SPROESSER, Ute & LINDENBAUER, Edith
Ludwigsburg, Linz

Der Slope-Height-Confusion auf der Spur - Eine Analyse von spezifischen Aufgaben- und Lernendenmerkmalen

Theoretischer Hintergrund

Funktionen sind für die Mathematik und darüber hinaus höchst relevant, da sie als mathematische Modelle fungieren, um reale Zusammenhänge, Abhängigkeiten und Veränderungen zu beschreiben (Vollrath, 1989). Wie andere mathematische Objekte sind Funktionen abstrakt und nur durch Darstellungen wie Funktionsterm, Graph, Tabelle oder situative Beschreibung zugänglich (Hußmann & Laakmann, 2011). Da jede Darstellung spezifische Funktionseigenschaften betont und unterschiedlich effektiv beim Bearbeiten von Aufgaben ist, sollen diese Darstellungen nicht nur isoliert beherrscht, sondern auch miteinander vernetzt und es soll flexibel zwischen ihnen gewechselt werden können. Eine besondere Bedeutung haben Darstellungswechsel zwischen mathematischen und situativen Darstellungen, die eine Verbindung zwischen Mathematik und Alltagswelt herstellen. Dass hierauf im Mathematikunterricht ein besonderes Augenmerk gelegt werden sollte, zeigt sich exemplarisch daran, dass die Bildungspläne in Baden-Württemberg für alle Schulabschlüsse der Sekundarstufe fast identische diesbezügliche Vorgaben machen (Land Baden-Württemberg, 2024, S. 42), wohingegen es für andere Teilbereiche von Funktionen deutliche Unterschiede gibt.

Schüler*innen stellt der Umgang mit Funktionen häufig vor Schwierigkeiten, insbesondere wenn es um Darstellungswechsel geht (Nitsch, 2015; Sproesser et al., 2020). Besonders der Wechsel zwischen einer mathematischen und einer situativen Darstellung gestaltet sich oft als anspruchsvoll, da bei diesen ein großer Unterschied im Abstraktionsgrad vorliegt (Vogel, 2006). Dies könnte höhere kognitive Fähigkeiten erfordern als andere Darstellungswechsel. Ein in der Literatur gut dokumentierter Fehler ist die Slope-Height-Confusion (Nitsch, 2015; Sproesser et al., 2020), also die Verwechslung von Steigung und Funktionswert. Dieser Fehler liegt vor, wenn aus einem Funktionsgraphen ein Wert entnommen werden soll, der durch die Steigung repräsentiert wird, die Lernenden jedoch fälschlicherweise auf den Funktionswert fokussieren. In der abgebildeten Aufgabe geht es beispielsweise um eine Rennsituation, in der das schnellste Fahrzeug aus einem Weg-Zeit-Diagramm ermittelt werden soll. Da der Graph von Fahrzeug 1 die größte Steigung aufweist, ist hier auch die höchste Geschwindigkeit repräsentiert. Liegt die Slope-Height-Confusion vor, so würde jedoch der Graph ausgewählt, der zu einem besagten Zeitpunkt den höchsten Funktionswert aufweist.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

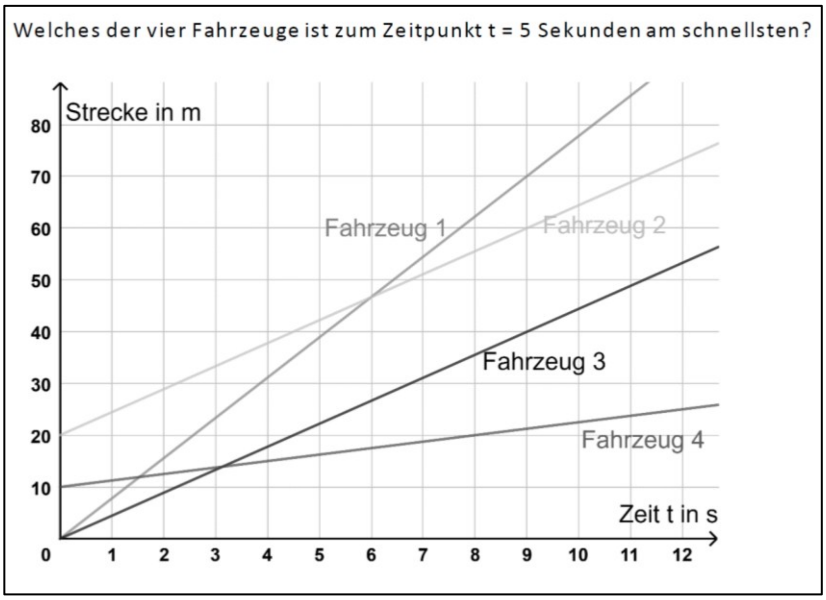

Abb.: Beispielaufgabe zur Slope-Height-Confusion

Während aus Studien bekannt ist, dass die Slope-Height-Confusion signifikant häufiger auftritt, wenn nach einem Zeitpunkt statt nach einem Zeitraum gefragt wird (Nitsch, 2015), ist bislang unklar, ob ein sichtbarer Schnittpunkt der relevanten Geraden ebenso einen Unterschied in der Fehlerhäufigkeit machen könnte. So wäre es denkbar, dass der Schnittpunkt der Geraden von Fahrzeug 1 und Fahrzeug 2 die Lernenden darauf aufmerksam macht, dass trotz jeweils konstanter Änderungsrate je nach Zeitpunkt unterschiedliche Geraden einen höheren Funktionswerte aufweisen. Aus diesem Grund untersucht diese Studie Forschungsfrage 1: Gibt es Unterschiede in der Häufigkeit der Slope-Height-Confusion in Abhängigkeit von der Frage nach einem Zeitpunkt/einem Zeitraum bzw. wenn ein Schnittpunkt der Geraden sichtbar/nicht sichtbar ist? Neben diesen beiden Aufgabenmerkmalen nimmt Forschungsfrage 2 Lernendenmerkmale in den Blick: Gibt es einen Unterschied in der Häufigkeit der Slope-Height-Confusion abhängig von der besuchten Schulform bzw. den kognitiven Fähigkeiten der Lernenden? In diesem Zusammenhang wäre es denkbar, dass die besonderen curricularen Anforderungen des Gymnasiums (vgl. Sproesser et al., 2022) bzw. höhere kognitive Fähigkeiten von Lernenden mit stärkeren Leistungen und niedrigeren Fehlerhäufigkeiten in Zusammenhang stehen.

Methode

An dieser Studie nahmen 728 Schüler*innen aus Deutschland und Österreich teil (51,4% männlich, 46,7% weiblich; Rest divers/ohne Angabe). Sie besuchten die Klassenstufen 7 bis 10 verschiedener Schulformen, was zu einer Altersspanne von 12 bis 16 Jahren führte (M=14,02, SD=0,85). Alle Teilnehmenden hatten das Thema Funktionen bereits im Unterricht behandelt.

Das Testinstrument beinhaltet sieben Aufgaben zum Umgang mit und Wechsel von Funktionsdarstellungen. Für diesen Beitrag sind nur die sogenannten Slope-Height-Aufgaben relevant, bei denen die Schüler*innen im Kontext einer Rennsituation aus einem Weg-Zeit-Diagramm mit vier Funktionsgraphen jenen Graphen identifizieren sollten, der die höchste Geschwindigkeit repräsentiert (siehe Abbildung oben). In jedem Test lagen zwei Slope-Height-Aufgaben vor, eine davon fragte nach der höchsten Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt (ZP), die andere Aufgabe bezog sich auf einen Zeitraum (ZR). Das Testheft lag in zwei Varianten vor: Variante A präsentierte beide Slope-Height-Aufgaben mit einem sichtbaren Schnittpunkt der beiden fraglichen Geraden, während in Variante B kein Schnittpunkt enthalten war. Als Kovariaten wurden die besuchte Schulform und kognitive Fähigkeiten (KFT-Subskalen V3 und N2, Heller & Perleth, 2000) erhoben.

Ergebnisse und Diskussion

Die Tabelle zeigt die Häufigkeiten korrekter, fehlerhafter und fehlender Antworten. Die Slope-Height-Confusion stellte in allen vier Aufgabenvarianten den häufigsten Fehler dar, alle weiteren Fehler wurden zusammengefasst.

Aufgaben-beschreibung	**Anzahl gesamt**	**kor-rekt**	**Slope-Height**	**Weitere Fehler**	**Mis-sings**
Zeitraum, Schnitt-punkt sichtbar	360 (100%)	228 (63,3%)	51 (14,2%)	54 (15,0%)	27 (7,5%)
Zeitraum, Schnitt-punkt nicht sichtbar	368 (100%)	239 (64,9%)	46 (12,5%)	40 (10,9%)	43 (11,7%)
Zeitpunkt, Schnitt-punkt sichtbar	360 (100%)	173 (48,1%)	104 (28,9%)	62 (17,2%)	21 (5,8%)
Zeitpunkt, Schnitt-punkt nicht sichtbar	368 (100%)	182 (49,5%)	122 (33,2%)	40 (10,9%)	24 (6,5%)

Tabelle: Häufigkeitsverteilung bei den Slope-Height-Aufgaben

Die deskriptiven Ergebnisse machen deutlich, dass es in Hinblick auf eine korrekte Lösung bzw. das Auftreten der Slope-Height-Confusion wenig Unterschied macht, ob der Geradenschnittpunkt sichtbar ist oder nicht. Dies bestätigt sich in einem nicht-signifikanten t-Test ($t(726)=-0{,}531$, $p=0{,}595$). Dagegen macht es einen signifikanten Unterschied, ob nach einem Zeitraum oder Zeitpunkt gefragt wird ($t(727)=10{,}062$, $p<0{,}001$). Dies bestätigt Studien wie z.B. von Nitsch (2015), liefert aber keine weiteren Hinweise auf schwierigkeitsgenerierende Merkmale der Slope-Height-Aufgaben.

In einem weiteren Schritt wurde untersucht, inwieweit Lernendenmerkmale einen Unterschied beim korrekten Lösen der Aufgaben bzw. beim Auftreten der Slope-Height-Confusion machen können. Hier zeigte sich ein signifikanter Unterschied zwischen Gymnasiast*innen und Nicht-Gymnasiast*innen in Bezug auf die Häufigkeit korrekter Lösungen ($t(717,57)=-6,965$, $p<0,001$), nicht aber in Bezug auf das Auftreten der Slope-Height-Confusion $t(726)=0,791$, $p=0,429$). Pearson-Korrelationen zwischen kognitiven Fähigkeiten und der Anzahl an korrekten Antworten in den Slope-Height-Aufgaben fielen ebenso signifikant aus (verbal: $r=0,333$, $p<0,001$; nonverbal; $r= 0,270$, $p<0,001$), während auch hier der Zusammenhang mit der Häufigkeit der Slope-Height-Confusion nicht signifikant ist (verbal: $r=-0,064$, $p=0,142$; nonverbal: $r= 0,002$, $p=0,958$). Dies bestätigt, dass die Slope-Height-Confusion ein sehr hartnäckiger Fehler ist, der unter Lernenden verschiedener Schulformen wie auch kognitiver Fähigkeiten verbreitet ist.

Insgesamt bestätigt diese Studie, dass die Slope-Height-Confusion weiterhin ein sehr verbreiteter Fehler ist und dass es für Schüler*innen insbesondere schwierig ist, die Geschwindigkeit an einem Zeitpunkt abzulesen. Mögliche Gründe hierfür sollen in einer qualitativen Ergänzungsstudie genauer geklärt werden, in der die Proband*innen zu ihren Gedankengängen bei der Beantwortung der verwendeten Slope-Height-Aufgaben interviewt werden.

Literatur

Heller, A.K. & Perleth, C. (2000). *KFT 4–12+R. Manual*. Beltz.

Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53* (38), 2–11.

Land Baden-Württemberg (2024). *Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe I. Mathematik.* Fassung vom 29. Februar 2024. https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.V2.pdf

Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge.* Springer Spektrum.

Sproesser, U., Vogel, M. & Dörfler, T. (2020). Typische Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen – Welche Schwierigkeiten kennen Lehrkräfte und wie schätzen sie Aufgabenbearbeitungen ihrer Klassen ein? *Mathematica Didactica 43*(2020)2, 175–198.

Sproesser, U., Vogel, M., Dörfler, T., & Eichler, A. (2022). Changing between representations of elementary functions: students' competencies and differences with a specific perspective on school track and gender. *International Journal of STEM Education, 9*(33). https://doi.org/10.1186/s40594-022-00350-2

Vogel, M. (2006). *Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multi-mediabasierter Supplantation: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Franzbecker.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *JMD, 10*(1), 3–37.