpha\backslash((\alpha\beta)\gamma_1))} & \leq & {}^{\beta}\backslash{}^{(\alpha\backslash((\alpha\beta)\delta))} & \leq & {}^{\beta}\backslash{}^{(\alpha\backslash((\alpha\beta)\gamma_2))} \;. \end{array} $$

Nach Konstruktion sind damit

$$ {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{((\alpha\delta)\beta)} \;,\quad {}^{\alpha}\backslash{}^{(((\alpha\beta)\delta)/\beta)} \;,\quad {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{(\alpha(\beta\delta))} \;,\quad {}^{\beta}\backslash{}^{(\alpha\backslash((\alpha\beta)\delta))} \quad \in \quad \Delta' $$

und es folgen schließlich

$$ {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{((\alpha\Delta')\beta)} \;,\quad {}^{\alpha}\backslash{}^{(((\alpha\beta)\Delta')/\beta)} \;,\quad {}^{(\alpha\beta)}\backslash{}^{(\alpha(\beta\Delta'))} \;,\quad {}^{\beta}\backslash{}^{(\alpha\backslash((\alpha\beta)\Delta'))} \quad \subset \quad \Delta' \;, $$

$$ \text{d.h.} \qquad (\alpha\Delta')\beta \;=\; \alpha(\beta\Delta') \;=\; (\alpha\beta)\Delta' \;. $$

Mit (1.2,c) ist Δ' daher bereits normal.

<u>Δ' ist eine Unterloop von Γ:</u> Wegen $\gamma, {}^1\!/_\gamma \in \Delta'$ ist nur die Abgeschlossenheit von Δ' unter der Verknüpfung sowie den beiden einseitigen Quotientenbildungen zu zeigen. Seien hierzu $\delta, \delta' \in \Delta'$ gegeben; nach Konstruktion gibt es dann $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1', \gamma_2' \in \Lambda$ mit $\gamma_1 \leq \delta \leq \gamma_2$ und $\gamma_1' \leq \delta' \leq \gamma_2'$. Setzen wir

$$ \gamma_1'' \;:=\; \min\{\gamma_1, \gamma_1'\} \;, \qquad \gamma_2'' \;:=\; \max\{\gamma_2, \gamma_2'\} \quad \in \quad \Lambda \;, $$

so gilt jeweils auch

$$ \gamma_1''\gamma_1'' \;\in\; \Lambda \qquad \text{sowie} \qquad \gamma_2''\gamma_2'' \;\in\; \Lambda \;, $$

da die beiden Mengen $v(\langle x \rangle)$ und $v(\langle {}^1\!/_x \rangle)$ als Bilder der multiplikativ abgeschlossenen Mengen $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1\!/_x \rangle$ unter dem Loop-Epimorphismus $v|_{K^*}$ jeweils multiplikativ abgeschlossene Teilmengen von Γ sind. Mit Hilfe der Monotoniegesetze folgt weiter

$$ \gamma_1''\gamma_1'' \;\leq\; \gamma_1\gamma_1' \;\leq\; \delta\delta' \;\leq\; \gamma_2\gamma_2' \;\leq\; \gamma_2''\gamma_2'' $$

und somit ist ebenfalls $\delta\delta' \in \Delta'$, d.h. insgesamt $\Delta'\Delta' \subset \Delta'$.
Ist nun ein $\delta \in \Delta'$ gegeben, so gibt es nach Konstruktion $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda$ mit $\gamma_1 \leq \delta \leq \gamma_2$. Dann sind auch ${}^1\!/_{\gamma_1}, {}^1\!/_{\gamma_2} \in {}^1\!/_\Lambda = \Lambda$ mit ${}^1\!/_{\gamma_2} \leq {}^1\!/_\delta \leq {}^1\!/_{\gamma_1}$, d.h. es ist ebenfalls ${}^1\!/_\delta \in \Delta'$, also insgesamt ${}^1\!/_{\Delta'} \subset \Delta'$. Es folgt daher auch

$$ {}^{\Delta'}\backslash{}^{\Delta'} \;\overset{(1.4,a)}{=}\; {}^{\Delta'}\!/_{\Delta'} \;\overset{(1.4,a)}{=}\; \Delta' \cdot ({}^1\!/_{\Delta'}) \;\subset\; \Delta'\Delta' \;\subset\; \Delta' \;. $$

$\underline{\Delta' \neq \Gamma}$: Da nach Voraussetzung $N_0 = \{0\}$ gilt, sind insbesondere die Elemente x und ${}_x\backslash^1$ nicht nilpotent, d.h. die Nilpotenzmengen $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1\!/\!{}_x \rangle$ sind jeweils beschränkt. Also ist auch die Menge $\langle x \rangle \cup \langle {}^1\!/\!{}_x \rangle$ mit (2.5,c) beschränkt und nach (4.2,a) gibt es ein $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ mit

$$\Lambda \;=\; v\big(\, \langle x \rangle \cup \langle {}^1\!/\!{}_x \rangle \,\big) \;<\; \widetilde{\gamma}\ .$$

Dann muss auch $\Delta' < \widetilde{\gamma}$ gelten: Denn existierte ein $\delta \in \Delta'$ mit $\widetilde{\gamma} \leq \delta$, so gäbe es nach Konstruktion insbesondere auch ein $\gamma_2 \in \Lambda$ mit $\widetilde{\gamma} \leq \delta \leq \gamma_2$; im Widerspruch zu $\Lambda < \widetilde{\gamma}$. Somit ist $\widetilde{\gamma} \in \Gamma \backslash \Delta'$.

□

(4.5) Satz und Definition:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ und $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ wie oben beschrieben; weiter sei $\Delta := v(N^\times) \subset \Gamma$. Dann gelten:

(a) Δ ist eine normale, konvexe Unterloop von Γ. Hierbei gilt $\Delta \neq \Gamma$ genau dann, wenn $N_0 \neq \{0\}$ ist.

(b) Es sind

$$N_0 \;=\; \big\{\ x \in K \ \big|\ v(x) < \Delta\ \big\} \qquad \text{und} \qquad N^\times \;=\; v^{-1}(\Delta)\ .$$

(c) Ist $N_0 \neq \{0\}$, so gilt für jede normale, konvexe Unterloop Δ' von Γ mit $\Delta' \neq \Gamma$ bereits $\Delta' \subset \Delta$. Wir sagen in diesem Fall daher, dass Δ *die*[1] *maximale, normale, konvexe Unterloop von* Γ *mit* $\Delta \neq \Gamma$ ist.

(d) Ist $N_0 = \{0\}$, so existiert zu jeder normalen, konvexen Unterloop Δ' von Γ mit $\Delta' \neq \Gamma$ stets eine normale, konvexe Unterloop Δ'' von Γ mit $\Delta' \subsetneqq \Delta'' \neq \Gamma$. Somit besitzt Γ in diesem Fall keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ' mit $\Delta' \neq \Gamma$.

Beweis: *Zu (a):* Da $v|_{K^*}$ nach (V1) und (V2) ein Loop-Epimorphismus von $(K^*, \cdot)$ auf $(\Gamma, \cdot)$ ist, ist Δ als Bild der normalen Unterloop $N^\times$ wieder eine normale Unterloop von Γ. Weiter ist Δ konvex: Denn sind $\alpha, \beta \in \Delta$, ein $\gamma \in \Gamma$ mit $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ und Elemente $x, y \in N^\times$ und $z \in K^*$ mit $v(x) = \alpha$, $v(y) = \beta$ und $v(z) = \gamma$ gegeben, so gilt

$$v(x) \;=\; \alpha \;\leq\; v(z) \;\leq\; \beta \;=\; v(y)$$

und nach (4.3,d) ist z mit x und y ebenfalls wieder neutral, d.h. es ist $z \in N^\times$. Nach Konstruktion ist damit $\gamma = v(z) \in \Delta$.
Ist hierbei $N_0 = \{0\}$, so sind für alle $x \in K^*$ die Nilpotenzmengen $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1\!/\!{}_x \rangle$ stets beschränkt, d.h. es ist $N^\times = K^*$ und damit $\Delta = v(K^*) = \Gamma$. Ist dagegen $N_0 \neq \{0\}$ und ein $x \in N_0 \backslash \{0\}$ gegeben, so gilt nach (4.3,c) dann $v(x) < v(y)$ für alle $y \in N^\times$, d.h. es ist $v(x) < \Delta$. Somit ist insbesondere $v(x) \in \Gamma \backslash \Delta$.

[1]Für jede weitere normale, konvexe Unterloop Δ'' von Γ mit $\Delta'' \neq \Gamma$, welche diese Eigenschaft erfüllt, muss offenbar insbesondere $\Delta'' \subset \Delta$ und $\Delta \subset \Delta''$ gelten, d.h. Δ ist mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. Wir sprechen daher stets von *der* maximalen, normalen, konvexen Unterloop Δ von Γ mit $\Delta \neq \Gamma$.

Zu (b): Die Mengengleichheit für N_0 folgt direkt aus (4.3,c) und der Definition von Δ. Bei der Mengengleichheit für $N^\times$ ist die Inklusion $\subset$ nach Definition von Δ klar; und ist für die Inklusion $\supset$ ein $x \in K^*$ mit $v(x) \in \Delta$ gegeben, so gibt es ein $y \in N^\times$ mit $v(x) = v(y)$ und nach (4.3,d) folgt bereits $x \in N^\times$.

Zu (c): In dieser Situation ist Δ nach (a) eine normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\Delta \neq \Gamma$. Sei weiter Δ' ebenfalls eine normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\Delta' \neq \Gamma$.
Zum Nachweis der Inklusion $\Delta' \subset \Delta$ seien ein $\delta \in \Delta'$ sowie ein $x \in K^*$ mit $v(x) = \delta$ gegeben. Da die Menge $v^{-1}(\Delta')$ als Urbild der normalen Unterloop Δ' unter dem Loop-Epimorphismus $v|_{K^*}$ wieder eine normale Unterloop von K^* ist, sind mit $x \in v^{-1}(\Delta')$ insbesondere auch $\langle x \rangle, \langle {}^1/_x \rangle \subset v^{-1}(\Delta')$.
Wegen $\Delta' \neq \Gamma$ gibt es weiter ein Element $\gamma \in \Gamma \backslash \Delta'$. Existierten $\alpha, \beta \in \Delta'$ mit $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, so folgte aus der Konvexität von Δ' direkt der Widerspruch $\gamma \in \Delta'$ - also muss $\Delta' < \gamma$ oder $\gamma < \Delta'$ gelten. Es folgt daher $\Delta' < \gamma$ oder $\Delta' = {}^1/_{\Delta'} < {}^1/_\gamma$ und mit der Notation $\widetilde{\gamma} := \max\{\gamma, {}^1/_\gamma\} \in \Gamma$ ist somit in jedem Fall $\Delta' < \widetilde{\gamma}$. Insbesondere ist dann auch $v(\langle x \rangle), v(\langle {}^1/_x \rangle) < \widetilde{\gamma}$ und nach (4.2,a) sind die Nilpotenzmengen $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1/_x \rangle$ somit beschränkt, d.h. es ist $x \in N^\times$ und es folgt $\delta = v(x) \in \Delta$. Insgesamt gilt also $\Delta' \subset \Delta$.

Zu (d): Es sei in dieser Situation eine normale, konvexe Unterloop Δ' von Γ mit $\Delta' \neq \Gamma$ gegeben. Analog zum Beweis von (c) gibt es dann ein $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ mit $\Delta' < \widetilde{\gamma}$; d.h. es gilt auch ${}^1/_{\widetilde{\gamma}} < {}^1/_{\Delta'} = \Delta'$, also ${}^1/_{\widetilde{\gamma}} < \Delta' < \widetilde{\gamma}$. Nach (4.4) gibt es dann bereits eine normale, konvexe Unterloop Δ'' von Γ mit $\Delta' \underset{\neq}{\subset} \Delta'' \neq \Gamma$.

□

(4.6) Korollar:

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ und $v : K \longrightarrow \Gamma \cup \{0\}$ wie oben beschrieben.

(a) Die Werteloop Γ besitzt genau dann eine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$, wenn $N_0 \neq \{0\}$ gilt. In diesem Fall sind dann

$$N_0 \; = \; \left\{ \, x \in K \; \middle| \; v(x) < \Delta \, \right\} \; \neq \; \{0\} \qquad \text{und} \qquad N^\times \; = \; v^{-1}(\Delta) \; .$$

(b) Die Werteloop Γ besitzt genau dann keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$, wenn $N_0 = \{0\}$ gilt. In diesem Fall ist dann $N^\times = K^*$.

Beweis: *Zu (a):* $\Longrightarrow$: Es sei Δ die maximale, konvexe Unterloop von Γ mit $\Delta \neq \Gamma$. Nach (4.5,d) muss in dieser Situation $N_0 \neq \{0\}$ sein; und nach (4.5,c) ist hierbei $v(N^\times) = \Delta$. Die Behauptung folgt somit bereits aus (4.5,b).

$\Longleftarrow$: Die Behauptung folgt direkt mit (4.5,c).

Zu (b): Die Äquivalenz entspricht der Kontraposition von (a). Ist $N_0 = \{0\}$, so sind für alle $x \in K^*$ die Nilpotenzmengen $\langle x \rangle$ und $\langle {}^1/_x \rangle$ stets beschränkt, d.h. es ist $N^\times = K^*$.

□

Uniforme Rang-1-Bewertungen

Die Ergebnisse aus (4.2)-(4.6) werden uns für die Betrachtung der *uniformen Absolutwerte* in Kapitel 5 genügen, sodass wir uns nun für den Rest des Paragraphen vollständig den uniformen Bewertungen widmen werden.

Eine besondere Rolle wird in Hinblick auf (4.6,a) dabei denjenigen uniformen Bewertungen zukommen, deren Werteloop Γ eine spezielle maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzt - nämlich die kleinst mögliche $\{1\}$. Dies motiviert die folgende Definition:

(4.7) Definition:

Es seien (K, T, v) ein uniform bewerteter Ternärkörper und Γ die Werteloop von v. Wir nennen v eine *uniforme Rang-1-Bewertung auf* (K, T), wenn $\{1\}$ die maximale, normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\{1\} \neq \Gamma$ ist.
Insbesondere ist eine uniforme Rang-1-Bewertung stets nicht trivial.

Diese Definition weist eine starke Ähnlichkeit zu der Definition von Rang-1-Bewertungen bewerteter kommutativer Körper auf: So sind diese als nicht triviale Bewertungen definiert, deren Wertegruppe keine nicht triviale, konvexe Untergruppe besitzt, vgl. etwa PRIESS-CRAMPE [34, S.93] - in anderen Worten, deren abelsche Wertegruppe G die maximale, normale, konvexe Unterloop $\{1\}$ mit $\{1\} \neq G$ besitzt. Die obige Definition kann daher als Verallgemeinerung dieses Konzeptes bewerteter kommutativer Körper auf uniform bewertete Ternärkörper verstanden werden.

Ein Aspekt Rang-1-bewerteter kommutativer Körper geht bei dieser Verallgemeinerung allerdings verloren: So sind die Wertegruppen von Rang-1-Bewertungen kommutativer Körper stets ordnungstreu in die additive Gruppe der reellen Zahlen einbettbar,[1] und diese daher stets zu einer Bewertung äquivalent, deren Wertegruppe eine Untergruppe von $\mathbb{R}$ ist.
Dies muss für uniforme Rang-1-Bewertungen eines Ternärkörpers nicht mehr der Fall sein: Betrachte hierzu etwa die angeordnete Loop $\Gamma := (\mathbb{R}, \oplus, \leq)$ aus (1.3,b) und den Cartesischen Körper $\big(\mathbb{R}((\Gamma)), +, \cdot, \delta\big)$ der formalen Potenzreihen auf Γ über $\mathbb{R}$. Da Γ nach SKLIFOS [44, S.36f.] keine konvexe Unterloop außer $\{0\}$ und $\mathbb{R}$ besitzt,[2] ist $\{0\}$ somit natürlich auch die maximale, normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\{0\} \neq \Gamma$, d.h. δ ist eine uniforme Rang-1-Bewertung. Da Γ aber nicht assoziativ ist, kann diese Loop nicht zu einer Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ o-isomorph sein.

[1] So ist die Eigenschaft, dass die Wertegruppe G keine nicht trivialen, konvexen Untergruppen besitzt, nach PRIESS-CRAMPE [34, §I.3 Satz 1] äquivalent dazu, dass diese *archimedisch angeordnet* ist, d.h. dass zu $x, y \in G$ mit $1 < x < y$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < x^n$ existiert. Nach dem *Satz von Hölder*, vgl. etwa PRIESS-CRAMPE [34, §I.3 Satz 4], ist G in diesem Fall dann zu einer Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ o-isomorph.

[2] Beachte, dass dort eine Loop ohne nicht triviale, konvexe Unterloops *archimedisch angeordnet* genannt wird - im Gegensatz zu anderen Quellen wie etwa PRIESS-CRAMPE [34].

(4.8) Korollar:

Es seien (K, T, v) ein uniform bewerteter Ternärkörper und v nicht trivial. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) v ist eine uniforme Rang-1-Bewertung.

(ii) Es sind $N_0 = I_v \neq \{0\}$ sowie $N^\times = A_v \backslash I_v$ und $N = A_v$.

(iii) Es gilt $N \subset A_v$.

(vi) Es gilt $N^\times \subset A_v$.

(v) Es gilt $I_v \subset N_0$.

Beweis: (i $\Longrightarrow$ ii): Ist $\{1\}$ die maximale, normale, konvexe Unterloop der Werteloop Γ von v mit $\{1\} \neq \Gamma$, so folgen $N_0 = I_v \neq \{0\}$ sowie $N^\times = A_v \backslash I_v$ bereits aus (4.6,a).

(ii $\Longrightarrow$ iii), (iii $\Longrightarrow$ iv): Jeweils klar.

(iv $\Longrightarrow$ v): Es gelte $N^\times \subset A_v$. Da $N^\times$ nach (2.8,b) eine Loop ist, muss dann offenbar bereits $N^\times \subset A_v \backslash I_v$ gelten; mit (4.3,f) ist dann bereits $N^\times = A_v \backslash I_v$. Da nach (4.3,f) ebenso $A_v \subset N$ gilt, folgt damit

$$I_v \quad = \quad A_v \backslash (A_v \backslash I_v) \quad = \quad A_v \backslash N^\times \quad \subset \quad N \backslash N^\times \quad = \quad N_0 \; .$$

(v $\Longrightarrow$ i): Es gelte $I_v \subset N_0$; mit (4.3,f) ist dann bereits $N_0 = I_v \neq \{0\}$, da v nicht trivial ist. Nach (4.6,a) muss die Werteloop Γ von v dann die maximale, normale, konvexe Unterloop $\{1\}$ mit $\{1\} \neq \Gamma$ besitzen, d.h. v ist eine uniforme Rang-1-Bewertung.

□

(4.9) Satz:

Es seien (K, T, v) ein uniform bewerteter Ternärkörper, Γ die Werteloop von v und Δ eine normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\Delta \neq \Gamma$. Weiter sei die Abbildung w durch

$$w: \; K \;\longrightarrow\; \Gamma/\Delta \;\cup\; \big\{\{0\}\big\} \;, \qquad x \;\mapsto\; \Delta v(x) \;,$$

definiert. Dann gelten:

(a) (Kalhoff [18, Prop. 1.4], [20, Cor. 2.6]) Die Abbildung w ist eine nicht triviale uniforme Bewertung von (K, T), welche *gröber* als v ist[1] und dieselbe Topologie $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}_w$ wie v auf K erzeugt.

(b) Ist Δ die maximale, normale, konvexe Unterloop von Γ mit $\Delta \neq \Gamma$, so ist w eine uniforme Rang-1-Bewertung.

(c) Ist $v(R_a) \subset \Delta$, so ist die Werteloop Γ/Δ von w eine abelsche Gruppe.

[1] d.h. $A_v \subset A_w$ erfüllt, siehe Kalhoff [18, S.340]

Beweis: *Zu (a):* Nach KALHOFF [18, Prop. 1.4] ist w mit dieser Definition eine uniforme Bewertung auf (K,T), welche gröber als v ist; insbesondere ist w wegen $\Delta \neq \Gamma$ in dieser Situation nicht trivial. Wegen $A_v \subset A_w$ erzeugen v und w nach KALHOFF [20, Cor. 2.6] hierbei dieselbe Topologie auf K.

Zu (b): Nach (4.5,d) muss in dieser Situation $N_0 \neq \{0\}$ gelten; und da v und w nach (a) dieselbe Topologie erzeugen, ist $N^\times = v^{-1}(\Delta)$ nach (4.6,a) daher die Menge der neutralen Elementen bzgl. $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}_w$. Somit folgt für alle $x \in N^\times$ damit $v(x) \in \Delta$ und somit ebenfalls

$$w(x) \;=\; \Delta v(x) \;=\; \Delta\,, \qquad \text{d.h.} \qquad x \;\in\; A_w \backslash I_w\,.$$

Nach (4.8) ist w daher eine uniforme Rang-1-Bewertung.

Zu (c): Mit $v(R_a) \subset \Delta$ ist dann bereits auch $\Delta v(R_a) = \Delta$.[1] Sind nun $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ sowie Elemente $x, y, z \in K^*$ mit $v(x) = \alpha$, $v(y) = \beta$ und $v(z) = \gamma$ gegeben, so gelten

$$\begin{aligned}
(\Delta\alpha)\big((\Delta\beta)(\Delta\gamma)\big) &= \Delta\big(\alpha(\beta\gamma)\big) = \big(\Delta v(R_a)\big)v\big(x(yz)\big) = \Delta v\big(R_a(x(yz))\big) \\
&= \Delta v\big(R_a((xy)z)\big) = \big(\Delta v(R_a)\big)v\big((xy)z\big) = \Delta\big((\alpha\beta)\gamma\big) \\
&= \big((\Delta\alpha)(\Delta\beta)\big)(\Delta\gamma) \\
\text{und} \qquad (\Delta\alpha)(\Delta\beta) &= \Delta(\alpha\beta) = \big(\Delta v(R_a)\big)v(xy) = \Delta v\big(R_a(xy)\big) \\
&= \Delta v\big(R_a(yx)\big) = \big(\Delta v(R_a)\big)v(yx) = \Delta(\beta\alpha) = (\Delta\beta)(\Delta\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Somit ist Γ/Δ bereits eine abelsche Gruppe.

□

(4.10) Korollar:

Es seien (K,T,v) ein uniform bewerteter Ternärkörper, v nicht trivial und Γ die Werteloop von v.

(a) Es gibt genau dann eine uniforme Rang-1-Bewertung w auf (K,T) mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$, wenn Γ eine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzt.

(b) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung w auf (K,T) mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$, deren Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ ist, wenn Γ eine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzt und R_a beschränkt ist.

(c) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung w auf (K,T) mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$, deren Werteloop eine abelsche Gruppe G ist und keine maximale, konvexe Untergruppe H mit $H \neq G$ besitzt, wenn Γ keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzt und R_a beschränkt ist.

[1] Denn es sind $1 = v(1) \in v(R_a)$ sowie $\Delta\Delta = \Delta$.

(d) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung w auf (K, T) mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$, deren Werteloop eine abelsche Gruppe ist, wenn R_a beschränkt ist.

Beweis: *Zu (a):* $\underline{\Longrightarrow:}$ Ist eine uniforme Rang-1-Bewertung w mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$ gegeben, so folgt aus (4.8) insbesondere $N_0 \neq \{0\}$ - nach (4.6,a) muss Γ daher eine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzen.

$\underline{\Longleftarrow:}$ Die Behauptung folgt direkt aus (4.9,a,b).

Zu (b): $\underline{\Longrightarrow:}$ Ist eine solche uniforme Bewertung w gegeben, so ist w insbesondere eine uniforme Rang-1-Bewertung[1] und nach (a) besitzt Γ eine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$. Weiter ist R_a nach (4.2,e) beschränkt.

$\underline{\Longleftarrow:}$ Besitzt Γ eine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$, so ist nach (4.6,a) insbesondere $v(N^\times) = \Delta$. Da nach (2.12,f) weiter $R_a \subset N^\times$ gilt, folgt $v(R_a) \subset v(N^\times) = \Delta$ und nach (4.9,a,b,c) gibt es somit eine nicht triviale, uniforme Rang-1-Bewertung w mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$ und abelscher Wertegruppe Γ/Δ. Da Γ/Δ nur die konvexen Untergruppen $\{\Delta\}$ und Γ/Δ besitzt, ist sie bereits zur einer Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ o-isomorph[2] und die Behauptung gezeigt.

Zu (c): $\underline{\Longrightarrow:}$ Ist eine solche uniforme Bewertung w gegeben, so gilt nach (4.6,b) insbesondere $N_0 = \{0\}$ und erneut nach (4.6,b) kann Γ keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzen. Weiter ist R_a erneut nach (4.2,e) beschränkt.

$\underline{\Longleftarrow:}$ Besitzt Γ keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$, so muss nach (4.6,b) dann $N_0 = \{0\}$ gelten. Da R_a beschränkt ist, gibt es nach (4.2,a) ein $\gamma \in \Gamma$ mit $v(R_a) < \gamma$; und damit gilt ebenfalls

$$^1/_\gamma \quad < \quad ^1/_{v(R_a)} \quad = \quad v(^1/_{R_a}) \quad = \quad v(R_a) \quad < \quad \gamma\ .$$

Nach (4.4) gibt es daher eine normale, konvexe Unterloop Δ' von Γ mit $v(R_a) \subset \Delta' \neq \Gamma$; und nach (4.9,a,c) gibt es somit eine nicht triviale, uniforme Bewertung w mit $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$ und abelscher Wertegruppe Γ/Δ'. Hierbei kann Γ/Δ' wegen $N_0 = \{0\}$ nach (4.6,b) keine maximale, konvexe Untergruppe H mit $H \neq \Gamma/\Delta'$ besitzen.

Zu (d): $\underline{\Longrightarrow:}$ Die Behauptung folgt direkt aus (4.2,e).

$\underline{\Longleftarrow:}$ Ist R_a beschränkt, so folgt mittels einer Fallunterscheidung nach der Existenz einer maximalen, normalen, konvexen Unterloop Δ von Γ mit $\Delta \neq \Gamma$ mittels (b) und (c) insbesondere, dass eine nicht triviale, uniforme Bewertung w mit abelscher Wertegruppe und $\mathscr{T}_w = \mathscr{T}_v$ existiert.

□

[1] Da $\mathbb{R}_{>0}$ archimedisch angeordnet ist, besitzt sie nur die konvexen Untergruppen $\{1\}$ und $\mathbb{R}_{>0}$, vgl. Priess-Crampe [34, §I.3 Satz 1]; beachte zusätzlich, dass w nicht trivial ist.

[2] Erneut ist Γ/Δ nach Priess-Crampe [34, §I.3 Satz 1] dann archimedisch angeordnet und nach dem *Satz von Hölder*, Priess-Crampe [34, §I.3 Satz 4], zu einer Untergruppe von $\mathbb{R}$ o-isomorph; mittels des üblichen o-Isomorphismus $x \mapsto e^x$ von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist die Werteloop von Γ daher auch in $\mathbb{R}_{>0}$ ordnungstreu einbettbar.

Charakterisierung der Topologien uniformer Bewertungen

(4.11) Satz:

Es seien (K, T, v) ein uniform bewerteter Ternärkörper und v nicht trivial. Dann gelten:

(a) N_0 ist eine normale Unterloop von $(K, +)$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} N^\times &= N_0 + N^\times = N^\times + N_0 = N_0 - N^\times \\ &= N^\times - N_0 = N_0 \boxminus N^\times = N^\times \boxminus N_0 \ . \end{aligned}$$

(c) N ist eine normale Unterloop von $(K, +)$.

Beweis: *Zu (a):* Zunächst ist $0 \in N_0$ nach Definition klar; nach (1.2,b), (4.2,d) und (2.12,d) genügt es noch $N_0 - N_0 \subset N_0$ zeigen. Sind hierfür $x, y \in N_0$ gegeben, so gilt mit der starken Dreiecksungleichung (V3)

$$v(x - y) \ \leq \ \max\{v(x),\ v(y)\} \ .$$

Wegen $x, y \in N_0$ ist nach (4.3,c) daher $x - y \in N_0$. Da N_0 wegen (2.12,b) normal in $(K, +)$ ist, ist diese Menge somit bereits eine normale Unterloop von $(K, +)$.

Zu (b): Nach (4.2,d) und (2.12,e) sind die letzten fünf Gleichungen bereits klar; und wegen $0 \in N_0$ gilt direkt auch $N^\times \subset N^\times - N_0$. Für die andere Inklusion seien nun ein $x \in N^\times$ sowie ein $y \in N_0$ gegeben - nach (4.3,e) ist dann $v(y) < v(x)$ und es folgt mit dem Dominanzprinzip

$$v(x - y) \stackrel{(1.12,e)}{=} \max\{\ v(x),\ v(y)\ \} \ = \ v(x) \ .$$

Wegen $x \in N^\times$ und (4.3,d) ist daher $x - y \in N^\times$.

Zu (c): Wieder ist $0 \in N$ nach Definition klar; nach (1.2,b), (4.2,d) und (2.12,d) genügt es erneut $N - N \subset N$ nachzuweisen. Mit (a) und (b) ist hierfür nur noch $N^\times - N^\times \subset N$ zu zeigen; seien hierzu $x, y \in N^\times$ gegeben. Im Fall $x - y \in N_0$ ist dabei nichts mehr zu zeigen; es sei im Folgenden daher $x - y \notin N_0$, insbesondere also $x - y \neq 0$. Bezeichnet nun $z \in \{x, y\}$ ein Element mit $v(z) = \max\{v(x), v(y)\}$, so folgt $v(x - y) \leq v(z)$ mit (V3) und damit weiter

$$v\left({}^1\!/\!_z\right) \ = \ {}^1\!/\!_{v(z)} \ \leq \ {}^1\!/\!_{v(x-y)} \ = \ v\left({}^1\!/\!_{(x-y)}\right) \ .$$

Wäre in dieser Situation ${}^1\!/\!_{(x-y)} \in N_0$, so folgte aus (4.3,c), dass das Element ${}^1\!/\!_z \in \{{}^1\!/\!_x, {}^1\!/\!_y\}$ ebenfalls nilpotent wäre - im Widerspruch zu $x, y \in N^\times$. Somit sind in diesem Fall sowohl $x - y$ als auch ${}^1\!/\!_{(x-y)}$ nicht nilpotent, d.h. es ist $x - y \in N^\times$. Da N wegen (2.12,b) normal in $(K, +)$ ist, ist diese Menge somit bereits eine normale Unterloop von $(K, +)$.

$\square$

Wir haben nun alle Resultate, um die Topologien uniformer Bewertungen im Stile von Kowalski, Dürbaum [28] zu charakterisieren. Hierbei orientieren wir uns an dem modernisierten Beweis dieses Theorems aus Engler, Prestel [10, Thm. B.12] und konzentrieren uns auf den dortigen Bewertungsaspekt.

(4.12) Theorem: (vgl. Kowalski, Dürbaum [28], Engler, Prestel [10, Thm. B.12])

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret.

(a) Es gibt genau dann eine uniforme Rang-1-Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, wenn gelten:

  (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

  (ii) Es gibt eine normale Umgebung U von 0 mit $(K\backslash U)(K\backslash U) \subset K\backslash U$ und $1 \notin UU$. [1]

  (iii) R ist beschränkt.

  (iv) Es sind $N_0 \neq \{0\}$ und $N + N \subset N$.

(b) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop Γ keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzt, wenn gelten:

  (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

  (ii) Es gibt eine normale Umgebung U von 0 mit $UU \neq K$. [1]

  (iii) R ist beschränkt.

  (iv) Es ist $N_0 = \{0\}$.

In diesen Fällen sind für jede Umgebung V von 0 bereits die beiden Mengen $^1/_{(K\backslash V)}$ und $_{(K\backslash V)}\backslash^1$ jeweils beschränkt.[2]

Beweis: Der Zusatz folgt in beiden Fällen direkt aus (4.2,c).

Zu (a): $\Longrightarrow$: Es sei eine uniforme Rang-1-Bewertung v mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$ gegeben. Nach (4.2,c) ist $(K, T, \mathscr{T})$ dann vom Typ V und nach (4.2,d) ist R beschränkt. Weiter ist $(N, +)$ nach (4.11,c) eine Loop und somit insbesondere additiv abgeschlossen. Schließlich ist I_v nach (4.2,b) eine normale Umgebung von 0 mit $1 \notin I_v = I_v I_v$ und $(K\backslash I_v)(K\backslash I_v) = K\backslash I_v$.

$\Longleftarrow$: Es gelten nun die obigen Eigenschaften (i)-(iv). Wir zeigen, dass in dieser Situation die Menge N der nilpotenten und neutralen Elemente bereits einen nicht trivialen, uniformen Bewertungsring von (K, T) bildet, dessen zugehörige uniforme Bewertung v_N, vgl. (1.10,b), eine uniforme Rang-1-Bewertung ist und die Topologie $\mathscr{T}$ induziert:

[1] Da wir in der Situation von (b) die multiplikative Abgeschlossenheit der Menge N_0 trivialerweise gegeben haben, genügt hier eine schwächere Variante der Eigenschaft (ii) als bei (a). Weil sich die Beweisansätze ebenfalls unterscheiden, führen wir hier daher diese verschiedenen Formulierungen an - eine einheitliche Charakterisierung aller Topologien uniformer Bewertungen folgt aber anschließend als Korollar in (4.13).

[2] Insbesondere ist $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper vom Typ V im Sinne von Szambien [46, S.181].

- <u>N erfüllt (A1):</u> Wir weisen nach, dass N eine Unterloop von $(K,+)$ ist: Offenbar ist $0 \in N_0 \subset N$ nach Definition. Weiter gilt nach (iii) und (2.12,d) bereits $N + N = N - N = N \mathbin{=} N$, d.h. wegen (iv) ist N damit unter der Addition sowie den beiden einseitigen Differenzenbildungen jeweils abgeschlossen. Nach (1.2,b) ist N also bereits eine Unterloop von $(K,+)$.

- <u>N erfüllt (A2):</u> Wegen (i), (vi) und (ii) ist N nach (3.5,c) multiplikativ abgeschlossen.

- <u>N erfüllt (A3):</u> Wegen (iii) ist nach (2.12,a) insbesondere $R \subset N$.

- <u>N erfüllt (A4):</u> N ist nach (2.8,a) normal.

- <u>N erfüllt (A5):</u> Nach (2.8,g) gilt stets $1/(K \setminus N) \subset N_0 \subset N$.

- <u>N ist nicht trivial:</u> Wegen (i), (vi) und (ii) ist N nach (3.5,c) beschränkt, d.h. es gilt insbesondere $N \neq K$ nach (2.5,a).

Nach (4.1,a) induziert die zu N gehörige nicht triviale, uniforme Bewertung

$$v \;:=\; v_N : \;\; K \longrightarrow K^*/N \,\cup\, \big\{\{0\}\big\}\,, \qquad x \;\mapsto\; Nx\,,$$

somit eine Topologie $\mathscr{T}_v$ auf K, mit der $(K, T, \mathscr{T}_v)$ einen topologischen Ternärkörper bildet und welche weder diskret noch indiskret ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass diese gerade der Topologie $\mathscr{T}$ entspricht und dass v eine uniforme Rang-1-Bewertung ist.

- <u>$\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$:</u> Mit (i) und (3.4) ist lediglich $\mathscr{T}_v \subset \mathscr{T}$ nachzuweisen; und da sowohl die Homöomorphismengruppe von $(K, \mathscr{T})$ als auch die von $(K, \mathscr{T}_v)$ jeweils 2-transitiv auf K operiert, vgl. (1.7,b), genügt es für diese Inklusion zu zeigen, dass jede Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}_v$ ebenfalls eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ist. Sei hierfür eine Umgebung U von 0 bzgl. $\mathscr{T}_v$ gegeben.
  Da N wegen $N \subset A_v$ bzgl. $\mathscr{T}_v$ beschränkt ist,[1] existiert insbesondere[2] ein $x \in K^*$ mit $Nx \subset U$. Und weil N wegen (i), (vi) und (ii) nach (3.5,c) auch eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ist, ist mit Nx also auch U eine Umgebung[3] von 0 bzgl. $\mathscr{T}$.

- <u>v ist uniforme Rang-1-Bewertung:</u> Da die Topologien $\mathscr{T}$ und $\mathscr{T}_v$ übereinstimmen, ist N natürlich auch die Menge der nilpotenten und neutralen Elemente von $(K, T, \mathscr{T}_v)$. Und weil wir oben bereits $N \subset A_v$ gesehen haben, folgt aus (4.8) direkt, dass v eine uniforme Rang-1-Bewertung ist.

Zu (b): <u>$\Longrightarrow$:</u> Es sei eine solche nicht triviale, uniforme Bewertung v mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$ gegeben. Nach (4.2,c) ist $(K, T, \mathscr{T})$ dann vom Typ V und nach (4.2,d) ist R beschränkt. Weiter ist nach (4.6,b) insbesondere $N_0 = \{0\}$. Schließlich ist I_v nach (4.2,b) eine normale Umgebung von 0 mit $I_v I_v = I_v \neq K$.

[1] Beachte (4.2,a) und $v(N) = NN = N$ nach Konstruktion und (A2).

[2] Denn $\mathscr{T}_v$ ist nicht diskret, da v nicht trivial ist.

[3] Denn die Rechtsmultiplikation mit x ist offen mit $0 \cdot x = 0$, vgl. (1.7,b).

$\underline{\Longleftarrow :}$ Es gelten nun die obigen Eigenschaften (i)-(iv). Im Folgenden konstruieren wir einen nicht trivialen, uniformen Bewertungsring A von (K,T), dessen zugehörige uniforme Bewertung v_A, vgl. (1.10,b), die geforderte Gestalt hat und die Topologie $\mathscr{T}$ induziert; hierzu gehen wir schrittweise vor:

- Nach (i), (ii), (3.3,c) und (2.9,a) gibt es eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung V von 0; nach Konstruktion in (2.9,a) gilt hierbei $1 \in V$. OBdA[1] gelte sogar $\pm R \subset V$.

- Nach (i) und (3.3,a) ist die Menge ${}^1\!/\!_{(K\setminus V)}$ beschränkt und es gibt insbesondere[2] ein $d \in K^*$ mit $({}^1\!/\!_{(K\setminus V)})d \subset V$, d.h. mit ${}^1\!/\!_{(K\setminus V)} \subset {}^V\!/\!_d = V \cdot {}^1\!/\!_d$, vgl. (1.4,a). Setze nun
$$W \quad := \quad V \,\cup\, \big(V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle\big) \quad \subset \quad K \,.$$
Diese Menge W erfüllt - neben den Eigenschaften der Umgebung V von 0 - nun auch das Axiom (A5), denn es gelten:
  - $\underline{W \text{ ist eine Umgebung von 0 mit } \pm R \subset W:}$ Wegen $\pm R \subset V \subset W$ klar.
  - $\underline{W \text{ ist normal:}}$ Gilt offenbar nach (1.4,b).
  - $\underline{W \text{ ist multiplikativ abgeschlossen:}}$ Es gelten jeweils
$$VV \;\subset\; V\,, \qquad \big(V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle\big)V \;=\; V\big(V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle\big) \;=\; (VV)\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle \;\subset\; V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle$$
$$\text{sowie} \qquad \big(V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle\big)\big(V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle\big) \;=\; (VV)\big(\langle {}^1\!/\!_d\rangle\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle\big) \;\subset\; V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle \;.$$
    Somit ist in der Tat $WW \subset W$.
  - $\underline{W \text{ ist beschränkt:}}$ Nach (iv) ist insbesondere das Element $d \in K^*$ nicht nilpotent und die Nilpotenzmenge $\langle {}^1\!/\!_d\rangle$ daher beschränkt. Nach (2.5,f,c) ist damit auch $W = V \cup (V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle)$ beschränkt.
  - $\underline{{}^1\!/\!_{(K\setminus W)} \subset W:}$ Wegen $V \subset W$ gilt $K\setminus W \subset K\setminus V$ und damit
$${}^1\!/\!_{(K\setminus W)} \;\subset\; {}^1\!/\!_{(K\setminus V)} \;\subset\; V \cdot {}^1\!/\!_d \;\subset\; V\,\langle {}^1\!/\!_d\rangle \;\subset\; W \;.$$

- Wir setzen nun iterativ
$$W_0 \;:=\; W \qquad \text{und} \qquad W_{i+1} \;:=\; W_i + W_i \qquad \text{für} \quad i \in \mathbb{N}_0$$
und definieren die Menge $A \subset K$ durch
$$A \;:=\; \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} W_i \;\subset\; K \;.$$
Diese ist schließlich unser gesuchter uniformer Bewertungsring, denn es gelten nun:

[1] Gehe ansonsten zur normalen, multiplikativ abgeschlossenen, beschränkten Umgebung $(\pm R)V$ von 0 über: Wegen $V \subset (\pm R)V$ ist dies eine Umgebung von 0, es gilt $\pm R \subset (\pm R)V$ wegen $1 \in V$, nach (1.7,c) und (1.4,b,c) ist sie normal und multiplikativ abgeschlossen sowie nach (iii), (1.6,c), (2.5,d,c,f) beschränkt.

[2] da $\mathscr{T}$ nicht diskret ist

- <u>A erfüllt (A2):</u> Wir beginnen mit dem Nachweis der multiplikativen Abgeschlossenheit und zeigen zunächst mittels vollständiger Induktion, dass $RW_i \subset W_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
  Für $i = 0$ gilt nach nach Konstruktion $RW_0 = RW \subset WW \subset W = W_0$; und ist ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $RW_i \subset W_i$ gegeben, so gilt
  $$RW_{i+1} \;=\; R(W_i + W_i) \overset{(1.6,e)}{\subset} RW_i + RW_i \;\subset\; W_i + W_i \;=\; W_{i+1} \,.$$
  Mit Hilfe dieser Aussage beweisen wir nun (erneut mit einer vollständigen Induktion), dass $W_iW_i \subset W_{2i}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
  Für $i = 0$ gilt bereits $W_0W_0 = WW \subset W = W_0$; und ist ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $W_iW_i \subset W_{2i}$ gegeben, so folgt wegen $RW_i \subset W_i$ ebenfalls
  $$\begin{aligned} W_{i+1}W_{i+1} &= W_{i+1}(W_i + W_i) \\ &\overset{(1.6,e)}{\subset} W_{i+1}W_i \;+\; W_{i+1}W_i \\ &= (W_i + W_i)W_i \;+\; (W_i + W_i)W_i \\ &\overset{(1.6,f)}{\subset} \big(W_iW_i + W_iW_i\big) \;+\; \big(W_iW_i + W_iW_i\big) \\ &\subset \big(W_{2i} + W_{2i}\big) \;+\; \big(W_{2i} + W_{2i}\big) \\ &= W_{2i+1} + W_{2i+1} \;=\; W_{2i+2} \;=\; W_{2(i+1)} \,. \end{aligned}$$
  Schließlich gilt mit $0 \in W = W_0$ nach Konstruktion offenbar auch $0 \in W_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$, woraus schließlich $W_i \subset W_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $i \leq j$ folgt.
  Sind daher nun $x, y \in A$ gegeben, so gibt es $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in W_i$ und $y \in W_j$; also gilt $x, y \in W_k$ für $k := \max\{i, j\}$. Mit der obigen Aussage folgt hieraus dann $xy \in W_kW_k \subset W_{2k} \subset A$, d.h. insgesamt ist A multiplikativ abgeschlossen.
- <u>A erfüllt (A3):</u> Es gilt sogar $\pm R \subset W = W_0 \subset A$.
- <u>A erfüllt (A1):</u> Wir weisen nach, dass A eine Unterloop von $(K, +)$ ist: Es ist $0 \in W = W_0 \subset A$ nach Konstruktion; wir weisen nun zunächst die additive Abgeschlossenheit von A nach. Sind hierfür $x, y \in A$ gegeben, so gibt es nach dem Beweis von (A2) ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $x, y \in W_k$. Hiermit gilt dann direkt
  $$x + y \;\in\; W_k + W_k \;=\; W_{k+1} \;\subset\; A \,,$$
  d.h. es ist $A + A \subset A$. Hieraus folgt wegen $RA \subset AA \subset A$ und $-1 \in -R \subset A$ dann ebenso
  $$\begin{aligned} A \boxminus A &\overset{(1.6,b)}{=} A - A \overset{(1.6,d)}{=} A + (-A) \overset{(1.6,c)}{=} A + (-1)A \\ &\subset \; A + AA \;\subset\; A + A \;\subset\; A \end{aligned}$$
  und mit (1.2,b) ist A bereits eine Unterloop von $(K, +)$.
- <u>A erfüllt (A4):</u> Im Beweis von (A2) hatten wir bereits gesehen, dass $RW_i \subset W_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt. Hieraus folgt iterativ, dass mit $W_0 = W$ auch alle Mengen W_i für $i \in \mathbb{N}$ wieder normal sind, vgl. (1.6,g). Somit ist auch A als Vereinigung dieser wieder normal, vgl. (1.4,b).

- $\underline{A \text{ erfüllt (A5):}}$ Wegen $W = W_0 \subset A$ gilt $K\backslash A \subset K\backslash W$ und damit

$$^1/_{(K\backslash A)} \quad \subset \quad ^1/_{(K\backslash W)} \quad \subset \quad W \quad = \quad W_0 \quad \subset \quad A \; .$$

- $\underline{A \text{ ist nicht trivial:}}$ Zunächst existiert eine Umgebung[1] W' von 0 mit $W' + W' \subset W$; und weil W beschränkt ist, existiert insbesondere[2] ein $c \in K^*$ mit $Wc \subset W'$. Da $RW \subset WW \subset W$ gilt, ist daher

$$(W+W)c \overset{(1.6,\text{f})}{=} Wc + Wc \quad \subset \quad W' + W' \quad \subset \quad W \; .$$

Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ sei im Folgenden die Klammerung des Produktes c^i iterativ gewählt durch $c^0 := 1$ und $c^i := c^{i-1}c$ für $i \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun mittels vollständiger Induktion, dass stets $W_i c^i \subset W$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:
Für $i = 0$ ist $W_0 c^0 = W \cdot 1 = W$ klar; und ist ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $W_i c^i \subset W$ gegeben, so folgt mit der Normalität von W_{i+1} (siehe Nachweis von (A3)) und wegen $RW_i \subset W_i$ sofort

$$\begin{aligned} W_{i+1}c^{i+1} \quad &= \quad W_{i+1}(c^i c) \quad = \quad (W_{i+1}c^i)c \quad = \quad \big((W_i + W_i)c^i\big)c \\ &\overset{(1.6,\text{f})}{=} \big(W_i c^i + W_i c^i\big)c \quad \subset \quad (W+W)c \quad \subset \quad W \; . \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$W_i \quad \subset \quad {}^W/_{c^i} \overset{(1.4,\text{a})}{=} W \cdot {}^1/_{c^i} \overset{(2.1,\text{e})}{\subset} W \cdot {}^1/_{\langle c \rangle} \overset{(2.3,\text{a})}{=} W \left\langle {}^1/_c \right\rangle$$

und A erfüllt als Vereinigung aller dieser Mengen ebenfalls $A \subset W \langle {}^1/_c \rangle$.
Da erneut nach (iv) insbesondere das Element $c \in K^*$ nicht nilpotent ist, ist die Nilpotenzmenge $\langle {}^1/_c \rangle$ beschränkt - und mit (2.5,f) daher auch $W \langle {}^1/_c \rangle$. Mit (2.5,b) ist also auch A beschränkt, d.h. es gilt insbesondere $A \neq K$ nach (2.5,a).

Nach (4.1,a) induziert die zu A gehörige nicht triviale, uniforme Bewertung

$$v \quad := \quad v_A : \quad K \longrightarrow K^*/A \cup \big\{\{0\}\big\} \; , \qquad x \quad \mapsto \quad Ax \; ,$$

somit eine Topologie $\mathscr{T}_v$ auf K, mit der $(K, T, \mathscr{T}_v)$ einen topologischen Ternärkörper bildet und welche weder diskret noch indiskret ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass diese gerade der Topologie $\mathscr{T}$ entspricht und dass die Werteloop K^*/A von v keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq K^*/A$ besitzt.

- $\underline{\mathscr{T}_v = \mathscr{T}:}$ Mit (i) und (3.4) ist lediglich $\mathscr{T}_v \subset \mathscr{T}$ nachzuweisen; und da sowohl die Homöomorphismengruppe von $(K, \mathscr{T})$ als auch die von $(K, \mathscr{T}_v)$ jeweils 2-transitiv auf K operiert, vgl. (1.7,b), genügt es für diese Inklusion zu zeigen, dass jede Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}_v$ ebenfalls eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ist. Sei hierfür eine Umgebung U von 0 bzgl. $\mathscr{T}_v$ gegeben.

[1] Denn die Ternärkörper-Addition ist stetig mit $0 + 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

[2] da $\mathscr{T}$ nicht diskret ist

Da A wegen $A \subset A_v$ bzgl. $\mathscr{T}_v$ beschränkt ist,[1] existiert insbesondere[2] ein $x \in K^*$ mit $Ax \subset U$. Und weil A wegen $W = W_0 \subset A$ auch eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ist, ist mit Ax also auch U eine Umgebung[3] von 0 bzgl. $\mathscr{T}$.

- Die Werteloop K^*/A besitzt die geforderte Eigenschaft: Da die Topologien $\mathscr{T}$ und $\mathscr{T}_v$ übereinstimmen, ist $N_0 = \{0\}$ natürlich auch die Menge der nilpotenten Elemente von $(K, T, \mathscr{T}_v)$. Mit (4.6,b) kann die Werteloop K^*/A von v daher keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq K^*/A$ besitzen.

□

Wie bereits angekündigt können wir die beiden Fälle aus (4.12) zusammenfassen zu:

(4.13) Korollar: (vgl. Kowalski, Dürbaum [28], Engler, Prestel [10, Thm. B.12])

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret. Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, wenn gelten:

(i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

(ii) Es gibt eine normale Umgebung U von 0 mit $(K\backslash U)(K\backslash U) \subset K\backslash U$ und $1 \notin UU$.

(iii) R ist beschränkt.

(iv) Es ist $N + N \subset N$.

In diesem Fall sind für jede Umgebung V von 0 bereits die beiden Mengen ${}^1/_{(K\backslash V)}$ und ${}_{(K\backslash V)}\backslash^1$ jeweils beschränkt.[4]

Beweis: $\Longrightarrow$: Es sei eine nicht triviale, uniforme Bewertung v mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$ gegeben. Nach (4.2,c) ist $(K, T, \mathscr{T})$ vom Typ V und mit (4.2,d) ist R beschränkt; weiter ist $(N, +)$ nach (4.11,c) eine Loop und daher insbesondere additiv abgeschlossen. Schließlich ist I_v nach (4.2,b) eine normale Umgebung von 0 mit $1 \notin I_v = I_v I_v$ und $(K\backslash I_v)(K\backslash I_v) = K\backslash I_v$.

$\Longleftarrow$: Es gelten nun die obigen Eigenschaften (i)-(iv). Ist $N_0 \neq \{0\}$, so folgt die Behauptung bereits aus (4.12,a). Ist dagegen $N_0 = \{0\}$, so erfüllt die normale Umgebung U von 0 aus (ii) wegen $1 \notin UU$ insbesondere auch $UU \neq K$ und die Behauptung folgt direkt aus (4.12,b).

□

[1] Beachte (4.2,a) und $v(A) = AA = A$ nach Konstruktion und (A2).

[2] Denn $\mathscr{T}_v$ ist nicht diskret, da v nicht trivial ist.

[3] Denn die Rechtsmultiplikation mit x ist offen mit $0 \cdot x = 0$, vgl. (1.7,b).

[4] Insbesondere ist $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper vom Typ V im Sinne von Szambien [46, S.181].

Schließlich können wir aus (4.12) noch explizit die Charakterisierung aller Topologien uniformer Bewertungen, deren Werteloop eine abelsche Gruppe ist, gewinnen: Da in diesem Fall sogar das erweiterte Radikal beschränkt und die Menge N_0 der neutralen Elemente damit bereits multiplikativ abgeschlossen ist, entfällt für diese Topologien die Unterscheidung der Eigenschaft (ii) aus (4.12). Genauer erhalten wir:

(4.14) Korollar: (vgl. Kowalski, Dürbaum [28], Engler, Prestel [10, Thm. B.12])

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret.

(a) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ ist, wenn gelten:
   - (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.
   - (ii) R_a ist beschränkt.
   - (iii) Es sind $N_0 \neq \{0\}$ und $N + N \subset N$.

(b) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop eine abelsche Gruppe G ist und keine maximale, konvexe Untergruppe H mit $H \neq G$ besitzt, wenn gelten:
   - (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.
   - (ii) R_a ist beschränkt.
   - (iii) Es ist $N_0 = \{0\}$.

(c) Es gibt genau dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop eine abelsche Gruppe ist, wenn gelten:
   - (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.
   - (ii) R_a ist beschränkt.
   - (iii) Es ist $N + N \subset N$.

Beweis: *Zu (a):* $\Longrightarrow$: Ist eine solche uniforme Bewertung v gegeben, so ist v insbesondere eine uniforme Rang-1-Bewertung[1] und die Behauptung folgt direkt aus (4.12,a) sowie (4.2,e).

$\Longleftarrow$: Gelten die Eigenschaften (i)-(iii), so ist nach (ii) und (2.5,b) auch insbesondere R beschränkt; und wegen (ii) und (iii) ist N_0 nach (i) und (3.6,c) eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0. Somit existiert mit (3.5,b) eine normale Umgebung U von 0 mit $(K \backslash U)(K \backslash U) \subset K \backslash U$ sowie $1 \notin UU$ und insgesamt gibt es nach (4.12,a) dann eine uniforme Rang-1-Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$. Da ihre Werteloop Γ die maximale, normale, konvexe Unterloop $\{1\}$ mit $\{1\} \neq \Gamma$ besitzt, folgt die Behauptung schließlich mit (4.10,b).

[1] vgl. hierzu Fußnote 1 auf Seite 63

Zu (b): $\Longrightarrow:$ Ist eine solche uniforme Bewertung v gegeben, so folgt die Behauptung direkt aus (4.12,b) sowie (4.2,e).

$\Longleftarrow:$ Gelten die Eigenschaften (i)-(iii), so ist nach (ii) und (2.5,b) auch insbesondere R beschränkt; und nach (i), (3.6,b) und (3.3,c) existiert eine normale Umgebung U von 0 mit $UU \neq K$. Insgesamt gibt es nach (4.12,b) dann eine nicht triviale, uniforme Bewertung v auf (K, T) mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop Γ keine maximale, normale, konvexe Unterloop Δ mit $\Delta \neq \Gamma$ besitzt. Die Behauptung folgt schließlich mit (4.10,c).

Zu (c): $\Longrightarrow:$ Ist eine solche uniforme Bewertung v gegeben, so ist $(K, T, \mathscr{T})$ nach (4.2,c) vom Typ V und mit (4.2,e) ist R_a beschränkt. Weiter ist $(N, +)$ nach (4.11,c) eine Loop und daher insbesondere additiv abgeschlossen.

$\Longleftarrow:$ Die Behauptung folgt direkt mittels einer Fallunterscheidung nach der Existenz eines nilpotenten Elementes $\neq 0$ aus (a) und (b).

□

Abschließend werden wir die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse mit der klassischen Charakterisierung von Kowalski, Dürbaum [28] vergleichen; seien hierzu im Folgenden $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ ein topologischer Körper und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret. Insbesondere ist dann $R = \{1\}$, vgl. Kalhoff [17, S.107], und das erweiterte Radikal R_a entspricht nach Definition gerade der Kommutatorgruppe des Körpers K.

- Nach (4.14,b) gibt es genau dann eine uniforme Bewertung v auf K mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop eine abelsche Gruppe G ist und keine maximale, konvexe Untergruppe H mit $H \neq G$ besitzt, wenn $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ vom Typ V, die Kommutatorgruppe von K beschränkt und $N_0 = \{0\}$ sind. Dies entspricht gerade dem Ergebnis von Kowalski, Dürbaum [28, Satz 14, Satz 15].
- Ebenso gibt es nach (4.14,a) genau dann eine uniforme Bewertung v auf K mit $\mathscr{T}_v = \mathscr{T}$, deren Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ ist, wenn $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ vom Typ V, die Kommutatorgruppe von K beschränkt sowie $N_0 \neq \{0\}$ und $N + N \subset N$ sind. Wieder findet sich dieses Ergebnis bei Kowalski, Dürbaum [28, Satz 14, Satz 19] - mit Fokus auf den dortigen Bewertungsaspekt.[1]

Unsere Charakterisierung der Topologien uniformer Bewertungen (4.14) - und damit natürlich auch die aus (4.12) - kann daher in der Tat als eine Übertragung der Ergebnisse der Arbeit von Kowalski, Dürbaum [28] auf den Bereich der uniform bewerteten Ternärkörper verstanden werden.

[1] Unsere Forderung $N+N \subset N$ sichert uns dabei, dass die uniforme Bewertung wirklich die starke Dreiecksungleichung erfüllt und es sich bei dieser um eine Bewertung in unserem Sinne und nicht um einen *Absolutwert* handelt. Auf diesen Aspekt werden wir im nächsten Kapitel eingehen.

Kapitel 5

Uniforme Absolutwerte

Das Ergebnis aus (4.14,c) ist in der Hinsicht zufriedenstellend, dass es die Topologien uniformer Bewertungen mit abelscher Wertegruppe vollständig charakterisiert - es ergibt sich im Vergleich zum Ergebnis aus Engler, Prestel [10, Thm. B.12] aber schnell die Frage, welche Gestalt topologische Ternärkörper vom Typ V mit beschränktem, erweiterten Radikal besitzen, wenn die Menge der nilpotenten und neutralen Elemente additiv **nicht** abgeschlossen ist. Dass dieser Fall eintreten kann, ist bereits für kommutative Körper bekannt; dort sind diese Topologien gerade von einem *Absolutwert*[1] des kommutativen Körpers induziert worden.

In diesem Kapitel werden wir daher den Versuch unternehmen, dieses Konzept (ähnlich zu dem uniformen Bewertungsbegriff von Kalhoff) als *uniforme Absolutwerte* auf Ternärkörper zu übertragen. Hierbei werden wir erfolgreich die oben genannten Topologien als die Topologien uniformer Absolutwerte charakterisieren und das Ergebnis aus (4.14,c) somit vervollständigen; die Charakterisierung aller topologischen Ternärkörper vom Typ V mit beschränktem erweiterten Radikal wird daher abgeschlossen.

Da neben $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ allerdings keine vollständigen Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert, welcher nicht bereits die starke Dreiecksungleichung erfüllt, bekannt sind und Konstruktionsversuche dieser stets zu scheitern scheinen, werden wir im Anschluss die Existenz dieser Strukturen diskutieren und einige Nicht-Existenz-Kriterien für Ternärkörper mit solchen uniformen Absolutwerten, welche nicht bereits Alternativkörper sind, behandeln.

Uniforme Absolutwerte

In Analogie zu der Definition uniformer Bewertungen als Verallgemeinerung des Bewertungsbegriffes für Körper von Kalhoff [18, S.338] möchten wir an dieser Stelle *uniforme Absolutwerte* als Verallgemeinerung des Absolutwertbegriffes für Körper einführen. Hierbei beschränken wir uns in dieser Arbeit auf uniforme Absolutwerte mit einer Bildmenge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

[1] Für eine Einführung in dieses Thema verweisen wir auf Warner [51, §III].

(5.1) Definition:

Es sei (K,T) ein Ternärkörper. Ein *uniformer Absolutwert auf* (K,T) ist eine Abbildung $\|.\| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche für alle $x, y \in K$ die folgenden Axiome erfüllt:

(V1) $\|x\| \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x \;=\; 0\ .$

(V2) $\|xy\| \;=\; \|x\|\,\|y\|\ .$

(V3') $\|x-y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\|\ .$

(V4) $\|r\| \;=\; 1$ für alle $r \in R(K,T)\ .$

Wir nennen $(K,T,\|.\|)$ dann auch einen *Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert.* Der uniforme Absolutwert $\|.\|$ heißt *ultrametrisch* oder *nicht archimedisch*, wenn für alle $x, y \in K$ sogar die starke Dreiecksungleichung

(V3) $\|x-y\| \;\leq\; \max\big\{\, \|x\|\,,\|y\|\,\big\}$

erfüllt ist. Dagegen heißt $\|.\|$ *archimedisch*, wenn $\|.\|$ nicht ultrametrisch ist. Weiter heißt $\|.\|$ *trivial*, wenn $\|K\| = \{0,1\}$ gilt - andernfalls *nicht trivial*.

Somit ist ein uniformer Absolutwert $\|.\|$ genau dann ultrametrisch bzw. nicht archimedisch, wenn die Nachbeschränkung $\|.\| : K \longrightarrow \mathrm{Bild}(\|.\|)$ eine uniforme Bewertung ist, deren Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ ist. Da wir die Topologien nicht trivialer, ultrametrischer, uniformer Absolutwerte somit bereits in (4.14,a) charakterisiert haben und auch einige Beispiele dieser kennen,[1] werden wir bei der kommenden Untersuchung der Topologie sowie den anschließenden Existenzfragen zumeist archimedische, uniforme Absolutwerte betrachten.

Ist $(K,T,\|.\|)$ ein Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert, so lassen sich - wie bei uniformen Bewertungen, vgl. etwa Kalhoff [18, Prop. 1.2, Prop. 1.3], - die bekannten Rechenregeln für das Radikal R aus (1.11) durch die Multiplikativität von $\|.\|$ und der Eigenschaft $\|R\| = \{1\}$ direkt auf den uniformen Absolutwert $\|.\|$ übertragen. Somit gelten:

(5.2) Korollar:

Es seien (K,T) ein Ternärkörper und $\|.\| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung, welche die Axiome (V2) und (V4) eines uniformen Absolutwertes auf (K,T) erfüllt.[2] Dann gelten für alle $c,d,m,n,u,x,y,z \in K$ mit $T(m,u,c) = T(n,u,d)$:

(a) $\big\|T(m,x,c) - T(m,x,d)\big\| \;=\; \|c-d\|$

(b) $\big\|T(m,x,c) - T(n,x,d)\big\| \;=\; \|m-n\|\,\|x-u\|$

[1] Wähle etwa einen beliebigen Cartesischen Körper $(K,+,\cdot)$ und betrachte den uniform bewerteten Cartesischen Körper $\big(K((\mathbb{R}_{>0})),+,\cdot,\delta\big)$ der formalen Potenzreihen auf $\mathbb{R}_{>0}$ über K, vgl. (1.13,c).

[2] Die Ergebnisse dieses Satzes gelten somit insbesondere für uniforme Absolutwerte $\|.\|$ auf (K,T) - da wir diese Rechenregeln aber auch bei dem Nachweis der Dreiecksungleichung im Beweis von (5.7) anwenden möchten, formulieren wir den Satz in dieser Gestalt.

(c) $\big\|T(m,x,c) - T(m,y,c)\big\| \;=\; \|m\|\,\|x-y\|$

(d) $\big\|T(m,x,c) - T(n,x,c)\big\| \;=\; \|m-n\|\,\|x\|$

(e) $\|x-y\| \;=\; \|(x+z)-(y+z)\|$

(f) $\|x-y\| \;=\; \|(z+x)-(z+y)\|$

(g) $\|x-y\| \;=\; \|-(y-x)\|$

(h) $\|x-y\| \;=\; \|(-y)+x\|$

(i) $\|x+y\| \;=\; \|x-(-y)\|$

(j) $\|x(-y)\| \;=\; \|(-x)y\| \;=\; \|-(xy)\|$

(k) $\|xy-xz\| \;=\; \|x\|\,\|y-z\|$

(l) $\|xz-yz\| \;=\; \|x-y\|\,\|z\|$

Beweis: Sind Elemente $a,b \in K$ mit $Ra = Rb$ gegeben, so gibt es ein $r \in R$ mit $a = rb$ und aus (V2) und (V4) folgt direkt $\|a\| = \|rb\| = \|r\|\,\|b\| = \|b\|$. Alle Behauptungen folgen somit bereits aus (1.11) mit $M = R$ und eventueller Anwendung von (V2).

□

(5.3) Satz:

Es seien (K,T) ein Ternärkörper und $\|.\| : K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Abbildung, welche die Axiome (V1), (V2) und (V4) eines uniformen Absolutwertes auf (K,T) erfüllt.[1] Dann gelten für alle $x,y \in K$:

(a) $\|{}^{x}/_{y}\| \;=\; \|{}_{y}\backslash^{x}\| \;=\; \frac{\|x\|}{\|y\|}$ falls $y \neq 0$

(b) $\|r\| \;=\; 1$ für alle $r \in \pm R_a$

(c) $\|x\| \;=\; \|-x\| \;=\; \|\boxminus x\|$

(d) $\|x \boxminus y\| \;=\; \|x-y\|$

(e) $\|x-y\| \;=\; \|y-x\|$

(f) $\|.\|$ ist genau dann ein uniformer Absolutwert, wenn für alle $x',y' \in K$ gilt:

$$\|x'+y'\| \;\leq\; \|x'\| + \|y'\|$$

Ist $\|.\|$ ein uniformer Absolutwert auf (K,T), so gilt für alle $x,y \in K$ zusätzlich:

(g) $\|x \pm y\| \;\geq\; \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big|$

[1] vgl. hierzu Fußnote 2 auf Seite 74

Beweis: *Zu (a):* Zunächst ist nach (V1) dieser Bruch stets definiert. Ist $x = 0$, so ist die Behauptung mit (V1) klar; es sei im Folgenden daher $x \neq 0$. Da $\|.\|\,|_{K^*}$ nach (V1) und (V2) ein Loop-Homomorphismus von $(K^*, \cdot)$ nach $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ und dies sogar eine abelsche Gruppe ist, folgt in diesem Fall ebenfalls sofort die Behauptung.

Zu (b): Zunächst folgt $\|R_a\| = \{1\}$ bereits aus (4.2,e).[1] Weiter folgt für alle $r \in R_a$ wegen $(-r)(-r) \in (-R_a)(-R_a) = R_a$ hieraus auch $\|-r\|^2 = \|(-r)(-r)\| = 1$. Da $\|-r\| \in \mathbb{R}_{>0}$ ist, muss also ebenfalls $\|-r\| = 1$ gelten.

Zu (d): Für alle $x, y \in K$ gilt

$$\|x \boxminus y\| \;=\; \|(x \boxminus y) - 0\| \;\overset{(5.2,\mathrm{f})}{=}\; \big\|\big(y + (x \boxminus y)\big) - (y + 0)\big\| \;=\; \|x - y\| \;.$$

Zu (e): Für alle $x, y \in K$ gilt

$$\|x - y\| \;\overset{(5.2,\mathrm{g})}{=}\; \|-(y - x)\| \;\overset{(5.2,\mathrm{j})}{=}\; \|(-1)(y - x)\| \;=\; \|-1\|\,\|y - x\| \;\overset{(\mathrm{b})}{=}\; \|y - x\| \;.$$

Zu (c): Die Behauptung folgt direkt aus (d) bzw. (e) jeweils mit $x = 0$.

Zu (f): Ist $\|.\|$ ein uniformer Absolutwert, so gilt für alle $x, y \in K$ direkt

$$\|x + y\| \;\overset{(5.2,\mathrm{i})}{=}\; \|x - (-y)\| \;\leq\; \|x\| + \|-y\| \;\overset{(\mathrm{c})}{=}\; \|x\| + \|y\| \;.$$

Erfüllt $\|.\|$ dagegen die Dreiecksungleichung für Summen, so gilt für alle $x, y \in K$ ebenso

$$\|x - y\| \;\overset{(5.2,\mathrm{h})}{=}\; \|(-y) + x\| \;\leq\; \|-y\| + \|x\| \;\overset{(\mathrm{c})}{=}\; \|x\| + \|y\| \;.$$

Zu (g): Es seien $x, y \in K$ gegeben. Dann gelten jeweils

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|(x + y) - y\| \leq \|x + y\| + \|y\| \;, \\
\|x\| &= \|(x - y) + y\| \overset{(\mathrm{f})}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \;, \\
\|y\| &= \|(x + y) \boxminus x\| \overset{(\mathrm{d})}{=} \|(x + y) - x\| \leq \|x + y\| + \|x\| \\
\text{sowie} \quad \|y\| &= \|(y - x) + x\| \overset{(\mathrm{f})}{\leq} \|y - x\| + \|x\| \overset{(\mathrm{d})}{=} \|x - y\| + \|x\| \;.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\|x \pm y\| \;\geq\; \|x\| - \|y\|,\; \|y\| - \|x\| \;, \qquad \text{d.h.} \qquad \|x \pm y\| \;\geq\; \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \;.$$

$\square$

[1] Beachte, dass für die erste Aussage dort nur die Axiome (V1), (V2) und (V4) der Abbildung v und keine topologischen Voraussetzungen benötigt worden sind.

Uniforme Absolutwerte & Topologie

Mit den obigen Rechenregeln haben wir nun alle nötigen Mittel, um die Topologien uniformer Absolutwerte einzuführen und zu betrachten: Hierbei werden wir analog zum Vorgehen bei den uniformen Bewertungen von Kalhoff [22, Prop. 1.7(3)], [20, §2] mittels des uniformen Absolutwertes eine (reellwertige) Metrik auf K definieren, deren zugehörigen Kugeln in gewohnter Weise die Umgebungsbasis einer Topologie bilden, mit der (K, T) zu einem topologischen Ternärkörper wird.

(5.4) Definition und Satz: (vgl. Kalhoff [22, Prop. 1.7(3)])

Es sei $(K, T, \|.\|)$ ein Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert. Mittels

$$d_{\|.\|} \quad : \quad K \times K \;\longrightarrow\; \mathbb{R}_{\geq 0} \;, \qquad (x, y) \;\mapsto\; \|x - y\| \;=\; \|x \boxminus y\| \;,$$

wird eine (reellwertige) Metrik auf K definiert. Hierbei ist der metrische Raum $(K, d_{\|.\|})$ genau dann ultrametrisch, wenn $\|.\|$ es ist. Weiter nennen wir $(K, T, \|.\|)$ *vollständig*, wenn der metrische Raum $(K, d_{\|.\|})$ vollständig ist.

Beweis: Nach (5.3,d) stimmen die Werte der beiden einseitigen Differenzenbildungen unter dem uniformen Absolutwert überein. Für alle $x, y, z \in K$ gelten jeweils

- $d_{\|.\|}(x, y) \;=\; 0 \quad\iff\quad \|x - y\| \;=\; 0 \quad\iff\quad x - y \;=\; 0 \quad\iff\quad x = y \;,$
- $d_{\|.\|}(x, y) \;=\; \|x - y\| \overset{(5.3,e)}{=} \|y - x\| \;=\; d_{\|.\|}(y, x) \;,$
- $d_{\|.\|}(x, y) \;=\; \|x - y\| \overset{(5.2,e)}{=} \|(x - z) - (y - z)\| \;\leq\; \|x - z\| + \|y - z\|$
  $\;=\; d_{\|.\|}(x, z) \;+\; d_{\|.\|}(z, y) \;.$

Somit ist $d_{\|.\|}$ in der Tat eine Metrik auf K und $(K, d_{\|.\|})$ somit ein metrischer Raum. Hierbei erfüllt $d_{\|.\|}$ offenbar genau dann die ultrametrische Dreiecksungleichung, wenn $\|.\|$ sie erfüllt. $\square$

(5.5) Satz: (vgl. Kalhoff [20, §2])

Es sei $(K, T, \|.\|)$ ein Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert. Definieren wir für jedes $x \in K$ die *Kugeln*

$$B(x, \varepsilon) \;:=\; \left\{\, y \in K \;\middle|\; d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\| < \varepsilon \,\right\} \qquad \text{um } x \text{ mit Radius } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \;,$$

so bilden die Kugeln $\big(B(x, \varepsilon)\big)_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}}$ die Umgebungsbasis von x einer nicht indiskreten Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ auf K, mit der $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ einen topologischen Ternärkörper bildet. Hierbei ist die Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ genau dann diskret, wenn $\|.\|$ trivial ist.

Beweis: Da $d_{\|.\|}$ nach (5.4) eine Metrik ist, induzieren ihre Kugeln in obiger Weise eine Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ auf K, vgl. hierzu etwa KAPLANSKY [25, §4.2, App. 3]. Da die Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ von einer Metrik erzeugt wird, ist sie offenbar nicht indiskret; weiter ist sie nach Konstruktion genau dann diskret, wenn es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(0,\varepsilon) = \{0\}$, d.h. mit $\|x\| \geq \varepsilon$ für alle $x \in K^*$, gibt. Da $\|K^*\|$ eine archimedisch angeordnete Gruppe ist, ist dies nur genau dann der Fall, wenn $\|K^*\| = \{1\}$ gilt.
Es ist nun noch nachzuweisen, dass die ternäre Verknüpfung T sowie die Abbildungen aus (T2)-(T4) jeweils stetig (bzgl. der jeweiligen Produkt- bzw. der entsprechenden Spur-Topologie) sind.

Zu T: $\quad T: \; K^3 \longrightarrow K\,, \qquad (m,x,c) \;\mapsto\; T(m,x,c)$

Es seien $m,x,c \in K$ und eine offene Umgebung U von $T(m,x,c)$ gegeben; zu finden ist eine offene Umgebung V von (m,x,c) im K^3 (bzgl. der Produkt-Topologie des K^3) mit $V \subset T^{-1}(U)$. Nach Konstruktion der Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B\big(T(m,x,c),\varepsilon\big) \subset U$; wähle hierzu ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\begin{aligned} & \delta^2 \;+\; \big(1+\|m\|+\|x\|\big)\delta \quad \leq \quad \varepsilon\,, \\ \text{etwa} \qquad & \delta \;:=\; \sqrt{\Big(\tfrac{1+\|m\|+\|x\|}{2}\Big)^2+\varepsilon} \;-\; \tfrac{1+\|m\|+\|x\|}{2} \;\in\; \mathbb{R}_{>0}\,. \end{aligned}$$

Dann ist $V := B(m,\delta) \times B(x,\delta) \times B(c,\delta)$ eine offene Umgebung von (m,x,c) im K^3; und für alle $(m',x',c') \in V$ gilt

$$\begin{aligned} & \big\|T(m',x',c') - T(m,x,c)\big\| \\ \overset{(5.2,\text{e})}{=} \; & \big\|\big(T(m',x',c') - T(m',x',c)\big) - \big(T(m,x,c) - T(m',x',c)\big)\big\| \\ \leq \; & \big\|T(m',x',c') - T(m',x',c)\big\| \;+\; \big\|T(m,x,c) - T(m',x',c)\big\| \\ \overset{(5.2,\text{a,e})}{=} \; & \|c'-c\| \;+\; \big\|\big(T(m,x,c) - T(m',x,c)\big) - \big(T(m',x',c) - T(m',x,c)\big)\big\| \\ < \; & \delta \;+\; \big\|T(m,x,c) - T(m',x,c)\big\| \;+\; \big\|T(m',x',c) - T(m',x,c)\big\| \\ \overset{(5.2,\text{d,c})}{=} \; & \delta \;+\; \|m-m'\|\,\|x\| \;+\; \|m'\|\,\|x'-x\| \\ < \; & \delta \;+\; \delta\,\|x\| \;+\; \|(m'-m)+m\|\,\delta \\ \overset{(5.3,\text{f})}{\leq} \; & \big(1+\|x\|\big)\delta \;+\; \|m'-m\|\,\delta \;+\; \|m\|\,\delta \\ < \; & \delta^2 \;+\; \big(1+\|m\|+\|x\|\big)\delta \qquad \leq \qquad \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Mit dieser Wahl von δ gilt somit für alle $(m',x',c') \in V$ stets

$$\big\|T(m',x',c') - T(m,x,c)\big\| \;<\; \varepsilon\,, \qquad \text{d.h.} \quad T(m',x',c') \;\in\; B\big(T(m,x,c),\varepsilon\big) \;\subset\; U\,.$$

Insgesamt ist mit dieser Definition also

$$V \;=\; B(m,\delta) \times B(x,\delta) \times B(c,\delta) \;\subset\; T^{-1}(U)$$

und die ternäre Verknüpfung T daher insgesamt stetig.

<u>Zu (T2):</u> $$f: \ \big\{ \ (m,n,c,d) \in K^4 \ \big| \ m \neq n \ \big\} \ \longrightarrow \ K \ ,$$
$$(m,n,c,d) \ \mapsto \ u \qquad \text{mit} \qquad T(m,u,c) = T(n,u,d)$$

Es seien $m,n,c,d \in K$ mit $m \neq n$, das Element $u \in K$ mit $T(m,u,c) = T(n,u,d)$ und eine offene Umgebung U von $u = f(m,n,c,d)$ gegeben; zu finden ist eine offene Umgebung V von (m,n,c,d) in dem Definitionsbereich von f (bzgl. der entsprechenden Spur-Topologie der Produkt-Topologie des K^4) mit $V \subset f^{-1}(U)$. Nach Konstruktion der Topologie $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(u,\varepsilon) \subset U$; wähle hierzu ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$2\big(1 + \|u\|\big)\delta \quad \leq \quad \big(\|m-n\| - 2\delta\big)\varepsilon \ , \qquad \text{etwa} \quad \delta \ := \ \tfrac{\|m-n\|\varepsilon}{2(1+\|u\|+\varepsilon)} \quad \in \quad \mathbb{R}_{>0} \ .$$

Für jedes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, welches diese Ungleichung erfüllt, muss insbesondere $\|m-n\| - 2\delta > 0$ gelten, da ansonsten aus der Ungleichung der Widerspruch $\delta \leq 0$ folgte. Insbesondere sind mit dieser Wahl von δ die Mengen $B(m,\delta)$ und $B(n,\delta)$ disjunkt, da aus der Existenz eines Elementes $z \in B(m,\delta) \cap B(n,\delta)$ sofort der Widerspruch

$$2\delta \quad < \quad \|m-n\| \overset{(5.2,e)}{=} \|(m-z)-(n-z)\| \quad \leq \quad \|m-z\| + \|n-z\| \quad < \quad 2\delta$$

folgte. Somit ist $V := B(m,\delta) \times B(n,\delta) \times B(c,\delta) \times B(d,\delta)$ eine offene Umgebung von (m,n,c,d) im Definitionsbereich von f; und für alle $(m',n',c',d') \in V$ (dann bereits mit $m' \neq n'$) und das Element $u' = f(m',n',c',d') \in K$ mit $T(m',u',c') = T(n',u',d')$ gilt

$$\begin{aligned}
& \big(\|m-n\| - 2\delta\big) \, \big\|f(m,n,c,d) - f(m',n',c',d')\big\| \\
\overset{(5.2,e)}{=} \ & \big(\|(m-m')-(n-m')\| - 2\delta\big) \, \|u-u'\| \\
\leq \ & \big(\|m-m'\| + \|n-m'\| - 2\delta\big) \, \|u-u'\| \\
\overset{(5.2,e)}{<} \ & \big(\delta + \|(n-n')-(m'-n')\| - 2\delta\big) \, \|u-u'\| \\
\leq \ & \big(\|n-n'\| + \|m'-n'\| - \delta\big) \, \|u-u'\| \\
< \ & \big(\delta + \|m'-n'\| - \delta\big) \, \|u-u'\| \\
= \ & \|m'-n'\| \, \|u-u'\| \\
\overset{(5.2,b)}{=} \ & \big\|T(m',u,c') - T(n',u,d')\big\| \\
\overset{(5.2,e)}{=} \ & \big\|\big(T(m',u,c') - T(m,u,c')\big) - \big(T(n',u,d') - T(m,u,c')\big)\big\| \\
\leq \ & \big\|T(m',u,c') - T(m,u,c')\big\| \ + \ \big\|T(n',u,d') - T(m,u,c')\big\| \\
\overset{(5.2,d,e)}{=} \ & \|m'-m\| \, \|u\| \ + \ \big\|\big(T(n',u,d') - T(n,u,d')\big) - \big(T(m,u,c') - T(n,u,d')\big)\big\| \\
< \ & \delta \, \|u\| \ + \ \big\|T(n',u,d') - T(n,u,d')\big\| \ + \ \big\|T(m,u,c') - T(n,u,d')\big\| \\
\overset{(5.2,d,e)}{=} \ & \delta \, \|u\| \ + \ \|n'-n\| \, \|u\| \ + \ \big\|\big(T(m,u,c') - T(m,u,c)\big) - \big(T(n,u,d') - T(m,u,c)\big)\big\| \\
< \ & \delta \, \|u\| \ + \ \delta \, \|u\| \ + \ \big\|T(m,u,c') - T(m,u,c)\big\| \ + \ \big\|T(n,u,d') - T(m,u,c)\big\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(5.2,a)}{=} \quad 2\delta\,\|u\| \;+\; \|c'-c\| \;+\; \big\|T(n,u,d')-T(n,u,d)\big\| \\
&\overset{(5.2,a)}{<} \quad 2\delta\,\|u\| \;+\; \delta \;+\; \|d'-d\| \\
&< \quad \big(1+2\,\|u\|\,\big)\delta \;+\; \delta \;=\; 2\big(1+\|u\|\,\big)\delta \;\le\; \big(\,\|m-n\|-2\delta\big)\varepsilon\;.
\end{aligned}$$

Mit dieser Wahl von δ gilt somit für alle $(m',n',c',d') \in V$ stets (beachte $\|m-n\|-2\delta > 0$)

$$\big\|f(m,n,c,d)-f(m',n',c',d')\big\| \;<\; \varepsilon\;, \qquad \text{d.h.}\quad f(m',n',c',d') \;\in\; B(u,\varepsilon) \;\subset\; U\;.$$

Insgesamt ist mit dieser Definition also

$$V \;=\; B(m,\delta)\times B(n,\delta)\times B(c,\delta)\times B(d,\delta) \;\subset\; f^{-1}(U)$$

und die Abbildung f aus (T2) ist daher insgesamt stetig.

<u>Zu (T3):</u> $\quad g:\; K^3 \longrightarrow K\;, \qquad (m,x,v) \;\mapsto\; c \qquad \text{mit} \qquad T(m,x,c)=v$

Es seien $m,x,v \in K$, das Element $c \in K$ mit $T(m,x,c)=v$ und eine offene Umgebung U von $c=g(m,x,v)$ gegeben; zu finden ist eine offene Umgebung V von (m,x,v) im K^3 (bzgl. der Produkt-Topologie des K^3) mit $V \subset g^{-1}(U)$. Nach Konstruktion der Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(c,\varepsilon)\subset U$; wähle hierzu ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\delta^2 \;+\; \big(1+\|m\|+\|x\|\,\big)\delta \quad\le\quad \varepsilon\;,$$

$$\text{etwa} \qquad \delta \;:=\; \sqrt{\big(\tfrac{1+\|m\|+\|x\|}{2}\big)^2+\varepsilon} \;-\; \tfrac{1+\|m\|+\|x\|}{2} \;\in\; \mathbb{R}_{>0}\;.$$

Dann ist $V := B(m,\delta)\times B(x,\delta)\times B(v,\delta)$ eine offene Umgebung von (m,x,v) im K^3; und für alle $(m',x',v') \in V$ und das Element $c' = g(m',x',v') \in K$ mit $T(m',x',c')=v'$ gilt

$$\begin{aligned}
&\big\|g(m',x',v')-g(m,x,v)\big\| \\
=\;& \|c'-c\| \\
\overset{(5.2,a)}{=}\;& \big\|T(m,x,c')-T(m,x,c)\big\| \\
\overset{(5.2,e)}{=}\;& \big\|\big(T(m,x,c')-T(m,x',c')\big)-\big(T(m,x,c)-T(m,x',c')\big)\big\| \\
\le\;& \big\|T(m,x,c')-T(m,x',c')\big\| \;+\; \big\|T(m,x,c)-T(m,x',c')\big\| \\
\overset{(5.2,c,e)}{=}\;& \|m\|\,\|x-x'\| \;+\; \big\|\big(T(m,x,c)-T(m',x',c')\big)-\big(T(m,x',c')-T(m',x',c')\big)\big\| \\
<\;& \|m\|\,\delta \;+\; \big\|T(m,x,c)-T(m',x',c')\big\| \;+\; \big\|T(m,x',c')-T(m',x',c')\big\| \\
\overset{(5.2,d)}{=}\;& \|m\|\,\delta \;+\; \|v-v'\| \;+\; \|m-m'\|\,\|x'\| \\
<\;& \|m\|\,\delta \;+\; \delta \;+\; \delta\,\|(x'-x)+x\| \\
\overset{(5.3,f)}{\le}\;& \big(1+\|m\|\,\big)\delta \;+\; \delta\,\|x'-x\| \;+\; \delta\,\|x\| \\
<\;& \delta^2 \;+\; \big(1+\|m\|+\|x\|\,\big)\delta \qquad\le\qquad \varepsilon\;.
\end{aligned}$$

Mit dieser Wahl von δ gilt somit für alle $(m',x',v') \in V$ stets

$$\big\|g(m',x',v') - g(m,x,v)\big\| \;<\; \varepsilon \;, \qquad \text{d.h.} \quad g(m',x',v') \;\in\; B(c,\varepsilon) \;\subset\; U \;.$$

Insgesamt ist mit dieser Definition also

$$V \;=\; B(m,\delta) \times B(x,\delta) \times B(v,\delta) \;\subset\; g^{-1}(U)$$

und die Abbildung g aus (T3) ist daher insgesamt stetig.

Zu (T4): $\quad h: \; \{\, (x,y,v,w) \in K^4 \;\big|\; x \neq y \,\} \;\longrightarrow\; K^2 \,,$

$$(x,y,v,w) \;\mapsto\; (m,c) \qquad \text{mit} \qquad T(m,x,c) = v \;\text{ und }\; T(m,y,c) = w$$

Es seien $x,y,v,w \in K$ mit $x \neq y$, das Element $(m,c) \in K^2$ mit $T(m,x,c) = v$ sowie $T(m,y,c) = w$ und eine offene Umgebung U von $(m,c) = h(x,y,v,w)$ gegeben; zu finden ist eine offene Umgebung V von (x,y,v,w) in dem Definitionsbereich von h (bzgl. der entsprechenden Spur-Topologie der Produkt-Topologie des K^4) mit $V \subset h^{-1}(U)$. Nach Konstruktion der Topologie $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ (und Definition der Produkt-Topologie des K^2) gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B(m,\varepsilon) \times B(c,\varepsilon) \subset U$; wähle hierzu zunächst ein $\delta' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\delta'^2 \;+\; \big(1 + \|m\| + \|x\|\,\big)\delta' \quad\leq\quad \varepsilon \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \delta' \;\leq\; \varepsilon \;,$$

$$\text{etwa} \qquad \delta' \;:=\; \min\Big\{\; \sqrt{\big(\tfrac{1+\|m\|+\|x\|}{2}\big)^2 + \varepsilon} \;-\; \tfrac{1+\|m\|+\|x\|}{2} \;,\;\; \varepsilon \;\Big\} \;\in\; \mathbb{R}_{>0} \;.$$

Im Beweis der Stetigkeit der Abbildung g aus (T3) hatten wir bereits gesehen, dass bei dieser Wahl von δ' (beachte, dass δ' höchstens dem dort definierten δ entspricht) für alle $(m',x',v') \in B(m,\delta') \times B(x,\delta') \times B(v,\delta')$ stets $\|g(m',x',v') - g(m,x,v)\| < \varepsilon$ gilt. Wähle nun weiter zu diesem δ' ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$2\big(1 + \|m\|\,\big)\delta \quad\leq\quad \big(\,\|x-y\| - 2\delta\big)\delta' \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \delta \;\leq\; \delta' \;,$$

$$\text{etwa} \qquad \delta \;:=\; \min\Big\{\; \tfrac{\|x-y\|\delta'}{2(1+\|m\|+\delta')} \;,\;\; \delta' \;\Big\} \;\in\; \mathbb{R}_{>0} \;.$$

Für jedes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, welches diese Ungleichung erfüllt, muss insbesondere $\|x-y\| - 2\delta > 0$ gelten, da ansonsten aus der Ungleichung der Widerspruch $\delta \leq 0$ folgte. Insbesondere sind mit dieser Wahl von δ die Mengen $B(x,\delta)$ und $B(y,\delta)$ disjunkt, da aus der Existenz eines Elementes $z \in B(x,\delta) \cap B(y,\delta)$ sofort der Widerspruch

$$2\delta \quad<\quad \|x-y\| \;\overset{(5.2,\mathrm{e})}{=}\; \|(x-z) - (y-z)\| \quad\leq\quad \|x-z\| + \|y-z\| \quad<\quad 2\delta$$

folgte. Somit ist $V := B(x,\delta) \times B(y,\delta) \times B(v,\delta) \times B(w,\delta)$ eine offene Umgebung von (x,y,v,w) im Definitionsbereich von h; und für alle $(x',y',v',w') \in V$ (dann bereits mit $x' \neq y'$), das Element $(m',c') = h(x',y',v',w') \in K^2$ mit $T(m',x',c') = v'$ sowie $T(m',y',c') = w'$ und das (nach (T3) eindeutige) Element $d \in K$ mit $T(m,y',d) = w'$ gilt

$$
\begin{aligned}
& \|m-m'\| \big(\|x-y\| - 2\delta \big) \\
\overset{(5.2,e)}{=} \;& \|m-m'\| \big(\|(x-x') - (y-x')\| - 2\delta \big) \\
\leq \;& \|m-m'\| \big(\|x-x'\| + \|y-x'\| - 2\delta \big) \\
\overset{(5.2,e)}{<} \;& \|m-m'\| \big(\delta + \|(y-y') - (x'-y')\| - 2\delta \big) \\
\leq \;& \|m-m'\| \big(\|y-y'\| + \|x'-y'\| - \delta \big) \\
< \;& \|m-m'\| \big(\delta + \|x'-y'\| - \delta \big) \\
= \;& \|m-m'\| \, \|x'-y'\| \\
\overset{(5.2,b)}{=} \;& \big\| T(m,x',d) - T(m',x',c') \big\| \\
\overset{(5.2,e)}{=} \;& \big\| \big(T(m,x',d) - T(m,x,c) \big) - \big(T(m',x',c') - T(m,x,c) \big) \big\| \\
\leq \;& \big\| T(m,x',d) - T(m,x,c) \big\| \; + \; \big\| T(m',x',c') - T(m,x,c) \big\| \\
\overset{(5.2,e)}{=} \;& \big\| \big(T(m,x',d) - T(m,x',c) \big) - \big(T(m,x,c) - T(m,x',c) \big) \big\| \; + \; \|v'-v\| \\
< \;& \big\| T(m,x',d) - T(m,x',c) \big\| \; + \; \big\| T(m,x,c) - T(m,x',c) \big\| \; + \; \delta \\
\overset{(5.2,a,c)}{=} \;& \|d-c\| \; + \; \|m\| \, \|x-x'\| \; + \; \delta \\
\overset{(5.2,a)}{<} \;& \big\| T(m,y,d) - T(m,y,c) \big\| \; + \; \|m\| \, \delta \; + \; \delta \\
\overset{(5.2,e)}{=} \;& \big\| \big(T(m,y,d) - T(m',y',c') \big) - \big(T(m,y,c) - T(m',y',c') \big) \big\| \; + \; \big(1 + \|m\| \big) \delta \\
\leq \;& \big\| T(m,y,d) - T(m',y',c') \big\| \; + \; \big\| T(m,y,c) - T(m',y',c') \big\| \; + \; \big(1 + \|m\| \big) \delta \\
= \;& \big\| T(m,y,d) - T(m,y',d) \big\| \; + \; \|w-w'\| \; + \; \big(1 + \|m\| \big) \delta \\
\overset{(5.2,c)}{<} \;& \|m\| \, \|y-y'\| \; + \; \delta \; + \; \big(1 + \|m\| \big) \delta \\
< \;& \|m\| \, \delta \; + \; \big(2 + \|m\| \big) \delta \\
= \;& 2 \big(1 + \|m\| \big) \delta \qquad < \qquad \big(\|x-y\| - 2\delta \big) \delta' \, .
\end{aligned}
$$

Mit dieser Wahl von δ gilt somit für alle $(x', y', v', w') \in V$ mit $h(x', y', v', w') = (m', c')$ (beachte $\|x-y\| - 2\delta > 0$)

$$\|m - m'\| \; < \; \delta' \, , \qquad \text{d.h.} \qquad m' \in B(m, \delta') \subset B(m, \varepsilon) \, .$$

Da für diese Elemente somit stets

$$m' \in B(m, \delta') \, , \quad x' \in B(x, \delta) \subset B(x, \delta') \qquad \text{sowie} \qquad v' \in B(v, \delta) \subset B(v, \delta')$$

gelten, folgt aus der Wahl von δ' mit der Stetigkeit von g aus (T3) auch

$$\|c' - c\| \;=\; \|g(m', x', v') - g(m, x, v)\| \;<\; \varepsilon \;, \qquad \text{d.h.} \quad c' \;\in\; B(c, \varepsilon) \;.$$

Insgesamt ist mit dieser Definition also

$$\begin{aligned} & h(x', y', v', w') \;\in\; B(m, \varepsilon) \times B(c, \varepsilon) \;\subset\; U \;, \\ \text{d.h.} \qquad V \;=\; & B(x, \delta) \times B(y, \delta) \times B(v, \delta) \times B(w, \delta) \;\subset\; h^{-1}(U) \;, \end{aligned}$$

und die Abbildung h aus (T4) ist daher insgesamt stetig.

□

Ist $(K, T, \|.\|)$ ein Ternärkörper mit einem nicht trivialen, uniformen Absolutwert, so erfüllt der topologische Ternärkörper $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ nach (5.5) somit gerade die Voraussetzungen des ersten Abschnittes von Kapitel 4, sodass wir mit den dortigen Ergebnissen direkt die Aussagen des folgenden Korollars erhalten:

(5.6) Korollar:

Es sei $(K, T, \|.\|)$ ein Ternärkörper mit einem nicht trivialen, uniformen Absolutwert. Dann gelten:

(a) Für alle Teilmengen $M \subset K$ sind äquivalent:
   (i) M ist beschränkt.
   (ii) M ist links- oder rechts-beschränkt.
   (iii) Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|M\| < \varepsilon$.
   (iv) Es gibt ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\|M\| \leq \varepsilon$.

(b) Für jede Umgebung von U von 0 sind die Mengen ${}^1\!/\!{\scriptstyle (K\setminus U)}$ und ${\scriptstyle (K\setminus U)}\backslash^1$ jeweils beschränkt; insbesondere ist $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ also vom Typ V.

(c) R_a ist beschränkt.

(d) Die Mengen der nilpotenten bzw. neutralen Elemente von $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ sind

$$N_0 \;=\; \left\{ \, x \in K \;\middle|\; \|x\| < 1 \, \right\} \;\neq\; \{0\} \qquad \text{sowie} \qquad N^\times \;=\; \left\{ \, x \in K \;\middle|\; \|x\| = 1 \, \right\} \;.$$

   Insbesondere sind N_0 und N jeweils normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebungen von 0 mit ${}^1\!/\!{\scriptstyle (K\setminus N)} \subset N_0 \subset N$.

(e) Der uniforme Absolutwert $\|.\|$ ist genau dann archimedisch, wenn ein $x \in K^*$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|1 + x\| > 1$ existiert.

Beweis: Nach (5.5) ist $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ ein topologischer Ternärkörper und $\mathscr{T}_{\|.\|}$ weder diskret noch indiskret; weiter bildet das System $\big(B(x,\varepsilon)\big)_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}}$ eine Umgebungsbasis von $x \in K$ der Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$. Zusätzlich sind die Nachbeschränkung $\|.\| : K \longrightarrow \mathsf{Bild}(\|.\|)$ eine surjektive Abbildung von K auf die angeordnete, abelsche Gruppe $\|K^*\| \neq \{1\}$, welche die Axiome (V1), (V2) und (V4) einer uniformen Bewertung erfüllt. Somit sind in dieser Situation die Resultate aus (4.2)-(4.6) anwendbar.

Zu (a,b,c): Diese Behauptungen folgen direkt aus (4.2,a,c,e).[1]

Zu (d): Da $\|K^*\| \neq \{1\}$ als Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ archimedisch angeordnet ist, ist $\{1\}$ die maximale, konvexe Untergruppe von $\|K^*\|$ mit $\{1\} \neq \|K^*\|$. Die Behauptungen folgen daher direkt aus (4.6,a).

Zu (e): Existiert ein $x \in K^*$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|1 + x\| > 1$, so gilt ebenfalls

$$\|1-(-x)\| \overset{(5.2,\mathrm{i})}{=} \|1+x\| \quad > \quad 1 \quad = \quad \max\big\{1,\ \|x\|\,\big\} \overset{(5.3,\mathrm{c})}{=} \max\big\{\,\|1\|\,,\ \|{-x}\|\,\big\}\ ,$$

d.h. die ultrametrische Dreiecksungleichung ist verletzt und $\|.\|$ somit archimedisch. Ist $\|.\|$ dagegen archimedisch, so existieren $x, y \in K$ mit $\|x - y\| > \max\{\|x\|\,, \|y\|\}$; insbesondere sind also $x, y \neq 0$. OBdA[2] sei hierbei $\|x\| \geq \|y\|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x\| \quad < \quad \|x-y\| &\overset{(5.2,\mathrm{k})}{=} \|x\|\,\|1-{}_{x}\backslash^{y}\| \quad = \quad \|x\|\,\big\|1-\big(-(\boxminus\,{}_{x}\backslash^{y})\big)\big\| \\ &\overset{(5.2,\mathrm{i})}{=} \|x\|\,\|1+(\boxminus\,{}_{x}\backslash^{y})\|\ , \qquad\qquad \text{d.h.} \qquad \|1+(\boxminus\,{}_{x}\backslash^{y})\| \quad > \quad 1\ . \end{aligned}$$

Hierbei ist $\|\boxminus\,{}_{x}\backslash^{y}\| = \|{}_{x}\backslash^{y}\| = \frac{\|y\|}{\|x\|} \leq 1$, vgl. (5.3,c), und die Behauptung gezeigt.

□

Charakterisierung der Topologien uniformer Absolutwerte

Wir haben daher bereits alle nötigen Mittel zur Hand, um die Topologien archimedischer, uniformer Absolutwerte auf Ternärkörpern im Stile von Kowalsky, Dürbaum [28] zu charakterisieren und unser Ergebnis aus (4.14,c) zu vervollständigen. Hierbei orientieren wir uns erneut an der Aufbereitung dieses Beweises aus Engler, Prestel [10, Thm. B.12]:

[1] In (a(iii),(iv)) erhalten wir aus (4.2,a) zunächst jeweils $\varepsilon \in \|K^*\|$; da diese Gruppe aber archimedisch angeordnet und nicht trivial ist, ist dies jeweils äquivalent dazu, dass ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit der geforderten Eigenschaft existiert.

[2] Vertausche ansonsten die Rollen von x und y, vgl. (5.3,e).

(5.7) Theorem: (vgl. Engler, Prestel [10, Thm. B.12])

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret.

(a) Es gibt genau dann einen archimedischen, uniformen Absolutwert $\|.\|$ auf (K, T) mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$, wenn gelten:

 (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

 (ii) R_a ist beschränkt.

 (iii) Es ist $N + N \not\subset N$.

(b) Für ein Element $c \in K^*$ gibt es genau dann einen archimedischen, uniformen Absolutwert $\|.\|$ auf (K, T) mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ und $\|c\| = 2$, wenn neben den Eigenschaften (i)-(iii) aus (a) noch $N + N \subset Nc$ gilt.

Beweis: *Zu (a, $\Longrightarrow$):* Es sei ein archimedischer, uniformer Absolutwert $\|.\|$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ gegeben. Nach (5.6,b) ist $(K, T, \mathscr{T})$ dann vom Typ V und nach (5.6,c) ist R_a beschränkt. Weiter gibt es nach (5.6,e) ein $x \in K^*$ mit $\|x\| \leq 1$ und $\|1 + x\| > 1$, d.h. mit $1, x \in N$ und $1 + x \notin N$, vgl. (5.6,d). Somit ist N additiv nicht abgeschlossen.

Zu (b, $\Longrightarrow$): Für ein Element $c \in K^*$ sei ein archimedischer, uniformer Absolutwert $\|.\|$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ und $\|c\| = 2$ gegeben. Nach dem bereits Bewiesenen gelten dann die Eigenschaften (i)-(iii); und weiter ist für alle $x, y \in N$ stets

$$\|{}^{(x+y)}/_{c}\| \;=\; \frac{\|x+y\|}{\|c\|} \;=\; \frac{\|x+y\|}{2} \;\overset{(5.3,f)}{\leq}\; \frac{\|x\|+\|y\|}{2} \;\overset{(5.6,d)}{\leq}\; \frac{1+1}{2} \;=\; 1\ .$$

Mit (5.6,d) ist daher ${}^{(N+N)}/_{c} \subset N$, d.h. es ist $N + N \subset Nc$.

Zu (b, $\Longleftarrow$): Es gelten nun die obigen Eigenschaften (i)-(iii) und es sei ein Element $c \in K^*$ mit $N + N \subset Nc$ gegeben. Beachte zunächst, dass in dieser Situation stets $N_0 \neq \{0\}$ gelten muss, da ansonsten $K^* = {}^{1}/_{K^*} \subset N$ nach (2.8,g) folgte und $N = K$ daher trivialerweise additiv abgeschlossen wäre. Weiter muss das Element ${}^{1}/_{c}$ notwendigerweise nilpotent sein; denn wäre ${}^{1}/_{c} \in K \backslash N_0$, so folgte direkt der Widerspruch

$$N + N \;\subset\; Nc \;=\; N \cdot {}_{({}^{1}/_{c})}\backslash 1 \;\subset\; N \cdot {}_{(K \backslash N_0)}\backslash 1 \;\overset{(2.8,g)}{\subset}\; NN \;\overset{(3.6,d)}{=}\; N\ .$$

Im Folgenden konstruieren wir einen archimedischen, uniformen Absolutwert $\|.\|$ auf (K, T) mit $\|c\| = 2$, welcher die Topologie $\mathscr{T}$ induziert. Hierfür benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen:

Da $N^\times$ nach (2.8,b) eine normale Unterloop von K^* ist, können wir die Faktorloop

$$\Gamma \;:=\; K^*/N^\times \;=\; \left\{\, N^\times x \in \mathfrak{P}(K^*) \;\middle|\; x \in K^* \,\right\}$$

betrachten, vgl. (1.2,e). Da $R_a \subset N^\times$ nach (2.12,f) gilt, ist bereits $R_a N^\times \subset N^\times$, da $N^\times$ eine Unterloop ist, und für alle $N^\times x, N^\times y, N^\times z \in \Gamma$ gelten somit

$$\big((N^\times x)(N^\times y)\big)(N^\times z) \;=\; N^\times\big((xy)z\big) \;\overset{(1.7,d(ii))}{=}\; N^\times\big(x(yz)\big) \;=\; (N^\times x)\big((N^\times y)(N^\times z)\big)$$

$$\text{und} \qquad (N^\times x)(N^\times y) \;=\; N^\times(xy) \;\overset{(1.7,d(ii))}{=}\; N^\times(yx) \;=\; (N^\times y)(N^\times x)\ .$$

Also ist Γ bereits eine abelsche Gruppe. Auf dieser definieren wir nun die Relation $\preceq$ für alle $N^\times x,\ N^\times y \in \Gamma$ durch

$$N^\times x \quad \preceq \quad N^\times y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad y \ \in \ Nx \ .$$

Mit dieser bildet $(\Gamma, \cdot, \preceq)$ eine (total) archimedisch angeordnete Gruppe, denn:

- $\preceq$ ist wohldefiniert: Sind $N^\times x,\ N^\times x',\ N^\times y,\ N^\times y' \in \Gamma$ mit $N^\times x = N^\times x'$ und $N^\times y = N^\times y'$ gegeben, so gilt auch

$$Nx \ \overset{(2.8,d)}{=} \ (NN^\times)x \ = \ N(N^\times x) \ = \ N(N^\times x') \ = \ (NN^\times)x' \ \overset{(2.8,d)}{=} \ Nx'$$

  und somit ist

$$y \ \in \ Nx \quad \overset{(2.8,d)}{\Longleftrightarrow} \quad N^\times y' \ = \ N^\times y \ \subset \ Nx \ = \ Nx' \quad \overset{(2.8,d)}{\Longleftrightarrow} \quad y' \ \in \ Nx' \ ,$$

  d.h. $\preceq$ ist wohldefiniert.

- $\preceq$ ist reflexiv: Für alle $N^\times x \in \Gamma$ ist stets $x = 1 \cdot x \in Nx$ und damit $N^\times x \ \preceq \ N^\times x$.

- $\preceq$ ist antisymmetrisch: Sind $N^\times x,\ N^\times y \in \Gamma$ mit $N^\times x \ \preceq \ N^\times y$ und $N^\times y \ \preceq \ N^\times x$ gegeben, so gelten nach Definition $y \in Nx$ und $x \in Ny$, d.h. es ist ${}^{y}/_{x}, {}^{x}/_{y} \in N$. Da N nach (3.6,d) eine normale, multiplikativ abgeschlossene, beschränkte Umgebung von 0 ist, sind dann auch

$$\langle {}^{x}/_{y} \rangle \quad \subset \quad N \qquad \text{und} \qquad \langle {}^{1}/_{({}^{x}/_{y})} \rangle \ \overset{(2.2,f)}{=} \ \langle {}^{y}/_{x} \rangle \quad \subset \quad N$$

  und die Nilpotenzmengen $\langle {}^{x}/_{y} \rangle$ und $\langle {}^{1}/_{({}^{x}/_{y})} \rangle$ nach (2.5,b) ebenfalls beschränkt, d.h. es ist ${}^{x}/_{y} \in N^\times$. Da $N^\times$ nach (2.8,b) eine Loop ist, folgt hieraus $N^\times \cdot {}^{x}/_{y} = N^\times$ und daher $N^\times x = N^\times y$.

- $\preceq$ ist transitiv: Sind $N^\times x,\ N^\times y,\ N^\times z \in \Gamma$ mit $N^\times x \ \preceq \ N^\times y$ und $N^\times y \ \preceq \ N^\times z$ gegeben, so gelten nach Definition $y \in Nx$ und $z \in Ny$. Da N nach (3.6,d) insbesondere multiplikativ abgeschlossen ist, folgt sofort

$$z \ \in \ Ny \ \subset \ N(Nx) \ = \ (NN)x \ = \ Nx \ ,$$

  d.h. es ist auch $N^\times x \ \preceq \ N^\times z$.

- $\preceq$ ist total: Sind $N^\times x,\ N^\times y \in \Gamma$ gegeben, so muss wegen ${}^{1}/_{(K \setminus N)} \subset N$, vgl. (2.8,g), dann ${}^{y}/_{x} \in N$ oder ${}^{1}/_{({}^{y}/_{x})} \in N$ gelten; hierzu führen wir eine Fallunterscheidung:
  - Ist ${}^{y}/_{x} \in N$, so folgt direkt $y \in Nx$, d.h. es ist $N^\times x \ \preceq \ N^\times y$.
  - Ist dagegen ${}^{1}/_{({}^{y}/_{x})} \in N$, so folgt hieraus zunächst $1 \in N \cdot {}^{y}/_{x}$ und damit dann $x \in (N \cdot {}^{y}/_{x})x = N({}^{y}/_{x} \cdot x) = Ny$, also $N^\times y \ \preceq \ N^\times x$.

- $\preceq$ erfüllt das Monotoniegesetz: Aufgrund der Kommutativität der Gruppe Γ ist nur eines der Monotoniegesetze nachzuweisen. Sind hierzu $N^\times x,\ N^\times y,\ N^\times z \in \Gamma$ mit $N^\times x \ \preceq \ N^\times y$ gegeben, so gilt nach Definition $y \in Nx$. Es folgt dann sofort $yz \in (Nx)z = N(xz)$ und damit

$$(N^\times x)(N^\times z) \ = \ N^\times(xz) \ \preceq \ N^\times(yz) \ = \ (N^\times y)(N^\times z) \ .$$

- $\preceq$ ist archimedisch: Sind $N^\times x,\ N^\times y \in \Gamma$ mit $N^\times \prec N^\times x \prec N^\times y$ gegeben, so gilt nach Definition $x \in N$. Wäre hierbei allerdings $x \in N^\times$, so folgte direkt der Widerspruch $N^\times = N^\times x$; somit muss sogar $x \in N_0$ gelten. Nach (3.6,e) gibt es insbesondere für die Umgebung[1] Ny von 0 dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ stets $x^n \in Ny$ bei allen Klammerungen der Produkte x^n gilt. Somit gilt nach Definition

$$N^\times y \quad \preceq \quad N^\times x^{n_0} \quad = \quad (N^\times x)^{n_0}$$

und wegen $N^\times \prec N^\times x$ folgt hieraus mit dem Monotoniegesetz dann

$$N^\times y \ = \ (N^\times y)N^\times \ \preceq \ (N^\times x)^{n_0} N^\times \ \prec \ (N^\times x)^{n_0}(N^\times x) \ = \ (N^\times x)^{n_0+1} \ .$$

Mit $n := n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ gilt dann also $N^\times y \prec (N^\times x)^n$.

Nach dem *Satz von Hölder*, vgl. erneut etwa Priess-Crampe [34, §I.3 Satz 4], ist die archimedisch angeordnete Gruppe $(\Gamma, \cdot, \preceq)$ daher zu einer Untergruppe von $(\mathbb{R}, +, \leq)$ o-isomorph; sei $\iota : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine solche ordnungstreue Einbettung von Γ in $\mathbb{R}$. Bezeichnet weiter $\pi : K^* \twoheadrightarrow \Gamma,\ x \mapsto N^\times x$, die kanonische Projektion von K^* auf die Faktorloop Γ, so definieren wir die Abbildung φ durch

$$\varphi \ := \ \iota \circ \pi \quad : \qquad K^* \longrightarrow \mathbb{R} \ , \qquad x \ \mapsto \ \iota(N^\times x) \ .$$

Diese Abbildung φ ist als Komposition zweier Loop-Homomorphismen offenbar selbst wieder ein Loop-Homomorphismus, d.h. für $x, y \in K^*$ gilt stets $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Da für unser fest gewähltes Element $c \in K^*$ mit $N + N \subset Nc$ offenbar $1 \in Nc$ gilt,[2] ist nach Definition daher $N^\times c \preceq N^\times$; und weil ι ordnungstreu ist und als Loop-Homomorphismus $N^\times$ auf 0 abbildet, gilt also:

$$\varphi(c) \quad = \quad \iota(N^\times c) \quad \leq \quad \iota(N^\times) \quad = \quad 0$$

Wäre hierbei $\varphi(c) = 0$, d.h. $\iota(N^\times c) = 0 = \iota(N^\times)$, so folgte aus der Injektivität von ι direkt $N^\times c = N^\times$, also $c \in N^\times$; im Widerspruch zur Nilpotenz von $1/c$ aus der obigen Betrachtung. Somit gilt sogar $\varphi(c) < 0$. Wir können daher die folgende reelle Zahl

$$\gamma \quad := \quad 2^{\left(\frac{1}{\varphi(c)}\right)} \quad \in \quad \mathbb{R}_{>0}$$

definieren - hierbei ist wegen $\varphi(c) < 0$ auch $\frac{1}{\varphi(c)} < 0$ und damit $\gamma < 1$. Wir definieren nun schließlich die folgende Abbildung $\|.\|$ und weisen nach, dass es sich hierbei um den gesuchten uniformen Absolutwert handelt:

$$\|.\| \ : \quad K \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \ , \qquad x \ \mapsto \ \begin{cases} \gamma^{\varphi(x)} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \ .$$

[1] Denn N ist eine Umgebung von 0 und die Rechtsmultiplikation mit y ist offen mit $0 \cdot y = 0$, vgl. (1.7,b).

[2] Denn da $1/c$ nilpotent ist, ist $1/c \in N_0 \subset N$, also $1 \in Nc$.

Zu $\|c\| = 2$: Nach Konstruktion gilt sofort

$$\|c\| \;=\; \gamma^{\varphi(c)} \;=\; \left(2^{\left(\frac{1}{\varphi(c)}\right)}\right)^{\varphi(c)} \;=\; 2^{\left(\frac{1}{\varphi(c)}\,\cdot\,\varphi(c)\right)} \;=\; 2\;.$$

Zu (V1): Offenbar ist nach Konstruktion $\|0\| = 0$ und $\|x\| > 0$ für alle $x \in K^*$.

Zu (V2): Es seien $x, y \in K$ gegeben. Im Fall $0 \in \{x, y\}$ sind $xy = 0$ und $\|x\|\,\|y\| = 0$ und damit $\|xy\| = \|0\| = 0 = \|x\|\,\|y\|$. Sind dagegen $x, y \neq 0$, so ist auch $xy \neq 0$ und es gilt

$$\|xy\| \;=\; \gamma^{\varphi(xy)} \;=\; \gamma^{(\varphi(x)+\varphi(y))} \;=\; \gamma^{\varphi(x)}\gamma^{\varphi(y)} \;=\; \|x\|\,\|y\|\;.$$

Zu (V4): Für alle $x \in N^\times$ gilt $N^\times x = N^\times$ und damit

$$\|x\| \;=\; \gamma^{\varphi(x)} \;=\; \gamma^{\iota(N^\times x)} \;=\; \gamma^{\iota(N^\times)} \;=\; \gamma^0 \;=\; 1\;.$$

Da R mit R_a beschränkt ist, vgl. (2.5,b), gilt $R \subset N^\times$ nach (2.12,a) und somit ist (V4) erfüllt.

Zu (V3'): Für den Nachweis der Dreiecksungleichung genügt es mit (5.3,f)

$$\|x + y\| \;\leq\; \|x\| + \|y\| \qquad \text{für alle } \; x, y \in K$$

zu zeigen. Wir betrachten hierfür zunächst einige Zwischenbehauptungen und werden so schrittweise diese Version der Dreiecksungleichung beweisen:

- Wir zeigen zunächst, dass für alle $x, y \in K$ gilt:

  $$(*_1) \qquad \|x\| \;\leq\; \|y\| \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;\in\; Ny\;.$$

  Denn im Fall $x = 0$ sind die beiden Aussagen $0 \leq \|y\|$ und $0 \in Ny$ für alle $y \in K$ offenbar stets wahr; und für $y = 0$ sind $\|x\| \leq 0$ und $x \in 0 \cdot N = \{0\}$ beide genau dann wahr, wenn $x = 0$ ist. Sind schließlich $x, y \neq 0$, so ergibt sich aus der Konstruktion

  $$\begin{aligned} & \|x\| \;=\; \gamma^{\iota(N^\times x)} \;\leq\; \gamma^{\iota(N^\times y)} \;=\; \|y\| \\ \overset{\gamma<1}{\Longleftrightarrow}\quad & \iota(N^\times y) \;\leq\; \iota(N^\times x) \\ \Longleftrightarrow\quad & N^\times y \;\preceq\; N^\times x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;\in\; Ny\;. \end{aligned}$$

- Nun beweisen wir, dass für alle $x, y \in K$ die folgende Vorstufe der Dreiecksungleichung erfüllt ist:

  $$(*_2) \qquad \|x + y\| \;\leq\; 2 \cdot \max\big\{\, \|x\|\,, \|y\|\,\big\}\;.$$

  Hierfür seien zunächst $x, y \in K$ mit $\|x\| \leq \|y\|$ gegeben. Wegen $\|x\| \leq \|y\| = \|-y\|$, vgl. (5.3,c), gilt mit $(*_1)$ dann $x \in N(-y)$, d.h. es ist $x/(-y) \in N$. Hiermit folgt

  $$\begin{aligned} x + y \;\in\; & R(x + y) \overset{(1.11,i)}{=} R\big(x - (-y)\big) \overset{(1.11,l)}{=} R\big((x/(-y) - 1)(-y)\big) \\ \subset\; & R\big((N - N)(-y)\big) \;=\; \big(R(N - N)\big)(-y) \overset{(2.12,d)}{=} \big(R(N + N)\big)(-y) \\ \subset\; & \big(R(Nc)\big)(-y) \;=\; (RN)\big(c(-y)\big) \overset{(2.12,b)}{=} N\big(c(-y)\big)\;. \end{aligned}$$

Mit $(*_1)$ ist dann

$$\|x+y\| \;\leq\; \|c(-y)\| \;=\; \|c\|\,\|-y\| \;\overset{(5.3,c)}{=}\; 2\,\|y\| \;,$$

also ist die Behauptung für den Fall $\|x\| \leq \|y\|$ bereits gezeigt.
Sind dagegen $x, y \in K$ mit $\|x\| > \|y\|$ gegeben, so folgt die Behauptung wegen $\|-y\| < \|\ominus x\|$, vgl. (5.3,c), aus dem bereits Bewiesenen mittels

$$\begin{aligned} \|x+y\| \;&\overset{(5.2,i)}{=}\; \|x-(-y)\| \;\overset{(5.3,e)}{=}\; \|(-y)-x\| \;=\; \|(-y)-(-(\ominus x))\| \\ &\overset{(5.2,i)}{=}\; \|(-y)+(\ominus x)\| \;\leq\; 2\,\|\ominus x\| \;\overset{(5.3,c)}{=}\; 2\,\|x\| \;. \end{aligned}$$

- Hiermit zeigen wir nun mittels vollständiger Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$, beliebige $x_1, ..., x_{2^m} \in K$ und jede Klammerung der Summe $x_1 + ... + x_{2^m}$ gilt:

$$(*_3) \qquad \|x_1 + ... + x_{2^m}\| \;\leq\; 2^m \cdot \max\{\, \|x_1\|, \dots, \|x_{2^m}\| \,\} \;.$$

Für $m = 0$ ist die Behauptung offenbar trivial erfüllt; und für den Induktionsanfang $m = 1$ entspricht die zu zeigende Ungleichung gerade $(*_2)$.
Für den Induktionsschritt sei nun ein $m \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass für $x_1, ..., x_{2^m} \in K$ und jede Klammerung der Summe $x_1 + ... + x_{2^m}$ stets

$$(\mathrm{IV}) \qquad \|x_1 + ... + x_{2^m}\| \;\leq\; 2^m \cdot \max\{\, \|x_1\|, \dots, \|x_{2^m}\| \,\}$$

gilt. Sind Elemente $x_1, ..., x_{2^{m+1}} \in K$ und eine Klammerung der Summe $x_1 + ... + x_{2^{m+1}}$ gegeben, so gilt wegen $R(Rx_i) = Rx_i$ für alle $i = 1, ..., 2^{m+1}$ nach (1.6,a)

$$\begin{aligned} x_1 + ... + x_{2^{m+1}} \;&\in\; Rx_1 \;+\; ... \;+\; Rx_{2^{m+1}} \\ &=\; \big(Rx_1 \;+\; ... \;+\; Rx_{2^m}\big) \;+\; \big(Rx_{2^m+1} \;+\; ... \;+\; Rx_{2^{m+1}}\big) \;. \end{aligned}$$

Es gibt somit $r_i \in R$ $(i = 1, ..., 2^{m+1})$ und jeweils eine Klammerung der beiden Summen $r_1x_1 + ... + r_{2^m}x_{2^m}$ und $r_{2^m+1}x_{2^m+1} + ... + r_{2^{m+1}}x_{2^{m+1}}$ mit

$$x_1 + ... + x_{2^{m+1}} \;=\; \big(r_1x_1 + ... + r_{2^m}x_{2^m}\big) \;+\; \big(r_{2^m+1}x_{2^m+1} + ... + r_{2^{m+1}}x_{2^{m+1}}\big) \;,$$

d.h. mit der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$\begin{aligned} &\|x_1 + ... + x_{2^{m+1}}\| \\ =\;\; & \Big\|\big(r_1x_1 + ... + r_{2^m}x_{2^m}\big) \;+\; \big(r_{2^m+1}x_{2^m+1} + ... + r_{2^{m+1}}x_{2^{m+1}}\big)\Big\| \\ \overset{(*_2)}{\leq}\;\; & 2 \cdot \max\Big\{\; \big\|r_1x_1 + ... + r_{2^m}x_{2^m}\big\| ,\; \big\|r_{2^m+1}x_{2^m+1} + ... + r_{2^{m+1}}x_{2^{m+1}}\big\| \;\Big\} \\ \overset{(\mathrm{IV})}{\leq}\;\; & 2 \cdot \max\Big\{\; 2^m \cdot \max\{\, \|r_1x_1\|, \dots, \|r_{2^m}x_{2^m}\| \,\} \;, \\ & \qquad\qquad 2^m \cdot \max\{\, \|r_{2^m+1}x_{2^m+1}\|, \dots, \|r_{2^{m+1}}x_{2^{m+1}}\| \,\} \;\Big\} \\ =\;\; & 2^{m+1} \cdot \max\{\, \|r_1x_1\|, \dots, \|r_{2^m}x_{2^m}\|,\; \|r_{2^m+1}x_{2^m+1}\|, \dots, \|r_{2^{m+1}}x_{2^{m+1}}\| \,\} \\ =\;\; & 2^{m+1} \cdot \max\{\, \|r_1\|\,\|x_1\|, \dots, \|r_{2^{m+1}}\|\,\|x_{2^{m+1}}\| \,\} \\ =\;\; & 2^{m+1} \cdot \max\{\, \|x_1\|, \dots, \|x_{2^{m+1}}\| \,\} \;. \end{aligned}$$

- Schließlich folgern wir hieraus, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, beliebige $x_1, ..., x_n \in K$ und jede Klammerung der Summe $x_1 + ... + x_n$ gilt:
$$(*_4) \qquad \|x_1 + ... + x_n\| \;\leq\; 2n \cdot \max\{ \|x_1\|, ..., \|x_n\| \} .$$
Seien hierzu ein $n \in \mathbb{N}$, Elemente $x_1, ..., x_n \in K$ sowie eine Klammerung der Summe $x_1 + ... + x_n$ gegeben. In dieser Situation können wir das $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{m-1} \leq n < 2^m$ - d.h. insbesondere mit $2^m \leq 2n$ - wählen und $x_{n+1} = ... = x_{2^m} := 0$ setzen; dann folgt für $x_1 + ... + x_{2^m}$ mit der fortgesetzten Umklammerung $(x_1 + ... + x_n) + (x_{n+1} + ... + x_{2^m})$
$$\begin{aligned} \|x_1 + ... + x_n\| &= \|x_1 + ... + x_{2^m}\| \overset{(*_3)}{\leq} 2^m \cdot \max\{ \|x_1\|, ..., \|x_{2^m}\| \} \\ &\leq 2n \cdot \max\{ \|x_1\|, ..., \|x_n\| \} . \end{aligned}$$

- Um die Behauptung beweisen zu können, benötigen wir nun noch eine bestimmte Darstellung und zeigen (erneut mittels vollständiger Induktion), dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in K$ gilt[1]
$$(*_5) \qquad R_a(x+y)^n \;\subset\; \sum_{i=0}^{n} \Big(\underbrace{R_a(x^i y^{n-i}) + \; ... \; + R_a(x^i y^{n-i})}_{\binom{n}{i}-\mathrm{mal}} \Big) .$$
Hierbei sind die Mengen $R_a(x+y)^n$ und $R_a(x^i y^{n-i})$ $(i = 0, ..., n)$ nach (1.7,d(ii)) stets unabhängig von der Klammerung dieser Produkte; und wegen (1.6,a) sind die Summanden $R_a(x^i y^{n-i})$ $(i = 0, ..., n)$ jeweils normal in $(K, +)$ und die Summe daher unabhängig von der Klammerung und Reihenfolge dieser Summanden.

  Für den Induktionsanfang $n = 1$ entspricht die rechte Seite der Behauptung gerade $R_a x + R_a y$ und es gilt sofort
$$R_a(x+y) \;\subset\; R_a(Rx + Ry) \overset{(1.6,e)}{\subset} R_a(Rx) + R_a(Ry) \;=\; R_a x + R_a y .$$
Für den Induktionsschritt sei nun ein $n \in \mathbb{N}$ so gegeben, dass für $x, y \in K$ stets
$$(IV) \qquad R_a(x+y)^n \;\subset\; \sum_{i=0}^{n} \Big(\underbrace{R_a(x^i y^{n-i}) + \; ... \; + R_a(x^i y^{n-i})}_{\binom{n}{i}-\mathrm{mal}} \Big) .$$
gilt. Für alle $x, y \in K$ folgt hieraus
$$\begin{aligned} & R_a(x+y)^{n+1} \\ = \;& R_a\big((x+y)^n (x+y)\big) \\ = \;& \big(R_a(x+y)^n\big)(x+y) \\ \subset \;& \big(R_a(x+y)^n\big)(Rx + Ry) \\ \overset{(1.6,e)}{\subset} \;& \big(R_a(x+y)^n\big)(Rx) \;+\; \big(R_a(x+y)^n\big)(Ry) \end{aligned}$$

[1]Hierbei bezeichne $\binom{n}{i}$ für $n, i \in \mathbb{Z}$ den klassischen Binomialkoeffizienten mit der Konvention $\binom{n}{i} = 0$ für $i < 0$ oder $i > n$. Beachte im Hinblick auf die kommende Rechnung, dass die *Pascal-Identität* $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ für alle $n, i \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
&\overset{(IV)}{\subset} \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{R_a(x^iy^{n-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n-i})}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right)(Rx) \\
&\qquad + \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{R_a(x^iy^{n-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n-i})}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right)(Ry) \\
&\overset{(1.6,f)}{\subset} \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{\big(R_a(x^iy^{n-i})\big)(Rx) + \ \dots \ + \big(R_a(x^iy^{n-i})\big)(Rx)}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right) \\
&\qquad + \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{\big(R_a(x^iy^{n-i})\big)(Ry) + \ \dots \ + \big(R_a(x^iy^{n-i})\big)(Ry)}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right) \\
&\overset{(1.7,d(ii))}{=} \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{R_a(x^{i+1}y^{n-i}) + \ \dots \ + R_a(x^{i+1}y^{n-i})}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right) \\
&\qquad + \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{R_a(x^iy^{n+1-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n+1-i})}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \big(\underbrace{R_a(x^iy^{n+1-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n+1-i})}_{\binom{n}{i-1}-\text{mal}} \big) \right) \\
&\qquad + \left(\sum_{i=0}^{n} \big(\underbrace{R_a(x^iy^{n+1-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n+1-i})}_{\binom{n}{i}-\text{mal}} \big) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\underbrace{R_a(x^iy^{n+1-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n+1-i})}_{\left(\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right)-\text{mal}} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \left(\underbrace{R_a(x^iy^{n+1-i}) + \ \dots \ + R_a(x^iy^{n+1-i})}_{\binom{n+1}{i}-\text{mal}} \right)
\end{aligned}$$

- Es seien nun $x, y \in K$ gegeben. Für ein $n \in \mathbb{N}$ und eine beliebige Klammerung des Produktes $(x+y)^n$ gibt es nach $(*_5)$ dann Elemente $r_j^{(i)} \in R_a$ $\big(i = 0, ..., n$ und jeweils $j = 1, ..., \binom{n}{i}\big)$ und Klammerungen der auftretenden Summen und Produkte mit

$$(x+y)^n \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \left(\ r_1^{(i)}(x^iy^{n-i}) + \ \dots \ + r_{\binom{n}{i}}^{(i)}(x^iy^{n-i}) \ \right) .$$

Da nach dem Nachweis von (V4) insbesondere auch $\|r\| = 1$ für alle $r \in R_a$ gilt,[1] folgt mit Hilfe dieser Darstellung

[1]denn es ist $R_a \subset N^\times$, vgl. (2.12,f)

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^n &= \big\|(x+y)^n\big\| \\
&= \Big\| \sum_{i=0}^{n} \Big(r_1^{(i)}(x^i y^{n-i}) + \ \dots\ + r_{\binom{n}{i}}^{(i)}(x^i y^{n-i}) \Big) \Big\| \\
&\overset{(*_4)}{\leq} 2(n+1)\cdot \max_{i=0,\dots,n} \Big\{ \Big\| r_1^{(i)}(x^i y^{n-i}) + \dots + r_{\binom{n}{i}}^{(i)}(x^i y^{n-i}) \Big\| \Big\} \\
&\overset{(*_4)}{\leq} 2(n+1)\cdot \max_{i=0,\dots,n} \Big\{ 2\binom{n}{i} \cdot \max_{j=1,\dots,\binom{n}{i}} \Big\{ \big\|r_j^{(i)}(x^i y^{n-i})\big\| \Big\} \Big\} \\
&= 4(n+1)\cdot \max_{i=0,\dots,n} \Big\{ \binom{n}{i} \cdot \max_{j=1,\dots,\binom{n}{i}} \Big\{ \|r_j^{(i)}\|\, \|x\|^i\, \|y\|^{n-i} \Big\} \Big\} \\
&= 4(n+1)\cdot \max_{i=0,\dots,n} \Big\{ \binom{n}{i} \cdot \max_{j=1,\dots,\binom{n}{i}} \Big\{ \|x\|^i\, \|y\|^{n-i} \Big\} \Big\} \\
&= 4(n+1)\cdot \max_{i=0,\dots,n} \Big\{ \binom{n}{i} \|x\|^i\, \|y\|^{n-i} \Big\} \\
&\leq 4(n+1)\cdot \sum_{i=0}^{n} \Big(\binom{n}{i} \|x\|^i\, \|y\|^{n-i} \Big) \qquad = \qquad 4(n+1)\big(\,\|x\|+\|y\|\,\big)^n ,
\end{aligned}
$$

also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ stets:

$$\|x+y\| \quad \leq \quad \sqrt[n]{4(n+1)} \cdot \big(\,\|x\|+\|y\|\,\big) \ .$$

Wegen $\sqrt[n]{4(n+1)} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt daher

$$\|x+y\| \quad \leq \quad \|x\|+\|y\|$$

und die Dreiecksungleichung (V3') ist mit Hilfe von (5.3,f) schließlich bewiesen.

Insbesondere ist $\|.\|$ wegen $\|c\| = 2$ nicht trivial. Nach (5.5) induziert der uniforme Absolutwert $\|.\|$ somit eine Topologie $\mathscr{T}_{\|.\|}$ auf K, mit der $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ einen topologischen Ternärkörper bildet und welche weder diskret noch indiskret ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass diese gerade der Topologie $\mathscr{T}$ entspricht und dass $\|.\|$ archimedisch ist.

$\underline{\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}}$: Mit (i) und (3.4) genügt es, lediglich $\mathscr{T}_{\|.\|} \subset \mathscr{T}$ nachzuweisen; und da sowohl die Homöomorphismengruppe von $(K, \mathscr{T})$ als auch die von $(K, \mathscr{T}_{\|.\|})$ jeweils 2-transitiv auf K operiert, vgl. (1.7,b), genügt es für diese Inklusion zu zeigen, dass jede Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}_{\|.\|}$ ebenfalls eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ist. Sei hierfür eine Umgebung U von 0 bzgl. $\mathscr{T}_{\|.\|}$ gegeben.
Da N wegen $\|N\| \leq 1$ bzgl. $\mathscr{T}_{\|.\|}$ beschränkt ist,[1] existiert insbesondere[2] ein $x \in K^*$ mit $Nx \subset U$. Und weil N wegen (i), (ii) und $N_0 \neq \{0\}$ nach (3.6,d) auch eine Umgebung von 0 bzgl. $\mathscr{T}$ ist, ist mit Nx also auch U eine Umgebung[3] von 0 bzgl. $\mathscr{T}$.

[1]Beachte (5.6,a) und $\|x\| \leq \|1\| = 1$ für alle $x \in N$ wegen $x \in N = N \cdot 1$ nach $(*_1)$ aus dem Beweis von (V3').
[2]Denn $\mathscr{T}_{\|.\|}$ ist nicht diskret, da $\|.\|$ nicht trivial ist.
[3]Denn die Rechtsmultiplikation mit x ist offen mit $0 \cdot x = 0$, vgl. (1.7,b).

<u>$\|.\|$ ist archimedisch:</u> Nach (iii) existieren $x, y \in N$ mit $x + y \notin N$; mit $(*_1)$ aus dem Beweis von (V3') gelten für diese Elemente dabei

$$\|x\| \;\leq\; \|1\| \;=\; 1\,, \qquad \|-y\| \overset{(5.3,c)}{=} \|y\| \;\leq\; \|1\| \;=\; 1$$

$$\text{sowie} \qquad \|x-(-y)\| \overset{(5.2,i)}{=} \|x+y\| \;>\; \|1\| \;=\; 1\,.$$

Somit ist die starke Dreiecksungleichung verletzt und $\|.\|$ daher archimedisch.

Zu (a, $\Longleftarrow$): Es gelten nun die obigen Eigenschaften (i)-(iii). Beachte, dass in dieser Situation erneut $N_0 \neq \{0\}$ gelten muss, da ansonsten $K^* = {}^1\!/_{K^*} \subset N$ nach (2.8,g) folgte und $N = K$ daher trivialerweise additiv abgeschlossen wäre. Da N nach (i), (ii) und (3.6,d) insbesondere eine beschränkte Umgebung von 0 ist, existieren eine Umgebung[1] U von 0 mit $U + U \subset N$ und insbesondere[2] ein $d \in K^*$ mit $Nd \subset U$. Aufgrund von $RN \subset N$ nach (2.12,b) erfüllt dieses Element dann

$$(N+N)d \overset{(1.6,f)}{=} Nd + Nd \;\subset\; U+U \;\subset\; N\,, \qquad \text{d.h.} \quad N+N \;\subset\; {}^N\!/_d \overset{(1.4,a)}{=} N \cdot {}^1\!/_d\,.$$

Mit $c := {}^1\!/_d \in K^*$ folgt die Behauptung daher insbesondere bereits aus (b).

□

Mit Verzicht auf die Archimedizität des uniformen Absolutwertes können wir dieses Ergebnis mit (4.14,a) zu einer Charakterisierung der Topologien beliebiger nicht trivialer, uniformer Absolutwerte zusammenfassen:

<u>(5.8) Korollar:</u>

Es seien $(K, T, \mathscr{T})$ ein topologischer Ternärkörper und $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret.

(a) Es gibt genau dann einen nicht trivialen, uniformen Absolutwert $\|.\|$ auf (K, T) mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$, wenn gelten:

  (i) $(K, T, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

  (ii) R_a ist beschränkt.

  (iii) Es ist $N_0 \neq \{0\}$.

(b) Es seien ein archimedischer, uniformer Absolutwert $\|.\|$ auf (K, T) und ein $c \in K^*$ gegeben. In dieser Situation gibt es genau dann einen archimedischen, uniformen Absolutwert $\|.\|'$ auf (K, T) mit $\mathscr{T}_{\|.\|'} = \mathscr{T}_{\|.\|}$ und $\|c\|' = 2$, wenn gilt:

$$\|c\| \;\geq\; \sup_{\substack{x \in K^* \\ \|x\| \leq 1}} \{\, \|1+x\| \,\} \;\in\; (1, 2]\,.^{[3]}$$

[1] Denn die Ternärkörper-Addition ist stetig mit $0 + 0 = 0$, vgl. (1.7,b).

[2] da $\mathscr{T}$ nicht diskret ist

[3] Hierbei bezeichne $(1, 2] \;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ das halboffene Intervall in den reellen Zahlen.

Beweis: *Zu (a):* $\underline{\Longrightarrow:}$ Es sei ein nicht trivialer, uniformer Absolutwert $\|.\|$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ gegeben. Ist $\|.\|$ archimedisch, so folgt die Behauptung direkt aus (5.7,a); denn in dieser Situation muss dann notwendigerweise $N_0 \neq \{0\}$ gelten, da ansonsten $K^* = {}^1\!/_{K^*} \subset N$ nach (2.8,g) folgte und $N = K$ daher trivialerweise additiv abgeschlossen wäre.
Ist $\|.\|$ dagegen nicht archimedisch, so ist die Nachbeschränkung $\|.\| : K \longrightarrow \mathrm{Bild}(\|.\|)$ eine nicht triviale, uniforme Bewertung auf (K, T), deren Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ ist, sodass die Behauptung direkt aus (4.14,a) folgt.

$\underline{\Longleftarrow:}$ Es gelten nun die obigen Eigenschaften (i)-(iii). Ist $N + N \not\subset N$, so folgt die Behauptung bereits aus (5.7,a); ist dagegen $N + N \subset N$, so folgt sie ebenso aus (4.14,a), da jede uniforme Bewertung auf (K, T), deren Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ ist, insbesondere ein uniformer Absolutwert ist.

Zu (b): Zunächst sei bemerkt, dass die Menge $\{\|1 + x\| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x \in K^*,\ \|x\| \leq 1\}$ aufgrund von (5.3,f) durch 2 nach oben beschränkt ist und nach (5.6,e) ein Element > 1 enthält, sodass sich ihr Supremum in der Tat im halboffenen Intervall $(1, 2]$ befindet.

$\underline{\Longrightarrow:}$ Es sei ein archimedischer, uniformer Absolutwert $\|.\|'$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|'} = \mathscr{T}_{\|.\|}$ und $\|c\|' = 2$ gegeben; nach (5.7,b) muss dann insbesondere $N + N \subset Nc$ gelten. Somit folgt ${}^{(N+N)}\!/_c \subset N$, d.h. wegen $1 \in N$ gilt insbesondere ${}^{(1+N)}\!/_c \subset N$ und damit

$$\begin{array}{lcccll} & \frac{\|1+x\|}{\|c\|} & = & \|{}^{(1+x)}\!/_c\| \overset{(5.6,d)}{\leq} 1 & \text{für alle} & x \in N\ , \\ \text{d.h.} & \|c\| & \geq & \sup\limits_{x \in N} \{\, \|1+x\| \,\} \overset{(5.6,d)}{\geq} \sup\limits_{\substack{x \in K^* \\ \|x\| \leq 1}} \{\, \|1+x\| \,\}\ . & & \end{array}$$

$\underline{\Longleftarrow:}$ Es gelte nun die obige Ungleichung für $\|c\|$. Nach (5.7,a) erfüllt $(K, T, \mathscr{T}_{\|.\|})$ die dortigen Eigenschaften (i)-(iii); und mit (5.7,b) ist für die Behauptung somit nur noch $N+N \subset Nc$ zu zeigen. Wegen $N + N = N - N$, vgl. (2.12,d), genügt es $N - N \subset Nc$ nachzuweisen; seien hierfür $x, y \in N$ gegeben. Ist $0 \in \{x, y\}$, so folgt mit (5.6,d) und (5.3,c) sofort $\|x - y\| \leq 1 < \|c\|$; es seien daher im Folgenden $x, y \neq 0$.
Im Fall $\|x\| \geq \|y\|$ folgt wegen $\|{-}\,{}_x\backslash^y\| = \|{}_x\backslash^y\| = \frac{\|y\|}{\|x\|} \leq 1$, vgl. (5.3,c), dann

$$\|x - y\| \overset{(5.2,k)}{=} \|x\|\,\|1 - {}_x\backslash^y\| \overset{(5.6,d)}{\leq} \big\|1 - \big(-\,({-}\,{}_x\backslash^y)\big)\big\| \overset{(5.2,i)}{=} \|1 + ({-}\,{}_x\backslash^y)\| \;\leq\; \|c\|$$

Ist dagegen $\|x\| < \|y\|$, so folgt wegen $\|x - y\| = \|y - x\|$, vgl. (5.3,e), aus dem bereits Bewiesenen ebenfalls $\|x - y\| \leq \|c\|$. Insgesamt gilt somit

$$\|{}^{(x-y)}\!/_c\| \;=\; \frac{\|x-y\|}{\|c\|} \;\leq\; 1 \qquad \text{für alle} \quad x, y \in N\ ,$$

d.h. mit (5.6,d) ist ${}^{(N-N)}\!/_c \subset N$ und daher $N - N \subset Nc$.

$\square$

Über die Existenz archimedischer, uniformer Absolutwerte

Somit haben wir unser Ziel, die topologischen Ternärkörper vom Typ V mit beschränktem, erweiterten Radikal und additiv nicht abgeschlossener Menge nilpotenter und neutraler Elemente zu charakterisieren und somit (4.14,c) zu vervollständigen, erreicht - diese sind genau die Topologien, welche durch einen archimedischen, uniformen Absolutwert induziert werden.

Die noch ausstehende Suche nach Beispielen von echten Ternärkörpern mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert gestaltet sich allerdings als wenig erfolgreich: Natürlich gibt es die vier klassischen Beispiele $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ mit der jeweiligen gewöhnlichen Vektorraum-Norm,[1] es sind ansonsten aber keine Ternärkörper mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert bekannt, welche nicht bereits Alternativkörper sind.

Vor allem die Konstruktion einer neuen Multiplikation auf einem der reellen Vektorräume $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ im Stile des Beispieles aus (1.13,e) für uniforme Bewertungen, welche multiplikativ bzgl. der Vektorraum-Norm ist, etwa eines der Distributivgesetze verletzt und zugleich das Radikal beschränkt lässt, scheint nicht zu gelingen. Wir werden im Folgenden den Fokus dieses Kapitels darauf legen, die fragliche Existenz dieser Ternärkörper mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert, welche nicht bereits Alternativkörper sind, zu diskutieren.

Hierbei ergibt sich, dass die obige Konstruktion auf den reellen Vektorräumen $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ in der Tat niemals einen echten Ternärkörper - oder auch nicht einmal echte Cartesische Körper oder Quasikörper - mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert generieren kann. Als ursächlich hierfür erweist sich die Tatsache, dass wir von einem reellen, normierten Vektorraum ausgegangen sind, wie wir in dem folgenden Satz sehen werden:

(5.9) Theorem:

Es sei $(K, T, \|.\|)$ ein Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert. Ist $(K, d_{\|.\|})$ isometrisch[2] zum metrischen Raum eines normierten, reellen Vektorraumes, so gelten:

(a) (K, T) ist linear.

(b) $(K, +, \cdot)$ ist ein Alternativkörper.

(c) $(K, +, \cdot, \|.\|)$ ist als Alternativkörper mit einem uniformen Absolutwert isomorph[3] zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

Insbesondere enthält der Kern $N(K)$ von K einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper und es ist $\dim_{\mathbb{R}}(K) = 1, 2, 4, 8$.

[1] sowie natürlich die jeweiligen nicht notwendig vollständigen Unter-Alternativkörper

[2] Hierbei nennen wir zwei metrische Räume (X, d) und (Y, d') *isometrisch*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : X \longrightarrow Y$ mit $d(x, y) = d'(\varphi(x), \varphi(y))$ für alle $x, y \in X$ gibt.

[3] In dem Sinne, dass es einen Alternativkörper-Isomorphismus φ von K nach $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit $\|.\| = \|.\|' \circ \varphi$ gibt; hierbei bezeichne $\|.\|'$ die gewöhnliche Vektorraum-Norm auf $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ bzw. $\mathbb{O}$, vgl. auch (1.9,b).

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es einen normierten, reellen Vektorraum $(V, \oplus, *, \|.\|')$ sowie eine bijektive Abbildung $\varphi : K \longrightarrow V$, welche

$$\|\varphi(x) \ominus \varphi(y)\|' \;=\; d_{\|.\|'}(\varphi(x), \varphi(y)) \;=\; d_{\|.\|}(x, y) \;=\; \|x - y\| \qquad \text{für alle } \; x, y \in K$$

erfüllt; oBdA[1] sei hierbei $\varphi(0_+) = 0_\oplus$. Übertragen wir die Verknüpfungen $\oplus$ und $*$ bzw. die Vektorraum-Norm $\|.\|'$ in gewohnter Weise mittels der bijektiven Abbildung φ von V auf K, d.h. definieren wir für alle $x, y \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x \oplus y \;:=\; \varphi^{-1}\big(\varphi(x) \oplus \varphi(y)\big) \;, \qquad \lambda * x \;:=\; \varphi^{-1}\big(\lambda * \varphi(x)\big) \quad \text{und} \quad \|x\|' \;:=\; \|\varphi(x)\|' \;,$$

so bildet $(K, \oplus, *, \|.\|')$ natürlich ebenfalls einen normierten, reellen Vektorraum, dessen metrischer Raum isometrisch zu $(K, d_{\|.\|})$ ist. Nach Konstruktion ist dann $0_\oplus = 0_+ =: 0$ und die metrischen Räume $(K, d_{\|.\|})$ und $(K, d_{\|.\|'})$ sind dann nicht nur isometrisch, sondern stimmen sogar überein;[2] denn für alle $x, y \in K$ ist nach Konstruktion

$$\begin{aligned} d_{\|.\|'}(x, y) \;&=\; \|x \ominus y\|' \;=\; \|\varphi(x \ominus y)\|' \;=\; \big\|\varphi\big(\varphi^{-1}(\varphi(x) \ominus \varphi(y))\big)\big\|' \\ &=\; \|\varphi(x) \ominus \varphi(y)\|' \;=\; d_{\|.\|'}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \;=\; d_{\|.\|}(x, y) \;. \end{aligned}$$

Damit stimmen bereits auch der uniforme Absolutwert $\|.\|$ und die Vektorraum-Norm $\|.\|'$ auf K überein, denn für alle $x \in K$ ist

$$\|x\|' \;=\; \|x \ominus 0\|' \;=\; d_{\|.\|'}(x, 0) \;=\; d_{\|.\|}(x, 0) \;=\; \|x - 0\| \;=\; \|x\| \;.$$

Der Übersicht halber halten wir an dieser Stelle noch einmal die genaue Situation fest, die wir geschaffen haben - die Menge K ist nun mit zwei Strukturen versehen, nämlich:

- $(K, T, \|.\|)$ ist ein Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert,
- $(K, \oplus, *, \|.\|)$ ist ein normierter, reeller Vektorraum mit Nullvektor 0.

Die metrischen Räume dieser beiden sind dabei identisch, d.h. es gilt

$$(*) \qquad \|x \ominus y\| \;=\; \|x - y\| \qquad \text{für alle } \; x, y \in K$$

Wir werden diese Situation nun nutzen, um die obigen Aussagen (a)-(c) (sowie den Zusatz) nachzuweisen. Hierfür genügt es offenbar, die folgenden Behauptungen zu zeigen:

(i) $(K, \oplus, \cdot)$ ist eine unitäre, reelle Algebra mit Absolutwert $\|.\|$.[3]

(ii) $(K, \oplus, \cdot, \|.\|)$ ist als reelle Algebra mit Absolutwert isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm; insbesondere ist $(K, \oplus, \cdot)$ ein Alternativkörper.

(iii) (K, T) ist linear und es ist $(K, \oplus) = (K, +)$.

[1] Gehe ansonsten zur bijektiven Abbildung $\widetilde{\varphi} : \;\; K \longrightarrow V, \quad x \;\mapsto\; \varphi(x) \ominus \varphi(0_+)$, über, welche ebenfalls $\|\widetilde{\varphi}(x) \ominus \widetilde{\varphi}(y)\|' \;=\; \|\varphi(x) \ominus \varphi(y)\|' \;=\; \|x - y\|$ für alle $x, y \in K$ erfüllt.

[2] Schließlich haben wir gerade die abstandserhaltende Abbildung φ zur Übertragung der Vektorraumstruktur von V auf K gewählt.

[3] Eine *reelle Algebra* $(V, +, \cdot)$ ist ein reeller Vektorraum $(V, +, *)$ mit einer Multiplikation $\cdot : V \times V \longrightarrow V$, welche $\lambda * (x \cdot y) = (\lambda * x) \cdot y = x \cdot (\lambda * y)$ sowie $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt; genannt *Algebren-Multiplikation.* Sie heißt *unitär*, wenn es ein Element $1 \in V$ mit $1 \neq 0$ und $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in V$ gibt. Ein *Absolutwert* auf V ist eine Norm des Vektorraumes $(V, +, *)$, welche zusätzlich multiplikativ bzgl. der Algebren-Multiplikation $\cdot$ ist, siehe hierzu etwa Cabrera García, Rodríguez Palacios [4, S.1f., S.176].

Zu (i): Da nach Voraussetzung $(K, \oplus, *, \|.\|)$ ein normierter, reeller Vektorraum, 1 das neutrale Element der Multiplikation $\cdot$ sowie $\|.\|$ nach (V2) multiplikativ bzgl. $\cdot$ ist, sind für die Behauptung nur noch die beiden Distributivgesetze sowie die Verträglichkeit der Algebren- mit der Skalarmultiplikation zu zeigen. Hierzu seien für ein $c \in K^*$ die beiden Abbildungen σ_c, τ_c mittels

$$\sigma_c : \ K \longrightarrow K \ , \quad x \ \mapsto \ \tfrac{1}{\|c\|} * (c \cdot x) \ , \qquad \text{und} \qquad \tau_c : \ K \longrightarrow K \ , \quad x \ \mapsto \ \tfrac{1}{\|c\|} * (x \cdot c) \ ,$$

definiert. Die Abbildungen σ_c, τ_c sind stets surjektiv, denn für alle $z \in K$ gilt

$$\sigma_c\Big(c \backslash (\|c\| * z)\Big) \ = \ \tfrac{1}{\|c\|} * \Big(c \cdot c \backslash (\|c\| * z)\Big) \ = \ z \ = \ \tfrac{1}{\|c\|} * \Big((\|c\| * z) / c \cdot c\Big) \ = \ \tau_c\Big((\|c\| * z) / c\Big) \ .$$

Weiter sind σ_c, τ_c Isometrien des normierten, reellen Vektorraumes $(K, \oplus, *, \|.\|)$, denn für alle $x, y \in K$ ist

$$\begin{aligned}
\|\sigma_c(x) \ominus \sigma_c(y)\| \ &= \ \left\| \Big(\tfrac{1}{\|c\|} * (c \cdot x)\Big) \ominus \Big(\tfrac{1}{\|c\|} * (c \cdot y)\Big) \right\| \ = \ \left\| \tfrac{1}{\|c\|} * \big((c \cdot x) \ominus (c \cdot y)\big) \right\| \\
&= \ \left| \tfrac{1}{\|c\|} \right| \, \|(c \cdot x) \ominus (c \cdot y)\| \ \overset{(*)}{=} \ \tfrac{1}{\|c\|} \, \|c \cdot x - c \cdot y\| \\
&\overset{(5.2,k)}{=} \ \tfrac{1}{\|c\|} \, \|c\| \, \|x - y\| \ = \ \|x - y\| \ \overset{(*)}{=} \ \|x \ominus y\| \qquad \text{sowie}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tau_c(x) \ominus \tau_c(y)\| \ &= \ \left\| \Big(\tfrac{1}{\|c\|} * (x \cdot c)\Big) \ominus \Big(\tfrac{1}{\|c\|} * (y \cdot c)\Big) \right\| \ = \ \left\| \tfrac{1}{\|c\|} * \big((x \cdot c) \ominus (y \cdot c)\big) \right\| \\
&= \ \left| \tfrac{1}{\|c\|} \right| \, \|(x \cdot c) \ominus (y \cdot c)\| \ \overset{(*)}{=} \ \tfrac{1}{\|c\|} \, \|x \cdot c - y \cdot c\| \\
&\overset{(5.2,l)}{=} \ \tfrac{1}{\|c\|} \, \|x - y\| \, \|c\| \ = \ \|x - y\| \ \overset{(*)}{=} \ \|x \ominus y\| \ .
\end{aligned}$$

Nach dem *Theorem von* MAZUR, ULAM [29][1] sind surjektive Isometrien eines normierten, reellen Vektorraumes bereits affin; und wegen

$$\sigma_c(0) \ = \ \tfrac{1}{\|c\|} * (c \cdot 0) \ = \ 0 \qquad \text{und} \qquad \tau_c(0) \ = \ \tfrac{1}{\|c\|} * (0 \cdot c) \ = \ 0$$

sind σ_c und τ_c somit sogar lineare Abbildungen des Vektorraumes $(K, \oplus, *)$. Damit sind für alle $c \in K^*$ auch die Abbildungen

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\sigma}_c \ := \ \|c\| * \sigma_c \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{\sigma}_c(x) \ = \ c \cdot x \qquad \text{für alle } \ x \in K \\
\text{sowie} \quad &\widetilde{\tau}_c \ := \ \|c\| * \tau_c \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{\tau}_c(x) \ = \ x \cdot c \qquad \text{für alle } \ x \in K
\end{aligned}$$

lineare Abbildungen von $(K, \oplus, *)$ - und natürlich sind auch die Fortsetzungen dieser Notationen $\widetilde{\sigma}_0$ mit $\widetilde{\sigma}_0(x) = 0 \cdot x = 0$ für alle $x \in K$ und $\widetilde{\tau}_0$ mit $\widetilde{\tau}_0(x) = x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in K$ als Nullabbildung ebenfalls linear. Somit gelten für alle $x, y, z \in K$ stets

$$\begin{aligned}
&x \cdot (y \oplus z) \ = \ \widetilde{\sigma}_x(y \oplus z) \ = \ \widetilde{\sigma}_x(y) \ \oplus \ \widetilde{\sigma}_x(z) \ = \ x \cdot y \ \oplus \ x \cdot z \\
\text{und} \quad &(x \oplus y) \cdot z \ = \ \widetilde{\tau}_z(x \oplus y) \ = \ \widetilde{\tau}_z(x) \ \oplus \ \widetilde{\tau}_z(y) \ = \ x \cdot z \ \oplus \ y \cdot z \ .
\end{aligned}$$

[1] Ein modernisierter Beweis dieses Thoerems ist etwa auch bei NICA [31] zu finden.

Weiter sind für alle $x, y \in K$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls

$$\begin{array}{rrcccccc} & x \cdot (\lambda * y) & = & \widetilde{\sigma}_x(\lambda * y) & = & \lambda * \widetilde{\sigma}_x(y) & = & \lambda * (x \cdot y) \\ \text{und} & (\lambda * x) \cdot y & = & \widetilde{\tau}_y(\lambda * x) & = & \lambda * \widetilde{\tau}_y(x) & = & \lambda * (x \cdot y)\ . \end{array}$$

Insgesamt ist $(K, \oplus, \cdot)$ somit eine unitäre, reelle Algebra mit Absolutwert $\|.\|$.

<u>Zu (ii):</u> Nach dem *nicht-kommutativen Urbanikov-Wright-Theorem* aus Cabrera García, Rodríguez Palacios [4, Thm. 2.6.21] ist $(K, \oplus, \cdot, \|.\|)$ als unitäre, reelle Algebra mit Absolutwert daher bereits zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm isomorph. Insbesondere ist $(K, \oplus, \cdot)$ somit ein Alternativkörper und sein Kern enthält einen zu $\mathbb{R}$ isomorphen Unterkörper - genauer ist $\dim_{\mathbb{R}}(K) = 1, 2, 4, 8$.

<u>Zu (iii):</u> Für die Behauptung genügt es, $T(m, x, c) = (m \cdot x) \oplus c$ für alle $m, x, c \in K$ zu zeigen, denn dann folgt für alle $x, y \in K$ nach Definition direkt

$$x + y \;=\; T(1, x, y) \;=\; (1 \cdot x) \oplus y \;=\; x \oplus y\ ,$$

d.h. es ist $(K, \oplus) = (K, +)$, und (K, T) ist dann bereits auch linear, da für alle $m, x, c \in K$

$$T(m, x, c) \;=\; (m \cdot x) \oplus c \;=\; m \cdot x + c$$

gilt. Für diesen Nachweis seien für $m, c \in K$ mit $m \neq 0$ die Abbildungen $\varphi_{m,c}$ mittels

$$\varphi_{m,c} :\ K \longrightarrow K\ , \qquad x \;\mapsto\; \tfrac{1}{\|m\|} * \big(T(m, x, c) \ominus c\big)\ ,$$

definiert. Die Abbildungen $\varphi_{m,c}$ sind stets surjektiv, denn für alle $z \in K$ existiert nach (T2) wegen $m \neq 0$ ein (eindeutiges) Element $u \in K$ mit

$$T(m, u, c) \;=\; T\big(0, u, (\|m\| * z) \oplus c\big) \overset{(T1)}{=} (\|m\| * z) \oplus c\ , \qquad \text{d.h. mit} \quad \varphi_{m,c}(u) \;=\; z\ .$$

Weiter ist $\varphi_{m,c}$ eine Isometrie des normierten, reellen Vektorraumes $(K, \oplus, *, \|.\|)$, denn für alle $x, y \in K$ ist

$$\begin{aligned} \|\varphi_{m,c}(x) \ominus \varphi_{m,c}(y)\| &= \Big\| \Big(\tfrac{1}{\|m\|} * \big(T(m, x, c) \ominus c\big)\Big) \ominus \Big(\tfrac{1}{\|m\|} * \big(T(m, y, c) \ominus c\big)\Big) \Big\| \\ &= \Big\| \tfrac{1}{\|m\|} * \Big(\big(T(m, x, c) \ominus c\big) \ominus \big(T(m, y, c) \ominus c\big)\Big) \Big\| \\ &= \Big| \tfrac{1}{\|m\|} \Big|\, \big\| T(m, x, c) \ominus T(m, y, c) \big\| \\ &\overset{(*)}{=} \tfrac{1}{\|m\|}\, \big\| T(m, x, c) - T(m, y, c) \big\| \\ &\overset{(5.2,c)}{=} \tfrac{1}{\|m\|}\, \|m\|\, \|x - y\| \;=\; \|x - y\| \overset{(*)}{=} \|x \ominus y\|\ . \end{aligned}$$

Erneut ist $\varphi_{m,c}$ nach dem *Theorem von* Mazur, Ulam [29] somit stets affin und wegen

$$\varphi_{m,c}(0) \;=\; \tfrac{1}{\|m\|} * \big(T(m, 0, c) \ominus c\big) \overset{(T1)}{=} \tfrac{1}{\|m\|} * (c \ominus c) \;=\; 0$$

somit sogar eine lineare Abbildung des Vektorraumes $(K, \oplus, *)$. Damit sind für alle $m, c \in K$ mit $m \neq 0$ auch die Abbildungen

$$\widetilde{\varphi}_{m,c} \;:=\; \|m\| * \varphi_{m,c} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{\varphi}_{m,c}(x) \;=\; T(m,x,c) \ominus c \quad \text{für alle} \;\; x \in K$$

lineare Abbildungen von $(K, \oplus, *)$ - und natürlich sind erneut die Fortsetzungen dieser Notation $\widetilde{\varphi}_{0,c}$ mit $\widetilde{\varphi}_{0,c}(x) = T(0,x,c) \ominus c = c \ominus c = 0$ für alle $x \in K$ als Nullabbildung ebenfalls linear. Weiter gilt nach Konstruktion offenbar

$$T(m,x,c) \;=\; \widetilde{\varphi}_{m,c}(x) \;\oplus\; c \qquad\qquad \text{für alle} \;\; m,x,c \in K \;.$$

Für die Behauptung ist somit $\widetilde{\varphi}_{m,c}(x) = m \cdot x$ für alle $m, x, c \in K$ zu zeigen.

Angenommen, es existierten Elemente $m, x, c \in K$ mit $\widetilde{\varphi}_{m,c}(x) \neq m \cdot x$; diese Elemente müssten offenbar notwendigerweise $m, x, c \neq 0$ erfüllen.[1] Da $\varphi_{m,c}$ eine lineare Isometrie ist, ist sie insbesondere normerhaltend und es folgt

$$\|\widetilde{\varphi}_{m,c}(x)\| \;=\; \Big\| \|m\| * \varphi_{m,c}(x) \Big\| \;=\; \Big| \|m\| \Big| \, \|\varphi_{m,c}(x)\| \;=\; \|m\| \, \|x\| \;=\; \|m \cdot x\| \;.$$

Wegen $m, x \neq 0$ ist hierbei auch $m \cdot x \neq 0$ und das Element $e := {}^{\widetilde{\varphi}_{m,c}(x)}\!/_{(m \,\cdot\, x)} \in K^*$ erfüllt

$$\|e\| \;=\; 1, \qquad e \;\neq\; 1 \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\varphi}_{m,c}(x) \;=\; e \cdot (m \cdot x) \;.$$

Setzen wir nun

$$\lambda \;:=\; \tfrac{2\|c\|+1}{\|e \ominus 1\| \|m\| \|x\|} \;\in\; \mathbb{R}_{>0} \qquad \text{und} \qquad \widetilde{x} \;:=\; \lambda * x \;\in\; K^* \;,$$

so gilt aufgrund der Homogenität von $\widetilde{\varphi}_{m,c}$ und der Verträglichkeit der Skalar- mit der Algebren-Multiplikation auch

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{m,c}(\widetilde{x}) \;&=\; \widetilde{\varphi}_{m,c}(\lambda * x) \;=\; \lambda * \widetilde{\varphi}_{m,c}(x) \;=\; \lambda * \big(e \cdot (m \cdot x)\big) \\ &=\; e \cdot \big(\lambda * (m \cdot x)\big) \;=\; e \cdot \big(m \cdot (\lambda * x)\big) \;=\; e \cdot (m \cdot \widetilde{x}) \;, \end{aligned}$$

d.h. es ist ebenfalls

$$T(m, \widetilde{x}, c) \;=\; \widetilde{\varphi}_{m,c}(\widetilde{x}) \oplus c \;=\; \big(e \cdot (m \cdot \widetilde{x})\big) \oplus c \;.$$

Hiermit folgt mit Hilfe des Distributivgesetzes in der Algebra $(K, \oplus, \cdot)$ dann

$$\begin{aligned} \|c\| \;&=\; \|c - 0\| \;\overset{(5.2,\text{a})}{=}\; \big\|T(m,\widetilde{x},c) - T(m,\widetilde{x},0)\big\| \;\overset{(*)}{=}\; \big\|T(m,\widetilde{x},c) \ominus T(m,\widetilde{x},0)\big\| \\ &=\; \Big\| \Big(\big(e \cdot (m \cdot \widetilde{x})\big) \oplus c\Big) \ominus (m \cdot \widetilde{x}) \Big\| \;=\; \big\| \big((e \ominus 1) \cdot (m \cdot \widetilde{x})\big) \oplus c \big\| \;. \end{aligned}$$

Wegen $c \neq 0$ gibt es somit das Element $f := {}^{(((e \,\ominus\, 1) \,\cdot\, (m \,\cdot\, \widetilde{x})) \,\oplus\, c)}\!/_{c} \in K^*$, welches neben $\|f\| = 1$ und $f \neq 1$ noch

$$\big((e \ominus 1) \cdot (m \cdot \widetilde{x})\big) \oplus c \;=\; f \cdot c \;, \qquad \text{d.h.} \qquad (e \ominus 1) \cdot (m \cdot \widetilde{x}) \;=\; (f \ominus 1) \cdot c \;,$$

[1] Denn es sind $\widetilde{\varphi}_{0,c}(x) = 0 = 0 \cdot x$ sowie $\widetilde{\varphi}_{m,c}(0) = 0 = m \cdot 0$ und $\widetilde{\varphi}_{m,0}(x) = T(m,x,0) \ominus 0 = m \cdot x$ für alle $m, x, c \in K$, d.h. die obige Gleichung ist in diesen Fällen jeweils trivial erfüllt.

erfüllt. Hieraus ergibt sich nun aber schließlich ein Widerspruch zu unserer Wahl des Skalars $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, denn es folgt

$$\begin{aligned} 2\,\|c\| + 1 \quad &= \quad \|e \ominus 1\|\,\|m\|\,|\lambda|\,\|x\| \quad = \quad \|e \ominus 1\|\,\|m\|\,\|\lambda * x\| \quad = \quad \|e \ominus 1\|\,\|m\|\,\|\widetilde{x}\| \\ &= \quad \|(e \ominus 1) \cdot (m \cdot \widetilde{x})\| \quad = \quad \|(f \ominus 1) \cdot c\| \quad = \quad \|f \ominus 1\|\,\|c\| \\ &\leq \quad \big(\,\|f\| + \|1\|\,\big)\,\|c\| \quad = \quad 2\,\|c\| \ . \end{aligned}$$

Somit können keine $m, x, c \in K$ mit $\widetilde{\varphi}_{m,c}(x) \neq m \cdot x$ existieren und es folgt insgesamt, dass (K,T) linear ist und $(K,\oplus) = (K,+)$ gilt.

□

(5.10) Bemerkung:

(a) Nach (5.9) ist es somit in der Tat nicht möglich, auf einem normierten, reellen Vektorraum $(V, \oplus, *, \|.\|)$ eine ternäre Verknüpfung T so zu definieren, dass $(V, T, \|.\|)$ einen Ternärkörper mit einem uniformen Absolutwert bildet, dessen metrischer Raum noch isometrisch zu demjenigen des normierten, reellen Vektorraum ist und welcher nicht bereits ein Alternativkörper und isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm ist. Insbesondere lässt sich eine solche ternäre Verknüpfung T auch nur in den Fällen $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 1, 2, 4, 8$ finden; für unendlich-dimensionale normierte, reelle Vektorräume existiert eine solche ternäre Verknüpfung nicht.

(b) Es sei $(K, +, \cdot, \|.\|)$ ein Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert und abelscher Addition. Existiert eine Skalarmultiplikation $* : \mathbb{R} \times K \longrightarrow K$, mit der $(K, +, *, \|.\|)$ einen normierten, reellen Vektorraum bildet, so ist $(K, +, \cdot, \|.\|)$ nach (5.9) bereits isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

In Hinblick auf (5.10,b) möchten wir daher für den Rest dieses Kapitels Kriterien für die Existenz einer solchen reellen Skalarmultiplikation auf einem Cartesischen Körper mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert und abelscher Addition bestimmen, um die Existenz solcher echten Cartesischen Körper mit einem archimedischen, uniformen Absolutwert - die nicht bereits isomorph $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ sind - auszuschließen. Hieraus ergeben sich dann auch entsprechende Kriterien für Quasi- und Fastkörper sowie die Topologien, die von solchen archimedischen, uniformen Absolutwerten induziert werden.

Neben der für eine Vektorraumstruktur notwendigen Kommutativität der Addition ist sofort ersichtlich, dass jeder Cartesische Körper, für den eine solche reelle Skalarmultiplikation existiert, vollständig sein muss,[1] sodass wir uns im Folgenden auf solche beschränken werden.

[1] da er schließlich zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm isomorph ist

(5.11) Lemma:

Es sei $(K,+,\cdot,\|.\|)$ ein vollständiger Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert und abelscher Addition. Ist die Gleichung $\|x+x\| = 2\,\|x\|$ für alle $x \in K$ erfüllt, so gelten:

(a) Für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ ist $\|\underbrace{x+...+x}_{n-\mathrm{mal}}\| = n\,\|x\|$.

(b) Ist die Gruppe $(K,+)$ halbierbar, so ist sie bereits teilbar.[1]

Beweis: Wir führen die verkürzte Notation

$$n \times x \;:=\; \underbrace{x+...+x}_{n-\mathrm{mal}} \qquad \text{für} \quad x \in K \;\text{ und }\; n \in \mathbb{N}$$

ein; beachte, dass $(K,+)$ nach Voraussetzung assoziativ ist.

Zu (a): Sukzessive Anwendung der Voraussetzung liefert zunächst

$$\|2^m \times x\| \;=\; 2^m\,\|x\| \qquad \text{für alle } \; x \in K,\; m \in \mathbb{N}\;.$$

Um die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, genügt es somit, den Induktionsschritt $n{+}1 \to n$ zu vollziehen.[2] Sind hierfür ein $x \in K$ und ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, mit $\|(n+1)\times x\| = (n{+}1)\,\|x\|$ gegeben, so folgt einerseits aus iterativer Anwendung von (5.3,f)

$$\|n \times x\| \overset{(5.3,f)}{\leq} \|(n-1)\times x\| + \|x\| \overset{(5.3,f)}{\leq} \;...\; \overset{(5.3,f)}{\leq} n\,\|x\| \;;$$

andererseits folgt aus (5.3,g) sowie der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \|n \times x\| \;&=\; \big\|\big((n+1)\times x\big) - x\big\| \overset{(5.3,g)}{\geq} \big|\,\|(n+1)\times x\| - \|x\|\,\big| \\ &\overset{(IV)}{=} \big|(n+1)\,\|x\| - \|x\|\,\big| \;=\; n\,\|x\| \;. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt somit Gleichheit und die Behauptung ist gezeigt.

Zu (b): Die Gruppe $(K,+)$ sei halbierbar; es ist zu zeigen, dass es für ein $c \in K$ und ein $n \in \mathbb{N}$ stets ein $x \in K$ mit $n \times x = c$ gibt. Dies werden wir mittels vollständiger Induktion nachweisen: Für $n = 1$ ist die Behauptung offenbar klar; und für $n = 2$ entspricht sie gerade der vorausgesetzten Halbierbarkeit von $(K,+)$.
Es sei nun ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ so gegeben, dass für alle $c' \in K$ stets ein $x' \in K$ mit $n \times x' = c'$ existiert. Weiter sei ein $c \in K$ gegeben; zu finden ist ein $x \in K$ mit $(n+1)\times x = c$. Wir betrachten hierfür die Abbildung

$$\eta_c :\;\; K \longrightarrow K\;, \qquad x \;\mapsto\; c - (n \times x)\;.$$

Die Abbildung η_c ist surjektiv, denn nach der Induktionsvoraussetzung existiert zu einem $z \in K$ stets ein $\widetilde{x} \in K$ mit

$$n \times \widetilde{x} \;=\; c - z\;, \qquad \text{d.h. mit} \qquad \eta_c(\widetilde{x}) \;=\; c - (n \times \widetilde{x}) \;=\; c - (c - z) \;=\; z\;.$$

[1] Hierbei heißt eine Gruppe $(G,\cdot)$ *teilbar*, wenn für alle $x \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $y \in G$ mit $y^n = x$ existiert; und sie heißt *halbierbar*, wenn für alle $x \in G$ ein $y \in G$ mit $y^2 = x$ existiert.

[2] Schließlich ist $2^{\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ unbeschränkt.

Weiter ist η_c eine *expansive* Abbildung des metrischen Raumes $(K, d_{\|.\|})$, denn für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gilt stets

$$\begin{aligned} \|\eta_c(x) - \eta_c(y)\| &= \big\|\big(c - (n \times x)\big) - \big(c - (n \times y)\big)\big\| = \|(n \times y) - (n \times x)\| \\ &= \|n \times (y - x)\| \overset{(a)}{=} n\,\|y - x\| \geq 2\,\|y - x\| \\ &> \|y - x\| \overset{(5.3,e)}{=} \|x - y\| \ . \end{aligned}$$

Nach dem Fixpunktssatz für surjektive, expansive Abbildungen einer vollständigen, normierten Gruppe von SARFRAZ, ALI, LI [38, Thm. 3.14] besitzt η_c daher einen (eindeutigen) Fixpunkt $x_0 \in K$, d.h. es gibt ein Element $x_0 \in K$, welches

$$x_0 = \eta_c(x_0) = c - (n \times x_0) \ , \qquad \text{d.h.} \qquad (n + 1) \times x_0 = c \ ,$$

erfüllt.[1] Insgesamt ist der Induktionsschritt somit vollzogen und $(K, +)$ daher bereits teilbar. □

<u>(5.12) Satz:</u>

Es sei $(K, +, \cdot, \|.\|)$ ein vollständiger Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert und abelscher Addition. Ist $\|1 + 1\| = 2$ und (mindestens) eine der Eigenschaften

- Für alle $x \in K$ ist $(-1)x = -x$.
- Für alle $x \in K$ ist $x(-1) = -x$.

erfüllt, so ist $(K, +, \cdot, \|.\|)$ als Cartesicher Körper mit einem uniformen Absolutwert isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm. Insbesondere sind in diesem Fall dann beide obige Eigenschaften erfüllt.

<u>Beweis:</u> Ist die erste obige Eigenschaft erfüllt, so gilt für alle $x \in K$ stets

$$\begin{aligned} \|x + x\| &= \|x - (-x)\| = \|x - (-1)x\| \overset{(5.2,l)}{=} \|1 - (-1)\|\,\|x\| \\ &= \|1 + 1\|\,\|x\| = 2\,\|x\| \ . \end{aligned}$$

Und ist dagegen die zweite obige Eigenschaft erfüllt, so folgt analog für alle $x \in K$ ebenso

$$\begin{aligned} \|x + x\| &= \|x - (-x)\| = \|x - x(-1)\| \overset{(5.2,k)}{=} \|x\|\,\|1 - (-1)\| \\ &= \|x\|\,\|1 + 1\| = 2\,\|x\| \ . \end{aligned}$$

Somit gilt in jedem Fall $\|x + x\| = 2\,\|x\|$ für alle $x \in K$.

[1] Beachte, dass es sich bei $(K, +, \|.\|)$ in der Tat eine vollständige, normierte Gruppe im dortigen Sinne handelt: Hierbei ist $(K, d_{\|.\|})$ nach Voraussetzung vollständig; das dortige Axiom (1) entspricht unserer Eigenschaft (5.3,f) uniformer Absolutwerte, (2) ist gerade unser Axiom (V1) eines uniformen Absolutwertes und (3) folgt aus unserer Rechenregel (5.3,c) für uniforme Absolutwerte.

Wir zeigen nun weiter, dass die additive Gruppe $(K,+)$ halbierbar ist: Sei hierzu ein $c \in K$ gegeben; zu finden ist ein $z \in K$ mit $z + z = c$. Da $1 \neq -1$ gilt,[1] existieren nach (C4) und (C5) (jeweils eindeutige) Elemente $x, y \in K$ mit

$$\begin{array}{lrcl} & -(-1)x + 1 \cdot x = c\,, & \text{d.h.} & x - (-1)x = c\,, \\ \text{und} & y \cdot 1 - y(-1) = c\,, & \text{d.h.} & y - y(-1) = c\,. \end{array}$$

Da nach Voraussetzung $(-1)x = -x$ oder $y(-1) = -y$ gilt, folgt hieraus

$$\begin{array}{lrcl} & x + x & = x - (-x) = x - (-1)x = c \\ \text{oder} & y + y & = y - (-y) = y - y(-1) = c\,. \end{array}$$

In beiden Fällen ist somit das gesuchte Element gefunden und $(K,+)$ somit halbierbar.

Nach (5.11,a) gilt für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ daher stets $\|n \times x\| = n\,\|x\|$;[2] und nach (5.11,b) ist die Gruppe $(K,+)$ bereits teilbar. Insbesondere ist $(K,+)$ also *torsionsfrei*, denn für alle $x \in K^*$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|n \times x\| = n\,\|x\| \neq 0$ und damit $n \times x \neq 0$.
Nach Timm [47, Satz 2] ist $(K,+)$ somit die additive Gruppe eines Vektorraumes über einem Körper L.[3] Da $(K,+)$ torsionsfrei ist, muss in dieser Situation $\mathrm{char}(L) = 0$ gelten; somit besitzt L einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Primkörper und mit der Einschränkung der Skalarmultiplikation auf diesen bildet K dann insbesondere einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $(K,+,*)$.
Wir zeigen nun zunächst, dass für alle $x \in K$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$ stets $\|\lambda * x\| = |\lambda|\,\|x\|$ gilt, und gehen hierfür schrittweise vor: Sei ein $x \in K$ gegeben. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt zunächst

$$\|n * x\| = \|(n \times 1) * x\| = \|n \times (1 * x)\| = \|n \times x\| \overset{(5.11,a)}{=} n\,\|x\|\;.$$

Somit ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ebenso

$$\|(\pm n) * x\| = \|\pm(n * x)\| \overset{(5.3,c)}{=} \|n * x\| = n\,\|x\| = |\pm n|\,\|x\|\;.$$

Und für alle $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ folgt schließlich

$$q\,\|\lambda * x\| = \|q * (\lambda * x)\| = \|(q\lambda) * x\| = \|p * x\| = |p|\,\|x\| = q|\lambda|\,\|x\|\;.$$

Somit gilt in der Tat $\|\lambda * x\| = |\lambda|\,\|x\|$ für alle $x \in K$ und $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Es bleibt nun noch, die rationale Skalarmultiplikation $*$ so auf $\mathbb{R} \times K$ fortzusetzen, dass die Homogenität bzgl. $\|.\|$ erhalten bleibt - dann folgt mit (5.10,b) bzw. (5.9) die Behauptung. Eine solche stetige Fortsetzung der Skalarmultiplikation auf die Vervollständigung des zugrunde liegenden Körpers ist etwa bei Schaefer, Wolff [39, S.18] angedeutet, aber nicht ausgeführt, sodass wir diese Konstruktion an dieser Stelle explizit nachvollziehen werden.

[1] Denn $1 = -1$ implizierte $1 + 1 = 0$ und den Widerspruch $0 = \|1 + 1\| = 2$.

[2] Mit der dortigen im Beweis eingeführten Notation $n \times x := \underbrace{x + \ldots + x}_{n-\text{mal}}$ für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$.

[3] Genauer folgt dies aus der dortigen Implikation **A3** $\Rightarrow$ **A5**; beachte, dass die Forderung von Charakteristik 0 gerade der Torsionsfreiheit von $(K,+)$ entspricht.

Hierzu definieren für alle $x \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ das Skalarprodukt $\lambda * x$ durch

$$\lambda * x \quad := \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n * x$$
$$\text{für eine beliebige Folge } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lambda_n \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \ .$$

Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, existiert stets eine rationale Folge, die ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ als Grenzwert besitzt. Weiter setzt diese Konstruktion - sofern sie wohldefiniert ist - offenbar die rationale Skalarmuliplikation fort.[1] Es bleibt zu zeigen, dass diese Konstruktion wohldefiniert ist und $(K, +, *, \|.\|)$ einen normierten, reellen Vektorraum bildet.

- $*$ ist wohldefiniert: Wir zeigen zunächst, dass für ein $x \in K$ und eine solche konvergente, rationale Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die obige Folge $(\lambda_n * x)_{n\in\mathbb{N}}$ stets im metrischen Raum $(K, d_{\|.\|})$ konvergiert; hierfür genügt es mit der Vollständigkeit zu zeigen, dass sie eine Cauchy-Folge ist. Im Fall $x = 0$ ist $(\lambda_n * x)_{n\in\mathbb{N}}$ die Nullfolge und dies trivial erfüllt; es sei daher im Folgenden $x \neq 0$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.
  Da $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\lambda_m - \lambda_n| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ für alle $m, n > n_0$. Es folgt für alle $m, n > n_0$ daher auch
  $$\|(\lambda_m * x) - (\lambda_n * x)\| \quad = \quad \|(\lambda_m - \lambda_n) * x\| \quad = \quad |\lambda_m - \lambda_n| \, \|x\| \quad < \quad \varepsilon \ .$$
  Somit ist $(\lambda_n * x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und besitzt einen Grenzwert $y \in K$.
  Es bleibt nun noch die Unabhängigkeit dieses Grenzwertes von der genauen Gestalt der konvergenten, rationalen Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu zeigen: Ist hierfür eine weitere Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mu_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \lambda$ gegeben, so besitzt die Folge $(\mu_n * x)_{n\in\mathbb{N}}$ nach obiger Überlegung einen Grenzwert $z \in K$.
  Im Fall $x = 0$ sind $(\lambda_n * x)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mu_n * x)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die Nullfolge und somit identisch; es sei daher im Folgenden $x \neq 0$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Dann gibt es insbesondere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|y - (\lambda_n * x)\|, \|(\mu_n * x) - z\| < \frac{\varepsilon}{4}$ sowie $|\lambda_n - \lambda|, |\lambda - \mu_n| < \frac{\varepsilon}{4\|x\|}$ und es folgt mit der Dreiecksungleichung:
  $$\begin{aligned} \|y - z\| \quad &\leq \quad \|y - (\lambda_n * x)\| \ + \ \|(\lambda_n * x) - (\mu_n * x)\| \ + \ \|(\mu_n * x) - z\| \\ &< \quad \tfrac{\varepsilon}{4} \ + \ \|(\lambda_n - \mu_n) * x)\| \ + \ \tfrac{\varepsilon}{4} \qquad = \qquad \tfrac{\varepsilon}{2} \ + \ |\lambda_n - \mu_n| \, \|x\| \\ &\leq \quad \tfrac{\varepsilon}{2} \ + \ |\lambda_n - \lambda| \, \|x\| \ + \ |\lambda - \mu_n| \, \|x\| \qquad < \qquad \varepsilon \ . \end{aligned}$$
  Somit muss $y = z$ gelten und die Konstruktion ist insgesamt wohldefiniert.
- $(K, +, *)$ ist ein reeller Vektorraum: Es sind die Verträglichkeit der Skalar- mit der reellen Körpermultiplikation sowie die beiden Distributivgesetze zu zeigen.

  Zunächst seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ sowie ein $x \in K$ gegeben. Im Fall $\lambda = 0$ ist sofort $(\lambda\mu) * x = 0 = \lambda * (\mu * x)$; es sei daher im Folgenden $\lambda \neq 0$.

[1] Wähle für $\lambda \in \mathbb{Q}$ etwa die konstante Folge $\lambda_n = \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da die Folge $(\lambda_n \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lambda\mu$ konvergiert, ist nach Konstruktion einerseits $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n\mu_n) * x = (\lambda\mu) * x$; andererseits gibt es zu einem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\lambda_n - \lambda| \leq |\lambda|$, $\|\mu_n * x - \mu * x\| < \frac{\varepsilon}{3|\lambda|}$ sowie $\|\lambda_n * (\mu * x) - \lambda * (\mu * x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und daher mit

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_n\mu_n) * x - \lambda * (\mu * x)\| \quad &= \quad \|\lambda_n * (\mu_n * x) - \lambda * (\mu * x)\| \\
\leq \quad \|\lambda_n * (\mu_n * x) - \lambda_n * (\mu * x)\| \ &+ \ \|\lambda_n * (\mu * x) - \lambda * (\mu * x)\| \\
< \quad |\lambda_n| \, \|\mu_n * x - \mu * x\| \ &+ \ \tfrac{\varepsilon}{3} \\
\leq \quad |\lambda_n - \lambda| \, \|\mu_n * x - \mu * x\| \ + \ |\lambda| \, \|\mu_n * x - \mu * x\| \ &+ \ \tfrac{\varepsilon}{3} \qquad < \qquad \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda * (\mu * x)$ ebenfalls Grenzwert der Folge $((\lambda_n\mu_n) * x)_{n\in\mathbb{N}}$ und aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt daher $(\lambda\mu) * x = \lambda * (\mu * x)$.

Nun seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu$ sowie ein $x \in K$ gegeben. Da die Folge $(\lambda_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\lambda + \mu$ konvergiert, ist einerseits $\lim_{n\to\infty}(\lambda_n + \mu_n) * x = (\lambda + \mu) * x$; andererseits gibt es zu einem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|\lambda_n * x - \lambda * x\|$, $\|\mu_n * x - \mu * x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und daher mit

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_n + \mu_n) * x - (\lambda * x + \mu * x)\| \quad &= \quad \|(\lambda_n * x + \mu_n * x) - (\lambda * x + \mu * x)\| \\
&\leq \quad \|\lambda_n * x - \lambda * x\| \ + \ \|\mu_n * x - \mu * x\| \quad < \quad \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda * x + \mu * x$ ebenfalls Grenzwert der Folge $((\lambda_n + \mu_n) * x)_{n\in\mathbb{N}}$ und aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt daher $(\lambda + \mu) * x = \lambda * x + \mu * x$.

Schließlich seien $x, y \in K$, ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ gegeben. Nach Konstruktion der Skalarmultiplikation ist $\lim_{n\to\infty} \lambda_n * (x + y) = \lambda * (x + y)$; andererseits gibt es zu einem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ stets ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|\lambda_n * x - \lambda * x\|, \|\lambda_n * y - \lambda * y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und daher mit

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n * (x + y) - (\lambda * x + \lambda * y)\| \quad &= \quad \|(\lambda_n * x + \lambda_n * y) - (\lambda * x + \lambda * y)\| \\
&\leq \quad \|\lambda_n * x - \lambda * x\| \ + \ \|\lambda_n * y - \lambda * y\| \quad < \quad \varepsilon \, .
\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda * x + \lambda * y$ ebenfalls Grenzwert der Folge $(\lambda_n * (x + y))_{n\in\mathbb{N}}$ und aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes folgt daher $\lambda * (x + y) = \lambda * x + \lambda * y$.

- <u>$\|.\|$ ist homogogen bzgl. $*$:</u> Wir zeigen nun noch, dass $\|\lambda * x\| = |\lambda| \, \|x\|$ für alle $x \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt; seien hierfür $x \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ gegeben. Im Fall $x = 0$ ist $\|\lambda * x\| = 0 = |\lambda| \, \|x\|$; es sei daher im Folgenden $x \neq 0$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.

Dann gibt es insbesondere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|\lambda * x - \lambda_n * x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $|\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \big|\, \|\lambda * x\| - |\lambda|\, \|x\| \,\big| &\leq \big|\, \|\lambda * x\| - |\lambda_n|\, \|x\| \,\big| + \big| |\lambda_n|\, \|x\| - |\lambda|\, \|x\| \,\big| \\ &= \big|\, \|\lambda * x\| - \|\lambda_n * x\| \,\big| + \big| |\lambda_n| - |\lambda| \big|\, \|x\| \\ &\overset{(5.3,g)}{\leq} \|\lambda * x - \lambda_n * x\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|x\| \quad < \quad \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Somit muss in der Tat stets $\|\lambda * x\| = |\lambda|\, \|x\|$ gelten.

Die Behauptung folgt insgesamt daher aus (5.10,b) bzw. (5.9).

□

(5.13) Korollar:

(a) Es sei $(K, +, \cdot, \|.\|)$ ein vollständiger Quasikörper mit einem uniformen Absolutwert. Ist $\|1 + 1\| = 2$, so ist $(K, +, \cdot, \|.\|)$ als Quasikörper mit einem uniformen Absolutwert isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

(b) Es sei $(K, +, \cdot, \|.\|)$ ein vollständiger Fastkörper mit einem uniformen Absolutwert. Ist $\|1 + 1\| = 2$, so ist $(K, +, \cdot, \|.\|)$ als Fastkörper mit einem uniformen Absolutwert isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

Beweis: *Zu (a):* Da jeder Quasikörper insbesondere ein Cartesicher Körper mit abelscher Addition ist und nach Voraussetzung $\|1 + 1\| = 2$ gilt, ist nur eine der Eigenschaften aus (5.12) nachzuweisen: Da in $(K, +, \cdot)$ das linksseitige Distributivgesetz gilt, ist für alle $x \in K$ dabei direkt

$$x + x(-1) \ = \ x\big(1 + (-1)\big) \ = \ x \cdot 0 \ = \ 0 \ , \qquad \text{d.h.} \qquad x(-1) \ = \ -x \ .$$

Zu (b): Da jeder Fastkörper insbesondere ein Quasikörper ist, folgt die Behauptung direkt aus (a) - denn da $(K^*, \cdot)$ nun zusätzlich assoziativ ist, kann ein Fastkörper nicht zum (echten) Alternativkörper $\mathbb{O}$ isomorph sein.

□

Ist hierbei eine *Vervollständigung* eines Ternärkörpers mit einem uniformen Absolutwert[1] möglich, so kann (5.12) offenbar dahin gehend verallgemeinert werden, dass sich ein solcher, nicht notwendig vollständiger Cartesischer Körper als Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert in $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm einbetten lässt; insbesondere wäre dieser dann ebenfalls bereits ein Alternativkörper.

[1] Etwa im Stile von Schörner [40, Thm. 3]: Dort wird in Analogie zum klassischen Fall Rang-1-bewerteter Körper nachgewiesen, dass ein uniform bewerteter Ternärkörper (K, T, v), dessen uniforme Bewertung v als Werteloop eine Untergruppe von $\mathbb{R}_{>0}$ besitzt, eine (bis auf K-Isomorphie) eindeutige *Vervollständigung* besitzt.

Wir werden nun kurz die Topologien der Cartesischen Körper bzw. Quasi- / Fastkörper aus (5.12) bzw. (5.13) diskutieren:

(5.14) Korollar:

Es seien $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ ein topologischer Cartesischer Körper mit abelscher Addition, welcher (mindestens) eine der Eigenschaften

- Für alle $x \in K$ ist $(-1)x = -x$.
- Für alle $x \in K$ ist $x(-1) = -x$.

erfüllt. Weiter sei $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret und es gelten:

(i) $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

(ii) R_a ist beschränkt.

(iii) Es sind $N + N \not\subset N$ und $N + N \subset (1 + 1)N$.

Existiert unter den archimedischen, uniformen Absolutwerten $\|.\|$ auf $(K, +, \cdot)$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ und $\|1 + 1\| = 2$ ein uniformer Absolutwert derart, dass $(K, +, \cdot, \|.\|)$ vollständig ist, so ist der topologische Raum $(K, \mathscr{T})$ homöomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der Topologie der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

Beweis: Zunächst sei bemerkt, dass in dieser Situation stets archimedische, uniforme Absolutwerte $\|.\|$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ und $\|1 + 1\| = 2$ nach (5.7,b) existieren.
Gibt es nun einen solchen uniformen Absolutwert derart, dass $(K, +, \cdot, \|.\|)$ vollständig ist, so ist $(K, +, \cdot, \|.\|)$ nach (5.12) als Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert isomorph $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm, sodass für die jeweiligen topologischen Räume direkt die Behauptung folgt.

$\square$

(5.15) Korollar:

(a) Es seien $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ ein topologischer Quasikörper, $\mathscr{T}$ weder diskret noch indiskret und es gelten:

(i) $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ ist vom Typ V.

(ii) R_a ist beschränkt.

(iii) Es sind $N + N \not\subset N$ und $N + N \subset (1 + 1)N$.

Existiert unter den archimedischen, uniformen Absolutwerten $\|.\|$ auf $(K, +, \cdot)$ mit $\mathscr{T}_{\|.\|} = \mathscr{T}$ und $\|1 + 1\| = 2$ ein uniformer Absolutwert derart, dass $(K, +, \cdot, \|.\|)$ vollständig ist, so ist der topologische Raum $(K, \mathscr{T})$ homöomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der Topologie der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

(b) Ist $(K, +, \cdot, \mathscr{T})$ in der Situation aus (a) sogar ein topologischer Fastkörper, so ist der topologische Raum $(K, \mathscr{T})$ homöomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ mit der Topologie der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

Beweis: *Zu (a):* Die Behauptung folgt direkt aus (5.14) sowie dem Beweis von (5.13,a).

Zu (b): Die Behauptung folgt direkt aus (a) und der Assoziativität von $(K^*, \cdot)$, vgl. (5.13,b). □

Wir möchten den ersten Teil der Arbeit mit einem weiteren Kriterium im Stile von (5.12) abschließen, welches auf algebraische Voraussetzungen an den Cartesischen Körper verzichtet und stattdessen die Gültigkeit der *Parallelogramm-Identität* für den uniformen Absolutwert fordert - welche sich als stärkere Eigenschaft herausstellen wird.

(5.16) Satz:

Es sei $(K, +, \cdot, \|.\|)$ ein vollständiger Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert, welcher die *Parallelogramm-Identität*

$$\text{(PI)} \qquad \|x+y\|^2 \;+\; \|x-y\|^2 \;=\; 2\,\|x\|^2 \;+\; 2\,\|y\|^2 \qquad \text{für alle } \; x, y \in K$$

erfüllt. Dann ist $(K, +, \cdot, \|.\|)$ als Cartesischer Körper mit einem uniformen Absolutwert isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$ mit der gewöhnlichen Vektorraum-Norm.

Beweis: Wir weisen die Voraussetzungen von (5.12) nach: Aus der Parallelogramm-Identität folgt zunächst

$$\|x+x\|^2 \overset{\text{(PI)}}{=} 2\,\|x\|^2 \;+\; 2\,\|x\|^2 \;-\; \|x-x\|^2 \;=\; 4\,\|x\|^2 \qquad \text{für alle } \; x \in K \;,$$

d.h. $(*)$ $\quad \|x+x\| \;=\; 2\,\|x\| \qquad$ für alle $\; x \in K \;.$

Insbesondere gilt also $\|1+1\| = 2$. Ebenso ergibt sich für alle $x \in K$ stets

$$\begin{aligned} \|x+(-1)x\|^2 &\overset{\text{(PI)}}{=} 2\,\|x\|^2 \;+\; 2\,\|(-1)x\|^2 \;-\; \|x-(-1)x\|^2 \\ &\overset{(5.2,\mathrm{l})}{=} 2\,\|x\|^2 \;+\; 2\big(\,\|-1\|\,\|x\|\,\big)^2 \;-\; \big(\,\|(1-(-1))\|\,\|x\|\,\big)^2 \\ &\overset{(5.3,\mathrm{b})}{=} 2\,\|x\|^2 \;+\; 2\,\|x\|^2 \;-\; \|1+1\|^2\,\|x\|^2 \\ &\overset{(*)}{=} 4\,\|x\|^2 \;-\; 4\,\|x\|^2 \qquad = \qquad 0 \;. \end{aligned}$$

Somit ist für alle $x \in K$ stets $x + (-1)x = 0$, d.h. $(-1)x = -x$.[1]

[1] Analog kann natürlich auch die andere Eigenschaft $x(-1) = -x$ für alle $x \in K$ nachgewiesen werden.

Es bleibt somit nur noch zu zeigen, dass $(K,+)$ abelsch ist: Beachte hierfür zunächst, dass für alle $x, y \in K$ stets

$$(**) \qquad \|x+y\| \;=\; \|(x+y)+(x-x)\| \;=\; \big\|\big(x+(y+x)\big)-x\big\| \overset{(5.2,\mathrm{f})}{=} \|y+x\|$$

gilt; hiermit folgt mit mehrmaliger Anwendung von (PI) für alle $x, y \in K$ dann

$$\begin{aligned}
& \|(x+y)-(y+x)\|^2 \\
\overset{(\mathrm{PI})}{=}\; & 2\|x+y\|^2 \;+\; 2\|y+x\|^2 \;-\; \|(x+y)+(y+x)\|^2 \\
\overset{(**)}{=}\; & 4\|x+y\|^2 \;-\; \big\|\big(x+(y+y)\big)+x\big\|^2 \\
\overset{(\mathrm{PI})}{=}\; & 4\|x+y\|^2 \;-\; 2\|x+(y+y)\|^2 \;-\; 2\|x\|^2 \;+\; \big\|\big(x+(y+y)\big)-x\big\|^2 \\
\overset{(5.2,\mathrm{f})}{=}\; & 4\|x+y\|^2 \;-\; 2\|(x+y)+y\|^2 \;-\; 2\|x\|^2 \;+\; \|y+y\|^2 \\
\overset{(*)}{=}\; & 4\|x+y\|^2 \;-\; 2\|(x+y)+y\|^2 \;-\; 2\|x\|^2 \;+\; 4\|y\|^2 \\
\overset{(\mathrm{PI})}{=}\; & 4\|x+y\|^2 \;-\; 4\|x+y\|^2 \;-\; 4\|y\|^2 \;+\; 2\|(x+y)-y\|^2 \;-\; 2\|x\|^2 \;+\; 4\|y\|^2 \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Für alle $x, y \in K$ ist daher stets $(x+y)-(y+x) = 0$, d.h. $x+y = y+x$, und $(K,+)$ ist somit abelsch. Insgesamt folgt mit (5.12) also die Behauptung.

$\square$

Kapitel 6

v-Ableitungen uniform bewerteter Quasikörper

Bei der Untersuchung der Unabhängigkeit der Körperaxiome für endliche Körper entwickelte Dickson [8] zu Beginn des letzten Jahrhunderts ein Konstruktionsverfahren für echte, endliche Fastkörper, welches eine unendliche Anzahl von Beispielen generierte. Drei Jahrzehnte später erweiterte Zassenhaus [52] die Dickson-Konstruktion und wies nach, dass bis auf sieben Ausnahme-Isomorphietypen alle endlichen Fastkörper durch diesen Prozess entstehen. Karzel [26] führte in den Sechzigerjahren bei der Betrachtung nicht notwendig endlicher Fastkörper[1] schließlich den Begriff einer *Kopplung* ein; einer Abbildung

$$\Phi: \quad K^* \longrightarrow \operatorname{Aut}(K) \ , \quad x \mapsto \Phi_x \ , \quad \text{mit} \quad \Phi_x \circ \Phi_y = \Phi_{x\Phi_x(y)} \quad \text{für alle} \quad x, y \in K^* \ .$$

Ist $(K, +, \cdot)$ ein Fastkörper und Φ eine Kopplung auf K, so wies Karzel nach, dass durch

$$x \diamond y \quad := \quad \begin{cases} x\Phi_x(y) & \text{falls} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{für} \quad x, y \in K$$

eine Multiplikation auf K definiert wird, mit der $(K, +, \diamond)$ ebenfalls einen Fastkörper bildet. Die Dicksonschen Fastkörper[2] ergeben sich hierbei als genau die Fastkörper, die mittels einer Kopplung aus einem Körper entstehen.

In den Folgejahren wandten sich einige Mathematiker einer Übertragung und Verallgemeinerung dieses Konzeptes auf Quasikörper zu: Foulser [11] zeigte 1967 eine an die Idee einer Kopplung angelehnte Methode auf, welche einige endliche Quasikörper liefert, und Dembowski [7][3] entwarf 1968 schließlich ein Konstruktionsverfahren, welches alle endlichen Quasikörper generiert. Timm [48] übertrug 1970 dieses Konzept schließlich als *Ableitung*[4] auf

[1] Beachte, dass diese Fastkörper nicht notwendig das Axiom (Q4) erfüllen müssen und daher keine Fastkörper in unserem Sinne sind. Da im endlichen Fall das Axiom (Q4) bereits aus den anderen folgt, Pickert [32, S.90, S.94], stimmen in diesem Fall die beiden Fastkörper-Begriffe aber überein.

[2] Für eine Erweiterung dieser Defintion auf unendliche Fastkörper siehe Ellers, Karzel [9, Def. 1].

[3] siehe Result 4 auf S.222

[4] Dies ist eine Abbildung Φ von K^* in die Menge der Gruppen-Epimorphismen der additiven Gruppe von K, welche nicht notwendig die obige Kopplungsgleichung erfüllen muss.

die Klasse der Fastringe, also insbesondere auf die Klasse der Quasikörper. Als eine gute Einführung in dieses Thema sei auf das Buch von WÄHLING [50, §II, §III] verwiesen.

Eine weitere Konstruktionsmethode von Quasikörpern stammt von ANDRÉ [2, Satz 9], welche mittels einer gewissen Menge von Untervektorräumen eines Vektorraumes - dort *Kongruenz*[1] genannt - eine Quasikörper-Multiplikation auf diesem konstruiert. Ebenso ist eine Darstellung dieser mittels bestimmter Endomorphismen des Vektorraumes möglich, welche wir in dieser Arbeit im Folgenden als *Spread Set* bezeichnen, siehe hierzu KNARR [27, Def. 1.10].

Das Ziel der nächsten beiden Kapitel ist es nun, auf diesen Ideen aufzubauen und das Konzept auf uniform bewertete Quasikörper $(K, +, \cdot, v)$ mit Respekt für die uniforme Bewertung v zu übertragen. Es werden zunächst Eigenschaften einer solchen Ableitung Φ erörtert, welche mit obiger Konstruktion wieder einen uniform bewerteten Quasikörper $(K, +, \diamond, v)$ liefert, und anschließend gezeigt, dass jede solche Quasikörper-Multiplikation auf K auf diese Weise entsteht. Hierbei werden wir uns auf die Darstellung mittels einer Ableitung bzw. Kopplung anstatt durch *Spreads* bzw. *Spread Sets* fokussieren.[2] Am Ende dieses Kapitels wird noch auf v-Ableitungen sphärisch vollständiger Quasikörper $(K, +, \cdot, v)$ eingegangen und diese Konstruktion mit der von KALHOFF [22, Prop. 3.7] in Verbindung gesetzt, welche ebenfalls die Motivation für diese Fragestellung lieferte.

Für das gesamte Kapitel seien $(K, +, \cdot, v)$ ein uniform bewerteter Quasikörper mit Primkörper k sowie Γ die Werteloop von v. Weiter bezeichne $\cdot/.$ bzw. $.\backslash\cdot$ stets die jeweilige Quotientenbildung bzgl. der Quasikörper-Multiplikation $\cdot$, auch wenn auf K eine weitere Multiplikation gegeben sein sollte; ebenso sei immer $xy := x \cdot y$ die Kurzschreibweise bzgl. dieser gegebenen Quasikörper-Multiplikation. Schließlich bezeichne $\mathrm{GL}_k(K)$ die Menge aller Vektorraum-Automorphismen des k-(Rechts-)Vektorraumes K und $\mathrm{Epi}(K, +)$ die Menge aller Gruppen-Epimorphismen der abelschen Gruppe $(K, +)$.

v-treue Ableitungen

Wir beginnen direkt mit der Definition einer solchen Ableitungsabbildung, welche eine weitere Quasikörper-Multiplikation, die die uniforme Bewertung respektiert, hervorbringen wird: Diese Definition ist hierbei gleichermaßen von den Ableitungen von Quasikörpern von TIMM [48, 2.17], dem Konstruktionsverfahren von Quasikörpern mittels *Spreads Sets* aus KNARR [27, Def. 1.10] sowie der Konstruktion uniform bewerteter Quasikörper von KALHOFF [22, Prop. 3.7] inspiriert.

[1] Für diese findet sich auch die Bezeichnung *Spread*, vgl. KNARR [27, Def. 1.4].

[2] Denn hierbei ergibt sich der günstige Umstand, dass die Abbildungen Φ_x für $x \in K^*$ stets Isometrien des ultrametrischen Raumes (K, d_v) sind.

(6.1) Definition: (vgl. Kalhoff [22, Prop. 3.7], Knarr [27, Def. 1.10], Timm [48, 2.17])

Eine Abbildung

(VA0) $\quad \Phi: \; K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) \; , \qquad x \;\mapsto\; \Phi(x) \;=:\; \Phi_x \; ,$

heißt *v-treue Ableitung auf* $(K,+,\cdot,v)$,[1] wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(VA1) Für alle $x, y \in K^*$ gilt $v\big(\Phi_x(y)\big) = v(y)$.

(VA2) Es gibt ein $e \in K^*$, sodass $\Phi_x(e) = 1$ und $\Phi_e(x) = {}_e\backslash^x$ für alle $x \in K^*$ gelten.

(VA3) Für alle $x \in K^*$ ist die Abbildung

$$\varrho_x : \;\; K^* \longrightarrow K^* \; , \qquad y \;\mapsto\; y\Phi_y(x) \; ,$$

surjektiv.[2]

(VA4) Für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ ist die Abbildung

$$\pi_{x,y} : \;\; K \longrightarrow K \; , \qquad z \;\mapsto\; x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) \; ,$$

surjektiv;[3] und für alle $x, y, z \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ gilt weiter

$$v\big(\pi_{x,y}(z)\big) \;=\; v(x-y)v(z) \; .$$

(6.2) Bemerkung:

Es sei Φ eine v-treue Ableitung auf K.

(a) Für alle $x \in K^*$ ist die lineare Abbildung Φ_x nach (VA1) eine Isometrie des ultrametrischen Raumes (K, d_v). Insbesondere ist auch die Umkehrabbildung Φ_x^{-1} für $x \in K^*$ stets linear und eine Isometrie von (K, d_v).

(b) Das Element $e \in K^*$ aus (VA2) ist eindeutig bestimmt, denn für ein Element $e' \in K^*$, welches ebenfalls $\Phi_x(e') = 1$ und $\Phi_{e'}(x) = {}_{e'}\backslash^x$ für alle $x \in K^*$ erfüllt, folgt sofort

$$1 \;=\; \Phi_e(e') \;\overset{\text{(VA2)}}{=}\; {}_e\backslash^{e'} \; , \qquad \text{d.h.} \qquad e \;=\; e' \; .$$

Weiter erfüllt dieses Element

$$v(e) \;\overset{\text{(VA1)}}{=}\; v\big(\Phi_e(e)\big) \;\overset{\text{(VA2)}}{=}\; v(1) \;=\; 1$$

und es muss somit notwendigerweise $e \in A_v \backslash I_v$ gelten.

[1] Sind die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ sowie die uniforme Bewertung v aus dem Zusammenhang klar, so sprechen wir auch kurz von einer *v-treuen Ableitung auf* K.

[2] Im Gegensatz zu Timm [48, 2.17] müssen wir nur die Surjektivität der Abbildungen ϱ_x fordern und nicht ihre jeweilige Bijektivität; diese wird sich direkt aus der Einbeziehung der uniformen Bewertung ergeben, siehe (6.3,b).

[3] Ebenso genügt hier aus demselben Grund die Surjektivität der Abbildungen $\pi_{x,y}$ im Gegensatz zur Bijektivität aus der Konstruktion mit *Spread Sets* aus Knarr [27, Def. 1.10], siehe (6.3,c).

(c) Die in (VA2) definierte Abbildung Φ_e ist in der Tat stets ein Automorphismus des k-(Rechts-)Vektorraumes K; denn sie ist offenbar bijektiv[1] und für alle $x, y \in K$ und $\lambda \in k \subset N(K)$ gilt

$$\begin{aligned} e\Phi_e(x + y\lambda) &= e \cdot {}_e\backslash^{(x+y\lambda)} = x + y\lambda = e \cdot {}_e\backslash^x + (e \cdot {}_e\backslash^y)\lambda \\ &= e \cdot {}_e\backslash^x + e \cdot {}_e\backslash^{(y\lambda)} = e\big({}_e\backslash^x + {}_e\backslash^{(y\lambda)}\big) = e\big(\Phi_e(x) + \Phi_e(y)\lambda\big) . \end{aligned}$$

Somit gilt stets $\Phi_e(x + y\lambda) = \Phi_e(x) + \Phi_e(y)\lambda$ und Φ_e ist linear. Weiter gilt für diese Abbildung insbesondere $\Phi_e(e) = {}_e\backslash^e = 1$, d.h. diese Definition zur ersten Behauptung in (VA2) konsistent.

(6.3) Satz:

(a) (vgl. Knarr [27, S.10], Timm [48, 2.17]) Eine Abbildung Φ ist genau dann eine v-treue Ableitung auf K, wenn neben den Axiomen (VA1)-(VA4) noch

(VA0$^-$) $\quad \Phi : \ K^* \longrightarrow \mathrm{Epi}(K, +) , \qquad x \mapsto \Phi(x) =: \Phi_x ,$

erfüllt ist.

Ist Φ eine v-treue Ableitung auf K, so gelten weiter:

(b) Für alle $x \in K^*$ ist die Abbildung ϱ_x aus (VA3) bijektiv.

(c) Für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ ist die Abbildung $\pi_{x,y}$ aus (VA4) ein Vektorraum-Automorphismus des k-(Rechts-)Vektorraumes K.

Beweis: *Zu (a):* $\Longrightarrow$: Klar.

$\Longleftarrow$: Es sei eine Abbildung Φ gegeben, welche (VA0$^-$) sowie (VA1)-(VA4) erfüllt; für (VA0) ist nur noch die Injektivität sowie die Homogenität der Abbildungen Φ_x für $x \in K^*$ zu zeigen. Sei hierfür ein $x \in K^*$ gegeben.
Wegen $\Phi_x \in \mathrm{End}(K, +)$ genügt es für die Injektivität $\mathrm{Kern}(\Phi_x) = \{0\}$ zu zeigen; sei hierfür ein $y \in \mathrm{Kern}(\Phi_x)$ gegeben. Wäre $y \neq 0$, so folgte direkt der Widerspruch

$$v(y) \overset{\text{(VA1)}}{=} v\big(\Phi_x(y)\big) = v(0) = 0 , \qquad \text{d.h.} \qquad y = 0 .$$

Somit muss $y = 0$ gelten.
Für den Nachweis der Homogenität seien ein $y \in K$ und ein $\lambda \in k$ gegeben. Im Fall $\lambda = 0$ ist wegen $\Phi_x(y\lambda) = 0 = \Phi_x(y)\lambda$ nichts zu zeigen; im Folgenden sei daher $\lambda \in k^*$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der verkürzten Schreibweise $n \times z := \underbrace{z + ... + z}_{n-\text{mal}}$ für $z \in K$ dann zunächst

$$\begin{aligned} \Phi_x\big(yn\big) &= \Phi_x\big(y(n \times 1)\big) = \Phi_x\big(n \times (y \cdot 1)\big) = \Phi_x(n \times y) \\ &\overset{(\text{VA0}^-)}{=} n \times \Phi_x(y) = n \times \big(\Phi_x(y) \cdot 1\big) = \Phi_x(y)(n \times 1) = \Phi_x(y)n . \end{aligned}$$

[1] Denn $(K^*, \cdot)$ ist eine Loop und es gilt ${}_e\backslash^0 = 0$.

Ist $k \cong \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p, so gilt $\lambda = n \times 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung ist daher bereits gezeigt. Ist dagegen $k \cong \mathbb{Q}$, oBdA $k = \mathbb{Q}$, so ist $\lambda = \frac{\pm p}{q}$ für gewisse $p, q \in \mathbb{N}$ und es gilt somit (beachte $q \in k \subset N(K)$)

$$\begin{aligned} \Phi_x(y\lambda)q \quad &= \quad \Phi_x\big((y\lambda)q\big) \quad = \quad \Phi_x\big(y(\lambda q)\big) \quad = \quad \Phi_x\big(y(\pm p)\big) \quad = \quad \Phi_x\big(\pm(yp)\big) \\ &\overset{(\text{VA}0^-)}{=} \pm\,\Phi_x(yp) \quad = \quad \pm\big(\Phi_x(y)p\big) \quad = \quad \Phi_x(y)(\pm p) \quad = \quad \Phi_x(y)(\lambda q) \quad = \quad \big(\Phi_x(y)\lambda\big)q\ , \end{aligned}$$

d.h. es ist in der Tat $\Phi_x(y\lambda) = \Phi_x(y)\lambda$.

Zu (b): Es seien ein $x \in K^*$ und die Abbildung ϱ_x aus (VA3) gegeben; mit (VA3) ist nur noch die Injektivität von ϱ_x zu zeigen. Existierten $y, z \in K^*$ mit $y \neq z$ und $\varrho_x(y) = \varrho_x(z)$, wäre zunächst

$$\begin{aligned} v(y)v(x) \quad &\overset{(\text{VA1})}{=} \quad v(y)v\big(\Phi_y(x)\big) \quad = \quad v\big(y\Phi_y(x)\big) \quad = \quad v\big(\varrho_x(y)\big) \\ &= \quad v\big(\varrho_x(z)\big) \quad = \quad v\big(z\Phi_z(x)\big) \quad = \quad v(z)v\big(\Phi_z(x)\big) \quad \overset{(\text{VA1})}{=} \quad v(z)v(x) \end{aligned}$$

und es folgte daher $v(y) = v(z)$. Mit der Gleichung aus (VA4) wäre somit

$$0 \quad = \quad v\big(\varrho_x(y) - \varrho_x(z)\big) \quad = \quad v\big(y\Phi_y(x) - z\Phi_z(x)\big) \quad = \quad v\big(\pi_{y,z}(x)\big) \quad = \quad v(y-z)v(x)\ ,$$

d.h. es folgte $v(y - z) = 0$, also der Widerspruch $y = z$. Somit muss für $y, z \in K^*$ mit $y \neq z$ stets auch $\varrho_x(y) \neq \varrho_x(z)$ gelten und ϱ_x ist damit injektiv.

Zu (c): Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ sowie die Abbildung $\pi_{x,y}$ aus (VA4) gegeben; mit (VA4) ist nur noch Linearität sowie die Injektivität von $\pi_{x,y}$ zu zeigen. Für alle $z, z' \in K$ und $\lambda \in k \subset N(K)$ gilt

$$\begin{aligned} \pi_{x,y}(z + z'\lambda) \quad &= \quad x\Phi_x(z + z'\lambda) - y\Phi_y(z + z'\lambda) \\ &\overset{(\text{VA0})}{=} \quad x\big(\Phi_x(z) + \Phi_x(z')\lambda\big) - y\big(\Phi_y(z) + \Phi_y(z')\lambda\big) \\ &= \quad x\Phi_x(z) + x\big(\Phi_x(z')\lambda\big) - y\Phi_y(z) - y\big(\Phi_y(z')\lambda\big) \\ &= \quad x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) + \big(x\Phi_x(z')\big)\lambda - \big(y\Phi_y(z')\big)\lambda \\ &= \quad \big(x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z)\big) + \big(x\Phi_x(z') - y\Phi_y(z')\big)\lambda \quad = \quad \pi_{x,y}(z) + \pi_{x,y}(z')\lambda\ , \end{aligned}$$

d.h. $\pi_{x,y}$ ist eine lineare Abbildung des k-(Rechts-)Vektorraumes K. Für die Injektivität von $\pi_{x,y}$ genügt es somit, noch $\mathrm{Kern}(\pi_{x,y}) = \{0\}$ zu zeigen; sei hierfür ein $z \in \mathrm{Kern}(\pi_{x,y})$ gegeben. Wäre $z \neq 0$, so wäre die Abbildung ϱ_z definiert und es folgte

$$0 \quad = \quad \pi_{x,y}(z) \quad = \quad x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) \quad = \quad \varrho_z(x) - \varrho_z(y)\ , \qquad \text{d.h.} \qquad \varrho_z(x) \quad = \quad \varrho_z(y)\ .$$

Mit der Bijektivität von ϱ_z aus (b) folgte somit der Widerspruch $x = y$; somit muss $z = 0$ gelten.

□

Dass eine v-treue Ableitung im Stile der Ableitung von Quasikörpern wirklich wieder einen uniform bewerteten Quasikörper $(K,+,\diamond,v)$ liefert und jeder solche auf diese Weise entsteht, werden wir nun in den folgenden Sätzen sehen:

(6.4) Definition und Satz: (vgl. KALHOFF [22, Prop. 3.7], TIMM [48, 2.17])

Ist Φ eine v-treue Ableitung auf K, so wird durch

$$x \diamond y \quad := \quad x \diamond_\Phi y \quad := \quad \begin{cases} x\Phi_x(y) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in K$$

eine Verknüpfung auf K definiert, mit der $K^\Phi := (K,+,\diamond,v)$ ebenfalls einen uniform bewerteten Quasikörper bildet; genannt *v-Ableitung von K (mittels Φ)*. Das[1] Element $e \in K^*$ aus (VA2) ist hierbei das Einselement von K^Φ.

Beweis: Definiere für $x \in K^*$ die Abbildung

$$\lambda_x : \ K \longrightarrow K\ , \qquad y \ \mapsto \ x\Phi_x(y)\ ,$$

und setze weiter $\lambda_0(y) := 0$ für alle $y \in K$; für alle $x, y \in K$ gilt dann

$$x \diamond y \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} x\Phi_x(y) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{array} \right\} \quad = \quad \lambda_x(y)\ .$$

Hierbei ist für alle $x \in K$ stets

$$\lambda_x(e) \quad = \quad x\Phi_x(e) \overset{\text{(VA2)}}{=} x \cdot 1 \quad = \quad x\ ,$$

d.h. für $x \in K$ ist λ_x stets eine[2] Abbildung mit $\lambda_x(e) = x$. Um zu zeigen, dass $(K,+,\diamond)$ einen Quasikörper bildet, genügt es mit KNARR [27, Prop. 1.16] daher nachzuweisen, dass die Menge

$$\Lambda \quad := \quad \left\{ \lambda_x \in \mathrm{Abb}(K,K) \ \middle|\ x \in K \right\}$$

ein *normalisiertes Spread Set*[3] des k-(Rechts-)Vektorraumes K bildet. Hierbei sind die Abbildungen λ_x für $x \in K$ zunächst linear, denn im Fall $x = 0$ ist dies klar; und im Fall $x \neq 0$ folgt für alle $y, z \in K$ und $\mu \in k \subset N(K)$ direkt

$$\begin{aligned} \lambda_x(y + z\mu) \quad &= \quad x\Phi_x(y+z\mu) \overset{\text{(VA0)}}{=} x\big(\Phi_x(y) + \Phi_x(z)\mu\big) \quad = \quad x\Phi_x(y) + x\big(\Phi_x(z)\mu\big) \\ &= \quad x\Phi_x(y) + \big(x\Phi_x(z)\big)\mu \quad = \quad \lambda_x(y) + \lambda_x(z)\mu\ . \end{aligned}$$

[1] nach (6.2,b) eindeutig bestimmte

[2] Im Laufe des Beweises werden wir auch sehen, dass λ_x unter den Abbildungen aus Λ mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt ist.

[3] im Sinne von KNARR [27, Def. 1.10, S.13]

Für das Axiom (M1) eines *Spread Sets* ist zu zeigen, dass für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ die Abbildung $\lambda_x - \lambda_y$ bijektiv ist; seien hierzu $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gegeben. Sind $x, y \neq 0$ mit oBdA[1] $v(x) \leq v(y)$, so gilt für alle $z \in K$

$$(\lambda_x - \lambda_y)(z) \quad = \quad \lambda_x(z) - \lambda_y(z) \quad = \quad x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) \quad = \quad \pi_{x,y}(z) \ ,$$

d.h. es ist $\lambda_x - \lambda_y = \pi_{x,y}$ und diese Abbildung nach (6.3,c) bijektiv. Ist dagegen $0 \in \{x, y\}$, oBdA[1] $y = 0 \neq x$, so folgt für alle $z \in K$ stattdessen

$$(\lambda_x - \lambda_y)(z) \quad = \quad \lambda_x(z) - \lambda_y(z) \quad = \quad x\Phi_x(z) \ .$$

Da Φ_x nach (VA0) bijektiv ist, gibt es für ein $w \in K$ stets ein eindeutiges Element $z \in K$ mit $\Phi_x(z) = {}_x\backslash^w$; dieses Element $z \in K$ ist somit die eindeutige Lösung der Gleichung $\lambda_x(z) = x\Phi_x(z) = w$, d.h. auch in diesem Fall ist die Abbildung $\lambda_x - \lambda_y = \lambda_x$ bijektiv.
Für das Axiom (M2) eines *Spread Sets* ist zu zeigen, dass für alle $x \in K^*$ die Abbildung

$$\widetilde{\varrho}_x : \quad \Lambda \longrightarrow K \ , \qquad \lambda_y \quad \mapsto \quad \lambda_y(x) \ ,$$

surjektiv ist; hierbei gilt für alle $x \in K^*$ und $y \in K$

$$\widetilde{\varrho}_x(\lambda_y) \quad = \quad \lambda_y(x) \quad = \quad \begin{cases} y\Phi_y(x) \ = \ \varrho_x(y) & \text{falls} \ \ y \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \ \ y = 0 \end{cases} \ .$$

Da ϱ_x nach (VA3) eine surjektive Abbildung von K^* auf K^* ist, ist somit auch $\widetilde{\varrho}_x$ eine surjektive Abbildung[2] von K auf K.
Schließlich ist nur noch nachzuweisen, dass Λ *normalisiert* ist, d.h. dass das Λ sowohl die Nullabbildung als auch die Identität enthält. Hierbei ist $\lambda_0 = 0 \in \Lambda$ klar; und es ist weiter $\lambda_e = \mathrm{id}_K \in \Lambda$ wegen

$$\lambda_e(x) \quad = \quad e\Phi_e(x) \overset{\text{(VA2)}}{=} e \cdot {}_e\backslash^x \quad = \quad x \qquad \text{für alle} \ \ x \in K \ .$$

Somit bildet $(K, +, \diamond)$ daher ein Quasikörper mit dem Einselement e; es bleibt im Folgenden nur noch zu zeigen, dass v ebenfalls eine uniforme Bewertung auf diesem ist.

<u>Zu (V1),(V3):</u> Diese Axiome folgen direkt aus den entsprechenden Axiomen einer uniformen Bewertung des uniform bewerteten Quasikörpers $(K, +, \cdot, v)$, da die Additionen der beiden Quasikörper übereinstimmen.

<u>Zu (V2):</u> Es seien $x, y \in K$ gegeben. Im Fall $0 \in \{x, y\}$ ist nach Definition bzw. (VA0) direkt $v(x \circ y) = 0 = v(x)v(y)$. Sind dagegen $x, y \neq 0$, so gilt ebenso

$$v(x \diamond y) \quad = \quad v\big(x\Phi_x(y)\big) \quad = \quad v(x)v\big(\Phi_x(y)\big) \overset{\text{(VA1)}}{=} v(x)v(y) \ .$$

<u>Zu (V4):</u> Nach Kalhoff [22, Prop. 3.1(5)] genügt es zu zeigen, dass für alle $x, y, z \in K$ stets $v(x \diamond z - y \diamond z) = v((x - y) \diamond z)$ gilt; seien hierzu $x, y, z \in K$ gegeben. In den Fällen $x = y$ oder $z = 0$ folgt jeweils direkt $v(x \diamond z - y \diamond z) = 0 = v((x - y) \diamond z)$; im Folgenden seien daher $x \neq y$ sowie $z \neq 0$.

[1]Denn $\lambda_x - \lambda_y$ ist genau dann bijektiv, wenn $-(\lambda_x - \lambda_y) = \lambda_y - \lambda_x$ es ist.

[2]Mit (6.3,b) ist $\widetilde{\varrho}_x$ sogar bijektv.

Wir führen eine Fallunterscheidung:

- Ist $v(x) < v(y)$, so gelten mit den Monotoniegesetzen der angeordneten Loop Γ auch[1]

$$\begin{array}{rrcccccc} & v(x \diamond z) & = & v(x)v(z) & < & v(y)v(z) & = & v(y \diamond z) \\ \text{sowie} & v(xz) & = & v(x)v(z) & < & v(y)v(z) & = & v(yz) \end{array}$$

  und aus dem Dominanzprinzip der uniformen Bewertung v folgt direkt

$$\begin{aligned} v(x \diamond z - y \diamond z) &\overset{(1.12,e)}{=} v(y \diamond z) = v(y)v(z) = v(yz) \overset{(1.12,e)}{=} v(xz - yz) \\ &\overset{(1.11,l)}{=} v\big((x-y)z\big) = v(x-y)v(z) = v\big((x-y) \diamond z\big) \ . \end{aligned}$$

- Ist dagegen $v(x) > v(y)$, so gilt mit dem bereits Bewiesenen ebenso sofort

$$\begin{aligned} v(x \diamond z - y \diamond z) &\overset{(1.11,g)}{=} v(y \diamond z - x \diamond z) = v\big((y-x) \diamond z\big) = v(y-x)v(z) \\ &\overset{(1.11,g)}{=} v(x-y)v(z) = v\big((x-y) \diamond z\big) \ . \end{aligned}$$

- Und ist schließlich $v(x) = v(y)$, so muss in dieser Situation offenbar $x, y \neq 0$ gelten;[2] d.h. die Abbildung $\pi_{x,y}$ ist definiert und erfüllt insbesondere

$$\begin{aligned} v(x \diamond z - y \diamond z) &= v\big(x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z)\big) = v\big(\pi_{x,y}(z)\big) \\ &\overset{(VA4)}{=} v(x-y)v(z) = v\big((x-y) \diamond z\big) \ . \end{aligned}$$

□

(6.5) Satz: (vgl. ELLERS, KARZEL [9, Def. 1])

Ist $\diamond$ eine binäre, innere Verknüpfung auf K derart, dass $(K, +, \diamond, v)$ ebenfalls einen uniform bewerteten Quasikörper bildet, so ist $(K, +, \diamond, v)$ eine v-Ableitung von K, d.h. es gibt eine v-treue Ableitung Φ auf K mit $K^\Phi = (K, +, \diamond, v)$.

Beweis: Wir definieren für alle $x \in K^*$ die Abbildung Φ_x jeweils durch

$$\Phi_x : \ K \longrightarrow K \ , \qquad y \mapsto {}_x\backslash^{(x \diamond y)} \ ,$$

und weisen nach, dass hiermit die Abbildung

$$\Phi : \ K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) \ , \qquad x \mapsto \Phi_x \ ,$$

eine v-treue Ableitung von K bildet - denn mit dieser Konstruktion gilt bereits

[1] Beachte, dass wegen $z \neq 0$ stets $v(z) \in \Gamma$ gilt und dass die folgenden Gleichungen auch für $x = 0$ gültig sind.

[2] Denn aus $0 \in \{x, y\}$ folgte direkt $v(x) = 0 = v(y)$ und damit der Widerspruch $x = 0 = y$.

$$x \diamond_\Phi y \;=\; \left\{\begin{array}{ll} x\Phi_x(y) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{array}\right\} \;=\; \left\{\begin{array}{ll} x \cdot {}_x\backslash^{(x \diamond y)} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} x \diamond y & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{array}\right\} \;=\; x \diamond y \qquad \text{für alle } x, y \in K \ ,$$

d.h. es folgt dann direkt $K^\Phi = (K, +, \diamond, v)$. Mit (6.3,a) genügt es hierbei, neben den Axiomen (VA1)-(VA4) noch (VA0$^-$) zu zeigen.

<u>Zu (VA0$^-$):</u> Es sei ein $x \in K^*$ gegeben. Für alle $z \in K$ gibt es dann ein (eindeutiges) Element $y \in K$ mit $x \diamond y = xz$;[1] dieses erfüllt dann

$$\Phi_x(y) \;=\; {}_x\backslash^{(x \diamond y)} \;=\; {}_x\backslash^{(xz)} \;=\; z \ .$$

Also ist die Abbildung Φ_x bereits surjektiv. Weiter gilt für alle $y, z \in K$

$$x\Phi_x(y+z) \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; x \diamond (y+z) \;=\; x \diamond y + x \diamond z \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; x\Phi_x(y) + x\Phi_x(z)$$

$$= \; x\big(\Phi_x(y) + \Phi_x(z)\big) \ ,$$

d.h. es gilt stets $\Phi_x(y+z) = \Phi_x(y) + \Phi_x(z)$ und Φ_x ist somit additiv.

<u>Zu (VA1):</u> Für alle $x, y \in K^*$ gilt mit der Multiplikativität von v bzgl. der beiden Multiplikationen $\cdot$ und $\diamond$ sofort

$$v\big(\Phi_x(y)\big) \;=\; v\Big({}_x\backslash^{(x \diamond y)}\Big) \;=\; {}_{v(x)}\backslash^{(v(x)v(y))} \;=\; v(y) \ .$$

<u>Zu (VA2):</u> Bezeichnet $e \in K^*$ das Einselement von $(K, +, \diamond)$, so gelten für alle $x \in K^*$

$$\Phi_x(e) \;=\; {}_x\backslash^{(x \diamond e)} \;=\; {}_x\backslash^{x} \;=\; 1 \qquad \text{sowie} \qquad \Phi_e(x) \;=\; {}_e\backslash^{(e \diamond x)} \;=\; {}_e\backslash^{x} \ .$$

<u>Zu (VA3):</u> Es sei ein $x \in K^*$ gegeben. Für alle $y \in K^*$ gilt

$$\varrho_x(y) \;=\; y\Phi_y(x) \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; y \diamond x \ .$$

Da $(K^*, \diamond)$ eine Loop ist, gibt es für ein $z \in K^*$ stets ein (eindeutiges) Element $y \in K^*$ mit $\varrho_x(y) = y \diamond x = z$, d.h. die Abbildung ϱ_x ist insbesondere surjektiv.

<u>Zu (VA4):</u> Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ gegeben. Für alle $z \in K$ gilt

$$\pi_{x,y}(z) \;=\; x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; x \diamond z - y \diamond z \ .$$

In dieser Situation gibt es für ein $w \in K$ nach (Q4) im Quasikörper $(K, +, \diamond)$ stets ein (eindeutiges) Element $z \in K$ mit $\pi_{x,y}(z) = x \diamond z - y \diamond z = w$, d.h. die Abbildung $\pi_{x,y}$ ist insbesondere surjektiv. Weiter gilt für alle $x, y, z \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ schließlich

$$v\big(\pi_{x,y}(z)\big) \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; v(x \diamond z - y \diamond z) \;\overset{(1.11,\text{l})}{=}\; v\big((x-y) \diamond z\big) \;=\; v(x-y)v(z) \ .$$

$\square$

[1] Denn $(K^*, \diamond)$ ist eine Loop und es gilt $x \diamond 0 = 0$ für alle $x \in K$.

Die explizite Konstruktion der v-treuen Ableitung aus den beiden Quasikörper-Multiplikationen in dem obigen Beweis erweist sich des Weiteren noch als hilfreich, um die Zusammenhänge von v-treuen Ableitungen in gewissen Situationen herzuleiten:

(6.6) Korollar: (vgl. Pokropp [33, Satz 10, Satz 11])

(a) Die Abbildung

$$\Phi^{(0)} : \quad K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) , \qquad x \;\mapsto\; \mathrm{id}_K ,$$

ist eine v-treue Ableitung auf K mit $K^{\Phi^{(0)}} = K$.

(b) Ist Φ eine v-treue Ableitung auf K, so ist

$$\Psi : \quad K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) , \qquad x \;\mapsto\; \Phi_x^{-1} ,$$

eine v-treue Ableitung auf K^Φ mit $(K^\Phi)^\Psi = K$.

(c) Sind Φ eine v-treue Ableitung auf K und Ψ eine v-treue Ableitung auf K^Φ, so ist

$$\Theta : \quad K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) , \qquad x \;\mapsto\; \Phi_x \circ \Psi_x ,$$

eine v-treue Ableitung auf K mit $K^\Theta = (K^\Phi)^\Psi$.

Beweis: *Zu (a):* Betrachten wir im Beweis von (6.5) beide Male dieselbe Quasikörper-Multiplikation $\cdot$, so bildet

$$\begin{array}{llll} & \Phi^{(0)} : \; K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) , & x \;\mapsto\; \Phi_x^{(0)} , & \\ \text{mit} & \Phi_x^{(0)} : \; K \longrightarrow K , & y \;\mapsto\; {}_x\backslash^{(xy)} \;=\; y , & \text{für } x \in K^* , \end{array}$$

d.h. $\Phi_x^{(0)} = \mathrm{id}_K$ für alle $x \in K^*$, eine v-treue Ableitung auf K mit $K^{\Phi^{(0)}} = K$.

Zu (b): Betrachten wir im Beweis von (6.5) die beiden Quasikörper-Multiplikationen $\diamond_\Phi$ und $\cdot$, so bildet

$$\begin{array}{llll} & \Psi : \; K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) , & x \;\mapsto\; \Psi_x , & \\ \text{mit} & \Psi_x : \; K \longrightarrow K , & y \;\mapsto\; z \;\text{ mit }\; x \diamond_\Phi z = xy , & \text{für } x \in K^* , \end{array}$$

eine v-treue Ableitung auf K^Φ mit $(K^\Phi)^\Psi = K$. Hierbei gilt für alle $x \in K^*$ und $y \in K$

$$xy \;=\; x \diamond_\Phi \big(\Psi_x(y)\big) \;=\; x\Phi_x\big(\Psi_x(y)\big) , \qquad \text{d.h.} \qquad \Psi_x(y) \;=\; \Phi_x^{-1}(y) ,$$

und somit ist für alle $x \in K^*$ stets $\Psi_x = \Phi_x^{-1}$.

Zu (c): Betrachten wir im Beweis von (6.5) die beiden Quasikörper-Multiplikationen $\cdot$ und $(\diamond_\Phi)_\Psi$, so bildet

$$\begin{array}{rlllll} & \Theta : K^* & \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K) \,, & x & \mapsto & \Theta_x \,, \\ \text{mit} & \Theta_x : K & \longrightarrow K \,, & y & \mapsto & {}_x\backslash^{(x\,(\diamond_\Phi)_\Psi y)} \,, \qquad \text{für} \;\; x \in K^* \,, \end{array}$$

eine v-treue Ableitung auf K mit $K^\Theta = (K^\Phi)^\Psi$. Hierbei gilt für alle $x \in K^*$ und $y \in K$

$$\begin{array}{rrcl} & x\Theta_x(y) & = & x\,(\diamond_\Phi)_\Psi\, y \;=\; x \,\diamond_\Phi \big(\Psi_x(y)\big) \;=\; x\Phi_x\big(\Psi_x(y)\big) \,, \\ \text{d.h.} & \Theta_x(y) & = & (\Phi_x \circ \Psi_x)(y) \,, \end{array}$$

und somit ist für alle $x \in K^*$ stets $\Theta_x = \Phi_x \circ \Psi_x$.

□

Ist daher Φ eine v-treue Ableitung auf K, so können wir die - nach (6.5) existierende - v-treue Ableitung Ψ auf K^Φ mit $(K^\Phi)^\Psi = K$ mit (6.6,b) direkt angeben.

Insbesondere werden wir später anhand des expliziten Beispieles aus (7.10,a) sehen, dass Aussagen über weitere algebraische Eigenschaften der v-Ableitung von K - wie etwa der Gültigkeit des rechtsseitigen Distributivgesetzes, der Assoziativität der Multiplikation etc. - sowohl im positiven als auch im negativen Sinne im Allgemeinen nicht möglich sind.[1]

Sphärisch vollständige, uniform bewertete Quasikörper

Ist bekannt, dass $(K,+,\cdot,v)$ sphärisch vollständig ist,[2] so kann die Gültigkeit des *Fixpunktsatzes von* Priess-Crampe [35, Satz 1, Satz 3] ausgenutzt werden, um die Anforderungen an eine v-treue Ableitung weiter zu senken; genauer kann das Axiom (VA4) durch eine abgeschwächte Version ersetzt werden.

Dies motivierte auch die Konstruktion in Kalhoff [22, Prop. 3.7], auf welche unsere Definition aufbaut, sodass wir in dem Fall sphärischer Vollständigkeit diese Konstruktion anschließend mit unserer in Bezug setzen und vergleichen möchten.

[1] Dort wird für einen bewerteten kommutativen Körper K eine v-treue Ableitung Φ auf K so konstruiert, dass K^Φ einen in allen Belangen echten Quasikörper bildet; es gibt daher auch eine v-treue Ableitung Ψ des echten Quasikörpers K^Φ, welche den kommutativen Körper $(K^\Phi)^\Psi = K$ liefert.

[2] d.h dass der ultrametrische Raum (K, d_v) sphärisch vollständig ist, siehe (1.10,d)

(6.7) Satz: (vgl. KALHOFF [22, Prop. 3.7])

Ist $(K,+,\cdot,v)$ sphärisch vollständig, so ist eine Abbildung Φ genau dann eine v-treue Ableitung auf K, wenn sie neben den Axiomen (VA0$^-$) und (VA1)-(VA3) noch die folgende Eigenschaft erfüllt:

(VA4$^-$) Für alle $x,y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x)=v(y)$ ist die Abbildung

$$\pi_{x,y}: \quad K \longrightarrow K , \qquad z \;\mapsto\; x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) ,$$

surjektiv; und für alle $x,y,z \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x)=v(y)$ gilt weiter

$$v\big(\pi_{x,y}(z)\big) \;=\; v(x-y)v(z) .$$

Beweis: $\Longrightarrow$: Klar.

$\Longleftarrow$: Es sei eine Abbildung Φ gegeben, welche die Axiome (VA0$^-$), (VA1)-(VA3) sowie (VA4$^-$) erfüllt; mit (6.3,a) ist nur noch die Surjektivität der Abbildungen $\pi_{x,y}$ für $x,y \in K^*$ mit $v(x) < v(y)$ nachzuweisen. Sei hierzu ein $w \in K$ gegeben. Betrachte zur Bestimmung eines Urbildes von w unter $\pi_{x,y}$ die Abbildung

$$\sigma: \quad K \longrightarrow K , \qquad z \;\mapsto\; \Phi_y^{-1}\Big({}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(z)-w)}\Big) .$$

Diese Abbildung σ ist eine Kontraktion des ultrametrischen Raum (K,d_v), denn für alle $a,b \in K$ mit $a \neq b$ gilt

$$\begin{aligned}
v\big(\sigma(a)-\sigma(b)\big) &= v\Big(\Phi_y^{-1}\big({}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(a)-w)}\big) - \Phi_y^{-1}\big({}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(b)-w)}\big)\Big) \\
&\overset{(6.2,a)}{=} v\Big(\;\Phi_y^{-1}\big({}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(a)-w)} - {}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(b)-w)}\big)\;\Big) \\
&\overset{(VA1)}{=} v\Big({}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(a)-w)} - {}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(b)-w)}\Big) \\
&= {}_{v(y)}\backslash{}^{\left(v(y)\; v\left({}_y\backslash(x\Phi_x(a)-w) - {}_y\backslash(x\Phi_x(b)-w)\right)\right)} \\
&= {}_{v(y)}\backslash{}^{v\left(y\left({}_y\backslash(x\Phi_x(a)-w) - {}_y\backslash(x\Phi_x(b)-w)\right)\right)} \\
&= {}_{v(y)}\backslash{}^{v\left((x\Phi_x(a)-w) - (x\Phi_x(b)-w)\right)} \\
&= {}_{v(y)}\backslash{}^{v\left(x\left(\Phi_x(a)-\Phi_x(b)\right)\right)} \;\overset{(VA0)}{=}\; {}_{v(y)}\backslash{}^{\left(v(x)\; v\left(\Phi_x(a-b)\right)\right)} \\
&\overset{(VA1)}{=} {}_{v(y)}\backslash{}^{\left(v(x)\; v(a-b)\right)} \;<\; {}_{v(y)}\backslash{}^{\left(v(y)\; v(a-b)\right)} \;=\; v(a-b) .
\end{aligned}$$

Da (K,d_v) sphärisch vollständig ist, existiert nach dem *Fixpunktsatz von* PRIESS-CRAMPE [35, Satz 1, Satz 3] somit ein (eindeutiger) Fixpunkt von σ, d.h. ein Element $z_0 \in K$ mit

$$\Phi_y^{-1}\big({}_y\backslash{}^{(x\Phi_x(z_0)-w)}\big) \;=\; \sigma(z_0) \;=\; z_0 ,$$

d.h. $\quad x\Phi_x(z_0) - w \;=\; y\Phi_y(z_0)$, $\quad$ also $\quad \pi_{x,y}(z_0) \;=\; x\Phi_x(z_0) - y\Phi_y(z_0) \;=\; w$.

Somit ist z_0 ein Urbild von w unter $\pi_{x,y}$ und die Abbildung $\pi_{x,y}$ insgesamt surjektiv.

$\square$

(6.8) Satz: (vgl. KALHOFF [22, Prop. 3.7])

Ist $(K, +, \cdot, v)$ sphärisch vollständig, so ist eine Abbildung Φ bereits dann eine v-treue Ableitung auf K, wenn sie neben den Axiomen (VA0$^-$), (VA1) und (VA2) noch die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$(*) \qquad \text{Für alle } x, y \in K^* \text{ mit } v(x) = v(y) \text{ ist } \Phi_x = \Phi_y \ .$$

Beweis: Mit (6.7) sind noch die Axiome (VA3) und (VA4$^-$) nachzuweisen.

Zu (VA3): Für alle $x, z \in K^*$ gilt

$$v\big(z/(\Phi_{z/x}(x))\big) \;=\; v(z)/v(\Phi_{z/x}(x)) \;\overset{\text{(VA1)}}{=}\; v(z)/v(x) \;=\; v(z/x) \ .$$

Hiermit folgt mit der Voraussetzung für alle $x, z \in K^*$

$$\varrho_x\big(z/(\Phi_{z/x}(x))\big) \;=\; z/(\Phi_{z/x}(x)) \cdot \Phi_{z/(\Phi_{z/x}(x))}(x) \;\overset{(*)}{=}\; z/(\Phi_{z/x}(x)) \cdot \Phi_{z/x}(x) \;=\; z \ ,$$

d.h. für alle $x \in K^*$ ist die Abbildung ϱ_x stets surjektiv.

Zu (VA4$^-$): Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ sowie ein $w \in K$ gegeben; zu finden ist ein $z \in K$ mit $\pi_{x,y}(z) = w$. In dieser Situation existiert nach (Q4) ein (eindeutiges) Element $u \in K$ mit $xu - yu = w$;[1] und da die Abbildung Φ_x nach (6.3,a) bereits bijektiv ist,[2] können wir somit $z := \Phi_x^{-1}(u) \in K$ setzen. Dieses Element erfüllt dann

$$\pi_{x,y}(z) \;=\; x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z) \;\overset{(*)}{=}\; x\Phi_x(z) - y\Phi_x(z) \;=\; xu - yu \;=\; w \ ,$$

d.h. für $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ ist die Abbildung $\pi_{x,y}$ stets surjektiv.
Weiter gilt für alle $x, y, z \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ schließlich

$$\begin{aligned} v\big(\pi_{x,y}(z)\big) \;&=\; v\big(x\Phi_x(z) - y\Phi_y(z)\big) \;\overset{(*)}{=}\; v\big(x\Phi_x(z) - y\Phi_x(z)\big) \\ &\overset{\text{(1.11,l)}}{=}\; v\big((x-y)\Phi_x(z)\big) \;=\; v(x-y)v\big(\Phi_x(z)\big) \;\overset{\text{(VA1)}}{=}\; v(x-y)v(z) \ . \end{aligned}$$

□

Dass die Umkehrung der Aussage aus (6.8) im Allgemeinen nicht gelten muss,[3] werden wir im kommenden Kapitel anhand des expliziten Beispieles aus (7.10,a) sehen. Unsere Konstruktion mittels v-treuer Ableitungen kann also als eine Verallgemeinerung der Konstruktion von KALHOFF [22, Prop. 3.7] verstanden werden.

[1] Beachte bei der Formulierung dieser Gleichung, dass die Addition eines Quasikörpers stets kommutativ ist, siehe (1.8,c).

[2] Beachte, dass zum Nachweis der Injektivität von Φ_x in (6.3,a) das Axiom (VA4) nicht benötigt worden ist - lediglich die Axiome (VA0$^-$) sowie (VA1).

[3] d.h. dass es v-treue Ableitungen auf sphärisch vollständigen, uniform bewerteten Quasikörpern gibt, welche die obige Eigenschaft $(*)$ nicht erfüllen

Kapitel 7

Zur Konstruktion diskret uniform bewerteter Quasikörper

Abschließend werden wir uns in diesem letzten Kapitel speziell uniform bewerteten Quasikörpern zuwenden, deren uniforme Bewertung gerade die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen als Werteloop besitzt. Dies hat die schöne Konsequenz, dass die verschiedenen Vollständigkeitsbegriffe für diesen uniform bewerteten Quasikörper zusammenfallen und es nach Schörner [40, Cor. 4] weiter möglich ist, einen solchen stets zu *vervollständigen.* Wir können in diesem Fall für die Konstruktion v-treuer Ableitungen somit leichter auf die Abschwächung (VA4$^-$) aus (6.7) zurückgreifen.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, diejenigen vollständigen, diskret uniform bewerteten Quasikörper zu untersuchen, deren uniforme Bewertung eine triviale Einschränkung auf den Primkörper des Quasikörpers besitzt: Nach (6.6,a) sind diese natürlich als v-Ableitungen eines diskret uniform bewerteten Quasikörpers darstellbar; es stellt sich darüber hinaus aber die Frage, ob diese sich nicht auch als die v-Ableitung einer in der Hierarchie der Koordinatenstrukturen projektiver Ebenen höher stehenden Koordinatenstruktur darstellen lassen können. Diese Frage werden wir im Folgenden positiv beantworten können - es stellt sich sogar heraus, dass diese uniform bewerteten Quasikörper isomorph zur v-Ableitung eines kommutativen Laurentreihenkörpers sind; insbesondere ergibt sich die diskrete uniforme Bewertung gerade als seine Grad-Bewertung.

Als Abschluss dieser Arbeit werden wir schließlich eine Familie von Beispielen solcher diskret uniform bewerteter Quasikörper konstruieren.

Diskret uniform bewertete Quasikörper

Da die ersten Aussagen dieses Kapitels sogar für diskret uniform bewertete Ternärkörper gültig sind, werden wir diese im Folgenden auch in dieser Allgemeinheit formulieren.

(7.1) Definition und Bemerkung:

(a) Eine uniforme Bewertung v auf einem Ternärkörper (K, T) heißt *diskret*, wenn v gerade die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen als Werteloop besitzt.[1] Weiter nennen wir in diesem Fall (K, T, v) dann auch einen *diskret uniform bewerteten Ternärkörper*.

(b) (Iseki [15, Thm. 1]) Die uniforme Bewertung v eines uniform bewerteten Ternärkörpers (K, T, v) ist genau dann zu einer diskreten uniformen Bewertung äquivalent, wenn ihre Werteloop Γ ein kleinstes positives Element besitzt und sie *archimedisch angeordnet*[2] ist. Ein solcher uniform bewerteter Ternärkörper ist also stets als ein diskret uniform bewerteter Ternärkörper auffassbar.

(c) (Schörner [40, Cor. 4]) Ein diskret uniform bewerteter Ternärkörper (K, T, v) ist genau dann sphärisch vollständig, wenn er vollständig ist.

(d) (Schörner [40, Cor. 4]) Ist (K, T, v) ein diskret uniform bewerteter Ternärkörper, so gibt es einen vollständigen, diskret uniform bewerteten Ternärkörper $(\hat{K}, \hat{T}, \hat{v})$, in den (K, T, v) als uniform bewerteter Ternärkörper einbettbar ist.

(e) (Kalhoff [22, Lem. 2.1, Lem. 2.2]) Ist (K, T, v) ein uniform bewerteter Ternärkörper, so ist I_v eine normale Unterloop von $(A_v, +)$. Die Menge der Nebenklassen

$$A_v/I_v \quad := \quad \left\{ \ x + I_v \in \mathfrak{P}(A_v) \ \middle| \ x \in A_v \ \right\}$$

bildet zusammen mit der ternären Verknüpfung

$$T'\big(m + I_v, \ x + I_v, \ c + I_v\big) \ := \ T(m, x, c) + I_v \quad \text{für} \quad m + I_v, \ x + I_v, \ c + I_v \ \in \ A_v/I_v$$

einen Ternärkörper $(A_v/I_v, \ T')$. Ist K hierbei ein Quasikörper, so ist es offenbar[3] auch A_v/I_v. Für $x, y \in A_v$ gilt insbesondere $x + I_v = y + I_v$ genau dann, wenn $x - y \in I_v$ ist.

Im Folgenden sei (K, T, v) stets ein diskret uniform bewerteter Ternärkörper. Weiter seien die Summen $\sum_{i=k}^{\nu} s_i$ für $k, \nu \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq \nu$ und $s_k, ..., s_\nu \in K$ rekursiv durch

$$\sum_{i=\nu}^{\nu} s_i \ := \ s_\nu \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=k}^{\nu} s_i \ := \ s_k + \sum_{i=k+1}^{\nu} s_i$$

definiert. Wir leiten zunächst eine Darstellung der Elemente von K^* als Grenzwert gewisser Reihen her, wie sie für bewertete kommutative Körper etwa aus Engler, Prestel [10, Prop. 1.3.5] oder Iwasawa [16, Prop. 1.2] bereits bekannt und für diskret uniform bewertete Ternärkörper in ähnlicher Form bereits von Schörner [41, Lem. 1] untersucht worden ist:

[1] In diesem Fall bezeichnen wir das Element, welches kleiner als jede ganze Zahl ist, mit $-\infty$.

[2] Hierbei heißt eine Loop in Γ *archimedisch angeordnet*, wenn zu $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \Gamma$ mit $1 < \alpha < \beta$ und $\beta' < \alpha' < 1$ stets $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $\beta < \alpha^n$ und $(\alpha')^{n'} < \beta'$ existieren, wobei die Ausdrücke γ^m für $m \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \Gamma$ rekursiv durch $\gamma^0 := 1$ und $\gamma^m := \gamma \cdot \gamma^{m-1}$ definiert sind, vgl. Priess-Crampe [34, S.6].

[3] Denn die Linearität, das Assoziativität der Addition sowie das linksseitige Distributivgesetz übertragen sich mit dieser Definition von K direkt auf A_v/I_v.

(7.2) Satz und Definition:

Es seien $R \subset A_v$ ein Vertretersystem von A_v/I_v mit $0 \in R$ und $(\pi_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von Elementen $\pi_z \in K^*$ mit $v(\pi_z) = z$ für $z \in \mathbb{Z}$.

(a) (vgl. Engler, Prestel [10, Prop. 1.3.5], Schörner [41, Lem. 1]) Jedes $x \in K^*$ kann in eindeutiger Weise als Grenzwert einer konvergenten Reihe[1]

$$x \quad = \quad \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i \quad := \quad \lim_{n\to-\infty} \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i$$

mit $\nu := v(x) \in \mathbb{Z}$ und $r_i \in R$ für $i \leq \nu$ mit $r_\nu \neq 0$ dargestellt werden. Wir nennen diese die *(eindeutige) Reihendarstellung von x (bzgl. R und $(\pi_z)_{z\in\mathbb{Z}}$).*

(b) (vgl. Iwasawa [16, Prop. 1.2]) Für Elemente $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und den jeweiligen eindeutigen Reihendarstellungen $x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$ und $y = \sum_{j=-\infty}^{\mu} \pi_j s_j$ gilt

$$v(x-y) \quad = \quad \max\{\ k \in \mathbb{Z} \ \mid \ r_k \neq s_k\ \}\ .$$

(c) (vgl. Engler, Prestel [10, Prop. 1.3.5]) Ist (K, T, v) vollständig und sind ein $\nu \in \mathbb{Z}$ sowie $a_i \in A_v$ für $i \leq \nu$ gegeben, so konvergiert die Reihe[1]

$$\sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i a_i \quad := \quad \lim_{n\to-\infty} \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i a_i\ .$$

Gilt hierbei $a_\nu \notin I_v$, so besitzt der Grenzwert dieser konvergenten Reihe den Wert ν unter v und liegt insbesondere in K^*.

Beweis: *Zu (a):* Es sei ein $x \in K^*$ mit $\nu := v(x) \in \mathbb{Z}$ gegeben.

Zur Existenz: Im Folgenden werden wir die Elemente $r_i \in R$ für $i \leq \nu$ der gewünschten Reihendarstellung iterativ konstruieren.

- Definition von r_ν: Betrachte das Element ${}_{\pi_\nu}\backslash^{x} \in K^*$: Für dieses gilt

$$v({}_{\pi_\nu}\backslash^{x}) \quad = \quad v(x) - v(\pi_\nu) \quad = \quad \nu - \nu \quad = \quad 0\ ,$$

d.h. es ist ${}_{\pi_\nu}\backslash^{x} \in A_v \backslash I_v$. Wähle nun $r_\nu \in R\backslash\{0\}$ als Vertreter der Nebenklasse ${}_{\pi_\nu}\backslash^{x} + I_v$, also durch

$$r_\nu + I_v \quad := \quad {}_{\pi_\nu}\backslash^{x} + I_v\ , \qquad \text{d.h.} \qquad {}_{\pi_\nu}\backslash^{x} - r_\nu \quad \in \quad I_v$$

(wegen ${}_{\pi_\nu}\backslash^{x} \notin I_v$ ist hierbei $r_\nu \neq 0$). Mit dieser Wahl folgt

$$v(x - \pi_\nu r_\nu) \quad \overset{(1.11,\mathrm{k})}{=} \quad v\big(\pi_\nu({}_{\pi_\nu}\backslash^{x} - r_\nu)\big) \quad = \quad v(\pi_\nu) + v({}_{\pi_\nu}\backslash^{x} - r_\nu) \quad < \quad \nu \quad = \quad v(x)\ .$$

[1] im ultrametrischen Raum (K, d_v)

- <u>Definition von r_k für $k < \nu$:</u> Für ein $n \leq \nu$ seien nun die Elemente $r_n, ..., r_\nu \in R$ bereits so konstruiert, dass
$$v\Big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad < \quad v\Big(x - \sum_{i=n+1}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad \leq \quad n$$
gilt. Ist $v\big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\big) = -\infty$, so setze $r_i := 0 \in R$ für alle $i < n$. Ist dagegen $v\big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\big) =: k \in \mathbb{Z}$, so betrachte das Element ${}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)} \in K^*$: Für dieses gilt
$$v\Big({}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)}\Big) \quad = \quad v\Big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\Big) - v(\pi_k) \quad = \quad k - k \quad = \quad 0\ ,$$
d.h. es ist ${}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)} \in A_v \backslash I_v$. Wähle nun $r_k \in R\backslash\{0\}$ als Vertreter der Nebenklasse $\big({}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)}\big) + I_v$, also durch
$$r_k + I_v \quad := \quad \big({}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)}\big) + I_v\ , \qquad \text{d.h.} \qquad \big({}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)}\big) - r_k \quad \in \quad I_v$$
(wegen ${}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i)} \notin I_v$ ist hierbei $r_k \neq 0$); setze weiter $r_i := 0 \in R$ für alle $k < i < n$. Mit dieser Wahl folgt
$$\begin{aligned} v\Big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\Big) &\overset{(1.11,e)}{=} v\Big(\big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\big) - \big(\sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\big)\Big) \\ &= v\Big(\big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\big) - \pi_k r_k\Big) \\ &\overset{(1.11,k)}{=} v\Big(\pi_k\big(\big({}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=m}^{\nu} \pi_i r_i)}\big) - r_k\big)\Big) \\ &= v(\pi_k) + v\Big(\big({}_{\pi_k}\backslash{}^{(x - \sum_{i=m}^{\nu} \pi_i r_i)}\big) - r_k\Big) \\ &< k \quad = \quad v\Big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad = \quad v\Big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\Big)\ . \end{aligned}$$

Insgesamt sind somit Elemente $r_i \in R$ für $i \leq \nu = v(x)$ mit $r_\nu \neq 0$ und
$$v\Big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad < \quad v\Big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad \leq \quad k \qquad \text{für alle } k \leq \nu \text{ mit } r_k \neq 0$$ [1]

konstruiert worden; für die Existenz bleibt noch zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$ in der Tat den Grenzwert x besitzt. Hierzu führen wir eine Fallunterscheidung:

- Gibt es ein $k \leq \nu$ mit $v\big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\big) = -\infty$, so gilt nach Konstruktion $r_i = 0$ für alle $i < k$ und es ist $x = \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$.

- Ist dagegen $v\big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\big) \in \mathbb{Z}$ für alle $k \leq \nu$, so wird der obige Konstruktionsschritt unendlich oft wiederholt und es ist $r_k \neq 0$ für unendlich viele $k \leq \nu$ gewählt worden - d.h. in der Ungleichungskette
$$... \quad \leq \quad v\Big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad \leq \quad v\Big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \quad \leq \quad ... \quad \leq \quad v(x - \pi_\nu r_\nu) \quad < \quad v(x)$$
treten unendlich viele echte Ungleichungen auf. Da diese Werte alle in $\mathbb{Z}$ liegen, ist die Folge $\big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\big)_{k \leq \nu}$ somit eine Nullfolge und x Grenzwert dieser Reihe.

[1] Für alle $k \leq \nu$ mit $r_k = 0$ gilt hierbei anstatt dieser echten Ungleichung natürlich Gleichheit.

Zur Eindeutigkeit: Zum Nachweis der Eindeutigkeit dieser Reihendarstellung ist zu zeigen, dass eine von der oben konstruierten verschiedene Reihe $\sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i s_i$ mit $s_i \in R$ für $i \leq \nu$ und $s_\nu \neq 0$ nicht den Grenzwert x besitzen kann. Es sei eine solche gegeben - da diese von der obigen verschieden sein soll, gibt es einen maximalen Index $k \leq \nu$ mit $r_k \neq s_k$, d.h. mit $v(s_k - r_k) = 0$.[1] Da nach Konstruktion

$$v\Big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big) - r_k\Big) \quad < \quad 0$$

gilt,[2] folgt mit dem Dominanzprinzip der uniformen Bewertung v ebenfalls

$$v\Big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big) - s_k\Big) \overset{(1.11,e)}{=} v\Big(\Big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big) - r_k\Big) - \big(s_k - r_k\big)\Big) \overset{(1.12,e)}{=} 0 \,.$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}
v\Big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i s_i\Big) &\overset{(1.11,e)}{=} v\Big(\big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i s_i\big) - \big(\sum_{i=k}^{\nu} \pi_i s_i - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i s_i\big)\Big) \\
&= v\Big(\big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\big) - \pi_k s_k\Big) \\
&\overset{(1.11,k)}{=} v\Big(\pi_k\Big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big) - s_k\Big)\Big) \\
&= v(\pi_k) + v\Big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big) - s_k\Big) \quad = \quad k \,.
\end{aligned}$$

Hiermit gilt dann bereits $v\big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i s_i\big) = k$ für alle $n \leq k$; denn ist ein $n \leq k$ mit dieser Eigenschaft gegeben, so gilt wegen $v(\pi_{n-1} s_{n-1}) \leq n-1 < k$ ebenso mit dem Dominanzprinzip

$$\begin{aligned}
v\Big(x - \sum_{i=n-1}^{\nu} \pi_i s_i\Big) &\overset{(1.11,e)}{=} v\Big(\big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i s_i\big) - \big(\sum_{i=n-1}^{\nu} \pi_i s_i - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i s_i\big)\Big) \\
&= v\Big(\big(x - \sum_{i=n}^{\nu} \pi_i r_i\big) - \pi_{n-1} s_{n-1}\Big) \overset{(1.12,e)}{=} k \,.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist die Folge $\big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i s_i\big)_{k \leq \nu}$ daher keine Nullfolge und x kann nicht Grenzwert dieser Reihe sein.

Zu (b): Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und ihre jeweiligen Reihendarstellungen wie oben gegeben. Im Beweis der Eindeutigkeit aus (a) hatten wir bereits gesehen, dass nach Konstruktion

$$v\Big(r_k - \big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big)\Big) \quad < \quad 0 \qquad \text{und} \qquad v\Big(s_k - \big(\pi_k\backslash(y - \textstyle\sum_{j=k+1}^{\nu} \pi_j s_j)\big)\Big) \quad < \quad 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt;[3] und wegen

$$v(r_k - s_k) \overset{(1.11,e)}{=} v\Big(\Big(r_k - \big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big)\Big) - \Big(s_k - \big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i)\big)\Big)\Big)$$

[1] da R ein Vertretersystem von A_v/I_v ist

[2] Im Fall $v\big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\big) = k$ ist der Vertreter $r_k \in R\backslash\{0\}$ gerade mit dieser Eigenschaft gewählt worden; und im Fall $v\big(x - \sum_{i=k+1}^{\nu} \pi_i r_i\big) < k$ ist $r_k = 0$ gesetzt worden und die Behauptung damit klar.

[3] Beachte, dass nach (1.12,a) für alle $a, b \in K$ stets $v(a - b) = v(b - a)$ gilt.

sowie

$$\begin{aligned} & v\Big(s_k - \big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big)\Big) \\ \overset{(1.11,e)}{=}\; & v\Big(\big(s_k - \big(\pi_k\backslash(y - \textstyle\sum_{j=k+1}^{\mu}\pi_j s_j)\big)\big) - \big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big) - \big(\pi_k\backslash(y - \textstyle\sum_{j=k+1}^{\mu}\pi_j s_j)\big)\big)\Big)\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt mit dem Dominanzprinzip (1.12,e) der uniformen Bewertung v somit

$$\begin{aligned} (*) \qquad v(r_k - s_k) \;=\; 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad v\Big(s_k - \big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big)\Big) \;=\; 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad v\Big(\big(\pi_k\backslash(x - \textstyle\sum_{i=k+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big) - \big(\pi_k\backslash(y - \textstyle\sum_{j=k+1}^{\mu}\pi_j s_j)\big)\Big) \;=\; 0\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $x \neq y$ existiert nach (a) ein maximaler Index $l \in \mathbb{Z}$ mit $r_l \neq s_l$; für die Behauptung ist somit $v(x-y) = l$ zu zeigen. Dies folgt aus der Maximalität von l und der Zwischenbehauptung mittels:

$$\begin{aligned} r_l \neq s_l \quad & \Longleftrightarrow \quad v(r_l - s_l) \;=\; 0 \\ & \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad v\Big(\big(\pi_l\backslash(x - \textstyle\sum_{i=l+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big) - \big(\pi_l\backslash(y - \textstyle\sum_{j=l+1}^{\mu}\pi_j s_j)\big)\Big) \;=\; 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad v(\pi_l) + v\Big(\big(\pi_l\backslash(x - \textstyle\sum_{i=l+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big) - \big(\pi_l\backslash(y - \textstyle\sum_{j=l+1}^{\mu}\pi_j s_j)\big)\Big) \;=\; l \\ & \Longleftrightarrow \quad v\Big(\pi_l\big(\big(\pi_l\backslash(x - \textstyle\sum_{i=l+1}^{\nu}\pi_i r_i)\big) - \big(\pi_l\backslash(y - \textstyle\sum_{j=l+1}^{\mu}\pi_j s_j)\big)\big)\Big) \;=\; l \\ & \overset{(1.11,k)}{\Longleftrightarrow} \quad v\Big(\big(x - \sum_{i=l+1}^{\nu}\pi_i r_i\big) - \big(y - \sum_{j=l+1}^{\mu}\pi_j s_j\big)\Big) \;=\; l \\ & \Longleftrightarrow \quad v\Big(\big(x - \sum_{i=l+1}^{\max\{\nu,\mu\}}\pi_i r_i\big) - \big(y - \sum_{i=l+1}^{\max\{\nu,\mu\}}\pi_i r_i\big)\Big) \;=\; l \quad \overset{(1.11,e)}{\Longleftrightarrow} \quad v(x-y) \;=\; l\,.\end{aligned}$$

Zu (c): Es seien ein $\nu \in \mathbb{Z}$, $a_i \in A_v$ für $i \leq \nu$ sowie ein $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ gegeben. Für alle $k \leq \varepsilon - 1$ gilt dann

$$v\Big(\sum_{i=k}^{\nu}\pi_i a_i - \sum_{i=k+1}^{\nu}\pi_i a_i\Big) \;=\; v(\pi_k a_k) \;=\; v(\pi_k) + v(a_k) \;\leq\; k \;<\; \varepsilon\,.$$

Da in einem diskret uniform bewerteten Ternärkörper (K, T, v) eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar bereits dann eine Cauchy-Folge ist, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $v(x_{n+1} - x_n) < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ existiert,[1] ist $\big(\sum_{i=k}^{\nu}\pi_i a_i\big)_{k\leq\nu}$ daher eine Cauchy-Folge und besitzt somit einen Grenzwert $x \in K$, da (K, d_v) nach Voraussetzung vollständig ist.
Ist hierbei $a_\nu \notin I_v$, so gilt $v\big(\sum_{i=k}^{\nu}\pi_i a_i\big) = \nu$ für alle $k \leq \nu$; denn es ist $v(\pi_\nu a_\nu) = \nu$ und ist ein $k \leq \nu$ mit dieser Eigenschaft gegeben, so gilt wegen $v(\pi_{k-1}a_{k-1}) \leq k - 1 < \nu$ ebenso mit dem Dominanzprinzip

$$v\Big(\sum_{i=k-1}^{\nu}\pi_i a_i\Big) \;=\; v\Big(\pi_{k-1}a_{k-1} + \big(\sum_{i=k}^{\nu}\pi_i a_i\big)\Big) \;\overset{(1.12,e)}{=}\; \nu\,.$$

Da $\big(x - \sum_{i=k}^{\nu}\pi_i a_i\big)_{k\leq\nu}$ eine Nullfolge ist, muss mit dem Dominanzprinzip (1.12,e) somit insbesondere $v(x) = \nu$ gelten.

□

[1] Denn für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt durch mehrfache Anwendung der starken Dreiecksungleichung der Ultrametrik d_v stets $d_v(x_n, x_m) \;\leq\; \max\limits_{i=m,..,n-1}\{d_v(x_{i+1}, x_i)\} \;=\; \max\limits_{i=m,..,n-1}\{v(x_{i+1} - x_i)\}$.

Wir möchten diese eindeutige Reihendarstellung nun speziell für diskret uniform bewertete Quasikörper nutzen, um eine Beziehung zu den Laurentreihenkörpern herzustellen. Hierzu werden wir zunächst die Existenz eines 'schönen' Vertretersystemes von A_v/I_v zeigen und das Verhalten der eindeutigen Reihendarstellung bzgl. dieses Vertretersytemes betrachten.

Für den Rest dieses Abschnittes seien $(K,+,\cdot,v)$ daher nun ein diskret uniform bewerteter Quasikörper, k sein Primkörper und die Einschränkung $v|_k$ der uniformen Bewertung v auf den Primkörper k trivial.

(7.3) Satz:

(a) $k + I_v$ ist der Primkörper des Quasikörpers A_v/I_v und es gilt $k \cong k + I_v$; insbesondere ist A_v/I_v als k-(Rechts-)Vektorraum auffassbar.

(b) Es gibt ein Vertretersystem $R \subset A_v$ von A_v/I_v, welches zugleich ein (k-Rechts-)Untervektorraum von K ist.

Beweis: *Zu (a):* Da $v|_k$ trivial ist, gilt $v(\lambda) \in \{0, -\infty\}$ für alle $\lambda \in k$ und somit ist insbesondere $k \subset A_v$. Betrachte die Einschränkung $\pi|_k$ der kanonischen Projektion $\pi : A_v \twoheadrightarrow A_v/I_v, \quad x \mapsto x + I_v$, auf den Primkörper k von K: Nach Konstruktion ist diese sowohl additiv als auch multiplikativ[1] und injektiv, da für alle $\lambda, \mu \in k$ gilt:

$$\begin{array}{llllll} \lambda \neq \mu & \Longrightarrow & \lambda - \mu \in k^* & \Longrightarrow & v(\lambda-\mu) = 0 & \\ & \Longrightarrow & \lambda - \mu \notin I_v & \Longrightarrow & \pi(\lambda) = \lambda + I_v \neq \mu + I_v = \pi(\mu)\ . \end{array}$$

Somit ist $\pi(k) = k + I_v$ ein zu k isomorpher, kommutativer Körper mit $I_v, 1 + I_v \in k + I_v$; insbesondere muss $k + I_v$ bereits den Primkörper von A_v/I_v enthalten. Da $k+I_v$ aber bereits zu dem Primkörper k isomorph ist, muss hierbei schon Gleichheit gelten.

Zu (b): Nach (a) ist A_v/I_v ein k-(Rechts-)Vektorraum; ebenso sind auch I_v und A_v beides k-(Rechts-)Vektorräume, denn es ist $0 \in I_v \subset A_v$ und für alle $x, y \in I_v$, $a, b \in A_v$ und $\lambda \in k$ gelten

$$\begin{array}{lllll} & v(x+y\lambda) \leq \max\{v(x),\ v(y)+v(\lambda)\} < 1\ , & \text{d.h.} & x + y\lambda \in I_v\ , \\ \text{sowie} & v(a+b\lambda) \leq \max\{v(a),\ v(b)+v(\lambda)\} \leq 1\ , & \text{d.h.} & a + b\lambda \in A_v\ . \end{array}$$

Daher ist

$$0 \hookrightarrow I_v \hookrightarrow A_v \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A_v/I_v \twoheadrightarrow 0$$

mit den jeweiligen Inklusionsabbildungen bzw. der Nullabbildung eine kurze exakte Sequenz von k-(Rechts-)Vektorräumen mit linearen Abbildungen.[2] Da diese kurzen exakten

[1] Denn A_v/I_v ist gerade mit den Komplexverknüpfungen versehen.

[2] Die Exaktheit an allen drei Stellen ist hierbei klar.

Sequenzen stets *split-exakt* sind,[1] gibt es nach dem *Splitting-Lemma*, siehe etwa HATCHER [13, S.147f.], einen *Schnitt* dieser kurzen exakten Sequenz, d.h. es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : A_v/I_v \longrightarrow A_v$ mit $\pi \circ \varphi = \mathrm{id}_{A_v/I_v}$.
Insbesondere ist $R := \varphi(A_v/I_v) \subset A_v$ als Bild eines k-(Rechts-)Vektorraumes unter der linearen Abbildung φ wieder ein k-(Rechts-)Vektorraum - weiter ist R ein Vertretersystem von A_v/I_v, denn es gelten jeweils:

- Für ein $z + I_v \in A_v/I_v$ ist $\varphi(z + I_v) \in R$ ein Vertreter dieser Nebenklasse wegen

$$\varphi(z + I_v) + I_v \quad = \quad \pi\big(\varphi(z + I_v)\big) \quad = \quad z + I_v \ .$$

- Sind $x, y \in R$ mit $x + I_v = y + I_v$ gegeben, so gibt es $\widetilde{x} + I_v,\ \widetilde{y} + I_v \in A_v/I_v$ mit $x = \varphi(\widetilde{x} + I_v)$ und $y = \varphi(\widetilde{y} + I_v)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \widetilde{x} + I_v \quad &= \quad \pi\big(\varphi(\widetilde{x} + I_v)\big) \quad = \quad \pi(x) \quad = \quad x + I_v \\ &= \quad y + I_v \quad = \quad \pi(y) \quad = \quad \pi\big(\varphi(\widetilde{y} + I_v)\big) \quad = \quad \widetilde{y} + I_v \ , \end{aligned}$$

  d.h. es ist bereits $x = \varphi(\widetilde{x} + I_v) = \varphi(\widetilde{y} + I_v) = y$.

Somit ist R das gesuchte Vertretersystem von A_v/I_v.

□

(7.4) Korollar:

Es seien $R \subset A_v$ ein Vertretersystem von A_v/I_v, welches zugleich ein (k-Rechts-)Untervektorraum von K ist, sowie Elemente $\pi_z \in K^*$ mit $v(\pi_z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$ gegeben.
Für Elemente $x, y \in K^*$ mit $x + y \neq 0$ und den jeweiligen eindeutigen Reihendarstellungen $x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$ und $y = \sum_{j=-\infty}^{\mu} \pi_j s_j$ bzgl. R und $(\pi_z)_{z\in\mathbb{Z}}$ sowie einem $\lambda \in k^*$ gelten:

(a) Das Element $-x \in K^*$ besitzt die eindeutige Reihendarstellung

$$-x \quad = \quad \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i(-r_i)$$

bzgl. R und $(\pi_z)_{z\in\mathbb{Z}}$.

(b) Das Element $x + y \in K^*$ besitzt die eindeutige Reihendarstellung

$$x + y \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\eta} \pi_k(r_k + s_k) \qquad \text{mit} \qquad \eta \ := \ v(x + y) \ \in \ \mathbb{Z}$$

bzgl. R und $(\pi_z)_{z\in\mathbb{Z}}$.

[1] Wählen wir eine beliebige Basis $(a_i + I_v)_{i\in I}$ des Vektorraumes A_v/I_v und feste Vertreter $b_i \in a_i + I_v$ einer jeden Nebenklasse ($i \in I$), so können wir die lineare Abbildung $\varphi : \ A_v/I_v \longrightarrow A_v$ mit dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen gerade durch $\varphi(a_i + I_v) := b_i$ definieren, sodass nach Konstruktion sofort $\pi(\varphi(a_i + I_v)) = a_i + I_v$ für alle $i \in I$ gilt; diese Argumentation ist im allgemeineren Kontext der *freien* abelschen Gruppen bei HATCHER [13, S.148] zu finden.

<u>**Beweis:**</u> *Zu (a):* Zunächst sind in dieser Situation $v(-x) = \nu$ sowie $-r_i \in R$ für $i \leq \nu$ und $-r_\nu \neq 0$ jeweils klar.[1] Da für alle $k \leq \nu$ weiter

$$\begin{aligned} v\Big((-x) - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i(-r_i)\Big) &= v\Big((-x) - \sum_{i=k}^{\nu} \big(-(\pi_i r_i)\big)\Big) = v\Big((-x) + \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \\ &= v\Big(-\big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\big)\Big) \overset{(1.12,c)}{=} v\Big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\Big) \end{aligned}$$

gilt und $\big(x - \sum_{i=k}^{\nu} \pi_i r_i\big)_{k \leq \nu}$ eine Nullfolge ist, ist $-x$ somit der Grenzwert dieser Reihe.

Zu (b): Zunächst sind in dieser Situation $v(x+y) = \eta$ und $r_k + s_k \in R$ für $k \leq \eta$ jeweils klar.[2] Da das Element $-y \in K^*$ nach (a) die eindeutige Reihendarstellung $-y = \sum_{j=-\infty}^{\mu} \pi_j(-s_j)$ besitzt und nach Voraussetzung $x \neq -y$ gilt, ist weiter

$$\eta \;=\; v(x+y) \overset{(1.11,i)}{=} v\big(x - (-y)\big) \overset{(7.2,b)}{=} \max\big\{\ k \in \mathbb{Z} \ \big|\ r_k \neq -s_k\ \big\}\ ,$$

d.h. es sind $r_\eta + s_\eta \neq 0$ sowie $r_n + s_n = 0$ für alle $n = \eta+1, ..., \max\{\nu, \mu\}$. Da für alle $n \leq \eta$ weiter

$$\begin{aligned} v\Big((x+y) - \sum_{k=n}^{\eta} \pi_k(r_k + s_k)\Big) &= v\Big((x+y) - \sum_{k=n}^{\max\{\nu,\mu\}} \pi_k(r_k + s_k)\Big) \\ &= v\Big((x+y) - \sum_{k=n}^{\max\{\nu,\mu\}} (\pi_k r_k + \pi_k s_k)\Big) \\ &= v\Big(\big(x - \sum_{k=n}^{\max\{\nu,\mu\}} \pi_k r_k\big) + \big(y - \sum_{k=n}^{\max\{\nu,\mu\}} \pi_k s_k\big)\Big) \\ &= v\Big(\big(x - \sum_{k=n}^{\nu} \pi_k r_k\big) + \big(y - \sum_{k=n}^{\mu} \pi_k s_k\big)\Big) \\ &\leq \max\Big\{\ v\Big(x - \sum_{k=n}^{\nu} \pi_k r_k\Big),\ v\Big(y - \sum_{k=n}^{\mu} \pi_k s_k\Big)\ \Big\} \end{aligned}$$

gilt und $\big(x - \sum_{k=n}^{\nu} \pi_k r_k\big)_{n \leq \nu}$ sowie $\big(y - \sum_{k=n}^{\mu} \pi_k s_k\big)_{n \leq \nu}$ jeweils Nullfolgen sind, ist $x+y$ somit der Grenzwert dieser Reihe.

□

Wir können uns daher nun der bereits angekündigten Darstellung vollständiger, diskret uniform bewerteter Quasikörper $(K, +, \cdot, v)$, deren uniforme Bewertung v eine triviale Einschränkung auf den Primkörper k von K besitzt, als v-Ableitungen eines kommutativen Laurentreihenkörpers[3] zuwenden:

[1] Denn es sind $v(-x) = v(x)$ nach (1.12,c), R als Vektorraum unter additiver Inversenbildung abgeschlossen und nach Voraussetzung $r_\nu \neq 0$.

[2] Denn η ist gerade so definiert worden und R ist als Vektorraum additiv abgeschlossen.

[3] Hiermit meinen wir den kommutativen Körper der formalen Potenzreihen auf $\mathbb{Z}$ über einem kommutativen Körper L, welchen wir mit $L((t)) := L((\mathbb{Z}))$ bezeichnen - erneut betrachten wir hierbei formale Potenzreihen mit anti-wohlgeordnetem Träger, damit die Grad-Bewertung δ eine Bewertung in unserem Sinne ergibt, vgl. (1.13,c).

(7.5) Theorem:

Es seien $(K, +, \cdot, v)$ ein vollständiger, diskret uniform bewerteter Quasikörper, k sein Primkörper und die Einschränkung $v|_k$ trivial. Dann gibt es einen kommutativen Körper L und eine δ-treue Ableitung Φ auf dem Laurentreihenkörper $L((t))$ derart, dass K und $L((t))^\Phi$ als uniform bewertete Quasikörper isomorph sind.

Beweis: Setze $L := A_v/I_v$; nach TIMM [47, Satz 2] gibt es dann eine binäre, innere Verknüpfung $\odot$ auf L, mit der $(L, +, \odot)$ einen kommutativen Körper bildet.[1] Setzen wir diese Verknüpfungen in gewohnter Weise zu Verknüpfungen $+$ und $\odot$ auf dem Laurentreihenkörper $L((t))$ fort, so bildet $\big(L((t)), +, \odot, \delta\big)$ zusammen mit der Grad-Bewertung δ einen bewerteten kommutativen Körper.
Nach (7.3,b) gibt es in dieser Situation ein Vertretersystsem $R \subset A_v$ von A_v/I_v, welches zugleich ein (k-Rechts-)Untervektorraum von K ist; wähle weiter beliebige Elemente $\pi_z \in K^*$ mit $v(\pi_z) = z$ für alle $z \in \mathbb{Z}$.[2] Betrachte nun die Abbildung

$$\varphi : \quad K \longrightarrow L((t)) \ , \qquad x \quad \mapsto \quad \begin{cases} \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} (r_\gamma + I_v) t^\gamma & \text{für } \ 0 \neq x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i \\ 0 & \text{für } \ 0 = x \end{cases} ,$$

wobei $x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$ stets die eindeutige Reihendarstellung des Elementes $x \in K^*$ bzgl. R und $(\pi_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ aus (7.2,a) bezeichne.[3]
Für die Behauptung genügt es nun zu zeigen, dass diese Abbildung φ ein Gruppen-Isomorphismus von $(K, +)$ auf $\big(L((t)), +\big)$ mit $v = \delta \circ \varphi$ ist: Denn übertragen wir in dieser Situation die Quasikörper-Multiplikation $\cdot$ mittels der bijektiven Abbildung φ in gewohnter Weise von K auf $L((t))$, so sind $\big(L((t)), +, \cdot, \delta\big)$ und $(K, +, \cdot, v)$ als uniform bewertete Quasikörper isomorph und die Behauptung folgt bereits aus (6.5).

- <u>$v = \delta \circ \varphi$:</u> Nach Konstruktion ist $\delta(\varphi(0)) = -\infty = v(0)$; und ist ein $x \in K^*$ mit eindeutiger Reihendarstellung $x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$ gegeben, so gilt ebenso

$$\begin{aligned} \delta\big(\varphi(x)\big) \ &= \ \delta\Big(\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} (r_\gamma + I_v) t^\gamma\Big) \ = \ \max\big\{\ \gamma \in \mathbb{Z} \ \big| \ r_\gamma + I_v \neq I_v \ \big\} \\ &= \ \max\big\{\ \gamma \in \mathbb{Z} \ \big| \ r_\gamma \neq 0 \ \big\} \ = \ \nu \ = \ v(x) \ . \end{aligned}$$

  Somit ist bereits $v = \delta \circ \varphi$ gezeigt.

- <u>φ ist additiv:</u> Es seien $x, y \in K$ gegeben. Ist $0 \in \{x, y\}$, so folgt aus der Konstruktion direkt $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; im Folgenden seien daher $x, y \in K^*$ mit den eindeutigen Reihendarstellungen $x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i r_i$ sowie $y = \sum_{j=-\infty}^{\mu} \pi_j s_j$.
  Ist $x + y = 0$, so besitzt das Element $y = -x \in K^*$ nach (7.4,a) die eindeutige Reihendarstellung $y = -x = \sum_{i=-\infty}^{\nu} \pi_i(-r_i)$ und es folgt

[1] Genauer folgt dies aus der dortigen Implikation **A10** $\Rightarrow$ **A6**.

[2] Diese existieren, da v surjektiv ist.

[3] Diese Konstruktion ist offenbar wohldefiniert, da für alle $x \in K^*$ der Träger von $\varphi(x)$ wegen $r_i = 0$ für $i > v(x)$ stets in $\mathbb{Z}$ nach oben beschränkt und daher anti-wohlgeordnet ist.

$$\begin{aligned}\varphi(x)+\varphi(y) &= \Big(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(r_\gamma+I_v)t^\gamma\Big)+\Big(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}\big((-r_\gamma)+I_v\big)t^\gamma\Big)\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}\Big((r_\gamma+I_v)+\big((-r_\gamma)+I_v\big)\Big)t^\gamma\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} I_v t^\gamma \;=\; 0 \;=\; \varphi(0) \;=\; \varphi(x+y)\ .\end{aligned}$$

Ist dagegen $x+y\neq 0$, so besitzt das Element $x+y\in K^*$ nach (7.4,b) die eindeutige Reihendarstellung $x+y=\sum_{k=-\infty}^{\eta}\pi_k(r_k+s_k)$ mit $\eta:=v(x+y)\in\mathbb{Z}$ und es gilt $r_n+s_n=0$ für $n=\eta+1,...,\max\{\nu,\mu\}$. Somit folgt ebenfalls

$$\begin{aligned}\varphi(x)+\varphi(y) &= \Big(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(r_\gamma+I_v)t^\gamma\Big)+\Big(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(s_\gamma+I_v)t^\gamma\Big)\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}\Big((r_\gamma+I_v)+(s_\gamma+I_v)\Big)t^\gamma\\ &= \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}\big((r_\gamma+s_\gamma)+I_v\big)t^\gamma \;=\; \varphi(x+y)\ .\end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ für alle $x,y\in K$.

- φ ist injektiv: Da φ ein Gruppen-Homomorphismus ist, genügt es für die Injektivität von φ noch $\mathrm{Kern}(\varphi)=\{0\}$ zu zeigen; sei hierfür ein $x\in\mathrm{Kern}(\varphi)$ gegeben. Es folgt mit dem oben Bewiesenen

  $$v(x) \;=\; \delta\big(\varphi(x)\big) \;=\; \delta(0) \;=\; -\infty\ ,$$

  d.h. es muss $x=0$ gelten.

- φ ist surjektiv: Offenbar besitzt das Nullelement $0\in L((t))$ nach Konstruktion das Urbild $0\in K$ unter der Abbildung φ. Ist dagegen ein Element $\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(a_\gamma+I_v)t^\gamma\in L((t))^*$ mit $\delta\big(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(a_\gamma+I_v)t^\gamma\big)=:\nu\in\mathbb{Z}$ gegeben, so können wir für jedes $\gamma\in\mathbb{Z}$ den Vertreter $r_\gamma\in R$ der Nebenklasse $a_\gamma+I_v$ wählen; wegen $\delta\big(\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(a_\gamma+I_v)t^\gamma\big)=\nu$ und $0\in R$ gilt hierbei $r_\gamma=0$ für alle $\gamma>\nu$; und wegen $r_\nu+I_v\neq I_v$ ist weiter $r_\nu\neq 0$.
  Da K vollständig ist, besitzt die Reihe $\sum_{i=-\infty}^{\nu}\pi_i r_i$ nach (7.2,c) einen Grenzwert $x\in K$; wegen $r_\nu\neq 0$ ist hierbei sogar $x\in K^*$ mit $v(x)=\nu$. Somit ist $x=\sum_{i=-\infty}^{\nu}\pi_i r_i$ bereits die eindeutige Reihendarstellung von x und es folgt

  $$\varphi(x) \;=\; \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(r_\gamma+I_v)t^\gamma \;=\; \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}}(a_\gamma+I_v)t^\gamma\ .$$

Insgesamt folgt die Behauptung somit aus (6.5).

□

Mit Verzicht auf die Vollständigkeit erhalten wir hiermit für beliebige diskret uniform bewertete Quasikörper, deren uniforme Bewertung eine triviale Einschränkung auf den Primkörper besitzt, auch:

(7.6) Korollar:

(a) Es gibt einen kommutativen Körper L und eine δ-treue Ableitung Φ auf dem Laurentreihenkörper $L((t))$, sodass K als uniform bewerteter Quasikörper in $L((t))^{\Phi}$ einbettbar ist.

(b) Ist $(K, +, \cdot, v)$ und vollständig und ist zusätzlich $(K, \mathscr{T}_v)$ lokalkompakt, so gibt es eine Primzahlpotenz q und eine δ-treue Ableitung Φ auf dem Laurentreihenkörper $\mathbb{F}_q((t))$, sodass K und $\mathbb{F}_q((t))^{\Phi}$ als uniform bewertete Quasikörper isomorph sind.

Beweis: *Zu (a):* Nach (7.1,d) gibt es in dieser Situation einen vollständigen, diskret uniform bewerteten Quasikörper[1] $(\hat{K}, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{v})$, in den K als uniform bewerteter Quasikörper einbettbar ist. Da $\hat{K}$ nach (7.5) zu einer δ-Ableitung eines kommutativen Laurentreihenkörpers isomorph ist, folgt somit bereits die Behauptung.

Zu (b): Nach (7.5) gibt es einen kommutativen Laurentreihenkörper $L((t))$ und eine δ-treue Ableitung Φ auf diesem so, dass K und $L((t))^{\Phi}$ als uniform bewertete Quasikörper isomorph sind. Da dieser dann ebenfalls lokalkompakt ist, ist $L((t))$ ein *lokaler Körper* und nach Cassels [5, S.46] muss L daher endlich sein. Somit gibt es eine Primzahlpotenz q mit $L \cong \mathbb{F}_q$ und die Behauptung ist gezeigt.

□

Eine Konstruktion von Beispielen

Als Abschluss dieser Arbeit möchten wir nun noch Beispiele für die δ-treuen Ableitungen Φ auf einem kommutativen Laurentreihenkörper $L((t))$ aus (7.5) - und somit Beispiele vollständiger, diskret uniform bewerteter Quasikörper, deren uniforme Bewertung eine triviale Einschränkung auf den Primkörper besitzt - konstruieren.

(7.7) Lemma:

Es seien $(K, +, \cdot, v)$ ein diskret bewerteter Körper und ein Element $e \in A_v \backslash I_v$ gegeben. Für Abbildungen $\varphi : K^* \longrightarrow K$ und $\psi \in \mathrm{End}(K, +)$, welche die Eigenschaften

(i) Für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ gilt $v\big(\varphi(x) - \varphi(y)\big) < v(x - y) - v(y)$.

(ii) Für alle $x \in K$ gilt $v\big(\psi(x)\big) \leq v(x)$.

erfüllen, seien weiter die folgenden Abbildungen definiert:

$$\varphi_e : \; K^* \longrightarrow K \;, \quad x \;\mapsto\; \varphi(x) - \varphi(e) \;, \qquad \text{sowie} \qquad \psi_e : \; K \longrightarrow K \;, \quad x \;\mapsto\; x\psi(e) - e\psi(x) \;.$$

[1] Beachte, dass sich die zusätzlichen algebraischen Eigenschaften von K direkt auf $\hat{K}$ übertragen und dieser daher ebenfalls ein Quasikörper ist, vgl. Schörner [40, S.346].

Dann gelten:

(a) (i) Es ist $\varphi_e(e) = 0$.

(ii) Für alle $x \in K^*$ gilt $v\big(\varphi_e(x)\big) < 0$.

(iii) Die Abbildung φ_e erfüllt ebenfalls die Eigenschaft (i), d.h. für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ gilt $v\big(\varphi_e(x) - \varphi_e(y)\big) < v(x-y) - v(y)$.

(iv) Für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ gilt $v\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big) < v(x-y)$.

(b) (i) Es ist $\psi_e(e) = 0$.

(ii) Es ist $\psi_e \in \mathrm{End}(K, +)$.

(iii) Die Abbildung ψ_e erfüllt ebenfalls die Eigenschaft (ii), d.h. für alle $x \in K$ gilt $v\big(\psi_e(x)\big) \leq v(x)$.

Beweis: *Zu (a):* (i): Nach Konstruktion klar.

(ii): Es sei ein $x \in K^*$ gegeben. Im Fall $x = e$ folgt mit (a(i)) direkt $v\big(\varphi_e(x)\big) = -\infty < 0$; es sei im Folgenden daher $x \neq e$. Ist $v(x) \leq v(e) = 0$, so gilt

$$v\big(\varphi_e(x)\big) \;=\; v\big(\varphi(x) - \varphi(e)\big) \;\overset{\text{(i)}}{<}\; v(x-e) - v(e) \;\leq\; \max\big\{v(x), v(e)\big\} \;=\; 0\ ;$$

und ist dagegen $x(x) > v(e) = 0$, so folgt mit dem Dominanzprinzip ebenso

$$\begin{aligned} v\big(\varphi_e(x)\big) &= v\big(\varphi(x) - \varphi(e)\big) \overset{(1.12,a)}{=} v\big(\varphi(e) - \varphi(x)\big) \overset{\text{(i)}}{<} v(e-x) - v(x) \\ &\overset{(1.12,e)}{=} v(x) - v(x) \;=\; 0\ . \end{aligned}$$

(iii): Für alle $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) \leq v(y)$ folgt sofort

$$\begin{aligned} v\big(\varphi_e(x) - \varphi_e(y)\big) &= v\Big(\big(\varphi(x) - \varphi(e)\big) - \big(\varphi(y) - \varphi(e)\big)\Big) \\ &= v\big(\varphi(x) - \varphi(y)\big) \overset{\text{(i)}}{<} v(x-y) - v(y)\ . \end{aligned}$$

(iv): Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ gegeben, oBdA[1] sei dabei $v(x) \leq v(y)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big) &= v\Big(\big(x\varphi_e(x) - x\varphi_e(y)\big) + \big(x\varphi_e(y) - y\varphi_e(y)\big)\Big) \\ &= v\Big(x\big(\varphi_e(x) - \varphi_e(y)\big) + (x-y)\varphi_e(y)\Big) \\ &\leq \max\Big\{\ v(x) + v\big(\varphi_e(x) - \varphi_e(y)\big),\ \ v(x-y) + v\big(\varphi_e(y)\big)\ \Big\} \\ &\overset{(a(ii,iii))}{<} \max\Big\{\ v(x) + v(x-y) - v(y),\ \ v(x-y)\ \Big\} \;=\; v(x-y)\ . \end{aligned}$$

[1] Vertausche mit (1.12,a) ansonsten die Rollen von x und y.

Zu (b): (i): Nach Konstruktion klar.

(ii): Offenbar ist ψ_e als Differenz der Endomorphismen[1] $\mathrm{id}_K\psi(e)$ und $e\psi$ wieder ein Endomorphismus von $(K,+)$.

(iii): Für alle $x \in K$ gilt

$$\begin{aligned} v\big(\psi_e(x)\big) &= v\big(x\psi(e) - e\psi(x)\big) \leq \max\Big\{\, v(x) + v\big(\psi(e)\big),\ v(e) + v\big(\psi(x)\big) \,\Big\} \\ &\overset{\text{(ii)}}{\leq} v(x) + v(e) = v(x) \ . \end{aligned}$$

□

(7.8) Satz:

Es seien $(K,+,\cdot,v)$ ein vollständiger, diskret bewerteter Körper und k sein Primkörper. Weiter seien ein Element $e \in A_v \backslash I_v$ sowie Abbildungen φ, ψ wie in (7.7) gegeben; ebenso seien die beiden Abbildungen φ_e, ψ_e wie dort definiert. Dann wird durch

$$\begin{array}{lllll} & \Phi: & K^* \longrightarrow \mathrm{GL}_k(K)\ , & x \mapsto \Phi_x\ , & \\ \text{mit} & \Phi_x: & K \longrightarrow K\ , & y \mapsto e^{-1}y + \varphi_e(x)\psi_e(y)\ , & \text{für } x \in K^* \end{array}$$

eine v-treue Ableitung auf K definiert, d.h. durch

$$x \diamond y \ := \begin{cases} xe^{-1}y + x\varphi_e(x)\psi_e(y) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{für } x,y \in K$$

wird eine binäre, innere Verknüpfung auf K definiert, mit der $(K,+,\diamond,v)$ ebenfalls einen vollständigen, diskret uniform bewerteten Quasikörper bildet. Hierbei ist e das Einselement von $(K,+,\diamond)$.

Beweis: Mit (6.3,a), (6.7) und (6.4) sind für die Behauptung nur die Axiome (VA0$^-$), (VA1), (VA2), (VA3) und (VA4$^-$) für die Abbildung Φ nachzuweisen.

Zu (VA0$^-$): Es sei ein $x \in K^*$ gegeben. Zunächst ist die Abbildung Φ_x additiv, da

$$\begin{aligned} \Phi_x(y+z) &= xe^{-1}(y+z) + x\varphi_e(x)\psi_e(y+z) \\ &\overset{(7.7,\text{b(ii)})}{=} xe^{-1}y + xe^{-1}z + x\varphi_e(x)\psi_e(y) + x\varphi_e(x)\psi_e(z) \\ &= \big(xe^{-1}y + x\varphi_e(x)\psi_e(y)\big) + \big(xe^{-1}z + x\varphi_e(x)\psi_e(z)\big) \\ &= \Phi_x(y) + \Phi_x(z) \end{aligned}$$

[1]Beachte, dass in $(K,+,\cdot)$ sowohl das links- als auch das rechtsseitige Distributivgesetz gelten.

für alle $y, z \in K$ gilt. Für den Nachweis der Surjektivität von Φ_x sei nun ein $z \in K$ gegeben; betrachte die Abbildung

$$\varrho : \quad K \longrightarrow K \; , \qquad y \;\mapsto\; ez \;-\; e\varphi_e(x)\psi_e(y) \; .$$

Diese Abbildung ϱ ist eine Kontraktion des ultrametrischen Raumes (K, d_v), denn für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ gilt

$$\begin{aligned} v\big(\varrho(a) - \varrho(b)\big) &= v\Big(\big(ez - e\varphi_e(x)\psi_e(a)\big) \;-\; \big(ez - e\varphi_e(x)\psi_e(b)\big)\Big) \\ &= v\Big(e\varphi_e(x)\big(\psi_e(b) - \psi_e(a)\big)\Big) \\ &\overset{(7.7,b(ii))}{=} v\big(e\varphi_e(x)\psi_e(b-a)\big) \\ &= v(e) \;+\; v\big(\varphi_e(x)\big) \;+\; v\big(\psi_e(b-a)\big) \\ &\overset{(7.7,a(ii),b(iii))}{<} v(b-a) \overset{(1.12,a)}{=} v(a-b) \; . \end{aligned}$$

Nach (7.1,c) und dem *Fixpunktsatz von* Priess-Crampe [35, Satz 1, Satz 3] existiert somit ein (eindeutiger) Fixpunkt von ϱ, d.h. ein Element $y_0 \in K$ mit

$$\begin{aligned} & ez \;-\; e\varphi_e(x)\psi_e(y_0) \;=\; \varrho(y_0) \;=\; y_0 \; , \\ \text{d.h.} \quad & y_0 \;+\; e\varphi_e(x)\psi_e(y_0) \;=\; ez \; , \\ \text{also} \quad & \Phi_x(y_0) \;=\; e^{-1}y_0 \;+\; \varphi_e(x)\psi_e(y_0) \;=\; z \; . \end{aligned}$$

Somit ist y_0 ein Urbild von z unter Φ_x und die Abbildung Φ_x insgesamt surjektiv.

Zu (VA1): Es seien $x, y \in K^*$ gegeben. Wegen

$$v\big(\varphi_e(x)\psi_e(y)\big) \;=\; v\big(\varphi_e(x)\big) \;+\; v\big(\psi_e(y)\big) \overset{(7.7,a(ii),b(iii))}{<} v(y) \;=\; v(e^{-1}y)$$

folgt mit dem Dominanzprinzip direkt

$$v\big(\Phi_x(y)\big) \;=\; v\big(e^{-1}y \;+\; \varphi_e(x)\psi_e(y)\big) \overset{(1.12,e)}{=} v(e^{-1}y) \;=\; v(y) \; .$$

Zu (VA2): Für alle $x \in K^*$ gelten

$$\begin{aligned} & \Phi_x(e) \;=\; e^{-1}e \;+\; \varphi_e(x)\psi_e(e) \overset{(7.7,b(i))}{=} 1 \\ \text{sowie} \quad & \Phi_e(x) \;=\; e^{-1}x \;+\; \varphi_e(e)\psi_e(x) \overset{(7.7,a(i))}{=} e^{-1}x \; . \end{aligned}$$

Zu (VA3): Es sei ein $x \in K^*$ gegeben. Für den Nachweis der Surjektivität von ϱ_x sei ein $z \in K^*$ gegeben; betrachte die Abbildung

$$\sigma : \quad K \longrightarrow K \; , \qquad y \;\mapsto\; \begin{cases} zx^{-1}e \;-\; y\varphi_e(y)\psi_e(x)x^{-1}e & \text{falls } \; y \neq 0 \\ zx^{-1}e & \text{falls } \; y = 0 \end{cases} \; .$$

Diese Abbildung σ ist eine Kontraktion des ultrametrischen Raumes (K, d_v), denn für alle $a, b \in K^*$ mit $a \neq b$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
v\big(\sigma(a) - \sigma(b)\big) &= v\Big(\big(zx^{-1}e - a\varphi_e(a)\psi_e(x)x^{-1}e\big) \;-\; \big(zx^{-1}e - b\varphi_e(b)\psi_e(x)x^{-1}e\big)\Big) \\
&= v\Big(\big(b\varphi_e(b) - a\varphi_e(a)\big)\psi_e(x)x^{-1}e\Big) \\
&= v\big(b\varphi_e(b) - a\varphi_e(a)\big) \;+\; v\big(\psi_e(x)\big) \;-\; v(x) \;+\; v(e) \\
&\overset{(7.7,a(iv),b(iii))}{<} v(b-a) \overset{(1.12,a)}{=} v(a-b)\ ;
\end{aligned}$$

und für den ausstehenden Fall $a, b \in K$ mit $a \neq b$ und $0 \in \{a, b\}$ genügt es oBdA[1] $a = 0$ und $b \in K^*$ zu betrachte - hier folgt ebenso

$$\begin{aligned}
v\big(\sigma(a) - \sigma(b)\big) &= v\Big(zx^{-1}e \;-\; \big(zx^{-1}e - b\varphi_e(b)\psi_e(x)x^{-1}e\big)\Big) \\
&= v\big(b\varphi_e(b)\psi_e(x)x^{-1}e\big) \\
&= v(b) \;+\; v\big(\varphi_e(b)\big) \;+\; v\big(\psi_e(x)\big) \;-\; v(x) \;+\; v(e) \\
&\overset{(7.7,a(iii),b(iii))}{<} v(b) \overset{(1.12,c)}{=} v(-b) \;=\; v(a-b)\ .
\end{aligned}$$

Nach (7.1,c) und dem *Fixpunktsatz von* PRIESS-CRAMPE [35, Satz 1, Satz 3] existiert somit ein (eindeutiger) Fixpunkt von σ; wegen $\sigma(0) = zx^{-1}e \neq 0$ kann 0 hierbei nicht dieser Fixpunkt sein. Es gibt somit ein Element $y_0 \in K^*$ mit

$$\begin{aligned}
& zx^{-1}e \;-\; y_0\varphi_e(y_0)\psi_e(x)x^{-1}e \;=\; \sigma(y_0) \;=\; y_0\ , \\
\text{d.h.}\quad & y_0 \;+\; y_0\varphi_e(y_0)\psi_e(x)x^{-1}e \;=\; zx^{-1}e\ , \\
\text{also}\quad & \varrho_x(y_0) \;=\; y_0\Phi_{y_0}(x) \;=\; y_0e^{-1}x \;+\; y_0\varphi_e(y_0)\psi_e(x) \;=\; z\ .
\end{aligned}$$

Somit ist y_0 ein Urbild von z unter ϱ_x und die Abbildung ϱ_x insgesamt surjektiv.

Zu (VA4$^-$): Es seien $x, y \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ gegeben. Für den Nachweis der Surjektivität von $\pi_{x,y}$ sei ein $w \in K$ gegeben; betrachte die Abbildung

$$\tau :\quad K \longrightarrow K\ ,\qquad z \;\mapsto\; e(x-y)^{-1}w \;-\; e(x-y)^{-1}\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(z)\ .$$

Diese Abbildung τ ist eine Kontraktion des ultrametrischen Raumes (K, d_v), denn für alle $a, b \in K$ mit $a \neq b$ gilt

$$\begin{aligned}
v\big(\tau(a) - \tau(b)\big) &= v\Big(\big(e(x-y)^{-1}w - e(x-y)^{-1}\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(a)\big) \\
&\qquad - \big(e(x-y)^{-1}w - e(x-y)^{-1}\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(b)\big)\Big) \\
&\overset{(7.7,b(ii))}{=} v\Big(e(x-y)^{-1}\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(b-a)\Big) \\
&= v(e) \;-\; v(x-y) \;+\; v\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big) \;+\; v\big(\psi_e(b-a)\big) \\
&\overset{(7.7,a(ii),b(iii))}{<} v(b-a) \overset{(1.12,a)}{=} v(a-b)\ .
\end{aligned}$$

[1] Vertausche mit (1.12,a) ansonsten die Rollen von a und b.

Nach (7.1,c) und dem *Fixpunktsatz von* Priess-Crampe [35, Satz 1, Satz 3] existiert somit ein (eindeutiger) Fixpunkt von τ, d.h. ein Element $z_0 \in K$ mit

$$e(x-y)^{-1}w \;-\; e(x-y)^{-1}\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(z_0) \;=\; \tau(z_0) \;=\; z_0\;,$$

d.h. $$z_0 \;+\; e(x-y)^{-1}\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(z_0) \;=\; e(x-y)^{-1}w\;,$$

also
$$\begin{aligned}\pi_{x,y}(z_0) &= x\Phi_x(z_0) \;-\; y\Phi_y(z_0)\\ &= \big(xe^{-1}z_0 + x\varphi_e(x)\psi_e(z_0)\big) \;-\; \big(ye^{-1}z_0 + y\varphi_e(y)\psi_e(z_0)\big)\\ &= (x-y)e^{-1}z_0 \;+\; \big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(z_0) \;=\; w\;.\end{aligned}$$

Somit ist z_0 ein Urbild von w unter $\pi_{x,y}$ und die Abbildung $\pi_{x,y}$ insgesamt surjektiv.
Weiter gilt für alle $x, y, z \in K^*$ mit $x \neq y$ und $v(x) = v(y)$ aufgrund von

$$\begin{aligned}v\Big(\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(z)\Big) &= v\big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big) \;+\; v\big(\psi_e(z)\big)\\ &\overset{(7.7,\text{a(vi)},\text{b(iii)})}{<} v(x-y) \;+\; v(z) \;=\; v\big((x-y)e^{-1}z\big)\end{aligned}$$

mit Hilfe des Dominanzprinzipes schließlich

$$\begin{aligned}v\big(\pi_{x,y}(z)\big) &= v\Big((x-y)e^{-1}z \;+\; \big(x\varphi_e(x) - y\varphi_e(y)\big)\psi_e(z)\Big)\\ &\overset{(1.12,\text{e})}{=} v\big((x-y)e^{-1}z\big) \;=\; v(x-y) \;+\; v(z)\;.\end{aligned}$$

□

(7.9) Beispiel:

Es seien L ein Körper und $\big(L((t)), +, \cdot, \delta\big)$ der Laurentreihenkörper über L.

(a) Sind Elemente $\tau_z \in I_\delta$ für $z \in \mathbb{Z}$ mit $\tau_0 := 0$ gegeben, so erfüllt die Abbildung

$$\varphi^{(\tau)} :\; L((t))^* \longrightarrow L((t))\;, \qquad x \;\mapsto\; \tau_{\delta(x)}\;,$$

die Eigenschaft (i) aus (7.7); denn für alle $x, y \in L((t))^*$ mit $x \neq y$ und $\delta(x) < \delta(y)$ gilt zunächst mit dem Dominanzprinzip

$$\begin{aligned}\delta\big(\varphi^{(\tau)}(x) - \varphi^{(\tau)}(y)\big) &= \delta(\tau_{\delta(x)} - \tau_{\delta(y)}) \;\leq\; \max\big\{\delta(\tau_{\delta(x)}),\; \delta(\tau_{\delta(y)})\big\}\\ &< 0 \;=\; \delta(y) - \delta(y) \overset{(1.12,\text{e})}{=} \delta(x-y) - \delta(y)\;;\end{aligned}$$

und für alle $x, y \in L((t))^*$ mit $x \neq y$ und $\delta(x) = \delta(y)$ ist ebenso

$$\delta\big(\varphi^{(\tau)}(x) - \varphi^{(\tau)}(y)\big) \;=\; \delta(\tau_{\delta(x)} - \tau_{\delta(y)}) \;=\; -\infty \;<\; \delta(x-y) - \delta(y)\;.$$

Für alle $e \in A_\delta \backslash I_\delta$ gilt wegen $\tau_{\delta(e)} = \tau_0 = 0$ hierbei stets $\varphi_e^{(\tau)} = \varphi^{(\tau)}$.

(b) Sind $r, s \in \mathbb{N}_0$ mit $r \neq 0$ gegeben, so erfüllt die Abbildung

$$\varphi^{(r,s)} : \ L((t))^* \longrightarrow L((t)) \ , \quad x = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} x_\gamma t^\gamma \ \mapsto \ \Big(x - \sum_{i=0}^{s-1} x_{\delta(x)-i} t^{\delta(x)-i} \Big) t^{-\delta(x)-r} \ ,$$

die Eigenschaft (i) aus (7.7); denn für alle $x, y \in L((t))^*$ mit $x \neq y$ und $\delta(x) < \delta(y)$ gilt zunächst mit dem Dominanzprinzip

$$\begin{aligned} \delta\big(\varphi^{(r,s)}(x) - \varphi^{(r,s)}(y)\big) \ &\leq \ \max\big\{\delta\big(\varphi^{(r,s)}(x)\big), \ \delta\big(\varphi^{(r,s)}(y)\big)\big\} \ \leq \ -r - s \\ &< \ 0 \ = \ \delta(y) - \delta(y) \overset{(1.12,e)}{=} \delta(x-y) - \delta(y) \ ; \end{aligned}$$

und für alle $x = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} x_\gamma t^\gamma, \ y = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} y_\gamma t^\gamma \ \in \ L((t))^*$ mit $x \neq y$ und $\delta(x) = \delta(y)$ ist ebenso

$$\begin{aligned} &\delta\big(\varphi^{(r,s)}(x) - \varphi^{(r,s)}(y)\big) \\ \leq \ &\max\Big\{ \ v(x-y) \ , \ v\Big(\sum_{i=0}^{s-1} (x_{\delta(y)-i} - y_{\delta(y)-i}) t^{\delta(y)-i} \Big) \ \Big\} \ - \ \delta(y) \ - \ r \\ \overset{(7.2,b)}{\leq} \ &\delta(x-y) - \delta(y) - r \ < \ \delta(x-y) - \delta(y) \end{aligned}$$

Im Fall $s \neq 0$ gilt für alle $e \in A_\delta \backslash I_\delta$, deren Träger eine Teilmenge des Intervalls $[1-s, 0]$ ist, wegen $\varphi^{(r,s)}(e) = 0$ hierbei stets $\varphi_e^{(r,s)} = \varphi^{(r,s)}$.

(c) Ist ein $m \in \mathbb{Z}$ gegeben, so erfüllt die Abbildung

$$\psi^{(m)} : \ L((t)) \longrightarrow L((t)) \ , \qquad \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} x_\gamma t^\gamma \ \mapsto \ x_m t^m \ ,$$

die Eigenschaft (ii) aus (7.7); denn sie ist als Projektion von $L((t))$ auf den Untervektorraum Lt^m offenbar additiv und für alle $x = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} x_\gamma t^\gamma \ \in \ L((t))$ gilt

$$\delta\big(\psi^{(m)}(x)\big) \ = \ \delta(x_m t^m) \ \left\{ \begin{array}{lll} = & -\infty & \text{falls } \ \delta(x) < m \\ \leq & m & \text{falls } \ \delta(x) \geq m \end{array} \right\} \ \leq \ \delta(x) \ .$$

Im Fall $m = 0$ und $e = 1$ gilt hierbei stets $\psi_1^{(0)} = \mathrm{id}_{L((t))} - \psi^{(0)}$.

(d) Sind Elemente $\tau_z \in I_\delta$ für $z \in \mathbb{Z}$ mit $\tau_0 := 0$, ein $m \in \mathbb{Z}$ sowie ein weiteres Element $e = \sum_{i \leq 0} e_i t^i \ \in \ A_\delta \backslash I_\delta$ gegeben, so bildet $\big(L((t)), +, \diamond, \delta\big)$ mit

$$x \diamond y \ := \ \left\{ \begin{array}{ll} xe^{-1}y \ + \ x\tau_{\delta(x)}\big(ye_m t^m - ey_m t^m\big) & \text{falls } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \ x = 0 \end{array} \right.$$

für $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i t^i, \ y = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i t^i \ \in \ L((t))$ nach (a), (c) und (7.8) einen vollständigen, diskret bewerteten Quasikörper mit Einselement e.

(e) Sind $r, s \in \mathbb{N}$, ein $m \in \mathbb{Z}$ sowie ein Element $e = \sum_{1-s \leq i \leq 0} e_i t^i \ \in \ A_\delta \backslash I_\delta$ gegeben, so bildet $\big(L((t)), +, \diamond, \delta\big)$ mit

$$x \diamond y \ := \begin{cases} xe^{-1}y \ + \ x\Big(x - \sum_{i=0}^{s-1} x_{\delta(x)-i} t^{\delta(x)-i}\Big) t^{-\delta(x)-r}\big(ye_m t^m - ey_m t^m\big) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

für $x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i t^i, \ y = \sum_{i \in \mathbb{Z}} y_i t^i \ \in \ L((t))$ nach (b), (c) und (7.8) einen vollständigen, diskret bewerteten Quasikörper mit Einselement e.

(7.10) Beispiel und Bemerkung:

Es seien L ein Körper und $\big(L((t)), +, \cdot, \delta\big)$ der Laurentreihenkörper über L.

(a) Setzen wir in (7.9,e) explizit $r = s = 1$, $m = 0$ und $e = 1$, so bildet $\big(L((t)), +, \diamond, \delta\big)$ mit

$$x \diamond y \quad := \quad \begin{cases} xy \ + \ x\big(x - x_{\delta(x)} t^{\delta(x)}\big) t^{-\delta(x)-1}(y - y_0) & \text{falls } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } \ x = 0 \end{cases}$$

für $x, y \in L((t))$ einen vollständigen, diskret uniform bewerten Quasikörper mit Einselement 1. In diesem Fall gelten:

- Es ist $\Phi_1 = \mathrm{id}_{L((t))}$ nach Konstruktion und weiter

  $$\Phi_{1+t^{-1}}(1 + t^{-1}) \quad = \quad 1 + t^{-1} + t^{-3} \quad \neq \quad 1 + t^{-1} \quad = \quad \Phi_1(1 + t^{-1}) \ ,$$

  d.h. unabhängig vom Körper L gilt stets $\Phi_1 \neq \Phi_{1+t^{-1}}$. Somit erfüllt die Konstruktion aus (7.8) im Allgemeinen nicht die Bedingung $(*)$ aus (6.8).

- Zunächst ist

  $$\begin{aligned} (1 + t^{-1}) \diamond (1 + t^{-1}) \quad &= \quad (1 + t^{-1})\Phi_{1+t^{-1}}(1 + t^{-1}) \quad = \quad (1 + t^{-1})(1 + t^{-1} + t^{-3}) \\ &= \quad 1 + 2t^{-1} + t^{-2} + t^{-3} + t^{-4} \ , \end{aligned}$$

  woraus sich nach kurzer Rechnung weiter

  $$\begin{aligned} &(1 + t^{-1}) \diamond \big((1 + t^{-1}) \diamond (1 + t^{-1})\big) \\ = \ &1 + 3t^{-1} + 3t^{-2} + 4t^{-3} + 5t^{-4} + 3t^{-5} + 2t^{-6} + t^{-7} \end{aligned}$$

  sowie $\quad \big((1 + t^{-1}) \diamond (1 + t^{-1})\big) \diamond (1 + t^{-1})$

  $$= \ 1 + 3t^{-1} + 3t^{-2} + 4t^{-3} + 7t^{-4} + 6t^{-5} + 6t^{-6} + 6t^{-7} + 3t^{-8} + 2t^{-9} + t^{-10}$$

  ergeben, d.h. unabhängig vom Körper L gilt stets

  $$(1 + t^{-1}) \diamond \big((1 + t^{-1}) \diamond (1 + t^{-1})\big) \quad \neq \quad \big((1 + t^{-1}) \diamond (1 + t^{-1})\big) \diamond (1 + t^{-1}) \ .$$

  Somit ist die Multiplikation der Konstruktion aus (7.8) im Allgemeinen weder kommutativ, potenzassoziativ, alternativ oder assoziativ.

- Schließlich gelten auch

$$
\begin{array}{rcl}
(1+t^{-1})\diamond t & = & (1+t^{-1})t \;+\; (1+t^{-1})t^{-2}t \;=\; t+1+t^{-1}+t^{-2} \\
\text{sowie} \quad 1\diamond t \;+\; t^{-1}\diamond t & = & t \;+\; \big(t^{-1}t+0\big) \;=\; t+1\;,
\end{array}
$$

d.h. unabhängig vom Körper L gilt stets $(1+t^{-1})\diamond t \neq 1\diamond t + t^{-1}\diamond t$. Somit erfüllt die Konstruktion aus (7.8) im Allgemeinen nicht das rechtsseitige Distributivgesetz.

Insgesamt liefert die Konstruktion aus (7.8) daher für jeden Körper L im Allgemeinen einen (in allen Belangen) echten, vollständigen, diskret bewerteten Quasikörper.

(b) Setzen wir in (7.9,d) explizit

$$\tau_z \;:=\; (1+t^{-1})^z \;-\; 1 \;\in\; I_\delta \qquad \text{für} \;\; m\in\mathbb{Z}$$ [1]

sowie $m=0$ und $e=1$, so bildet $\big(L((t)),+,\diamond,\delta\big)$ mit

$$x\diamond y \;:=\; \begin{cases} xy \;+\; x\big((1+t^{-1})^{\delta(x)}-1\big)\big(y-y_0\big) & \text{falls} \;\; x\neq 0 \\ 0 & \text{falls} \;\; x=0 \end{cases}$$

für $x,y\in L((t))$ einen vollständigen, diskret uniform bewerten Quasikörper mit Einselement 1. Offenbar gilt in diesem Fall $\Phi_x=\Phi_y$ für alle $x,y\in L((t))$ mit $\delta(x)=\delta(y)$. Da für alle $x,y\in L((t))$ somit

$$\Phi_x(y) \;=\; y \;+\; \big((1+t^{-1})^{\delta(x)}-1\big)\big(y-y_0\big) \;=\; y_0 \;+\; (1+t^{-1})^{\delta(x)}(y-y_0)$$

gilt, entspricht diese spezielle Konstruktion gerade dem expliziten Beispiel von KALHOFF [22, S.222],[2] welches somit unter das Konstruktionsverfahren aus (7.8) fällt.

Es ist an dieser Stelle noch anzuführen, dass nicht bekannt ist, ob das Konstruktionsverfahren aus (7.8) bereits alle δ-treuen Ableitungen auf einem Laurentreihenkörper - und somit alle uniform bewerteten Quasikörper-Multiplikationen auf diesem, welche multiplikativ bzgl. der Grad-Bewertung sind - liefert, d.h. ob es eine δ-treue Ableitung auf einem Laurentreihenkörper gibt, welche nicht die Gestalt aus (7.8) besitzt.

Wir möchten nun die Arbeit mit einer Bemerkung über die Gültigkeit zusätzlicher algebraischer Eigenschaften der Konstruktion aus (7.8) abschließen, welche wir aber aufgrund des Umfanges sowie der Elementarität der Rechnungen an dieser Stelle ohne Beweis angeben. Die folgenden Aussagen können daher eher als Behauptungen verstanden werden.

[1] Beachte, dass $(1+t^{-1})^z$ für alle $z\in\mathbb{Z}$ den Grad 0 sowie den Leitkoeffizienten 1 besitzt.

[2] Beachte, dass die Laurentreihen dort bzgl. der dualen Anordnung auf $\mathbb{Z}$, d.h. mit $t\in I_v$, konstruiert worden sind.

(7.11) Bemerkung (ohne Beweis):

Es sei $(K, +, \cdot, v)$ ein vollständiger, diskret bewerteter Körper. Weiter seien ein Element $e \in A_v \backslash I_v$ sowie Abbildungen φ, ψ wie (7.7) gegeben; mittels dieser sei wie (7.8) eine binäre, innere Verknüpfung $\diamond$ auf K definiert, mit der $(K, +, \diamond, v)$ einen vollständigen, diskret uniform bewerteten Quasikörper mit Einselement e bildet. Dann gelten:

(a) Ist φ konstant oder gilt $\psi \in e^{-1}\mathrm{id}_K A_v$, so ist K^Φ ein Körper. In diesem Fall ist K^Φ genau dann kommutativ, wenn K es ist.

(b) Ist $\psi \notin e^{-1}\mathrm{id}_K A_v$, so erfüllt K^Φ genau dann das rechtsseitige Distributivgesetz, wenn die Abbildung

$$\Psi : \ K \longrightarrow K \ , \qquad x \ \mapsto \ \begin{cases} x\varphi(x) & \text{für } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ x = 0 \end{cases}$$

additiv ist. In diesem Fall muss notwendigerweise $\varphi(-x) = \varphi(x)$ für alle $x \in K^*$ gelten.

(c) Der Quasikörper K^Φ erfüllt genau dann das rechtsseitige Distributivgesetz, wenn $\psi \in e^{-1}\mathrm{id}_K A_v$ gilt oder die Abbildung Ψ aus (b) additiv ist.

(d) Ist K^Φ kommutativ, so gilt $\psi \in e^{-1}\mathrm{id}_K A_v$ oder die Abbildung Ψ aus (b) ist additiv.

(e) Sind K nicht kommutativ und die Abbildung Ψ aus (b) nicht additiv, so ist K^Φ nicht kommutativ.

(f) Die Menge

$$\widetilde{N} \ := \ \left\{ ez \in K \ \middle| \ \psi(yz) \ = \ \psi(y)z \ + \ e^{-1}y\big(z\psi(e) - \psi(e)z\big) \quad \text{für alle } \ y \in K \right\}$$

ist ein Unterkörper des Kernes von K^Φ. Ist die Abbildung Ψ aus (b) nicht additiv, so gilt hierbei sogar Gleichheit.

(g) Das Radikal von K^Φ erfüllt $R(K^\Phi) \subset e + I_\delta$.

Literaturverzeichnis

[1] A.A. Albert. *Quasigroups. I.* Trans. Am. Math. Soc. **54** (1943), 507-519.

[2] J. André. *Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe.* Math. Z. **60** (1954), 156-186.

[3] R.H. Bruck. *A survey of binary systems.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3.ed. 1971 (1.ed. 1958).

[4] M. Cabrera García, Á. Rodríguez Palacios. *Non-associative normed algebras Vol. 1.* Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[5] J.W.S. Cassels. *Local Fields.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[6] O. Chein (ed.), H.O. Pflugfelder (ed.), J.D.H. Smith (ed.). *Quasigroups and Loops: Theory and Applications.* Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[7] P. Demboski. *Finite Geometries.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1968 (Reprint 1997).

[8] L.E. Dickson. *On finite algebras.* Gött. Nachr. **1905** (1905), 358-393.

[9] E. Ellers, H. Karzel. *Endliche Inzidenzgruppen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **27** (1964), 250-264.

[10] A.J. Engler, A. Prestel. *Valued Fields.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[11] D.A. Foulser. *A Generalization of André's Systems.* Math. Z. **100** (1967), 380-395.

[12] M. Hall. *Projective planes.* Trans. Am. Math. Soc. **54** (1943), 229-277.

[13] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002 (Reprint 2015).

[14] D.R. Hughes. *Planar division neo-rings.* Trans. Am. Math. Soc. **80** (1955), 502-527.

[15] K. Iseki. *Structure of special ordered loops.* Port. Math. **10** (1951), 81-83.

[16] K. Iwasawa. *Local Class Field Theory.* Oxford University Press, New York, 1986.

[17] F. Kalhoff. *Eine Kennzeichnung anordnungsfähiger Ternärkörper.* J. Geom. **31** (1988), 100-113.

[18] F. Kalhoff. *Uniform valuations on planar ternary rings.* Geom. Dedicata **28** (1988), 337-348 (siehe auch Geom. Dedicata **31** (1989), 123-124).

[19] F. Kalhoff. *Formal power series over Cartesian groups and their spaces of orderings.* Geom. Dedicata **36** (1990), 329-345.

[20] F. Kalhoff. *Approximation theorems for uniform valuations.* Mitt. Math. Ges. Hamb. **12** (1991), 793-808.

[21] F. Kalhoff. *Projectivities, stabilizers and the Tutte group in projective planes.* Result. Math. **25** (1994), 64-78.

[22] F. Kalhoff. *Topological projective planes and uniform valuations.* Geom. Dedicata **54** (1995), 199-224.

[23] F. Kalhoff. *On epimorphisms and projectivities of projective planes.* J. Geom. **69** (2000), 149-165.

[24] I. Kaplansky. *Topological methods in valutaion theory.* Duke Math. J. **14** (1947), 527-541.

[25] I. Kaplansky. *Set Theory and Metric Spaces.* Allyn and Bacon Inc., Boston, 1972.

[26] H. Karzel. *Unendliche Dicksonsche Fastkörper.* Arch. Math. **16** (1965), 247-256.

[27] N. Knarr. *Translation planes: Foundations and construction principles.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1995.

[28] H.-J. Kowalsky, H. Dürbaum. *Arithmetische Kennzeichnungen von Körpertopologien.* J. Reine Angew. Math. **191** (1953), 135-152.

[29] S. Mazur, S. Ulam. *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés.* C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 946-948.

[30] F.R. Moulton. *A simple non-Desarguesian plane geometry.* Trans. Am. Math. Soc. **3** (1902), 192-195.

[31] B. Nica. *The Mazur-Ulam theorem.* Expo. Math. **30** (2012), 397-398.

[32] G. Pickert. *Projektive Ebenen.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2.ed. 1975 (1.ed. 1955).

[33] F. Pokropp. *Gekoppelte Abbildungen auf Gruppen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **32** (1968), 147-159.

[34] S. Priess-Crampe. *Angeordnete Strukturen: Gruppen, Körper, projektive Ebenen.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1983.

[35] S. Priess-Crampe. *Der Banachsche Fixpunktsatz für ultrametrische Räume.* Result. Math. **18** (1990), 178-186.

[36] H.R. Salzmann. *Topological planes.* Adv. Math. **2** (1967), 1-60.

[37] H.R. Salzmann, D. Betten, T. Grundhöfer, H. Hähl, R. Löwen, M. Stroppel. *Compact Projective Planes.* Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[38] M. Sarfraz, F. Ali, Y. Li. *Lipschitz isomorphism and fixed point theorem for normed groups.* Cogent Math. Stat. **7**, Article ID 1859673 (2020).

[39] H.H. Schaefer, M.P. Wolff. *Topological Vector Spaces*. Springer-Verlag, New York, 2.ed. 1999 (1.ed. 1966).

[40] E. Schörner. *On the Completion of Real Valued Ternary Fields*. Result. Math. **38** (2000), 339-347.

[41] E. Schörner. *Diskret bewertete Ternärkörper und Hahn-Ternärkörper auf* $\mathbb{Z}$. J. Geom. **71** (2001), 162-181.

[42] I.R. Shafarevich. *On the normalizability of topological fields*. C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **40** (1943), 133-135.

[43] N. Shell. *Topological Fields and Near Valuations*. Marcel Dekker Inc., New York, 1990.

[44] P.I. Sklifos. *Systems of convex subloops of linearly ordered loops*. Algebra Logic **10** (1971), 30-39.

[45] M.F. Smiley. *An application of lattice theory to quasigroups*. Bull. Am. Math. Soc. **50** (1944), 782-786.

[46] H. Szambien. *Minimal topological projective planes*. J. Geometry **35** (1989), 177-185.

[47] J. Timm. *Über die additiven Gruppen spezieller Fastringe*. J. Reine Angew. Math. **239-240** (1969), 47-54.

[48] J. Timm. *Zur Konstruktion von Fastringen I*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamb. **35** (1970), 57-74.

[49] N. Tschetweruchin. *Eine Bemerkung zu den Nicht-Desarguesschen Liniensystemen*. Jahresbericht D. M. V. **36** (1927), 134-136.

[50] H. Wähling. *Theorie der Fastkörper*. Thales Verlag, Essen, 1987.

[51] S. Warner. *Topological Fields*. Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam New York, 1989.

[52] H. Zassenhaus. *Über endliche Fastkörper*. Abh. Math. Semin. Hamb. Univ. **11** (1935), 187-220.

[53] D. Zelinsky. *Topological characterization of fields with valuations*. Bull. Am. Math. Soc. **54** (1948), 1145-1150.