

UFER, Stefan; WEIXLER, Simon; RACH, Stefanie  
LMU München; LMU München; Magdeburg

## **Was sagen uns querschnittliche Stufenmodelle über konzeptuelle Entwicklung? Eine kritische Diskussion am Beispiel des Schließens mit Implikationen**

Mathematische Erkenntnisse logisch zwingend auf abgemachte Grundannahmen und Vereinbarungen (Definitionen) zurückzuführen zeichnet mathematische Erkenntnisgewinnung und -sicherung aus. Die wesentlichen logischen Grundstrukturen umfassen dabei typischerweise Aussagen und die sie strukturierenden Junktoren (z. B. wenn..., dann...; und; oder; nicht) sowie quantifizierende Aussagenteile (Es gibt...; Für alle...). Implikationen (z. B. "Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.") treten dabei in vielfältiger Form in mathematischen Sätzen und bei der Formulierung mathematischer Eigenschaften auf. Wir folgen der Interpretation einer Implikation "wenn  $p$ , dann  $q$ ", die  $p$  als hinreichende, aber nicht zwingend notwendige Bedingung für  $q$  ansieht (Evans & Over, 2004). Damit sind mit einer Implikation je nach weiterer Voraussetzung zwei definitive Schlussweisen möglich: Der Modus Ponens (MP: Aus " $p$ " und "wenn  $p$ , dann  $q$ " wird " $q$ " geschlossen) und Modus Tollens (MT: Aus "nicht  $q$ " und "wenn  $p$ , dann  $q$ " wird "nicht  $p$ " geschlossen). In zwei weiteren Situationen sind keine definitiven Schlüsse möglich (Denial of the Antecedent, DA mit Voraussetzung "nicht  $p$ " und Affirmation of the Consequent, AC mit Voraussetzung " $q$ ").

### **Theoretischer Rahmen**

Aus psychologischer Sicht wurden - neben anderen Theorieansätzen - vor allem mentale Modelltheorien genutzt, um Fähigkeiten und Strategien beim logischen Schließen mit Implikationen zu beschreiben (Johnson-Laird & Byrne, 2002). Sie gehen davon aus, dass beim Schließen mentale Modelle generiert und analysiert werden, die Möglichkeiten beschreiben, die die Voraussetzung noch zulässt. Wenn alle diese Modelle eine gemeinsame Möglichkeit enthalten, kann auf diese Möglichkeit geschlossen werden. Offenbar führt logisches Schließen nach dieser Theorie nur dann im Allgemeinen zu sicher korrekten Ergebnissen, wenn alle möglichen Modelle zu einer Implikation ( $p$  und  $q$ ; nicht- $p$  und nicht- $q$ ; nicht- $p$  und  $q$ ) berücksichtigt werden. Während Schlüsse nach dem Modus Ponens mit allein dem Modell " $p$  und  $q$ " möglich sind, erfordert der Modus Tollens das Modell "nicht- $p$  und nicht- $q$ ". Um fehlerhafte Schlüsse bei AC und DA zu vermeiden, müssen Modelle vom Typ "nicht- $p$  und  $q$ " (sog. Alternativen) berücksichtigt werden. In der Tat zeigen empirische Studien, dass Lernende, die solche Alternativen generieren können, in Alltagskontexten weniger fehlerhafte AC und DA Schlüsse ziehen - jedoch auch weniger korrekte MT Schlüsse (Datsogianni & Ufer,

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),  
*Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.*

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.  
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

2020). Janveau-Brennan und Markovits (1999) schlagen ein Entwicklungsmodell für logisches Schließen mit Implikationen in Alltagskontexten (z. B. "Wenn das Glas herunterfällt, dann zerbricht es") vor, nach dem in einer ersten Phase eine Interpretation von Implikationen als Konjunktion (nur "p und q") genutzt wird, danach als Äquivalenz ("p und q" und "nicht-p und nicht-q") und dann erst die normativ korrekte Interpretation (alle drei Modelle).

Aus mathematikdidaktischer Sicht werden weniger die klassischen Schlussformen diskutiert, sondern die Unterscheidung zwischen einer Implikation und ihrer Umkehrung (z. B. Küchemann & Hoyles, 2002) bzw. die Äquivalenz von Implikation (wenn p, dann q) und ihrer Kontraposition (wenn nicht-q, dann nicht-p). Vor allem Ersteres wird unter der "Unterscheidung von Satz und Kehrsatz" auch beispielsweise in gymnasialen Schulcurricula häufig als Ziel gesetzt. Während in der psychologischen Literatur regelmäßig frühe Kompetenzen zum logischen Schließen in Alltagskontexten bereits bei Kindern im Grundschulalter berichtet werden (v. a. MP, z. T. MT; Markovits, 2017), werden in der mathematikdidaktischen Literatur noch im Erwachsenenalter substantielle Schwierigkeiten beim normativ korrekten Umgang mit Implikationen beschrieben (Attridge & Inglis, 2013; Küchemann & Hoyles, 2002). Datsogianni et al. (2020) berichten Unterschiede in den Fähigkeiten zum logischen Schließen mit Implikationen zwischen Alltagskontexten und Situationen, die mathematische Strukturen enthalten.

Die Entwicklung logischen Schließens mit Implikationen nach dem Modell von Janveau-Brennan und Markovits (1999) spiegelt nicht nur eine Erweiterung oder Ausdifferenzierung des Wissens zu Implikationen wider, sondern geht damit einher, dass die vorherigen Schlussweisen neu bewertet und insbesondere falsche, nicht-definitive Schlussweisen als solche erkannt werden müssen. Insofern können diese Lernprozesse als Conceptual Change im Sinne von Vosniadou und Verschaffel (2004) verstanden werden. Es liegt jedoch wenig Evidenz zum logischen Schließen vor, die sowohl die klassischen Schlussformen als auch den Abgleich von Implikation mit anderen Aussagen (z. B. ihrer Umkehrung) betrifft. Stufenmodelle können hier einen ersten Einblick darin liefern, wie sich der Kontext (Alltagsphänomene vs. mathematische Strukturen) und die konkrete Anforderung im Umgang mit Implikationen, wie z.B. das Vorkommen negierter Aussagenteile, auf die Leistung beim Schließen mit Implikationen auswirken.

### **Ziel und Studie**

Der vorliegende Beitrag präsentiert erste Ergebnisse eines solchen Stufenmodells und diskutiert, inwiefern dieses erste Hinweise auf die Konzeptentwicklung und insbesondere den Konzeptwechsel in Bezug auf das Schließen

mit Implikationen liefert. Dazu wurden Bearbeitungen von  $N = 142$  Studienanfänger:innen des Fachs Mathematik zu 41 Single-Choice Items zum logischen Schließen mit einem IRT-Modell analysiert (Rach et al., 2021).

### **Ergebnisse**

Die Ergebnisse reproduzieren das Stufenmodell von Janveau-Brennan und Markovits (1999) für die vier klassischen Schlussformen weitgehend und konsistent über verschiedene Kontexte hinweg. Das Identifizieren zweier Aussagen als äquivalent fällt auf niedrigere Stufen als z.B. eine Implikation von beispielsweise der Kontraposition ihrer Umkehrung oder - noch schwieriger - ihrer Umkehrung zu unterscheiden. Die Itemschwierigkeiten für nicht-äquivalente Implikationen waren über verschiedene Kontexte hinweg jedoch ähnlich. Die Itemschwierigkeiten zum Abgleich einer Implikation mit ihrer (äquivalenten) Kontraposition streuten dagegen über einen breiten Schwierigkeitsbereich, in dem sowohl Items zum Modus Tollens als auch schwierige Items zur Kontraposition der Umkehrung lagen.

### **Diskussion**

Die Ergebnisse zeigen, dass komplexere Schlussformen wie der Vergleich von zwei (ähnlich klingenden) Implikationen eine komplexere Anforderung darstellen als klassische Schlussformen. Es ist theoretisch plausibel, dass ersteres nicht nur die Verfügbarkeit konkreter Schlussweisen auf der höchsten Stufe des Modells von Janveau-Brennan und Markovits (1999) erfordert (insbesondere das Generieren von Alternativen), sondern besonders auch Wissen über konzeptuelle Unterschiede in der Bedeutung der Implikationsaussagen, die wiederum durch spezifische Strategien erschlossen werden könnten, die die Unterschiedlichkeit von Aussagen (z. B. anhand eines Modells vom Typ "p und nicht-q") absichern. Bezüglich des Konzeptwechsels steht hier insbesondere im Vordergrund, wie nicht nur konkrete Schlussweisen erlernt, sondern beispielsweise der spezifische Unterschied zwischen einer Aussage und ihrer Umkehrung erkannt werden muss. Interessant ist hier, dass es sich um eine Anforderung handelt, die in allen betrachteten Kontexten in etwa gleich schwer war. Dies weist darauf hin, dass hier spezifische Interventionen notwendig sind, um die beiden verwandten Aussagen voneinander abzugrenzen. Gerade das explizite Generieren der unter einer Implikation bzw. ihrer Umkehrung zugelassenen (bzw. eben nicht mehr zugelassenen) Möglichkeiten könnte hier zur Konzeptdifferenzierung beitragen.

Das Feststellen der Äquivalenz einer Implikation mit ihrer Kontraposition scheint dagegen stark von den spezifischen Anforderungen der Aufgabe beeinflusst zu sein. Die Ursache für diese Unterschiede kann das Stufenmodell nicht offenlegen. Der Befund weist jedoch darauf hin, dass gerade hier nicht

allgemeine, übertragbare Schlussweisen genutzt werden, sondern möglicherweise auf inhaltliches Wissen zum jeweiligen Kontext (d.h. dem Inhalt der Implikation) zurückgegriffen wird. Bezüglich einer didaktischen Gestaltung von Konzeptwechseln wäre hier zu überlegen, wie allgemeine Schlussweisen anhand der "einfacheren" Kontexte abgeleitet werden können und der Transfer auf andere Kontexte gezielt angeregt werden kann. Eine grundlegende Einschränkung der Studie liegt in ihrer querschnittlichen Anlage, die weitreichende Aussagen zur - in ihrer Natur längsschnittlichen - Frage des Conceptual Change schwierig erscheinen lässt. In einem geeigneten theoretischen Rahmen (hier der mentalen Modelltheorie) lassen sich jedoch durchaus Hypothesen zu wesentlichen Entwicklungsprozessen und auf deren Unterstützung abzielenden Instruktionsmaßnahmen ableiten - die Grundlage für längsschnittlich oder experimentell angelegte Studien sein können.

## Literatur

- Attridge, N., and Inglis, M. (2013). Advanced mathematical study and the development of conditional reasoning skills. *PLoS ONE* 8(7): e69399.
- Datsogianni, A., Sodian, B., Markovits, H., Ufer, S. (2020). Reasoning with conditionals about everyday and mathematical concepts in primary school. *Frontiers in Psychology* 11, 531640.
- Datsogianni, A., Ufer, S. (2020). The relation between elementary students' conditional reasoning and alternatives generation: The case of mathematics. In Inprasitha, M., Changsri, N., Boonsena, N. (Hrsg.). *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2*, S. 177-184. Khon Kaen, Thailand: PME.
- Evans, J. S. B. T., and Over, D. E. (2004). *If*. Oxford: Oxford University Press.
- Janveau-Brennan, G., and Markovits, H. (1999). The development of reasoning with causal conditionals. *Dev. Psychol.* 35:904. doi: 10.1037/0012-1649.35.4.904
- Johnson-Laird, P. N. (2001). Mental models and deduction. *Trends Cogn. Sci.* 5, 434-442.
- Johnson-Laird, P. N., and Byrne, R. M. (2002). Conditionals: a theory of meaning, pragmatics, and inference. *Psychol. Rev.* 109:646.
- Küchemann, D., and Hoyles, C. (2002). "Students' understanding of a logical implication and its converse," In A. Cockburn (Hrsg.): *Proceedings 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3*, S. 3-241. Norwich: PME.
- Markovits, H. (2017). In the beginning stages: conditional reasoning with category based and causal premises in 8-to 10-year olds. *Cogn. Dev.* 41, 1-9.
- Rach, S., Sommerhoff, D., Ufer, S. (2021). *Technical Report - Knowledge for University Mathematics (KUM) and Mathematics Online Assessment System (MOAS)*. MCLS Report No. 1. Munich Center of the Learning Sciences, LMU München.
- Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction* 14, 445-451.