

VARGYAS, Emese  
Leipzig

## Auf dem Weg zu Lösungen: Problemlösen im Bereich der Elementargeometrie

### 1. Motivation

Elementargeometrische Fragestellungen bieten eine hervorragende Gelegenheit, das Problemlösen zu lernen und zu üben. Obwohl das Kennen und die bewusste Anwendung ausgewählter heuristischer Verfahren fest in den Lehrplänen der einzelnen Bundesländer verankert sind (z. B. Sächsisches Staatsministerium für Kultus 2021), haben viele Lernende Schwierigkeiten, diese in konkreten Situationen anzuwenden. Solche Hindernisse treten in allen mathematischen Bereichen auf, am häufigsten jedoch in der Geometrie. Berechnungsaufgaben können noch relativ einfach gelöst werden, problematisch wird es, wenn es um Begründungen oder Beweise geht, die nicht immer auf Anhieb erkennbar sind. Der vorliegende Beitrag zielt darauf ab, die bei der Bearbeitung einer Wettbewerbsaufgabe gewonnenen diesbezüglichen Erfahrungen darzustellen.

### 2. Problemstellung

Ausgangspunkt der weiteren Untersuchungen bildet folgende Geometrieaufgabe des ungarischen Mathematikwettbewerbs "László Kalmár" aus dem Jahr 2008 (Juhász, 2013, S. 37):

Sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck und  $H$  dessen Höhenschnittpunkt so, dass  $|CH| = |AB|$ . Bestimme das Maß des Winkels  $ACB$ .

Diese Aufgabe wurde sowohl Schüler\*innen der 8. Klasse (20 Personen) als auch angehenden Lehrkräften (18 Personen) gestellt. Unabhängig von der Altersstufe, haben alle Proband\*innen ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  betrachtet (siehe Bild).

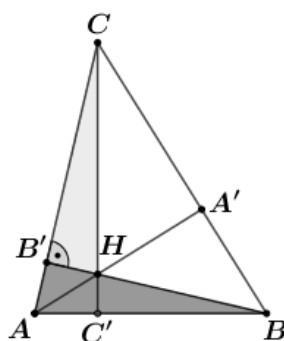


Abb. 1: Aufgabe

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Fünf Schüler\*innen und sieben Studierende konnten die Aufgabe richtig lösen. Alle korrekten Lösungen folgten demselben Ansatz, indem die Kongruenz der Dreiecke  $CB'H$  und  $BB'A$  (gemäß WSW oder SsW) festgestellt wurde. Daraus ergab sich, dass  $BB'C$  ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist, wodurch der gesuchte Winkel 45 Grad beträgt.

Einige Proband\*innen, die die Kongruenz nicht erkannt hatten, versuchten, in den vorhandenen rechtwinkligen Dreiecken den Satz des Pythagoras anzuwenden, um bestimmte Seitenlängen zu berechnen und anschließend mittels Kosinussatzes den Winkel bei  $C$  zu bestimmen. Diese Versuche führten jedoch zu keinem Ergebnis, da die Berechnungen so kompliziert wurden, dass sie nicht abgeschlossen werden konnten. Es sei darauf hingewiesen, dass die Aufgabe auch ChatGPT vorgelegt wurde. Der zunächst erfolglose Ansatz ähnelte den Versuchen, den Satz des Pythagoras bzw. den Kosinussatz anzuwenden.

Ein leistungsstarker Schüler bemerkte: "Ich kann die Aufgabe nicht lösen, aber ich kenne ein Dreieck, das die Voraussetzungen erfüllt: Es handelt sich um das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck, bei dem der Winkel  $ACB$  45 Grad beträgt. Ist das immer der Fall?"

Ausgehend von dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck gestaltete sich der Übergang von diesem Spezialfall zum allgemeinen Fall als recht langwierig. Weder die Schüler\*innen noch die Studierenden konnten einen Zusammenhang zwischen dem speziellen und dem allgemeinen Fall erkennen. Sie untersuchten die beiden Fälle (siehe Abb. 2) meist nach Gemeinsamkeiten, jedoch ohne Erfolg.

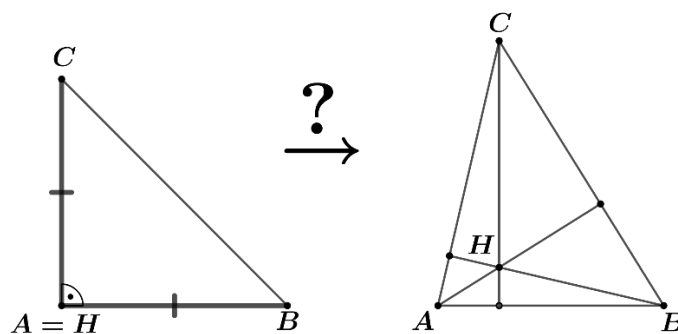
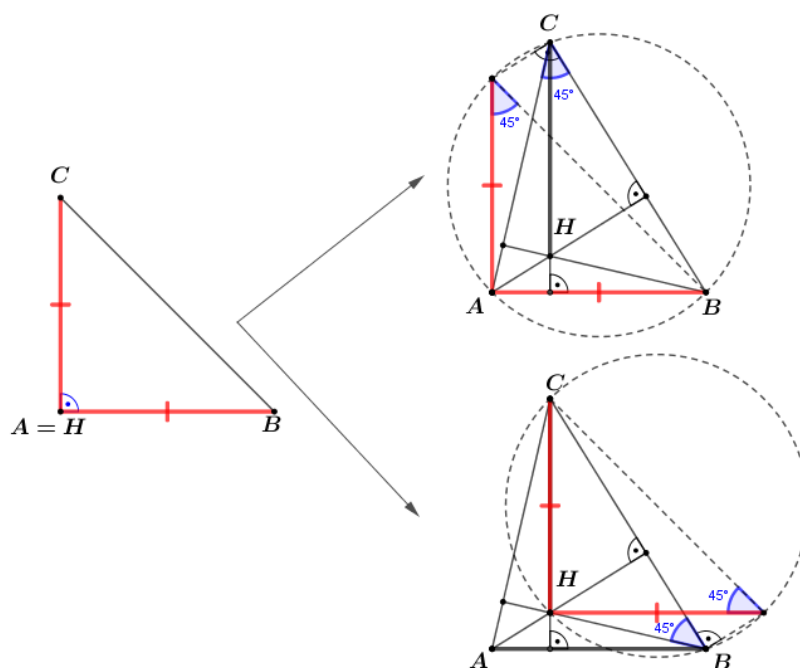


Abb. 2: Verallgemeinerung

Die Frage nach dem Übergang von einem Zustand in den anderen - im Sinne des funktionalen Denkens (Schwank, 2003) - führte jedoch zu folgenden Lösungsansätzen:



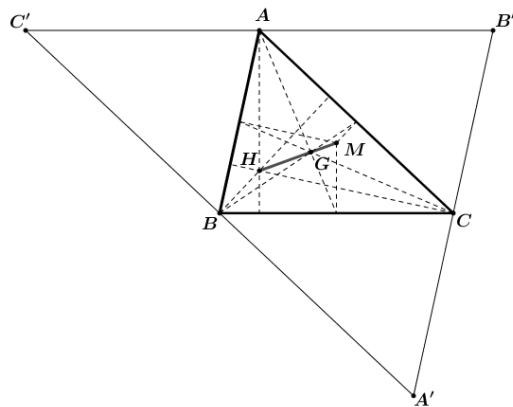
**Abb. 3:** Mögliche Übergänge

Wenn der Punkt C beliebig auf dem Umkreis des rechtwinklig-gleichschenkeligen Dreiecks bewegt wird, ergibt sich ein weiteres Dreieck, bei dem der Winkel bei C 135 Grad beträgt. Diese zweite Lösung lässt sich aus dem ursprünglich als statisch betrachteten spitzwinkligen Dreieck nicht vermuten.

### 3. Fazit

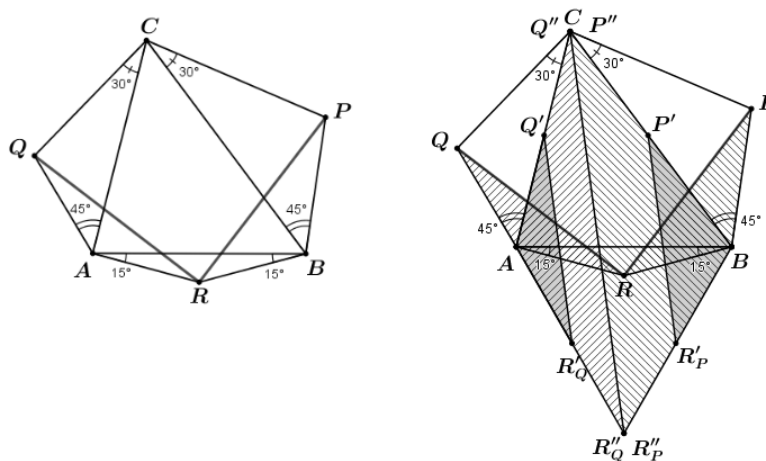
Die Suche nach möglichen Übergängen vom speziellen zum allgemeinen Fall konnte weder von den Schüler\*innen noch von den Studierenden allein bewältigt werden. Sie empfanden jedoch die gemeinsame Spurensuche mit der Lehrkraft als spannend und konnten durch gezielte Zwischenfragen nach dem nächstmöglichen Schritt für die weitere Untersuchung immer wieder motiviert werden. Die Schüler\*innen waren etwas mehr interessiert als die Studierenden, was wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, dass die Idee des Spezialfalls in der Gruppe der Schüler\*innen entstanden ist und sie daher stärker an einer Erklärung interessiert waren. Es besteht nicht die Absicht, diese von manchen als langwierig empfundene Herangehensweise als Methode vorzuschreiben. Vielmehr sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie die Ideen der Proband\*innen aufgegriffen und gemeinsam mit ihnen zu einer Lösung entwickelt werden können. Gleichzeitig bietet diese Vorgehensweise eine gute Gelegenheit zur Förderung des zuvor erwähnten funktionalen Denkens.

Die interessierte Leserschaft wird eingeladen, zu untersuchen, warum Abbildung 4 einen "funktionalen" Beweis für die Euler-Gerade darstellt. (Duican, 1987, S. 124).



**Abb. 4:** Euler-Gerade

Abbildung 5 zeigt eine IMO-Aufgabe aus dem Jahr 1975, einschließlich einer "funktionalen" Lösung (Glaeser, 1986, S. 121). Gegeben sei das Dreieck  $ABC$ . Die Dreiecke  $BPC$ ,  $CQA$  und  $ARB$  werden gemäß der links dargestellten Zeichnung konstruiert. Es soll gezeigt werden, dass die Strecken  $QR$  und  $PR$  gleich lang sind und orthogonal zueinander liegen.



**Abb. 5:** IMO-Aufgabe

## Literatur

- Duican, L. & Duican, I. (1987). *Transformări geometrice. Culegere de probleme*. Editura științifică și enciclopedică.
- Glaeser, G. (1986). The crisis of geometry teaching. In Morris, R. (Hrsg.), *Studies in mathematics education. Teaching of geometry*, 5, 107-122.
- Juhász, P. (Hrsg.) (2013). *Országos matematikai verseny. 5-8. Évfolyam, 2007-2012. Feladatok és megoldások*. <https://mek.oszk.hu/15000/15024/15024.pdf>
- Sächsisches Staatsministerium für Kultus (2021). *Lehrplan Gymnasium Mathematik*. <https://www.schulportal.sachsen.de/lplandb/>
- Schwank, I. (2003). Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *ZDM* 35 (3), 70-78.