SPORN, Femke; SOMMERHOFF, Daniel & HEINZE, Aiso
Kiel

Wissen über Beweise fördern - Eine Interventionsstudie

Einleitung und theoretischer Hintergrund

Beweise sind ein zentrales Element der Mathematik als Wissenschaft und damit auch Teil des Mathematikunterrichts (KMK, 2012). Lernende erhalten daher im Rahmen ihrer mathematischen Ausbildung wiederholt Lernangebote zum mathematischen Beweisen - insbesondere im Geometrieunterricht ab Jahrgangsstufe 7. Dass Lernende ein adäquates Wissen über Beweise aufbauen, ist wichtig, (i) weil sie die Mathematik als deduktives System und die Art der Evidenzgenerierung im Fach erfahren sollen (Winter, 1995) und (ii) weil es Hinweise darauf gibt, dass ein adäquates Wissen über Beweise einen erfolgreichen Umgang mit Beweisen unterstützen kann (z. B. Ufer et al., 2009). Die Ergebnisse querschnittlicher und quasi-längsschnittlicher Untersuchungen zeigen allerdings, dass Lernende auch bei wiederholter Auseinandersetzung mit Beweisen Unterstützung beim Aufbau eines Wissens über Beweise benötigen (z. B. Healy & Hoyles, 2000; Sporn et al., 2022).

Für den Aufbau von Wissen über Beweise bieten sich vor allem Lerngelegenheiten zum Beweisen und in Bezug auf verschiedene Beweisaktivitäten (z. B. Beweiskonstruktion) an. Bislang gibt es jedoch kaum empirische Evidenz dazu, welche Lerngelegenheiten einen positiven Einfluss auf das Wissen über Beweise haben bzw. ob oder wie dieses gezielt gefördert werden kann. Gelegenheiten zum Reflektieren und Diskutieren sind möglicherweise besonders nützliche Lerngelegenheiten (z. B. Davis, 2000).

Hinsichtlich der Bewertung solcher Lerngelegenheiten zum Beweisen und damit auch des Lernerfolgs ist zu berücksichtigen, dass dies aufgrund der in der mathematischen Praxis fehlenden allgemein akzeptierten Definition eines gültigen mathematischen Beweises nur eingeschränkt möglich ist. So können in verschiedenen sozialen Diskursrahmen unterschiedliche Normen und Kriterien für die Akzeptanz und damit für die Gültigkeit mathematischer Beweise etabliert sein (Inglis et al., 2013). Dennoch gibt es Kriterien für mathematische Beweise, über die prinzipiell eine weitgehende Einigkeit besteht und bzgl. derer Lernende adäquates Wissen aufbauen sollten. Diese Kriterien (z. B. die Argumentation muss auf bereits bewiesenen Aussagen basieren), lassen sich als Beweisprinzipien (BP) zusammenfassen *(Beweisschema, Beweisstruktur, Beweiskette*; Heinze & Reiss, 2003).

Im Rahmen bisheriger Forschung zeigte sich, dass eine Operationalisierung des Wissens über Beweise sowohl mit einem konzeptorientierten (KO) als auch mit einem handlungsorientierten (HO) Fokus erfolgen kann (z. B.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Andersen, 2018; Ufer et al., 2009). Dass diese Unterscheidung auch empirisch sinnvoll ist, konnte bereits im Rahmen der Forschungsarbeiten zum Beweisverständnis, welchem das Wissen über Beweise als ein Aspekt zugeordnet werden kann, gezeigt werden (Sporn et al., 2022). Bei einem KO Fokus wird das Wissen über Beweise so allgemein operationalisiert, dass die befragten Personen nicht mit einem konkreten Argumentationsbeispiel konfrontiert werden. Ein Beispiel hierfür ist die Bewertung der Aussage "Die Angabe eines einzelnen Beispiels reicht immer aus, um eine mathematische Aussage zu beweisen" (BP *Beweisschema*). Im Vergleich dazu erfolgt eine HO Operationalisierung immer in Verbindung mit einem konkreten Argumentationsbeispiel und damit in Verbindung mit einer Beweisaktivität (z. B. Beweisvalidierung). Abbildung 1 zeigt ein Beispielitem für Wissen über Beweise mit einem HO Fokus ist. Der fehlerhafte Beweisversuch - da BP *Beweisschema* vom fiktiven Schüler nicht berücksichtigt - ist zu validieren.

Ben soll die folgende Behauptung beweisen:
Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.
Bens Beweisversuch:
Das kenne ich aus der Schule. In unserem Schulbuch stand der Beweis, dass das für jede natürliche Zahl gilt. Dort wurde gezeigt:

$$3+4+5=3+3+1+3+2=3\cdot 3+3$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist Bens Beweisversuch ein gültiger mathematischer Beweis?	Ja	Nein	Ich weiß es nicht
	○	○	○

Abbildung 11: Beispielitem für HO Wissen über Beweise (Sporn et al., 2022)

Forschungsfrage

Im Rahmen einer Intervention, welche Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen - auch in Form von Anlässen zur Reflexion und Diskussion - umfasst, wird die folgende Forschungsfrage untersucht: Wie wirkt sich eine Intervention zu mathematischen Beweisen auf das (KO und HO) Wissen über Beweisprinzipien von Lernenden der 9. Jahrgangsstufe aus?

Methode und Design der Intervention

An der quasi-experimentellen Studie nahmen insgesamt $N = 61$ Lernende aus vier 9. Klassen teil, wobei zwei Klassen die Interventionsgruppe ($n_{Int} = 30$) und zwei Klassen die Kontrollgruppe ($n_{Con} = 31$) bildeten. Alle Lernenden wurden vor Beginn der Intervention mittels eines Online-Tests zu ihrem KO und HO Wissen über BP befragt (Prä-Test). Die Interventionsgruppe erhielt im regulären Mathematikunterricht über das zweite Schulhalbjahr der 9. Jahrgangsstufe verteilt fünf von der jeweiligen Mathematiklehrkraft durchgeführte Interventionsstunden mit einem Abstand von 3-4 Wochen: eine Doppelstunde á 90 min und drei Einzelstunden á 45 min, jeweils mit Hausaufgaben. Die zwei Lehrkräfte erhielten detaillierte Informationen zum vorbereiteten Material und zur Durchführung. Am Ende des

Schulhalbjahres wurde erneut das KO und HO Wissen über BP aller Lernenden erhoben (Post-Test). Die fünf Interventionsstunden umfassten u.a. Anlässe zur Diskussion und Reflexion über BP, indem verschiedene Beweisversuche mathematischer Aussagen, die ohnehin Teil des Curriculums der 9. Jahrgangsstufe sind, vorgestellt und diskutiert wurden. Die Lernenden sollten jeweils erarbeiten, in welchen Fällen ein Beweisversuch nicht als gültiger mathematischer Beweis akzeptiert werden kann (HO Fokus auf BP) und die BP explizit in allgemeiner Form formulieren (KO Fokus auf BP). Die erarbeiteten BP wurden über die gesamte Intervention auf einem Plakat gesichert. Die Kontrollgruppe erhielt den regulären Mathematikunterricht.

Die verwendeten Instrumente zur Erfassung des Wissens über BP waren im Prä- und Post-Test identisch. Das KO Wissen über BP wurde mithilfe von 18 gültigen und ungültigen Aussagen über BP erhoben, die auf einer 6-stufigen Likert-Skala (1 = "Trifft überhaupt nicht zu" bis 6 = "Trifft völlig zu") bewertet werden sollten (Bsp. s. o.). Die Bewertungen wurden zu einem Mittelwert S_{koW} zusammengefasst und zur besseren Vergleichbarkeit auf eine Skala von 0 bis 6 reskaliert. Zur Erhebung des HO Wissens über BP wurden die Teilnehmenden aufgefordert, sechs fehlerhafte Beweisversuche, bei denen jeweils BP missachtet wurden, zu validieren (s. Abb. 1). Sie erhielten jeweils 1 Punkt, wenn sie den Beweisversuch korrekt als ungültig bewerteten und ansonsten 0 Punkte. Aus den sechs Bewertungen wurde ein Summenwert gebildet (S_{hoW}; Skala 0 bis 6). Zur Beantwortung der Forschungsfrage wurde eine ANCOVA (Gruppenvergleich) für beide Werte aus dem Post-Test, jeweils unter Kontrolle der Ergebnisse des Prä-Tests, berechnet.

Ergebnisse

Die Ergebnisse (vgl. Abb. 2) zeigen für S_{koW} einen nicht signifikanten Rückgang vom Prä- zum Post-Test für beide Gruppen. Die ANCOVA für S_{koW} zeigt keinen signifikanten Unterschied im Post-Test zwischen den Gruppen unter Kontrolle des Prä-Tests ($F(1, 59) = 0.11$, $p = .744$, $\eta_p^2 = .002$).

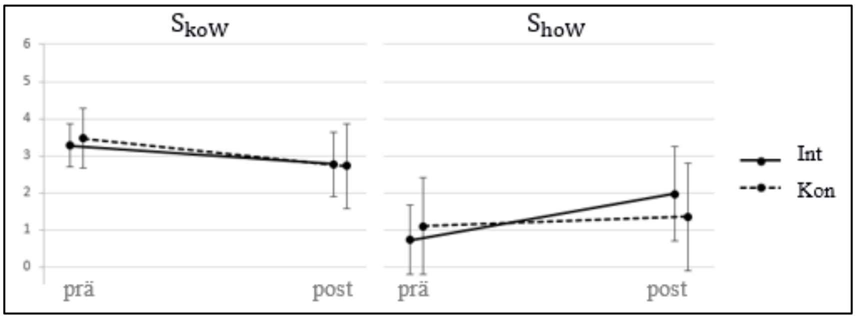

Abbildung 12: Deskriptive Ergebnisse (*M*, *SD*) für S_{koW} und S_{hoW}.

Für S_{hoW} zeigen die Ergebnisse der ANCOVA einen signifikanten Unterschied im Post-Test zwischen beiden Gruppen unter Kontrolle des Prä-Tests

($F(1, 58) = 5.82$, $p = .019$) mit einem mittleren Effekt ($\eta_p^2 = .091$).

Diskussion und Ausblick

Obwohl die Lernenden in der Intervention aufgefordert wurden, BP explizit zu formulieren, scheint sich dies nicht auf ihr KO Wissen über BP ausgewirkt zu haben. Eine mögliche Erklärung ist, dass die Lernenden der Interventionsgruppe ihre eigenen Formulierungen aus den Interventionsstunden nicht in den Formulierungen der Items zur Erhebung des KO Wissens über BP wiedererkannt haben. Ein offenes Aufgabenformat könnte geeigneter sein (Andersen, 2018). Obwohl das HO Wissen über BP im Prä- und Post-Test niedrig ist (in Übereinstimmung mit Ergebnissen früherer Studien, z. B. Heinze & Reiss, 2003), scheint selbst eine relativ kurze Intervention, die Gelegenheiten zur Diskussion und Reflexion über Beweise beinhaltet, einen mittleren Effekt auf das HO Wissen über BP der Lernenden zu haben. Ob sich nach einer Anpassung des Messinstruments auch ein positiver Effekt auf das KO Wissen über BP zeigt oder ob für diese Förderung andere Lerngelegenheiten notwendig sind, muss in weiteren Studien untersucht werden.

Literatur

Andersen, L. E. (2018). Acceptable gaps in mathematical proofs. *Synth, 197*(1), 233-247.

Davis, E. A. (2000). Scaffolding students' knowledge integration: prompts for reflection in KIE. *International Journal of Science Education, 22*(8), 819-837.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(4), 396-428.

Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Hrsg.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, S. 1-10). Bellaria, Italy.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Weber, K., & Alcock, L. (2013). On Mathematicians' Different Standards When Evaluating Elementary Proofs. *Topics in Cognitive Science, 5*(2), 270-282.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der KMK vom 18.10. 2012). Wolters Kluwer München.

Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2022). Students' Knowledge About Proof and Handling Proof. In C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez, & N. Planas (Hrsg.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, S. 27-34). Alicante, Spain: PME.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(1), 30-54.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 4*(2).