STEIB, Nicole; BÜCHTER, Theresa; KRAUSS Stefan; EICHLER, Andreas; BINDER, Karin; BÖCHERER-LINDER, Katharina & VOGEL, Markus
Regensburg, Kassel, Regensburg, Kassel, München, Freiburg, Heidelberg

Bayesianisches Denken trainieren: Ein Schlüssel für bessere Entscheidungen

1. Einleitung

Bayesianisches Denken – die Fähigkeit, Wahrscheinlichkeiten basierend auf neuen Informationen zu aktualisieren – ist grundlegend für fundierte Entscheidungen in vielen unsicheren Situationen: Ob bei der Bewertung eines positiven Corona-Tests oder der Interpretation von Beweislagen im Gerichtssaal, der korrekte Umgang mit Wahrscheinlichkeiten beeinflusst unseren Alltag und unser berufliches Handeln maßgeblich (Gigerenzer, 2014). Dennoch fällt es vielen Menschen schwer, Bayesianische Probleme zu lösen. Ein klassisches Beispiel:

- Nehmen wir an, die Wahrscheinlichkeit beträgt 5%, dass eine Person mit SARS-CoV-2 infiziert ist.
- Wenn eine Person mit SARS-CoV-2 infiziert ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit 96%, dass sie ein positives Testergebnis erhält.
- Wenn eine Person nicht mit SARS-CoV-2 infiziert ist, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit 2%, dass sie dennoch ein positives Testergebnis erhält.Fragestellung: Wenn eine Person ein positives Testergebnis erhält, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit SARS-CoV-2 infiziert ist?

Solche Aufgaben lassen sich mit der Formel von Bayes lösen. Doch Studien zeigen, dass nur etwa 5% der Personen eine solche Fragestellung korrekt lösen können, wenn die gegebenen Informationen (wie hier) in Wahrscheinlichkeitsangaben vorliegen (McDowell und Jacobs 2017).

2. Theoretischer Hintergrund zu hilfreichen Strategien

Wechselt man das Informationsformat von Wahrscheinlichkeiten zu natürlichen Häufigkeiten ("5%" vs. "50 von 1.000"; Gigerenzer und Hoffrage 1995; Krauss et al. 2020), können bereits ca. 25% der Versuchspersonen die Lösung korrekt bestimmen (McDowell und Jacobs 2017). Neben dem Wechsel des Informationsformats hat sich auch die Nutzung geeigneter Visualisierungen als hilfreiche Strategie für das Bayesianische Denken herausgestellt (McDowell und Jacobs, 2017). Dabei sind wiederum Visualisierungen, die auf natürlichen Häufigkeiten basieren, unterstützender als solche, die auf

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Wahrscheinlichkeiten basieren (Binder et al. 2015). Die aus dem Stochastikunterricht bekannten Visualisierungen - reguläre Baumdiagramme und Vierfeldertafeln - eignen sich allerdings weniger gut als der so genannte Doppelbaum und das Einheitsquadrat, denn 1) beide Visualisierungen (Doppelbaum und Einheitsquadrat) führten in empirischen Studien zu höheren Lösungsraten als das reguläre Baumdiagramm und 2) im Gegensatz zur Vierfeldertafel können sowohl im Doppelbaum als auch im Einheitsquadrat die gegebenen Wahrscheinlichkeiten sowie gleichzeitig die unterstützenden natürlichen Häufigkeiten dargestellt werden (Büchter et al., 2022). Mit diesen beiden Visualisierungen – basierend auf natürlichen Häufigkeiten – steigen bei Bayesianischen Aufgaben die Performanzen der Versuchspersonen bis zu 60% (Böcherer-Linder & Eichler, 2019; Binder et al., 2023). Diese beiden Strategien (natürliche Häufigkeiten und Visualisierungen) fördern das Bayesianische Denken bereits ohne vorherige Instruktion. Da im schulischen und beruflichen Alltag die Informationen jedoch häufig weder in natürlichen Häufigkeiten noch visualisiert vorliegen, ist ein gezieltes Training erforderlich, um zu vermitteln, wie man mit den typischerweise gegebenen Wahrscheinlichkeiten umgehen und Bayesianische Fragestellungen bearbeiten kann. Dabei ist von Interesse, 1) welche Elemente eines Trainings für ein erfolgreiches Lernen ausschlaggebend sind und 2) für welche Zielgruppen welche Art von Training besonders geeignet ist.

3. Methode

In einem Prä-Post-Follow-Up-Design mit *N*=515 Studierenden wurden pro Domäne (Medizin und Jura) zwei „Level-2-Trainings“ (Kombination der Strategien „natürliche Häufigkeiten“ und Visualisierung), zwei „Level-1-Trainings“ (nur „natürliche Häufigkeiten“ oder nur Visualisierung) sowie eine „Level-0“-Wartekontrollgruppe implementiert, um Gelingensbedingungen für Bayesianisches Denken ableiten zu können (Abbildung 1).

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="3">Tag 1</th><th>Tag 2
(nach ca. 8 Wochen)</th></tr>
<tr><th></th><th></th><th>Prätest</th><th>Training</th><th>Posttest</th><th>Follow-up-Test</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Level-2 Trainings</td><td>Doppelbaum</td><td rowspan="5">• Konventionelles Bayesianisches Denken (Calculation)
• Erweitertes Bayesianisches Denken (Communication; Covariation)</td><td rowspan="4">Training zum
• Konventionellen Bayesianischen Denken (Calculation)
• Erweiterten Bayesianischen Denken (Calculation)</td><td rowspan="5">• Konventionelles Bayesianisches Denken (Calculation)
• Erweitertes Bayesianisches Denken (Communication; Covariation)</td><td rowspan="5">• Konventionelles Bayesianisches Denken (Calculation)
• Erweitertes Bayesianisches Denken (Communication; Covariation)</td></tr>
<tr><td>Einheitsquadrat</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Level-1 Trainings</td><td>Natürliche Häufigkeiten</td></tr>
<tr><td>Curricular (Wahrscheinlichkeitsbaum)</td></tr>
<tr><td>Level-0</td><td>Wartekontrollgruppe</td><td>kein Training
(arbeiteten an nicht studienrelevanten Aufgaben)</td></tr>
</table>

Abb. 1: Studiendesign TrainBayes (Domänen: Medizin und Jura)

Neben den in Abbildung 1 dargestellten Messungen in Prä-, Post- und Follow-Up-Test, wurde auch die Mathematik-Abiturnote der Teilnehmenden erfasst und als Prädiktor (neben der Gruppenzugehörigkeit) für mögliche Lernzuwächse aufgenommen.

4. Ergebnisse & Diskussion

Das Hauptergebnis der Studie ist, dass das Training mit dem üblicherweise im Schulunterricht nicht genutzten Doppelbaum allen anderen Trainings überlegen ist (Steib et al., 2025). Der Posttest zeigt, dass die Performanz bei authentischen Bayesianischen Aufgaben im Wahrscheinlichkeitsformat kurzfristig von 13% auf 70% ansteigt (vgl. Abbildung 2). Auch mittelfristig (Follow-Up) ist ein Lernerfolg mit diesem Training zu beobachten (56% Lösungsrate). In einem gemischten linearen Modell ist der Zuwachs in der Performanz mit dem Doppelbaum-Training allen anderen Trainings sowohl kurzfristig als auch mittelfristig signifikant überlegen. Überraschenderweise unterscheidet sich der Lernerfolg beim Einheitsquadrat (dem zweiten Level-2-Training) nicht signifikant von dem der Level-1-Trainings.

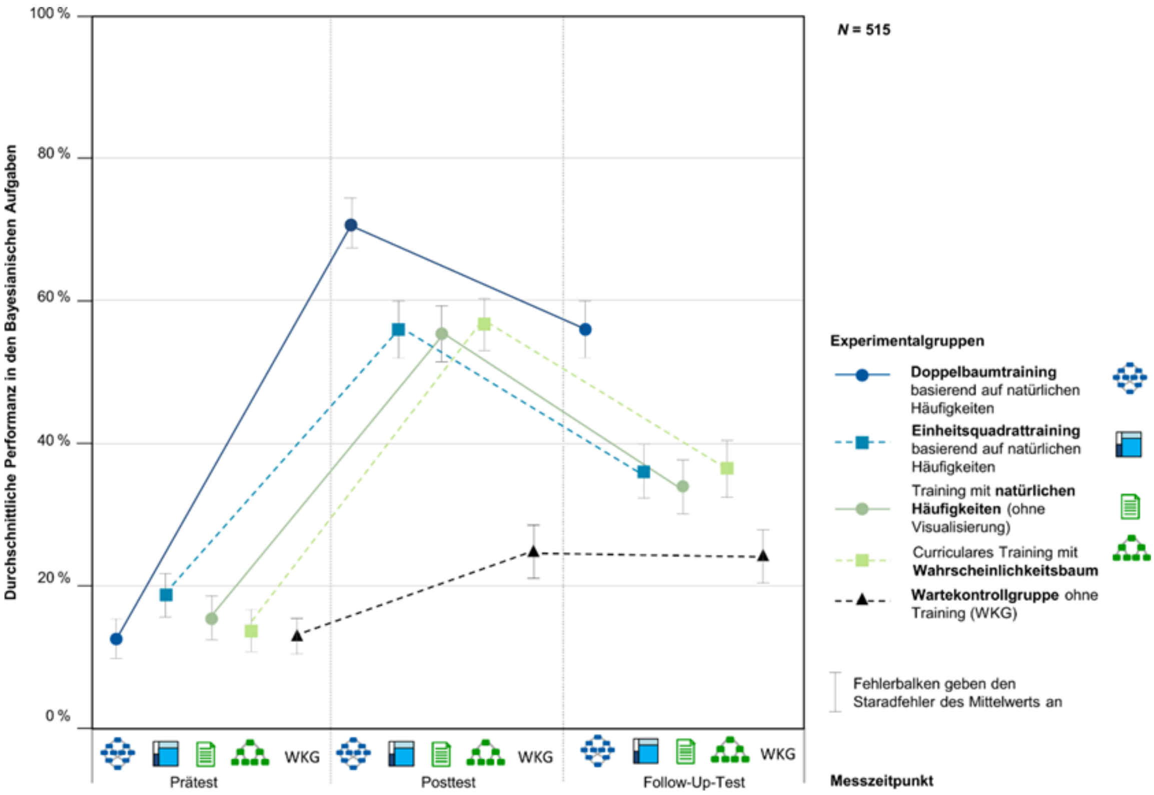

Abb. 2 (adaptiert aus Steib et al., 2025): Ergebnisse über beide Domänen für die fünf Experimentalbedingungen
(Anmerkung: Die Experimentalbedingungen pro Messzeitpunkt sind versetzt dargestellt, was aber keine zeitliche Verzögerung zwischen den Bedingungen impliziert)

Weiterhin konnte festgestellt werden, dass Studierende mit höheren mathematischen Fähigkeiten grundsätzlich auch größere Lernerfolge erzielen. Diesbezüglich zeigt sich allerdings eine Interaktion mit den verschiedenen Trainingsgruppen: Zumindest kurzfristig schneidet der Doppelbaum bei Versuchspersonen mit unterschiedlichen mathematischen Kompetenzen ähnlich gut ab, wohingegen der Lernzuwachs beim Einheitsquadrat-Training und Wahrscheinlichkeitsbaum-Training besonders stark von vorherigen mathematischen Leistungen abzuhängen scheint.

Insgesamt stellen die Ergebnisse dieser Trainingsstudie daher das übliche Vorgehen im schulischen Stochastikunterricht zu diesem Thema in Frage: Dort wird sehr häufig mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum gearbeitet, welcher laut unserer Studie aber zu schlechteren Lernerfolgen führt und stärker von vorherigen Leistungen abhängt als ein Training mit Häufigkeitsdoppelbaum.

Literatur

Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information - an empirical study on tree diagrams and 2 × 2 tables. *Frontiers in Psychology*, *6*, 1186. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186

Binder, K., Steib, N. & Krauss, S. (2023). Von Baumdiagrammen über Doppelbäume zu Häufigkeitsnetzen – kognitive Überlastung oder didaktische Unterstützung? *Journal für Mathematik-Didaktik*, *44*(2), 471-503. https://doi.org/10.1007/s13138-022-00215-9

Böcherer-Linder, K. & Eichler, A. (2019). How to improve performance in Bayesian inference tasks: A comparison of five visualizations. *Frontiers in Psychology*, *10*, 267. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.00267

Büchter, T., Steib, N., Böcherer-Linder, K., Eichler, A., Krauss, S., Binder, K., & Vogel, M. (2022). Designing visualizations for Bayesian problems according to multimedia principles. *Education Sciences*, *12*(11), 739. https://doi.org/10.3390/educsci12110739

Gigerenzer, G. (2014). Das Einmaleins der Skepsis: über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken. eBook Berlin Verlag.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, *102*(4), 684–704. https://doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684

McDowell, M. & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological Bulletin*, *143*(12), 1273–1312. https://doi.org/10.1037/bul0000126

Steib, N., Büchter, T., Eichler, A., Binder, K., Krauss, S., Böcherer-Linder, K., Vogel, M. & Hilbert, S. (2025). How to teach Bayesian reasoning: An empirical study comparing four different probability training courses. *Learning and Instruction*, *95*, 102032. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2024.102032